PARADOJAS, ACERTIJOS Y DEMOSTRACIONES INVÁLIDAS

Trencaclosques, Jocs i Matematiques
Roberto Muñoz Sánchez

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

La Real Academia Española define en su edición *on-line* las Matemáticas (del griego μάθημα, *máthema*: ciencia, conocimiento, aprendizaje, μαθηματικός, *mathematikós*: amante del conocimiento) como la "*ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones*", así como su evolución en el tiempo. De esta definición podría deducirse que las Matemáticas no nos incumben porque son "abstractas", mientras que nosotros, los humanos, somos "reales". Sin embargo es más que evidente que vivimos las Matemáticas en el día a día durante toda nuestra existencia: horarios, calendarios, dinero, precios,…

Aunque la Matemática sea la supuesta "Reina de las Ciencias", algunos matemáticos no la consideran una ciencia natural. Principalmente, los matemáticos definen e investigan estructuras y conceptos abstractos por razones puramente internas a la Matemática, debido a que tales estructuras pueden proveer, por ejemplo, una generalización elegante, o una herramienta útil para cálculos frecuentes. Además, muchos matemáticos consideran la Matemática como una forma de arte en vez de una ciencia práctica o aplicada. Sin embargo, las estructuras que los matemáticos investigan frecuentemente sí tienen su origen en las ciencias naturales, y muchas veces encuentran sus aplicaciones en ellas, particularmente en la Física.

La Matemática es considerada un arte, pero también una ciencia de estudio. Informalmente, y como ya se ha comentado antes, se puede decir que es el estudio de los "números y símbolos". Es decir, es la investigación de estructuras abstractas definidas a partir de axiomas, utilizando la lógica y la notación matemática. Es también la ciencia de las relaciones espaciales y cuantitativas. Se trata de relaciones exactas que existen entre cantidades y magnitudes, y de los métodos por los cuales, de acuerdo con estas relaciones, las cantidades buscadas son deducibles a partir de otras cantidades conocidas o presupuestas.

No es infrecuente encontrar a quien describe la Matemática como una simple extensión de los lenguajes naturales humanos, que utiliza una gramática y un vocabulario definidos con extrema precisión, cuyo propósito es la descripción y exploración de relaciones conceptuales y físicas. Recientemente, sin embargo, los avances en el estudio del lenguaje humano apuntan en una dirección diferente: los lenguajes naturales (como el español y el francés) y los lenguajes formales (como la Matemática y los lenguajes de programación) son estructuras de naturaleza básicamente diferente.

Pero dejando a un lado los formalismos, también se pueden tomar las Matemáticas como retos y juegos y, profundizando aún más en ellas, podemos "disfrazar" los diferentes axiomas que se definen para alterar las Matemáticas y crear situaciones imposibles, perfectamente y sencillamente demostrables gracias a las herramientas (erróneas pero ocultas) que nos hemos creado.

De este modo encontramos la cara amable y curiosa de esta ciencia, con acertijos que nos hacen ver más allá de lo que tenemos delante, paradojas que cambian nuestros puntos de vista sobre situaciones varias y demostraciones que harían que más de uno se tirara de los pelos.

A continuación se presentan estas curiosidades matemáticas con algunos ejemplos que no nos dejaran indiferentes.

2. PARADOJAS

Una paradoja es una declaración en apariencia verdadera que conlleva a una auto-contradicción lógica o a una situación que contradice el sentido común. Dicho de otro modo, una paradoja es 'lo opuesto a lo que uno considera cierto'. La identificación de paradojas basadas en conceptos en apariencia razonables y simples ha impulsado importantes avances en la ciencia, filosofía y las matemáticas.

Entre los temas recurrentes en las paradojas se encuentra la auto-referencia directa e indirecta, la infinitud, definiciones circulares y confusión de niveles de razonamiento.

La etimología de la palabra paradoja proviene de comienzos del período renacentista europeo o los acelerados avances científicos de Eurasia luego del 1500. Las primeras formas de la palabra aparecieron como la palabra del latín *paradoxum*, pero es encontrada también en textos griegos como *paradoxon*. Se encuentra compuesta por el prefijo *para-*, que significa "contrario a" o "alterado", en conjunción con el sufijo *doxa*, que significa "opinión". La paradoja del mentiroso y otras paradojas similares ya se estudiaron en la edad media bajo el título *insolubilia*.

No todas las paradojas son iguales. Por ejemplo, la paradoja del cumpleaños puede ser definida mejor como una sorpresa que como una paradoja, mientras que la resolución de la paradoja de Curry es aún un tema importante de debate.

2. 1. TIPOS DE PARADOJAS Y EJEMPLOS

Las paradojas se pueden clasificar de diferentes modos, aunque es habitual encontrarlas divididas según su veracidad y condiciones o según el campo al que pertenecen.

2. 1. 1. SEGÚN SU VERACIDAD

En el primer grupo se pueden encontrar paradojas que sólo parecen serlo (lo que afirman es realmente cierto o falso), otras se contradicen, por lo que se consideran verdaderas paradojas, mientras que otras dependen de su interpretación para ser o no paradójicas.

Paradojas verídicas

Son resultados que aparentan tal vez ser absurdos a pesar de ser demostrable su veracidad. A esta categoría pertenecen la mayor parte de las paradojas matemáticas.

- Paradoja del cumpleaños: ¿cuál es la probabilidad de que dos personas en una reunión cumplan años el mismo día?
- Paradoja de Galileo: a pesar de que no todos los números son números cuadrados, no hay más números que números cuadrados.
- Paradoja del hotel infinito: un hotel de infinitas habitaciones puede aceptar más huéspedes, incluso si está lleno.

Antinomias

Son paradojas que alcanzan un resultado que se autocontradice, aplicando correctamente modos aceptados de razonamiento. Muestran fallos en un modo de razón, axioma o definición previamente aceptados. Por ejemplo, la Paradoja de Grelling-Nelson señala problemas genuinos en nuestro modo de entender las ideas de verdad y descripción. Muchos de ellos son casos específicos, o adaptaciones, de la Paradoja de Russell.

- Paradoja de Russell: ¿Existe un conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos?
- Paradoja de Curry: "Si no me equivoco, el mundo se acabará en diez días"
- Paradoja del mentiroso: "Esta oración es falsa"
- Paradoja de Grelling-Nelson: ¿Es la palabra "heterológico", que significa "que no describe a sí mismo", heterológica?

Antinomias de definición

Estas paradojas se basan en definiciones ambiguas, sin las cuales no alcanzan una contradicción.

- Paradoja sorites: ¿En qué momento un montón deja de serlo cuando se quitan granos de arena?
- Paradoja de Teseo: Cuando se han reemplazado todas las partes de un barco, ¿sigue siendo el mismo barco?

Paradojas condicionales

Sólo son paradójicas si se hacen ciertas suposiciones. Algunas de ellas muestran que esas suposiciones son falsas o incompletas.

- Paradoja del viaje en el tiempo: ¿Qué pasaría si viajas en el tiempo y matas a tu abuelo antes de que conozca a tu abuela?

2.1.2. SEGÚN SU CAMPO

Todas las paradojas se consideran relacionadas con la lógica, que antiguamente se consideraba parte de la filosofía, pero que ahora se ha formalizado y se ha incluido como una parte importante de la matemática. A pesar de ello, muchas paradojas han ayudado entender y avanzar algunas áreas concretas del conocimiento.

Paradojas en Matemática / Lógica

- Paradoja de Banach-Tarski: es posible fabricar un rompecabezas tridimensional de un total de ocho piezas, las cuales, combinadas de una determinada manera, formarían una esfera completa y rellena (sin agujeros) y, combinadas de otra manera, formarían dos esferas rellenas (sin agujeros) del mismo radio que la primera.

Paradojas sobre la Probabilidad y la Estadística

- Paradoja del cumpleaños: ¿cuál es la probabilidad de que dos personas en una reunión cumplan años el mismo día?
- Problema de Monty Hall: *Y tras la puerta número dos...* (Cómo la probabilidad no es intuitiva).
- Fenómeno Will Rogers sobre el concepto matemático de la media: trata sobre la media o mediana de dos conjuntos cuando uno de sus valores es intercambiado entre ellos, dando lugar a un resultado aparentemente paradójico - Por ejemplo: Si se fuera alguien rico de alguna región rica a una región pobre, que aumentara la riqueza media en ambas regiones.

Paradojas sobre Lógica

A pesar de que todas las paradojas se consideran relacionadas con la lógica, hay algunas que afectan directamente a sus bases y postulados tradicionales.

Las paradojas más importantes relacionadas directamente con el área de la lógica son las antinomias, como la paradoja de Russell, que muestran la inconsistencia de las matemáticas tradicionales. A pesar de ello, existen paradojas que no se contradicen y que han ayudado a avanzar en conceptos como demostración y verdad.

- Paradoja del actual rey de Francia: ¿es cierta una afirmación sobre algo que no existe?
- Paradoja del cuervo (o cuervos de Hempel): una manzana roja incrementa la probabilidad de que todos los cuervos sean negros.

Paradojas sobre el infinito

El concepto matemático de infinito, al ser contrario a la intuición, ha generado muchas paradojas desde que fue formulado.

- Paradoja de Galileo: a pesar de que no todos los números son números cuadrados, no hay más números que números cuadrados.
- Paradoja del hotel infinito: un hotel de infinitas habitaciones puede aceptar más huéspedes, incluso si está lleno.
- Conjunto de Cantor: cómo quitar elementos de un conjunto y que siga teniendo el mismo tamaño.
- Paradojas de Zenón: unas paradojas falsas que tratan de utilizar el infinito para demostrar que el movimiento no puede existir.

Paradojas en Física

- Paradoja de Olbers: ¿Por qué, si hay infinitas estrellas, el cielo es negro?
- Paradoja de los gemelos: Cuando uno de los hermanos regresa de un viaje a velocidades cercanas a las de la luz descubre que es mucho más joven que su hermano.
- Paradoja de Fermi: Si el Universo estuviera poblado por civilizaciones avanzadas tecnológicamente, ¿dónde están?
- Paradoja de Schrödinger.

Paradojas en Economía

- Paradoja del ahorro: Si todo el mundo trata de ahorrar durante una recesión, la demanda agregada caerá y los ahorros totales de la población serán más bajos.
- Paradoja de Allais: En cierto tipo de apuestas, aún cuando la gente prefiere la certeza a la incertidumbre si se plantea de manera diferente el problema preferirán la incertidumbre que antes rechazaban.
- Paradoja del valor (o paradoja del diamante y el agua), ¿Por qué es más barata el agua que los diamantes, siendo que los humanos necesitan agua, y no diamantes, para sobrevivir?

Paradojas Bíblicas y religiosas

- Paradoja del "Morir para Vivir": En la Biblia enseña en varias ocasiones que es necesario morir si se quiere vivir, refiriéndose al cambio radical de vida necesario para poder ser parte del Reino de Dios que predica Jesucristo.

- Paradoja religiosa: La idea de un solo dios omnipotente, humilde y benevolente sobre los humanos no existe, porque no puede todo, y si puede, no quiere, y si no quiere entonces no es humilde y si no es humilde mucho menos es Benevolente.

2. 2. EL PROBLEMA DE MONTY HALL

Se trata de una paradoja estadística que se daba en un famoso programa de TV, y que consistía en lo siguiente:

El concursante en el concurso televisivo es requerido para elegir una puerta entre tres (todas cerradas), y su premio consiste en llevarse lo que se encuentra detrás de la puerta elegida. Se sabe cierto que una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Una vez que el concursante ha elegido una puerta y comunica al público y al presentador su elección, Monty (el presentador) abre una de las otras puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. En este momento se le da la opción al concursante de cambiar si lo desea de puerta (tiene dos opciones) ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?

Esa pregunta ha generado un intenso debate. Como la respuesta correcta parece contradecir conceptos básicos de probabilidad, se puede considerar como una paradoja. La respuesta se basa en suposiciones que no son obvias y que no se encuentran expresadas en el planteamiento del problema, por lo que también puede considerarse una pregunta con trampa.

La solución a este problema se basa en tres suposiciones básicas:

- que el presentador *siempre* abre una puerta,
- que la escoge entre las restantes *después* de que el concursante escoja la suya,
- y que tras ella *siempre* hay una cabra.

La probabilidad de que el concursante escoja en su primera oportunidad la puerta que oculta el coche es de 1/3, por lo que la probabilidad de que el coche se encuentre en una de las puertas que no ha escogido es de 2/3. ¿Qué cambia cuando el presentador muestra una cabra tras una de las otras dos puertas?

Una suposición errónea es que, una vez sólo queden dos puertas, ambas tienen la misma probabilidad (un 50%) de contener el coche. Es errónea ya que el presentador abre la puerta después de la elección de jugador. Esto es, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador.

Si el jugador escoge en su primera opción la puerta que contiene el coche (con una probabilidad de 1/3), entonces el presentador puede abrir cualquiera de las dos puertas. Además, el jugador pierde el coche si cambia cuando se le ofrece la oportunidad.

Pero, si el jugador escoge una cabra en su primera opción (con una probabilidad de 2/3), el presentador sólo tiene la opción de abrir una puerta, y esta es la única puerta restante que contiene una cabra. En ese caso, la puerta restante tiene que contener el coche, por lo que cambiando lo gana.

En resumen, si mantiene su elección original gana si escogió originalmente el coche (con probabilidad de 1/3), mientras que si cambia, gana si escogió originalmente una de las dos cabras (con probabilidad de 2/3). Por lo tanto, el concursante debe cambiar siempre su elección.

Este hecho curioso ocurre porque lo que muestra el presentador no afecta a la elección original, sino sólo a la otra puerta no escogida. Una vez se abre una puerta y se muestra la cabra, esa puerta tiene una probabilidad de 0 de contener un coche, por lo que deja de tenerse en cuenta. Si el conjunto de dos puertas tenía una probabilidad de contener el coche de 2/3, entonces, si una tiene una probabilidad de 0, la otra debe tener una probabilidad de 2/3. La elección, básicamente, consiste en preguntarse si prefiere seguir con la puerta original o escoger las otras dos puertas. La probabilidad de 2/3 se traspasa a la otra puerta no escogida (en lugar de dividirse entre las dos puertas restantes de modo que ambas tengan una probabilidad de 1/2) porque en ningún caso puede el presentador abrir la puerta escogida inicialmente. Si el presentador escogiese al azar entre las dos puertas con cabras (incluyendo la del concursante), abriese una de ellas y luego diese de nuevo a elegir, entonces las dos puertas restantes sí tendrían la misma probabilidad de contener el coche.

Una forma más clara de verlo es replantear el problema. Si en lugar de haber sólo tres puertas hubiese 100, y tras la elección original el presentador abriese 98 de las restantes para mostrar que tras de ellas hay cabras, si no cambiase su elección ganaría el coche sólo si lo ha escogido originalmente (1 de cada 100 veces), mientras que si la cambia, ganaría si no lo ha escogido originalmente (y por tanto es lo que resta tras abrir las 98 puertas), ¡99 de cada 100 veces!

Una explicación gráfica

Por si no se ve claro, aquí va una explicación gráfica: tenemos 3 cajas:

([?][?][?]) Antes de comenzar el juego, la probabilidad de encontrar el premio entre las tres cajas es de 3/3 (es decir el premio está dentro del grupo de las tres cajas).

Se selecciona… la 1ª.

([?]) vs ([?][?]) Ahora hay dos grupos: la caja elegida (con probabilidad 1/3 y el grupo de las otras dos cajas (con probabilidad 2/3).

Se descubre una cabra.

([?]) vs ([Cabra][?]) =1/3 vs 2/3.

¿Dónde es más probable que se encuentre el premio? ¿En la caja o entre las otras dos (aunque una esté descubierta)?

Evidentemente es más probable que esté entre las otras dos.

Se comprobará ahora con 6 cajas (cinco contienen cabra y una premio):

([?][?][?][?][?][?]) Antes de empezar hay una probabilidad 6/6 de encontrar el premio dentro del grupo.

Se selecciona una caja.

([?]) vs ([?][?][?][?][?]) Ahora hay dos grupos: la caja seleccionada (con probabilidad 1/6 y el grupo de las otras cinco cajas (con probabilidad 5/6).

¿Dónde es más probable que esté el premio, en la caja elegida (1/6) o entre las 5 restantes (5/6)?

Se descubren 4 cabras.

([?]) vs ([Cabra][Cabra][?][Cabra][Cabra])=1/6 vs 5/6.

Otra vez la misma pregunta: ¿dónde es más probable que esté el premio, en la caja inicial o entre las otras 5?

2. 3. PARADOJA DEL CUMPLEAÑOS

La paradoja del cumpleaños establece que si hay 23 personas reunidas hay una probabilidad del 50,7% de que al menos dos personas de ellas cumplan años el mismo día. Para 60 o más personas la probabilidad es mayor del 99%. Obviamente es del 100% para 367 personas (teniendo en cuenta los años bisiestos). En sentido estricto esto no es una paradoja ya que no es una contradicción lógica; es una paradoja en el sentido que es una verdad matemática que contradice la común intuición. Mucha gente piensa que la probabilidad es mucho más baja, y que hacen falta muchas más personas para que se alcance la probabilidad del 50%.

Esta teoría fue descrita en *American Mathematical Monthly* en 1938 en la teoría de *Estimación del total de población de peces en un lago* de Zoe Emily Schnabel, bajo el nombre de captura-recaptura estadística.

La clave para entender la paradoja del cumpleaños es pensar que hay muchas probabilidades de encontrar parejas que cumplan años el mismo día. Específicamente, entre 23 personas, hay 23×22/2 = 253 pares, cada uno de ellos un candidato potencial para cumplir la paradoja. Hay que entender que si usted entrase en una habitación con 22 personas, la probabilidad de que cualquiera cumpla años el mismo día que usted, no es del 50%, es mucho más baja. Esto es debido a que ahora sólo hay 22 pares posibles. El problema real de la paradoja del cumpleaños consiste en preguntar si el cumpleaños de cualquiera de las 23 personas coincide con el cumpleaños de alguna de las otras personas.

Para calcular la probabilidad aproximada que en una habitación de *n* personas, que al menos dos cumplan años el mismo día, desechando los años bisiestos y los gemelos, y asumimos que existen 365 cumpleaños que tienen la misma probabilidad. El truco es calcular primero la probabilidad de *n* cumpleaños son *diferentes*. Esta probabilidad es dada por

$$p = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$$

Porque la segunda persona no puede tener el mismo cumpleaños que el primero (364/365), la tercera personas no puede tener el mismo cumpleaños que las dos primeras (363/365), etc. Usando notación factorial, puede ser escrita como

$$p = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

Para $n \leq$ 365, y 0 para $n > 365$.

Ahora, 1 - p es la probabilidad que al menos dos personas tengan el mismo día de cumpleaños. Para $n = 23$ se obtiene una probabilidad de alrededor de 0,507.

En contraste, la probabilidad que cualquiera en una habitación de *n* personas tengan el mismo día de cumpleaños y que este sea un día concreto está dada por

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

Que para $n = 22$ sólo da alrededor de 0,059, y se necesitaría al menos una n de 253 para dar un valor de 0,5.

2. 4. PARADOJAS DE ZENÓN

Las paradojas de Zenón son una serie de paradojas o aporías, ideadas por Zenón de Elea, para demostrar que la razón no siempre tiene la respuesta. Racionalmente, una persona no puede cruzar un estadio porque primero llegará a la mitad de éste, luego a la mitad de la mitad, luego a la mitad de la mitad de la mitad y así eternamente hasta el infinito. Teóricamente, pues, racionalmente, una persona no puede cruzar un estadio, en cambio los sentidos nos dicen que sí es posible.

Pertenecen a la categoría de paradojas falsídicas, esto es, que no sólo alcanzan un resultado que aparenta ser falso, sino que además lo es. Esto se debe a una falacia en el razonamiento, producido por la falta de conocimientos sobre el concepto de infinito en la época en la que fueron formuladas.

Aquiles y la tortuga

Aquiles el guerrero decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. De este modo, Aquiles no ganará la carrera, ya que la tortuga estará siempre por delante de él.

Actualmente, se conoce que Aquiles realmente alcanzará a la tortuga, ya que una suma de infinitos términos puede tener un resultado finito. Los tiempos en los que Aquiles recorre la distancia que le separa del punto anterior en el que se encontraba la tortuga son cada vez más y más pequeños, y su suma da un resultado finito, que es el momento en que alcanzará a la tortuga.

Otra manera de plantearlo es que Aquiles puede fijar un punto de llegada que está metros delante de la tortuga en vez del punto en que ella se encuentra. Ahora, en vez de cantidades infinitas, tenemos dos cantidades finitas con las cuales se puede calcular un espacio finito de tiempo en el cual Aquiles pasará a la tortuga.

El lanzamiento de una piedra contra un árbol

Esta paradoja es una variante de la anterior. Zenón está a ocho metros de un árbol. Llegado un momento, lanza una piedra, tratando de dar al árbol. La piedra, para llegar al objetivo, tiene que recorrer antes la primera mitad de la distancia que le separa de él, es decir, los primeros cuatro metros, y tardara un tiempo (finito) en hacerlo. Una vez llegue a estar a cuatro metros del árbol, deberá recorrer los cuatro metros que le quedan, y para ello debe recorrer primero la mitad de esa distancia. Pero cuando esté a dos metros del árbol, tardará tiempo en recorrer el primer metro, y luego el primer medio metro restante, y luego el primer cuarto de metro... De este modo, la piedra nunca llegará al árbol. Es posible utilizar este razonamiento, de forma análoga, para «demostrar» que la piedra nunca llegará a salir de la mano de Zenón.

Al igual que en la paradoja de Aquiles y la tortuga, es cierto que la cantidad de distancias recorridas, (y tiempos invertidos en hacerlo) es infinita, pero su suma es finita y por tanto la piedra llegará al árbol.

La paradoja de la piedra puede ser planteada matemáticamente usando series infinitas. Las series infinitas son sumatorias cuyo término variante (que sólo puede tomar valores pertenecientes al conjunto de números naturales) va hasta el infinito. Como introducción al concepto de serie, se muestran un par de series sencillas y luego se aplica esa formulación a la paradoja de Zenón.

Para sumar todos los números desde 1 a infinito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

Para sumar todos los números al cuadrado desde 1 a infinito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 + \ldots = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots$$

Para plantear una serie que modele la paradoja de la piedra se hace una serie que sume la mitad, luego la mitad de la mitad, luego la mitad de la mitad de la mitad y así, hasta el infinito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$$

La serie que se plantea es una serie geométrica, por lo que su suma puede ser calculada con la siguiente fórmula:

$$\text{Suma} = a/(1\text{-}r)$$

En el sumatorio de la paradoja de Zenón, «a» es ½ y «r» es la razón de incremento (producto), que es ½. Sustituyendo esos valores en la fórmula de suma tengo:

$$\text{Suma}=\frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

Entonces se tiene que la suma de la mitad de «algo» más la mitad de la mitad de «algo» y así sucesivamente me da 1 «algo» completo. Esto también es aplicable a la paradoja, la mitad de la distancia, más la mitad de la mitad de la distancia y así sucesivamente da como resultado la distancia entera. Por lo tanto se concluye que, recorriendo infinitas mitades es posible recorrer toda la distancia.

La paradoja de la flecha

En esta paradoja, se lanza una flecha. En cada momento en el tiempo, la flecha está en una posición específica, y si ese momento es lo suficientemente pequeño, la flecha no tiene tiempo para moverse, por lo que está en reposo durante ese instante. Ahora bien, durante los siguientes periodos de tiempo, la flecha también estará en reposo por el mismo motivo. De modo que la flecha está siempre en reposo: el movimiento es imposible.

Un modo de resolverlo es observar que, a pesar de que en cada instante la flecha se percibe como en reposo, *estar en reposo* es un término relativo. No se puede juzgar, observando sólo un instante cualquiera, si un objeto está en reposo. En lugar de ello, es necesario compararlo con otros instantes adyacentes. Así, si lo comparamos con otros instantes, la flecha está en distinta posición de la que estaba antes y en la que estará después. Por tanto, la flecha se está moviendo.

Otra variante de las paradojas de Zenón se encuentra en el siguiente ejemplo:

Un gusanito en equilibrio se desplaza sobre un elástico de un kilómetro de largo. El gusano avanza a la velocidad de un centímetro por segundo. Después del primer segundo, el elástico se alarga en un kilómetro. Al segundo siguiente, el elástico se vuelve a alargar otro kilómetro (ahora mide tres kilómetros) y así consecutivamente. ¿Llegará el gusano a la otra punta del elástico?

2. 5. PARADOJA DEL MENTIROSO

Es una famosa y antigua paradoja que está relacionada con la lógica y la filosofía. Muestra que es posible construir oraciones perfectamente correctas según las reglas gramaticales y semánticas pero que pueden no tener un valor de verdad según la lógica tradicional.

Existen diversos ejemplos:

- Se atribuye a Epeménides haber afirmado:" Todos los cretenses son mentirosos". Sabiendo que el mismo era cretense, ¿decía Epeménides la verdad?
- Sea la frase: "Esta frase es falsa.". Si la frase es falsa, es falso que "Esta frase es falsa.", es decir, la frase es verdadera. Si en cambio la frase es verdadera, es cierto que "Esta frase es falsa.", es decir, la frase es falsa.
- “La oración posterior es cierta” y “La oración anterior es falsa”.

2. 6. OTRAS PARADOJAS

- Si en una peluquería se ve el cartel:" yo afeito a quienes no se afeitan a si mismos, y solamente a estos". ¿quién afeita al barbero?
- Un hombre es condenado a muerte. Se le dice que en el transcurso de los siguientes 7 días, a la medianoche, sorpresivamente será ejecutado. El hombre razona: no seré ejecutado la noche del ultimo día, porque inmediatamente después de la medianoche del día anterior, yo sabría que moriría la noche siguiente, y en tal caso la ejecución no sería sorpresiva; descartado el último día, tampoco será la anteúltima noche, porque entonces dos días antes de cumplirse el plazo de 7 días, yo sabría que la noche siguiente me iban a ejecutar, y no habría sorpresa... De ese modo el hombre va descartando todos los días, hasta que llega a la conclusión de que no va a ser ejecutado. Sorpresivamente, al cuarto día el hombre es ejecutado.
- Sea la frase: "Dios existe o esta frase es falsa.". La frase es una disyunción, formada por dos partes; la parte p1 es "Dios existe"; la parte p2 es "esta frase es falsa"; la frase completa es "p1 ó p2", donde ó simboliza la disyunción. La frase es cierta cuando p1 ó p2 (o ambas) lo son; es falsa cuando p1 y p2 (ambas) lo son. Supongamos que la frase es falsa; en ese caso p1 y p2 deben ser falsas; pero p2 es "esta frase es falsa", que resultaría cierta; por lo tanto, la frase no puede ser falsa. En consecuencia debe ser verdadera; en ese caso p1 ó p2 deben ser verdaderas;

pero p2 es "esta frase es falsa", que resulta una afirmación falsa; al ser p2 falsa, siendo la frase completa verdadera, debe ser p1 cierta; es decir, Dios existe.

3. ACERTIJOS

Los acertijos son afirmaciones o sentencias difíciles de entender. Se consideran pasatiempos o juegos que consisten en hallar la solución de un enigma o encontrar el sentido oculto de una frase. Son similares a las adivinanzas, si bien éstas, generalmente, tienen un enunciado en rima y van dirigidas a públicos infantiles.

Para resolver los acertijos más comunes hay que hacer uso de la imaginación y la capacidad de deducción. La resolución tiene que darse con el mero planteamiento del enunciado por lo que no se permite realizar preguntas.

3. 1. TIPOS DE ACERTIJOS

Hechos atípicos

Los más comunes, reflejan situaciones en las que se ha producido un hecho o un resultado atípico y hay que averiguar la causa. He aquí algunos de los muchos ejemplos existentes (Atención: contiene soluciones):

- Un hombre aparece ahorcado en su celda sin ningún apoyo bajo sus pies. La puerta está cerrada por dentro, así como la ventana y no existe otra salida. No hay ningún otro mueble en la habitación. ¿Cómo lo ha hecho?

  [*Solución: se subió a un bloque de hielo que se convirtió en agua que, a su vez, se evaporó.*]

- Un puente aguanta solamente mil kilos de peso, a partir de los cuales se hunde irremisiblemente. Un camión pesa exactamente mil kilos cuando entra en el puente. A mitad de recorrido, una pluma se posa suavemente sobre él pero el puente no se hunde. ¿Por qué?

  [*Solución: ha consumido parte de su gasolina por lo que pesa menos que cuando entró.*]

- Al apagar un incendio forestal, descubren el cuerpo calcinado de un buzo. ¿Por qué?

  [*Solución: el hidroavión que recogió agua del lago para apagar el incendió lo enganchó y lo arrojó sobre el bosque.*]

- ¿Cuántos surcos tiene un disco de audio de vinilo?

  [*Solución: la respuesta correcta es 2, uno por cada cara.*]

- Un piloto tiene una misión. Debe volar con su avión y soltar una bomba sobre un punto determinado. Todo el aparato ha sido revisado y funciona a la perfección. Al llegar al destino, acciona los mandos pero la bomba no cae. ¿Por qué?

  [*Solución: avión vuela boca arriba.*]

- Un señor vive en el 8º piso de su casa. Todos los días sube en ascensor hasta el cuarto y, luego, por las escaleras hasta el 8º. ¿Por qué?

[*Solución: el señor es enano y sólo llega a pulsar el cuarto.*]

- Aparecen tres mujeres en traje de baño. Una está contenta pero llora. Las otras dos, están tristes pero sonríen. ¿Por qué?

  [*Solución: se trata de un concurso de belleza; la que ha ganado llora, las que han perdido la felicitan sonriendo.*]

Con trampa y juego de palabras

Algunos acertijos son simples juegos de entretenimiento que encierran una pequeña trampa consistente en expresiones con doble significado o juegos de palabras. Su ventaja es que son breves y no necesitan anuncio previo por lo que se pueden plantear en cualquier momento de una conversación. Ejemplos (Atención: contienen soluciones):

- Este banco está ocupado por un padre y un hijo, el padre se llama Juan y el hijo se lo he dicho.

  [*Solución: Esteban o José.*]

- ¿Cuántos albaricoques serías capaz de comerte en ayunas?

  [*Solución: Uno. El resto ya no se toman en ayunas.*]

- ¿Cuántas veces le puedes quitar 6 a 36?

  [*Solución: Una. La siguiente se lo quitas a 30.*]

- ¿Qué ovejas dan más lana, las blancas o las negras?

  [*Solución: Las blancas, porque hay más.*]

- Una casa tiene siete pisos que se llaman como los días de la semana: lunes, martes, miércoles, etc. ¿Cómo se llamará el ascensor?

  [*Solución: Con el botón, como todos.*]

Complicados

Otros acertijos, por su parte, son más complicados y exigen de una mayor concentración. Un ejemplo clásico es el siguiente (Atención: contiene soluciones):

- En una cárcel de la que se debe salir, existen dos puertas. Una lleva a la salida. La otra, a la muerte segura. Cada puerta está custodiada por un guardián. Se sabe que uno de ellos dice siempre la verdad y que el otro miente siempre, pero no se sabe cuál es cada uno. La cuestión es: si se pudiera hacer sólo una pregunta a uno de los dos ¿qué pregunta sería para saber qué puerta es la buena?

  [*Solución: "Cuál es la puerta que diría tu compañero que es la correcta". En todo caso, la respuesta será la falsa.*]

Algunas historias parecidas se localizan en una isla en las que conviven dos tipos de personas: caballeros y escuderos. Los caballeros dicen siempre la verdad, mientras que los escuderos mienten siempre. Sin embargo, ningún detalle externo los diferencia por lo que hay que deducirlo de las frases que pronuncian y de las conversaciones que mantienen. Uno de las adivinanzas más populares es la siguiente:

- "Un visitante encuentra a tres habitantes de la isla. Se acerca al primero y le pregunta: '¿Tú eres caballero o escudero?'. Este responde pero el visitante no le entiende bien. Por su parte, el segundo dice: 'Ha dicho que es escudero'. Y el tercero, apostilla: 'Eso es mentira'. ¿Qué son los habitantes segundo y tercero?

  [*Solución: Nadie puede decir de sí mismo que es escudero, puesto que si es caballero, debe decir la verdad y, si es escudero, dirá igualmente que es caballero porque miente siempre. Por lo tanto, el segundo habitante miente: es escudero. Y, el tercero, dice la verdad, por lo tanto, es caballero.*]

Juego de las preguntas

Existe un tipo de acertijos que se podrían llamar juegos de averiguación. En ellos, se describe una situación atípica y los participantes, por medio de preguntas, deben descubrir el origen de la misma. La persona que lo propone tan solo puede responder sí o no a las preguntas que le planteen por lo que éstas deberán ser muy concretas. Es importante hacer saber al inicio que las soluciones no se pueden hallar por deducción por lo que será necesario realizar varias preguntas para alcanzar la respuesta correcta. El objetivo del juego es crear una expectación y una emoción creciente que acabe creando una gran tensión entre los participantes que no logran desentrañar el misterio. He aquí algunos ejemplos (Atención: contiene soluciones):

- Un hombre camina por el desierto. Llega a un puesto de bebidas y pide un vaso de agua. El camarero, en lugar de dárselo, le apunta con una pistola. El viajero dice ¡Gracias! y sigue su camino.

  [*Solución: el caminante no tiene sed sino hipo. Por eso, pide un vaso de agua. Al apuntarle con la pistola le desaparece el hipo del susto, lo que agradece.*]

- Un rey está a punto de morir y llama a sus dos hijos, grandes aficionados a los caballos. El rey les dice que heredará el reino aquel que demuestre tener el caballo más lento tardando más en llegar a los confines del reino y volver. Uno de ellos decide dejar pasar los días y el otro, tras consultar a un sabio del reino, toma un caballo y sale al galope.

  [*Solución: el príncipe que sale al galope ha tomado un caballo de la cuadra de su hermano.*]

- Aparece un hombre muerto en mitad del desierto desnudo y con una cerilla en la mano.

  [*Solución: varios viajeros vuelan en un globo. De pronto, se produce una avería por lo que deben soltar lastre. Poco a poco, van arrojando todo el equipaje, incluidas sus ropas. Cuando no queda nada, alguien tiene que saltar y lo sortean por el juego de las cerillas. El que coja la más corta es el elegido.*]

- Un inglés recibe un paquete, lo abre y sonríe. Lo cierra y, a su vez, lo envía a un francés, el cual lo abre y sonríe. Lo cierra y lo envía, tal cual, a un italiano, el cual hace lo propio. Al cabo del tiempo, el italiano encuentra a un amigo en un aeropuerto, el cual al bajar del avión le saluda con la mano. Inmediatamente, lo mata.

  [*Solución: un barco naufraga y sólo quedan cuatro náufragos que son los protagonistas de la historia. Cuando se quedan sin comida sortean que uno se corte el brazo para comérselo. Así lo hace el inglés. Luego, le toca al francés y posteriormente, al italiano. Antes de hacerlo el cuarto, son rescatados. Entonces, llegan al acuerdo de que éste se amputará el brazo en el destino y lo enviará a sus amigos para demostrarlo. El día que el italiano lo encuentra en el aeropuerto, comprende que no fue su brazo el que les envió por lo que lo mata.*]

- Un hombre se arroja por el balcón con intención de suicidarse. Al pasar por un piso oye un teléfono y se arrepiente.

  [*Solución: ha habido una hecatombe nuclear en la tierra con un superviviente. Al verse solo en el mundo, decide suicidarse. Sin embargo, oye un teléfono por lo que comprende que hay alguien más vivo y se arrepiente.*]

- Un hombre abre la puerta, baja las escaleras y muere.

  [*Solución: se trata de un astronauta. Ha llegado a un planeta sin atmósfera y existe una fuga en su traje por lo que se asfixia.*]

- Marco Antonio y Cleopatra vivían felices. Alguien entró, abrió la ventana y ambos murieron.

  [*Solución: Marco Antonio y Cleopatra eran dos peces que viven en su pecera. Al abrir la ventana, cayó la pecera al suelo y murieron asfixiados.*]

3. 2. MÁS EJEMPLOS

- Una señora se olvida en casa el permiso de conducir. No se detiene en un paso a nivel, desprecia una señal de dirección prohibida y viaja tres bloques en dirección contraria por una calle de sentido único. Todo esto es observado por un agente de tráfico, quien, sin embargo, no hace el menor intento de impedirlo. ¿Por qué?

  [*Solución: La señora va a pie, no en coche.*]

- Ana y Gema hicieron a primeros de año una visita a Madrid. Llegaron a la ciudad con sólo 30 euros cada una. No pidieron dinero prestado ni les tocó la primitiva. El día 10 de enero de ese mismo año tenían más de cien mil euros entre las dos. ¿Cómo lo consiguieron?

  [*Solución: Ana y Gema fueron ese día al banco de España. Ana se colocó delante, mientras Gema daba la vuelta para situarse detrás del banco. Por lo tanto, entre las dos estaba todo el dinero del banco.*]

- Había dos caballos orientados en direcciones opuestas: uno miraba directamente hacia el este, y el otro hacia el oeste. ¿Qué tuvieron que hacer para verse uno al otro sin necesidad de caminar, girar o incluso mover la cabeza?

  [*Solución: Nada, estaban uno frente al otro.*]

- La policía arresta a cuatro hombres, uno de los cuales ha cometido un robo, los mismos hacen las siguientes declaraciones:

  Alberto: "Bernardo es culpable".

  Bernardo: "Daniel es culpable".

  Carlos: "Yo no soy culpable".

  Daniel: "Bernardo miente cuando afirma que soy culpable".

  Si se sabe que una sola de estas declaraciones es verdadera, ¿quien es el culpable del robo?

[*Solución: Si Carlos miente, el culpable es él. Por tanto, Alberto y Bernardo mienten y Daniel es veraz. Si Carlos es veraz, todos los demás mienten, incluido Bernardo. Pero entonces Daniel no estaría mintiendo. Por tanto la única posibilidad es que el culpable sea Carlos.*]

- Un individuo miente siempre martes, jueves y sábado y es completamente veraz los demás días. Si un día se desarrolla el siguiente diálogo:

  Pregunta: ¿Que día es hoy?
  Respuesta: Sábado
  Pregunta: ¿Que dia será mañana?
  Respuesta: Miércoles

  ¿De que día de la semana se trata?

  [*Solución: Esta claro que esta mintiendo, pues hoy no puede ser sábado y mañana miércoles. Por tanto, hoy debe ser uno de los días 'mentirosos': martes, jueves o sábado. Sábado no es, porque es lo que dice y está mintiendo. Martes tampoco, pues mañana sería miércoles, y no mentiría en la segunda respuesta. Por tanto debe ser jueves.*]

- Tres amigos van a tomar café. Piden la cuenta y el camarero les dice que son 25 pesetas por los tres cafés. Cada uno pone 10 pesetas, en total 30. Con las 5 que sobran, se queda cada uno 1 peseta, y las otras 2 para el bote del bar. Es decir, cada uno paga 9 pesetas, que por los tres serían 27, más las 2 de la propina, 29. ¿Donde está la peseta que falta?

  [*Solución: Es cierto que cada uno paga 9 pesetas, en total 27. Restando de ahí lo que costó el café, aparecen las dos pesetas que se le dan al camarero. Es decir, hay que restarlas, no sumarlas.*]

4. DEMOSTRACIONES INVÁLIDAS

En matemáticas, hay múltiples demostraciones matemáticas de contradicciones obvias. A pesar de que las demostraciones son erróneas, los errores son sutiles, y la mayor parte de las veces, intencionados. Estas falacias se consideran normalmente meras curiosidades, pero pueden ser usadas para ilustrar la importancia del rigor en esta área.

La mayoría de estas demostraciones dependen de variantes del mismo error. El error consisten en usar una función f que no es biyectiva, para observar que $f(x) = f(y)$ para ciertas x e y, concluyendo (erróneamente) que por tanto $x = y$. La división por cero es un caso particular: la función f es $x \rightarrow x \times 0$, y el paso erróneo es comenzar con $x \times 0 = y \times 0$ y con ello concluir que $x = y$.

4. 1. DEMOSTRACIÓN DE 1 = -1

Comenzamos con

$$-1 = -1$$

Ahora, los convertimos en fracciones

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$$

Aplicando la raíz cuadrada en ambos lados obtenemos

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$$

Que equivale a

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

Pero ya que $i = \sqrt{-1}$ (ver número imaginario), podemos sustituirlo, obteniendo

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{1}$$

Reordenando la ecuación para eliminar las fracciones, obtenemos

$$1^2 = i^2$$

Y ya que $i^2 = -1$ tenemos como resultado

$$1 = -1$$

Solución:

Esta demostración no es válida, ya que aplica mal el siguiente principio de las raíces cuadradas:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Este principio sólo es correcto cuando tanto *x* como *y* son números positivos. En la "demostración" anterior, una de estas dos variables es un número negativo, lo que invalida toda la demostración.

4.2. DEMOSTRACIÓN DE 1 < 0

Supongamos que

$$x < 1$$

Ahora tomamos el logaritmo en ambos lados de la desigualdad. Podemos hacerlo siempre que $x > 0$, porque los logaritmos crecen monótonamente. Si tenemos en cuenta que el logaritmo de 1 es 0, obtendremos

$$\text{Ln}\, x < 0$$

Dividir por Ln *x* da como resultado

$$1 < 0$$

Solución:

El error se encuentra en el último paso, la división. Este paso es erróneo porque el número por el que estamos dividiendo es negativo, lo que a su vez es porque el argumento del logaritmo es menor que 1, por nuestra suposición original. Una multiplicación o división por un número negativo invierte el símbolo de desigualdad. En otras palabras, deberíamos obtener $1 > 0$, lo que es, por cierto, correcto.

4. 3. DEMOSTRACIÓN DE 2 = 1

Sean *a* y *b* dos cantidades iguales. Se sigue que:

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

$(a - b)(a + b) = b(a - b)$

$a + b = b$

$b + b = b$

$2b = b$

$2 = 1$

Solución:

La falacia se encuentra en la línea 5: el paso de la línea 4 a la 5 implica una división por $a - b$, que es cero ya que a equivale a b (por la suposición). Como la división por cero no está definida, la demostración no es válida.

4. 4. OTRA DEMOSTRACIÓN DE 2 = 1

Por definición de la multiplicación, se tiene que, para $x \neq 0$,

$x = 1 + 1 + ... + 1$ (x términos)

Multiplicando ambos lados por x,

$x^2 = x + x + ... + x$ (x términos)

Derivando con respecto a x,

$2x = 1 + 1 + ... + 1$ (x términos)

Ahora bien, volviendo a la primera línea, se ve que el lado derecho de esa igualdad es x, y por lo tanto,

$2x = x$

Dividiendo ambos lados por x (lo cual es posible, pues $x \neq 0$), se tiene

$2 = 1$

Solución:

El error: en la primera línea de la supuesta demostración se asumió que x era entero; dicha expresión no tiene sentido para números no enteros. Por otro lado, para derivar funciones hace falta un dominio continuo como los reales, no los enteros; para cada x entero se tiene una ecuación correcta, pero para derivar ambos lados hace falta una ecuación de funciones, no de enteros, y la función $x + x + ... + x$ "con x términos" no tiene sentido en general (¿cómo se pueden tener x términos?), con lo cual no es derivable.

4. 5. DEMOSTRACIÓN DE 4 = 2

$$4 = 4$$

Restamos a ambos lados de la ecuación

$$4 - 4 = 4 - 4$$

En un lado factorizamos usando la "suma por su diferencia" y en el otro lado se factoriza por 2

$$(2 - 2) * (2 + 2) = 2 (2 - 2)$$

Cancelamos los términos iguales a cada lado de la ecuación (2 - 2)

$$(2 + 2) = 2$$

Nos queda como resultado

$$4 = 2$$

Solución:

La falacia se encuentra en el paso de la línea 3 a la 4, ya que implica una división por *(2 - 2)*, que es cero. Como la división por cero no está definida, la demostración no es válida.

4. 6. DEMOSTRACIÓN DE $a = b$, PARA $a \neq b$

Comenzamos con

$$a - b = c$$

Elevamos al cuadrado ambos lados

$$a^2 - 2ab + b^2 = c^2$$

Como $(a - b)(c) = c^2 = ac - bc$, podemos reescribirlo como

$$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$$

Si lo reordenamos, obtenemos

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

Factorizamos ambos miembros

$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

Dividimos ambos miembros por $(a - b - c)$

$$a\cancel{(a - b - c)} = b\cancel{(a - b - c)}$$

Al final

$$a = b$$

Solución:

El truco está en que si $a - b = c$, entonces $a - b - c = 0$, por lo que hemos realizado una división por cero, lo que invalida la demostración.

4. 7. DEMOSTRACIÓN DE 0 = 1

Lo siguiente es una "demostración" de que 0 es igual a 1

$$0 = 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

$$= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \quad \text{Ley asociativa}$$

$$= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$= 1$$

Solución:

El error se encuentra en que la ley asociativa no se puede aplicar libremente a sumas infinitas a menos que sean absolutamente convergentes. De hecho, es posible demostrar que en cualquier campo, 0 no es igual a 1.

4. 8. DEMOSTRACIÓN DE 0,999... = 1

Se tiene 1, del cual se obtienen 3 partes:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Si 1 dividido entre 3 es 0,333...(periódico) entonces: 0,333... + 0,333... + 0,333... = 1

Siendo también 0,333... + 0,333... + 0,333... = 0,999...

En realidad esta afirmación es cierta, aunque la demostración sea errónea:

Sea:

x=0,999....

$10x = 9{,}999....$

$10x - x = 9$

Es decir, que

$9x = 9$

De donde se deduce que

$x = 1$

4. 9. OTRA DEMOSTRACIÓN DE 1 = -1

Sea:

$(-1)^2 = 1$

$2\text{Log}\,(-1) = \text{Log}\,1$

$2\text{Log}\,(-1) = 0$

$\text{Log}\,(-1) = 0$

$\text{Log}\,(-1) = \text{Log}\,1$

$-1 = 1$

Solución:

El error se encuentra en que la función $\text{Log}_b\,(x)$ sólo está definida para x real y positivo, por lo que habría resultado posible para Log (-1).

4. 10. DEMOSTRACIÓN DE 0 = 4

Para esta demostración inválida no he encontrado ninguna solución:

Sea:

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

$1 + \cos x = 1 + (1 - \text{sen}^2 x)^{1/2}$

$(1 + \cos x)^2 = (1 + (1 - \text{sen}^2 x)^{1/2})^2$

Para $x = 180º$,

$$(1 - 1)^2 = (1 + (1 - 0)^{1/2})^2$$

$$0 = (1 + 1)^2$$

$$0 = 4$$

5. BIBLIOGRAFÍA

- *"Enigmática. Enigmas y Juegos Matemáticos"*, Lluís Segarra. Ediciones Ceac
- *"Actividades extraescolares y complementarias. Retos matemáticos 2006/2007"*, Gobierno de Castilla – La Mancha.
  http://www.jccm.es/edu/cp/diegorequena/novedad/retosmatematicos.htm
- *"Calendario Matemático"*, Club de Física y Matemáticas.
  http://www.geocities.com/ognara/calendario.html
- *"Acertijos"*, CurioBlog
  http://www.curioblog.com/category/acertijos/
- Departamento de Matemáticas del I. E. S. Pravia (Asturias).
  http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/profes/departam/mates/acertijos/acertijos.htm
- *"Matemática"*, Wikipedia, La Enciclopedia Libre.
  http://es.wikipedia.org/wiki/Matematicas
- *"Demostración inválida"*, Wikipedia, La Enciclopedia Libre.
  http://es.wikipedia.org/wiki/Demostraci%C3%B3n_inv%C3%A1lida
- *"Paradoja"*, Wikipedia, La Enciclopedia Libre.
  http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja
- *"Problema de Monty Hall"*, Wikipedia, La Enciclopedia Libre.
  http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Monty_Hall
- *"Paradoja del cumpleaños"*, Wikipedia, La Enciclopedia Libre.
  http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_del_cumplea%C3%B1os
- *"Paradoja del mentiroso"*, Wikipedia, La Enciclopedia Libre.
  http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_del_mentiroso
- *"Falacias Matemáticas y Paradojas"*, Sector Matemática
  http://www.sectormatematica.cl/recreativa/falacias.htm
- *"Problemas clásicos de pensamiento lateral"*, Edward De Bono, Sector Matemática
  http://www.sectormatematica.cl/recreativa/pl.htm