Los Números Naturales en el aula de Primaria

Manuel Alcalde Esteban
Inmaculada Pérez Serrano
Gil Lorenzo Valentín

www.sapientia.uji.es | 90

UNIVERSITAT JAUME•I

Los Números Naturales en el aula de Primaria

Manuel Alcalde Esteban
Inmaculada Pérez Serrano
Gil Lorenzo Valentín

UNIVERSITAT JAUME I

DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ

■ Codi d'assignatura MP1006

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia 89. Els Nombres Naturals a l'aula de Primària
http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia89
Col·lecció Sapientia 90. Los Números Naturales en el aula de Primaria
http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia90

www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2014

ISBN: 978-84-695-9565-7

Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es

ÍNDICE

Introducción

Presentamos en este documento un material para la formación inicial y permanente del profesorado de Educación Primaria, donde se muestran propuestas didácticas para trabajar los contenidos referentes a los Números Naturales en esta etapa educativa.

Aunque los mencionados contenidos están trabajados en otras publicaciones, pretendemos con esta ofrecerlos de manera unificada a nuestros lectores en un texto estructurado alrededor de las capacidades matemáticas que es necesario desarrollar en el alumnado de Educación Primaria.

El desarrollo de los temas cuenta con una introducción que nos permite reflexionar sobre dos cuestiones que consideramos importantes. Una es la evolución histórica de los contenidos que estudiamos: los Números Naturales y los diferentes sistemas numéricos de representación, así como las operaciones que se pueden realizar entre estos números y las relaciones que se dan entre ellos. Creemos que, cuando el estudiantado de Grado conoce el momento en el que ha aparecido ese concepto en la historia y también cómo se ha desarrollado hasta nuestros días, le añade entidad y le dota de una perspectiva que va más allá del trabajo que se hace en el aula. La otra es el aspecto teórico de los conceptos trabajados que se expone en un resumen para fundamentarlos matemáticamente y que parte de la Teoría de Conjuntos de G. Cantor, para aproximar al lector al concepto de *número natural* de manera más intuitiva.

A continuación, como parte más importante del texto y como núcleo que justifica esta publicación, se incluye un extenso desarrollo del tratamiento didáctico de los diferentes contenidos para trabajarlos en el aula de Primaria y conseguir, de esta manera, el desarrollo de la competencia matemática del alumnado.

En el mencionado tratamiento didáctico se trabajan los contenidos matemáticos a partir de la realidad y para ser aplicados en ella. Como consecuencia y otorgándole la importancia máxima a esta cuestión, todas las situaciones que se enuncian acompañando el contenido didáctico del texto forman parte de otras situaciones más complejas que se presentan en el aula, en las cuales los contenidos matemáticos son esenciales para su interpretación y resolución. A veces las actividades matemáticas surgirán del desarrollo de algunos proyectos de trabajo globalizados, en otras ocasiones se plantearán a partir de las necesidades que surjan de las otras materias del currículum. Solo cuando se contemplen algunos contenidos que no hayan aparecido en ninguna situación como las mencionadas, el maestro favorecerá de manera intencionada la aparición de situaciones que provoquen las incógnitas que les llevarán al descubrimiento de los mencionados contenidos.

En todos los casos, partiremos de las ideas previas del alumnado sobre cada uno de los conceptos a trabajar y, en particular, de sus propuestas personales y emergentes de resolución de las diferentes situaciones que se planteen. Procederemos más adelante a la búsqueda de los procedimientos generales de representación numérica y de cálculo con números naturales, como forma de ofrecerles las herramientas matemáticas que socialmente se utilizan para representar estos números y las diferentes actividades en las que intervienen.

Quizá sea en este punto en el que nuestra publicación va más allá que otras ya existentes, al ofrecer a los lectores los pasos ordenados y estructurados que justifican y fundamentan matemáticamente todos los algoritmos de las operaciones elementales y que son desconocidos para muchos estudiantes del Grado en Maestro (como hemos podido comprobar a través de nuestra experiencia de muchos años en la docencia en esta titulación). Estos pasos faltan, en muchas ocasiones, en publicaciones que presentan el inicio del trabajo matemático en el planteamiento de algunos casos concretos con niños y niñas, pero no avanzan hasta la culminación matemática de los contenidos.

Atendiendo a las recomendaciones del Parlamento Europeo y del Consejo de Europa sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente, entendemos que la competencia matemática solo se concreta y cobra sentido en la medida en que los elementos y razonamientos matemáticos que estudian son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los necesitan. Por ello, su desarrollo en la escuela se conseguirá partiendo de una amplia variedad de actividades reales, derivadas de otros campos del conocimiento, de las situaciones habituales que se dan en el aula y de las propias experiencias y vivencias del alumnado. Se trata, en definitiva, de conseguir que los niños y las niñas sepan aplicar las destrezas y actitudes que les permitan razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

El objetivo del material es proporcionar una herramienta para los profesionales de la docencia y para el estudiantado del Grado en Maestro, que les ayude a reflexionar sobre los fenómenos educativos que ocurren en el aula escolar y les permita enfrentarse a ellos desde un planteamiento que considera la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas como una tarea interdisciplinaria y globalizadora que parte de una concepción sociocultural de la educación en general y de la educación matemática en particular.

Es preciso indicar que las orientaciones didácticas, dentro de cada capacidad, están organizadas por ciclos y no por cursos independientes, porque desde el punto de vista del desarrollo cognitivo del alumnado es así como hay que considerar la adquisición de los conocimientos en esta etapa educativa (NCTM, 2003).

Presuponemos que en las aulas de Primaria en las que se trabajen los contenidos de este documento, se encuentran los materiales estructurados que describiremos más adelante u otros semejantes ideados y fabricados por los docentes y/o el alumnado, que deberán compartir en su esencia aquello que es fundamental para la construcción de los contenidos matemáticos que se persiguen en esta publicación. Estos materiales constituyen una ayuda imprescindible para el trabajo en el aula referente a la construcción de los Números Naturales y a las operaciones que con ellos se trabajan.

Este documento no agota la actividad que el maestro ha de realizar en el aula. La infinidad de posibilidades de dispositivos didácticos que puede ofrecer a sus alumnos es imposible de reflejar en cualquier publicación. Nuestro interés está en poner la atención en lo que ha de trabajar para fundamentar matemáticamente los procedimientos utilizados por el alumnado y dar indicaciones de cómo ha de hacerlo. Nunca agotaremos la creatividad didáctica que un docente debe tener en su tarea diaria.

Al finalizar los tres temas comentados, se incluye un anexo que cierra esta publicación, en el cual se recogen algunos conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos, necesarios para fundamentar los contenidos referentes a los Números Naturales que se trabajan en el libro. Se ofrece este anexo como una guía consultiva para el lector interesado que le permita ampliar sus conocimientos, entendiendo que no son objeto de estudio obligatorio en las aulas de formación inicial de maestros.

TEMA 1

Números Naturales. Sistemas de numeración

1. Introducción

En este tema se trabaja la construcción del concepto de *número natural* a partir de la Teoría de Conjuntos y la del Sistema de Numeración Decimal a partir de la idea de base y de los diferentes órdenes de unidades. Comienza el tema con una reflexión inicial sobre el concepto de *número natural*, continúa con la formalización de este, la evolución de su representación y un extenso tratamiento didáctico en el aula de Primaria de estos contenidos.

1.1. Reflexión sobre el concepto de número natural

Si la pregunta que nos hicieron es si sabemos qué es un número, todo el mundo podría afirmar que, efectivamente, sabe qué es un número. Incluso también nos podríamos atrever a explicarlo, pero a la hora de definirlo claramente, comienzan las dificultades (Gómez, 1988).

Hay muchas definiciones que proporcionan el concepto de número, pero ninguna de ellas es totalmente independiente:

- Entidad abstracta que representa una cantidad específica.
- Símbolos que se utilizan para representar los números: numerales.
- Elementos que forman los sistemas numéricos.

El concepto de número varía de una persona a otra, según la edad y la formación. Para los niños y niñas indica cantidades o ubicaciones (cardinal y ordinal respectivamente), o también los símbolos para representarlas.

Si volviéramos a la pregunta *¿qué es un número?*, encontraríamos posibles respuestas, por ejemplo a la pregunta ¿qué es el número uno?: ●, 1, uno, sonido del nombre.

Analizando:

– ● referente intuitivo, una marca, un símbolo, un punto..., indicará una unidad, una sola cosa. Para representar el dos, serían dos símbolos como este: ● ●

– 1, signo o guarismo que en nuestra sociedad indica una unidad, una sola cosa. Con este signo se simbolizan cantidades, se opera... La única intuición es que es un único símbolo para el uno, pero el 2, también es un símbolo, mientras que la cantidad que representa es dos, lo mismo pasaría con 3... Entonces, es una representación *abstracta*.

– *uno*, nombre escrito que en nuestra lengua indica una unidad, una sola cosa. Con esta se habla, se escribe o se lee. No se opera. No es intuitivo *a priori*, porque en diferentes lenguas se expresa de maneras distintas (castellano: *uno*, palabra con tres letras; inglés: *one*, también tres letras; catalán: *u* o *un*, una o dos letras...).

– *sonido del nombre*, se debe identificar una palabra concreta con una cantidad, y ese sonido también es diferente según el idioma con el que se hable.

Los niños, en el período de 2.º ciclo de Educación Infantil (3-6 años), utilizan procesos de identificación de la cantidad. Al principio quizás no saben qué representa un número ni cómo es la cifra, pero saben si tienen más o menos objetos para jugar que el compañero, porque la idea de cantidad es intuitiva.

Por lo tanto, ¿cuál es el proceso de introducción de los números? Como en muchos otros momentos de la enseñanza, este es un proceso en espiral, al que se puede acceder desde distintos puntos. Nuestra sociedad está rodeada de cifras, de números, de palabras que significan números, y cuando hablamos utilizamos los números indiscriminadamente. Por tanto, en el mismo aprendizaje natural del niño aparecen números. En la escuela se empezará por lo que es más intuitivo, como agrupaciones de elementos que indican la cantidad a la que se irá asociando poco a poco los nombres de los números. El uno se referirá a un objeto, el dos, a dos objetos y así sucesivamente. Posteriormente se introducirán las cifras y en una fase posterior los nombres escritos.

En el 2.º ciclo de Educación Infantil, se introduce del 1 al 9. Además del contacto con los números que el alumnado tendrá a partir de sus experiencias en la realidad, se pueden utilizar algunos materiales didácticos como ayuda (figuras 1, 2, 3 y 4). En la figura 1, se muestra un material llamado Aros de Colores (fabricado por Goula), consta de una base de madera con unos pilares fijos, de anillas de colores que se han de colocar en los pilares y de unas fichas cuadradas donde aparecen los números representados por cantidades de puntos en unos casos y por cifras en otros. Según el momento en el que se encuentre el niño, podremos utilizar solo los puntos, los puntos y las cifras o solo las cifras para asociarlos con las anillas.

Figura 1. Imágenes del material *Anillas de Colores*

Es muy evidente y no necesita demasiada psicomotricidad fina. Por el contrario, no lleva los nombres de los números escritos y, como los pilares son fijos y su altura es la que corresponde a la cantidad de anillas que hay que poner, los niños pueden llenarlos con anillas sin reflexionar mucho en su número correcto de unidades. Si queremos comprobar que conocen bien los números, podemos alterar la posición de las fichas cuadradas asociándolas con pilares que no les corresponden.

Otro material, llamado *Aprendo a contar* (fabricado por Lado), es el que se describe a continuación. Está formado por fichas de plástico de dos colores que tienen impresa la grafía o el nombre de los números del 1 al 10, varillas de plástico de diez longitudes diferentes adaptadas a las cantidades y bolas de colores que suben en cada una de ellas. En este material (figuras 2, 3 y 4), todas las piezas están sueltas y se puede montar como un rompecabezas.

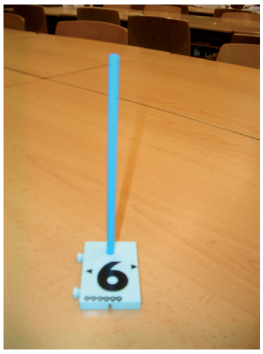


Figura 2. Imágenes del material *Aprendo a contar* (*a*)

Para utilizar este material, hay que tener una cierta psicomotricidad fina, porque todas las piezas deben ser colocadas en su lugar y el agujero de las bolas no es muy grande (esto no ocurre en el material anterior) (figura 3).

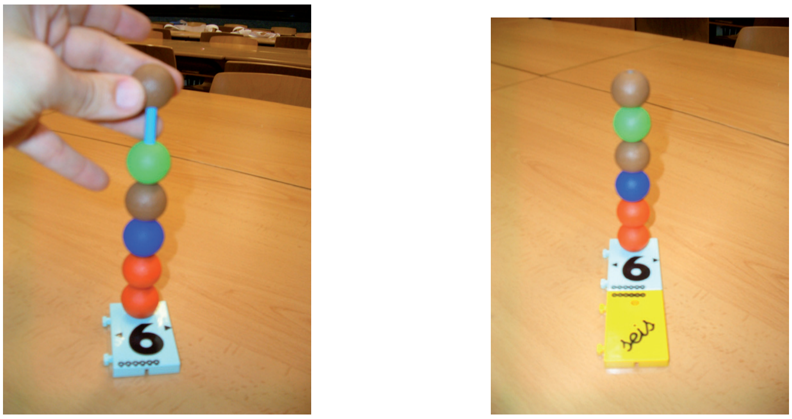


Figura 3. Imágenes del material *Aprendo a contar* (*b*)

Al principio cada varilla se emparejará con su número correspondiente y más adelante las colocaremos de manera desordenada para comprobar si conocen realmente los números trabajados. Según el momento evolutivo, se puede añadir el nombre escrito o no (figura 4).

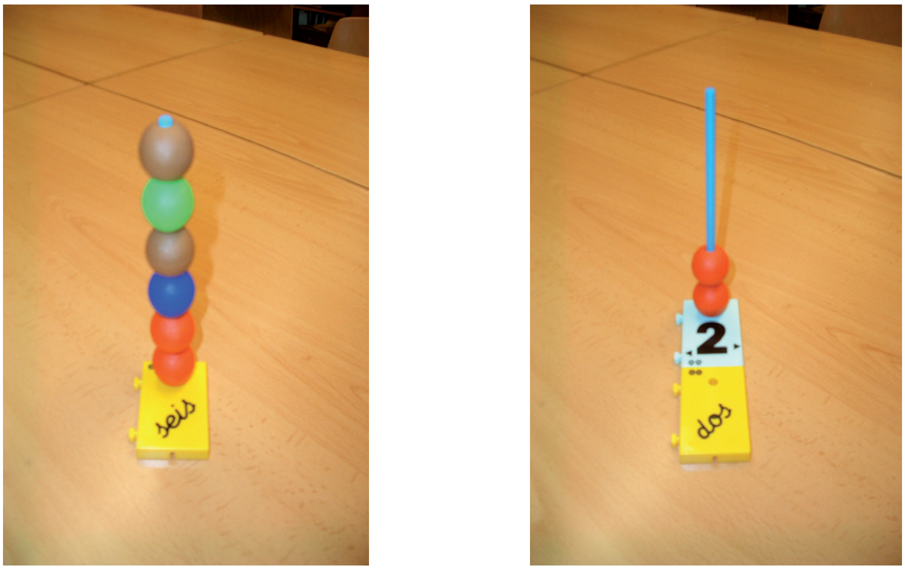


Figura 4. Imágenes del material *Aprendo a contar* (*c*)

1.2. Usos del número natural

Los Números Naturales son N: 0, 1, 2, 3... y los utilizamos:

- Para contar: 5 niños en un grupo de trabajo, 3 personajes en un cuento...
- Para ordenar: la 1.ª planta de la escuela, el 3.er alumno que llega a clase...
- Para medir: 84 cm de altura, el jarrón hace 4 vasos de jugo...
- Para operar: 3 niños y 4 niñas hacen 7 alumnos, come 2 galletas de 5 y quedan 3...
- Para identificar o codificar: el teléfono de la UJI es 964728000, el aula 1117...

Hay funciones que el niño ya tiene integradas antes de saber contar, porque son intuitivas. Estas funciones (Gómez, 1988) y el trabajo que realizaremos con objetos del entorno nos permitirán conseguir que el alumnado llegue a considerar el número natural como *cardinal* y como *ordinal*. Cardinal en el sentido de contar una cantidad de objetos y ordinal en el sentido de ordenarlos.

La definición actual de número que incluye estos dos aspectos se basa en la intuición y está relacionada íntimamente con el concepto de conjunto y cantidad de elementos de un conjunto. Esta formalización de la idea de número no ha estado presente siempre a lo largo de la historia y no aparece hasta el siglo XIX cuando G. Cantor define formalmente los conjuntos numéricos, el primero de los cuales es el de los Números Naturales. Hay otras definiciones, como la *axiomática de Peano*, pero nos centraremos en la de Cantor por estar más cerca de la mente del alumnado escolar.

2. Formalización del conjunto de los Números Naturales

Como paso previo al trabajo didáctico y al desarrollo profesional del docente en el aula, consideramos necesario incluir las bases formales de la construcción del conjunto de los Números Naturales, para que estén al alcance de cualquier lector que los quiera consultar. Obviamente este tratamiento formal de la construcción de los números no se ha de realizar en el aula de Primaria.

2.1. Definición de número natural

De acuerdo con los conceptos de la Teoría de Conjuntos tratados en el anexo, se desarrolla a continuación la construcción del conjunto de los Números Naturales.

Consideremos un conjunto X formado por todos los conjuntos finitos existentes, definimos la siguiente relación binaria entre sus elementos: si A y B son dos conjuntos finitos arbitrarios que pertenecen a X, diremos que son coordinables, equipotentes o equipolentes ($A \mathcal{R} B$) si y solo si existe una aplicación biyectiva entre ellos.

Esta es una relación binaria de equivalencia porque cumple las propiedades siguientes:

- Entre un conjunto y él mismo siempre existe la identidad como aplicación biyectiva ($A \mathcal{R} A$; propiedad reflexiva).

- Si entre los conjuntos A y B existe una aplicación biyectiva f, su inversa f^{-1} es una aplicación biyectiva entre B y A ($A\,\mathcal{R}B \rightarrow B\,\mathcal{R}A$; propiedad simétrica).
- Si entre los conjuntos A y B existe una aplicación biyectiva f, y al mismo tiempo entre los conjuntos B y C existe otra biyección g, entre los conjuntos A y C queda también definida una biyección por la composición de las aplicaciones f y g anteriores ($A\,\mathcal{R}B$ y $B\,\mathcal{R}C \rightarrow A\,\mathcal{R}C$; propiedad transitiva).

Por ser una relación de equivalencia, origina una clasificación de los elementos de X en clases de equivalencia. «La propiedad común de todos los conjuntos finitos de una clase de equivalencia determinada por esta relación de equipotencia» recibe el nombre de *número natural*.

Pero, ¿cómo se puede concretar esta propiedad común?

La existencia de una aplicación biyectiva entre A y B nos indica que cada elemento del conjunto inicial (A) recibe en el conjunto final (B) una imagen o elemento con el que se corresponde de manera única, y cada elemento del conjunto final se asocia también de manera única con un elemento del conjunto inicial (figura 5).

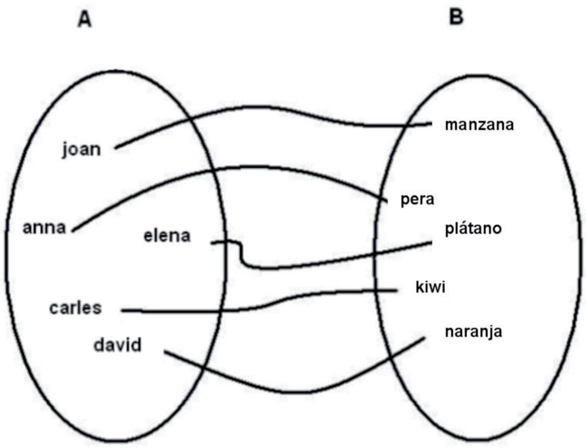


Figura 5. Aplicación biyectiva

Esta asociación uno a uno entre los elementos de los dos conjuntos nos asegura que los conjuntos coordinables, equipotentes o equipolentes, por ser biyectivos tienen el mismo cardinal y, por tanto, será el cardinal común la propiedad que estábamos buscando y la que caracteriza a todos los conjuntos finitos de una misma clase de equivalencia. Así, el número *cero* representa la clase de equivalencia de los conjuntos vacíos, el número *uno* a la clase de equivalencia de los conjuntos equipotentes, por ejemplo, al conjunto A = {el Sol} (si nos permitimos usar *uno* en la definición de uno, se puede redactar: el número uno representa a la clase de equivalencia de los conjuntos con *un* elemento), el *dos* representaría todos los conjuntos equipotentes, por ejemplo, al conjunto A = {la Tierra, la Luna} (si aceptamos usar *dos* en la definición del dos, se puede redactar: el número dos representa a la clase de equivalencia de los conjuntos con *dos* elementos), etc. En general, un conjunto A pertenece a la clase del número natural m si card(A) = m.

Una vez queda claro que todos los conjuntos equipotentes, coordinables o equipolentes tienen el mismo cardinal, con uno que utilicemos para representar a todos nos bastaría. Es decir, todos los conjuntos con 5 elementos contienen la misma información con respecto al cardinal, por tanto, con un conjunto que los represente, es suficiente. Ocurre lo mismo para todos los números naturales y, por tanto, con un solo conjunto finito podemos representar cualquiera de estos números.

2.2. Operaciones en *N*

Sean *a* y *b* dos números naturales y *A* y *B* dos conjuntos finitos, arbitrarios y disjuntos, de manera que *a* = card(*A*) y *b* = card(*B*). Se define la adición de *a* y *b*, como el cardinal de la unión de *A* y *B*. Es decir:

$$\forall a,\ b \in N \wedge \forall A, B \in X \,/\, a = card(A),\ b = card(B) \wedge A \bigcap B = \Phi : a + b = card(A \bigcup B).$$

A partir de las propiedades de las operaciones entre conjuntos se puede demostrar que la adición de números naturales cumple las siguientes propiedades:

- Asociativa
- Conmutativa
- Elemento neutro (0)

Por tanto, el conjunto *N* con la operación que se acaba de definir $(N, +)$ tiene estructura de *monoide conmutativo* (véase anexo).

Sean *a* y *b* dos números naturales y *A* y *B* dos conjuntos finitos, arbitrarios, de manera que *a* = card(*A*) y *b* = card(*B*). Se define la Multiplicación de *a* y *b*, como el cardinal del producto cartesiano de *A* y *B*. Es decir:

$$\forall a,\ b \in N \wedge \forall A, B \in X \,/\, a = card(A),\ b = card(B) : a \times b = card(A \times B).$$

A partir de las propiedades de las operaciones entre conjuntos se puede demostrar que la multiplicación de números naturales cumplen las propiedades:

- Asociativa
- Conmutativa
- Elemento neutro (1)

Así pues, el conjunto *N* con la operación que se acaba de definir, $(N, \times)$, tiene estructura de *monoide conmutativo* (véase anexo).

Como además se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, $(N, +, \times)$ tiene estructura de *semianillo conmutativo y unitario* (véase anexo).

2.3. Orden en *N*

Si en este conjunto definimos la relación «ser menor o igual» de la siguiente manera:

$$\forall a,\ b\ \forall a,b \in N : a \leq b \leftrightarrow \exists n \in N \,/\, a+n=b.$$

se puede comprobar que es una relación binaria de orden total porque cumple las propiedades siguientes:

- Cualquier número natural siempre es menor o igual que él mismo, porque $\exists\, 0 \in N \,/\, a+0=a$ ($a \leq a$; *propiedad reflexiva*).

- Si un número natural es menor o igual que otro y a la vez el segundo es menor o igual que el primero, necesariamente los dos números son iguales. Es decir,

$$\forall a,\ b \in N \,/\, a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow \exists n \in N \,/\, a+n=b \wedge \exists m \in N \,/\, b+m=a \rightarrow (b+m)+n=b$$
$$\rightarrow m+n=0 \rightarrow m=0=n \rightarrow a=b \ \ (a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a=b; \textit{propiedad antisimétrica}).$$

- Si un número natural es menor o igual que otro y a la vez este es menor o igual que un tercero, entonces el primero es menor o igual que el tercero. Es decir:

$$\forall a,\ b,\ c \in N \,/\, a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow \exists n \in N \,/\, a+n=b \wedge \exists m \in N \,/\, b+m=c \rightarrow (a+n)+m=c$$
$$\rightarrow a+(n+m)=c \rightarrow a \leq c \ \ (a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c; \textit{propiedad transitiva}).$$

- Dados dos números naturales cualesquiera, o el primero es menor o igual que el segundo o el segundo es menor o igual que el primero. Es decir, $\forall a,\ b \in N : a \leq b \vee b \leq a$. Para demostrar esta propiedad tendremos que contemplar dos casos:

  1. Si $a = b$, es evidente que $a \leq b \vee b \leq a$
  2. Si $a \neq b$, existirá siempre otro número natural que sumado a uno de estos dará como resultado el otro, es decir:

     $\exists n \in N \,/\, a+n=b \vee b+n=a \rightarrow a \leq b \vee b \leq a$ (*propiedad conexa*).

Diremos entonces que *N*, con la relación anterior, (N, + , ×, ≤), es un *semianillo conmutativo y unitario totalmente ordenado* y no habrá ninguna duda a la hora de establecer si un número natural es mayor, menor o igual que otro (véase anexo).

Aunque hemos definido la relación de orden «ser menor o igual» con el símbolo ≤, se podría definir de manera similar la relación «ser mayor o igual» con el símbolo ≥. En cualquiera de los casos, si eliminamos la posibilidad de igualdad entre los números, las relaciones definidas se convierten en otras de orden estricto que se denominan «ser menor estrictamente» o «ser mayor estrictamente» y se representan con los símbolos < y >, respectivamente.

En este momento empiezan a tener más sentido las palabras *cardinal* y *ordinal*. El aspecto cardinal del número natural será el que se refiere a las cantidades, es decir, los cardinales de los conjuntos, y el ordinal será el que designa el orden y establece comparaciones entre los cardinales de los conjuntos al ordenarlos.

3. Sistemas de numeración

3.1. Evolución histórica

No sabemos con seguridad cuándo comenzó el ser humano a necesitar un sistema de escritura de números, es decir, un sistema de numeración, pero parece seguro que uno de los primeros instrumentos utilizados para contar fueron los dedos de la mano (Ifrah, 2001). Esto implicaría que las primeras representaciones numéricas se hicieron tomando como referente el cinco y, posteriormente, se refirieron al diez por el hecho de que se podían utilizar los dedos de ambas manos. Parece que la humanidad usaba el 10 como referente cuando el lenguaje hablado se consolidó. Al menos, es lo que podemos deducir, en el ámbito indoeuropeo, de nuestro sistema numérico y del nombre de algunos números como diez, en latín *decem*; once, en latín *undecim* (uno más diez); doce, en latín *duodecim* (dos más diez). Incluso se podría pensar en una base veinte, contando los dedos de los pies y las manos (en latín *viginti*).

Sin embargo, cuando creció la necesidad de representar números más grandes, era posible escribir grupos de cinco rayas (IIIII) hasta llegar a la cantidad que se quería. Un ejemplo de este método es un hueso de lobo encontrado en la República Checa donde aparecen 55 incisiones bastante profundas divididas en grupos de cinco. Este hueso tiene unos 35.000 años de edad aproximadamente. Huelga decir que este sistema (de *representación simple*) primitivo y antiguo no constituía una herramienta eficaz para un cálculo desarrollado.

A partir del III milenio a. C., los egipcios utilizaron un sistema numérico (de *agrupamiento múltiple*) procedente de su escritura jeroglífica. Este sistema de base 10 utilizaba signos diferentes para las unidades, las decenas, centenas, etc. En la figura 6 se ve cómo una determinada potencia de diez podía tener representaciones gráficas muy parecidas pero no idénticas.

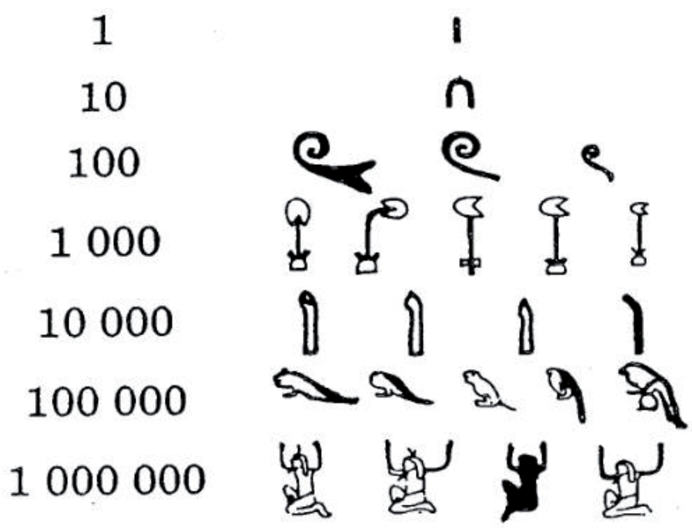


Figura 6. Cifras en la escritura jeroglífica egipcia (Ifrah, 1988)

Permitía escribir números grandes y ofrecía una gran innovación con respecto a los antiguos sistemas. Hay que decir, sin embargo, que el procedimiento de composición consistía en repetir los símbolos de la misma manera que el hombre primitivo repetía las rayas. En la escritura jeroglífica se escribía indistintamente de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Los signos numéricos modificaban su orientación en función de estos sentidos de escritura. En la figura 7, donde se representa el 2.425, se ve que la orientación de los símbolos es diferente a la de la figura 6.

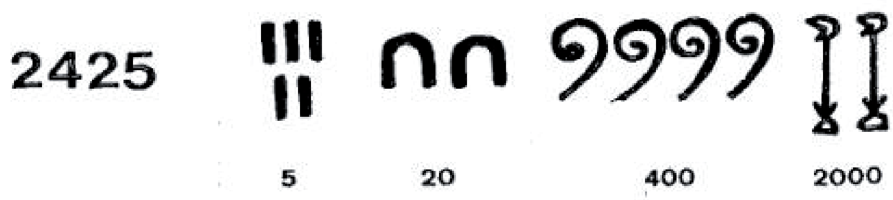


Figura 7. Escritura jeroglífica del número 2.425 (Ifrah, 1988)

Los mismos egipcios, poco después, utilizaron un sistema de numeración más moderno y más práctico relacionado con la escritura hierática. El sistema continuaba siendo decimal, pero no era necesario repetir constantemente los caracteres, sino que se habían introducido unos nuevos que indicaban cuántas veces se repetía cada símbolo (sistema de agrupamiento multiplicativo).

Este cambio que encontramos en el papiro Rhind (siglo XVII a. C.), también llamado de Ahmes, conservado en el British Museum de Londres, nos muestra un aspecto que debía ser fundamental para nuestros sistemas de numeración: la no necesidad de repetir los símbolos.

El sistema de numeración que utilizaban los griegos alrededor del 600 a. C., concretamente los atenienses, cifraba las cantidades con la primera letra del nombre del número correspondiente, era un sistema acrofónico. Las unidades hasta al 4 se representaban por rayas, el número 5 se representaba por la letra PI mayúscula por ser PENTE el nombre griego de esta cantidad, el 10 utilizaba la letra DELTA mayúscula por ser DEKA el nombre de este número, etc. También se crearon símbolos mixtos a partir del cinco: si se añadía el símbolo del diez inscrito simbolizaba el 50, si era el del cien, 500, si el del mil, 5.000 (figura 8).

1	I	100	H	10.000	M
2	II	200	HH	20.000	MM
3	III	300	HHH	30.000	MMM
4	IIII	400	HHHH	40.000	MMMM
5	𐅃	500	𐅅	50.000	𐅇
6	𐅃I	600	𐅅H	60.000	𐅇M
7	𐅃II	700	𐅅HH	70.000	𐅇MM
8	𐅃III	800	𐅅HHH	80.000	𐅇MMM
9	𐅃IIII	900	𐅅HHHH	90.000	𐅇MMMM
10	Δ	1.000	X		
20	ΔΔ	2.000	XX		
30	ΔΔΔ	3.000	XXX		
40	ΔΔΔΔ	4.000	XXXX		
50	𐅄	5.000	𐅆		
60	𐅄Δ	6.000	𐅆X		
70	𐅄ΔΔ	7.000	𐅆XX		
80	𐅄ΔΔΔ	8.000	𐅆XXX		
90	𐅄ΔΔΔΔ	9.000	𐅆XXXX		

Figura 8. Representaciones numéricas en la escritura acrofónica griega (Ifrah, 1988)

En la figura 9 se muestra un ejemplo de la representación del número 7.699, usando las cifras de la tabla anterior.

𐅆 XX 𐅅 H 𐅄 ΔΔΔΔ 𐅃 IIII

5000 2000 500 100 50 40 5 4

Figura 9. Escritura acrofónica del número 7.699 (Ifrah, 1988)

Poco después, este sistema numérico fue sustituido por otro que usaba todas las letras del alfabeto griego (acompañadas de una barra horizontal en la parte superior cuando representaban números) y algunos otros símbolos procedentes del alfabeto fenicio:

Α	α	alpha	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	ro	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kappa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gamma	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	epsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϛ	ϛ	digamma	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	dzeta	7	Ο	ο	omicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	omega	800
Θ	θ	thëta	9	Ϟ	ϙ	qoppa	90	Ͳ	ϡ	san	900

Figura 10. Numeración alfabética griega (Ifrah, 1988)

Con este sistema se podrían cifrar los números que van del uno al novecientos noventa y nueve. Para escribir los miles, añadían una coma suscrita en la parte izquierda superior de la letra; así una ‘α indicaba mil, y una ‘i indicaba diez mil. Con este sistema se podía escribir hasta el novecientos mil novecientos noventa y nueve.

Siguiendo el ejemplo griego, los romanos utilizaron también las letras del alfabeto para escribir los números de acuerdo con los valores de la figura 11.

uno	I	diez	X	cien	C
dos	II	veinte	XX	doscientos	CC
tres	III	treinta	XXX	trescientos	CCC
cuatro	IV	cuarenta	XL	cuatrocientos	CD
cinco	V	cincuenta	L	quinientos	D
seis	VI	sesenta	LX	seiscientos	DC
siete	VII	setenta	LXX	set-cents	DCC
ocho	VIII	ochenta	LXXX	ochocientos	DCCC
nueve	IX	noventa	XC	novecientos	CM

Figura 11. Numeración romana

El principio de equivalencias era muy parecido al griego, de modo que la unidad era simbolizada por una I, y se podía repetir al principio hasta cuatro veces IIII (4). La siguiente unidad era V, que simbolizaba el 5. Más adelante se introdujo la regla según la cual solo se permite repetir cualquier cifra hasta a tres veces. Así, para expresar el número 4, se resta una unidad de la cifra siguiente IV (4). En general, cuando hay dos cifras juntas, la inferior se suma a la superior si va a la derecha (VI), y se resta si va a la izquierda (IV), teniendo en cuenta que las únicas cifras que restan son: I delante de V y X, X delante L y C, y C delante a D y M (mil). Así, por ejemplo, el 999 se escribía CMXCIX.

El mecanismo más utilizado para escribir números superiores al mil era poner una raya arriba de cualquier símbolo, que indicaba que este se tenía que multiplicar por mil, el dos mil, por ejemplo, se escribía $\overline{\text{I}}$, y el diez mil $\overline{\text{X}}$. Así, por ejemplo, el 3749 se escribía bien MMMDCCXLIX, o bien $\overline{\text{III}}$DCCXLIX.

Pero el sistema de numeración más moderno y práctico nació en la India alrededor del siglo III a. C. Conservaba la base decimal y el carácter de agrupamiento multiplicativo del sistema egipcio. Hacia el siglo V de nuestra era se incorporó a este sistema un cambio fundamental respecto de los anteriores, que consistía en la introducción de un guarismo para escribir la cifra cero que indicaba la ausencia de algún orden de unidades en el número y obtuvieron así un sistema de numeración donde el valor de cada cifra dependía de la posición que ocupaba en la representación del número (*sistema de numeración posicional: de agrupamiento multiplicativo, con valor posicional de las cifras y con uso de la cifra cero*).

Estas cifras hindúes fueron extendiéndose y adoptando formas diversas en diferentes lenguas. Los árabes adoptaron los sistemas de escritura numérica que habían aprendido de los griegos y los hindúes y utilizaron ambos. Pero introdujeron en occidente, alrededor del siglo X, el sistema de numeración que habría de triunfar e imponerse sobre los demás, y que recibió el nombre de numeración arábiga o indoarábiga, las cifras iniciales de la cual eran las que se representan en la figura 12.

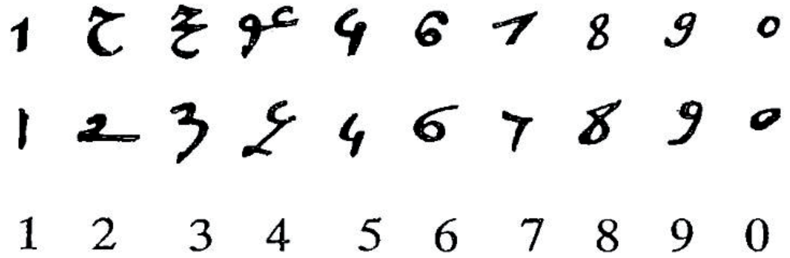


Figura 12. Cifras árabes (Ifrah, 1988)

En el mundo cristiano, se adoptó este sistema hindú y árabe porque ofrecía grandes ventajas respecto del romano y aunque se hizo público en el siglo XIII al editarse el *Liber abaci* de Leonardo de Pisa *Fibonacci*, no se utilizó de manera normalizada hasta el siglo XV, en el que la imprenta hizo posible que su conocimiento llegara a una franja de población mucho mayor que al principio. Las cifras del sistema hindú han evolucionado a lo largo del tiempo hasta llegar a nuestros días. En la figura 13 se ilustran los primeros pasos de esta evolución:

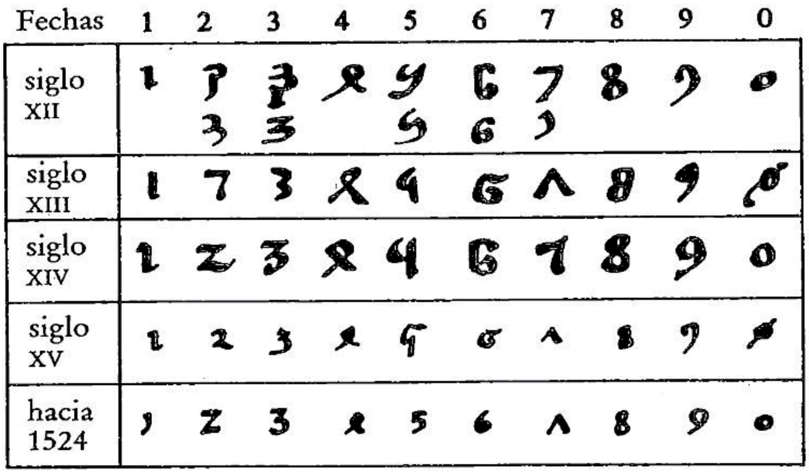


Figura 13. Evolución de las cifras árabes en Europa (Ifrah, 1988)

Otras civilizaciones o sociedades han tenido sistemas de numeración diferentes. Algunos ejemplos de los cuales son: el chino el 1500 a. C., el babilónico en el siglo XIII a. C. y el maya en el siglo XII aproximadamente. Se puede encontrar amplia información sobre estos y otros sistemas de numeración en Ifrah 1988 y 2001.

3.2. Definición y tipos

Un Sistema de Numeración es un conjunto de normas y convenios para escribir números utilizando la menor cantidad de símbolos posible.

Habrá que volver a la historia, otra vez, para entender cuestiones importantes de los sistemas de numeración, y la depuración que han sufrido por causas de economía de escritura, de dificultad y en ocasiones religiosas.

Cuando el ser humano comenzó a contar usó los dedos, piedras, marcas en bastones, nudos en una cuerda y de otras formas para pasar de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece, se hace necesario un sistema de representación más práctico. En diferentes partes del mundo y en épocas diferentes se llegó a la misma solución, cuando se alcanza un determinado número de unidades (*de primer orden*) se hace una marca diferente, de segunda clase, que las representa a todas (*unidades de segundo orden*). Este número es la base. Se continúa añadiendo unidades hasta que se vuelve a alcanzar por segunda vez el número anterior y se añade otra marca de la segunda clase y así se continúan añadiendo unidades de primer orden hasta llegar a un número de marcas de segunda clase iguales a la base. Entonces se introduce una marca diferente, de tercera clase (*unidades de tercer orden*), para representar esta unidad. Procediendo de manera similar y de forma sucesiva se van construyendo los diferentes órdenes superiores de unidades.

La base que más se ha utilizado a lo largo de la historia es la base 10, porque este es el número de los dedos de las manos del ser humano. Hay alguna excepción notable, como la numeración babilónica, que usaba 10 y 60 como bases, y la numeración maya, que usaba 20 y 5, aunque con alguna irregularidad. Desde hace 5.000 años, la gran mayoría de las civilizaciones han contado en unidades, decenas, centenas, millares, etc., es decir, de la misma manera como seguimos haciéndolo hoy.

Sin embargo, la forma de escribir los números ha sido muy diversa, y muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no disponer de un sistema de numeración que permitiera utilizar unos procedimientos eficaces para el cálculo. Casi todos los sistemas utilizados representan con exactitud los números naturales, aunque en algunos se pueden confundir unos números con otros (en el del sistema egipcio de agrupamiento multiplicativo, por ejemplo). Muchos de ellos no son capaces de representar grandes cantidades y otros requieren un número de símbolos tan grande que los hace poco prácticos. Además, no permiten, en general, efectuar operaciones tan sencillas como la multiplicación, y exigen procedimientos muy complicados que solo estaban al alcance de unos pocos iniciados. En cuanto a la división, es mucho más grave, ya que no existían reglas para poder hacerla. De hecho, cuando se comenzó a utilizar en Europa el sistema de numeración actual, los *abaquistas*, profesionales del cálculo, se opusieron con las más peregrinas razones, entre las cuales esta: «siendo el cálculo algo complicado en sí mismo, debería de ser un método diabólico aquel que permitiese efectuar las operaciones de forma tan sencilla». El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes, como ya se ha mencionado anteriormente. Del origen indio del sistema hay suficientes pruebas en documentos indios y árabes. Leonardo de Pisa (*Fibonacci*), fue uno de los introductores del nuevo sistema en la Europa de 1202. El gran mérito de los indios fue la utilización del cero con valor numérico para ocupar diferentes posiciones en la representación de los números, lo que evita confusiones y permite un sistema en el que solo diez símbolos pueden representar cualquier número aunque sea muy grande, y simplificar la manera de efectuar las operaciones.

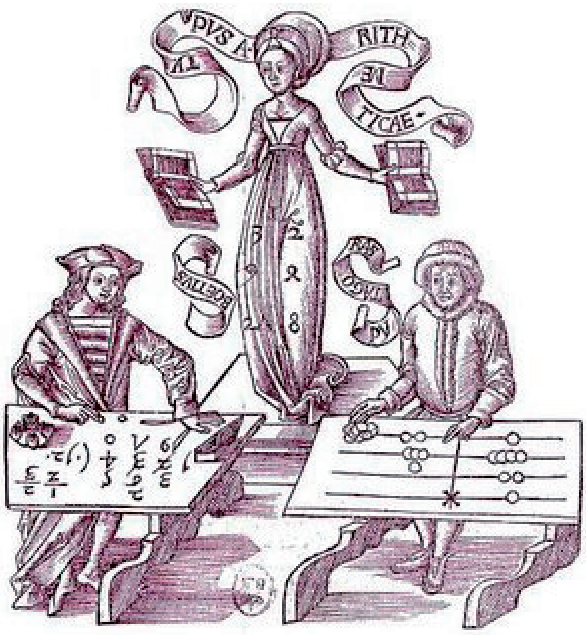


Figura 14. Grabado de principios del siglo XVI que representa el triunfo de los algoritmos sobre los ábacos. Los algoristas, empleando las 9 cifras y el cero, se imponen a los abaquistas, ya que son capaces de hacer más rápidamente las operaciones aritméticas. En segundo plano, la dama Aritmética, con un vestido adornado de cifras, muestra con la mirada cuáles son sus preferencias (Ifrah, 1988)

La introducción de este sistema de numeración que ahora usamos como si hubiera existido desde siempre no fue fácil. Trescientos años después de su introducción en Europa por Fibonacci, en el siglo XVI, aún se hacían competiciones entre *abaquistas*, que utilizaban el ábaco, y *algoristas*, que hacían las cuentas más o menos como nosotros ahora (figura 14). Los ábacos resistieron, a pesar de todo, hasta en el siglo XX, cuando todavía se podían encontrar en los bancos, comercios, etc.

3.2.1. Sistemas de numeración aditivos

Para ver cómo funciona la representación numérica en un sistema aditivo, consideremos el sistema jeroglífico egipcio. Por cada unidad se escribe un trazo vertical, por cada decena un símbolo en forma de arco y por cada centena, millar, decena y centena de millar y millón, un jeroglífico específico. Así, para escribir 754 usaban 7 jeroglíficos de centenas, 5 de decenas y 4 trazos. De alguna manera, todas las unidades están físicamente presentes.

Los sistemas aditivos son aquellos que acumulan los símbolos de todas las unidades, decenas..., necesarios hasta completar el número. Una de sus características es, por tanto, que se pueden poner los símbolos en cualquier orden, aunque, en general, es preferible una disposición determinada. Cada cifra tiene un valor propio que no depende del lugar que ocupa y se llaman aditivos porque, para conocer el número, se hará una adición. Como ya se ha comentado, las dificultades de representar números grandes, y las complicaciones que había a la hora de operar, hicieron que no prosperase.

3.2.2. Sistemas de numeración posicionales

Estos sistemas utilizan el principio del valor relativo, es decir, cada cifra representa valores diferentes dependiendo de la posición que ocupe en la expresión del número. El ejemplo por excelencia sería el sistema de numeración decimal (en adelante SND), pero hay otros que también se utilizan y que se explicarán más adelante.

La base (véase 3.2) supone un punto de inflexión en la colocación de las cifras. Es decir, si un sistema de numeración posicional tiene base *b* significa que «*b* unidades de cualquier orden forman una unidad de orden inmediato superior». La base representa también la cantidad de cifras que el sistema utiliza, es decir, *b* es el número de símbolos diferentes permitidos en un sistema de numeración posicional para escribir los números.

En el caso del SND, la base sería el 10 y utiliza como cifras 0, 1, 2, 3,..., 9.

Analicemos el SND. Para representar cantidades inferiores a 10, unidades de primer orden o *unidades*, se utiliza una sola cifra.

Al llegar a la base, es decir, la cantidad que se obtiene al añadir 1 al 9, el sistema utiliza el criterio posicional y necesita dos cifras para representar el número en el que hay un grupo y ninguna unidad suelta. Cada uno de estos grupos formados por 10 unidades se llama *decena* o unidad de segundo orden. Para indicar doce, por ejemplo, se escribe 12. Utilizamos dos cifras: la que se escribe más a la izquierda, el 1, es la cifra de las decenas, mientras que el 2 es la cifra de las unidades. Pero en el fondo estamos escribiendo:

$$1 \times 10 + 2 = 12$$

Tomando otro ejemplo, 72: $7 \times 10 + 2 = 72$

De la misma manera, al pasar el escalón siguiente, la *centena*, se debe recurrir a una nueva posición a la izquierda de las anteriores, para escribir cifras que indican grupos de 10 decenas, por ejemplo 325 : $3 \times 100 + 2 \times 10 + 5 = 325$; y así sucesivamente.

Podríamos poner muchos ejemplos, 8.795 : $8 \times 1.000 + 7 \times 100 + 9 \times 10 + 5 = 8.795$

Si la cantidad es muy grande, representamos el uno seguido de ceros, utilizando potencias de 10:

$$9 \times 10^6 + 6 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10 + 2 = 9.605.032$$

Esta manera de representar los números se llama *descomposición polinómica*. Hay que notar que cuando en un número no existen unidades de un determinado orden, se coloca un cero en la posición correspondiente, pero, en la descomposición polinómica no aparece. Simplemente, en el ejemplo anterior, los sumandos que representarían 0×10^4 o 0×10^2, se obvian.

En las unidades no hace falta poner potencia de 10, porque sería con exponente 0, ya que $10^0 = 1$. Tampoco es necesario explicitar el exponente de la potencia 10^1; por tanto, $25 = 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ lo escribimos $25 = 2 \times 10 + 5$.

El funcionamiento del SND se reproduce en cada sistema posicional sea este de la base de que sea, exceptuando la utilización del punto o cualquier otra marca para separar los bloques de tres cifras, los nombres de los diferentes órdenes de unidades (es decir, unidades, decenas, centenas..., queda reservado únicamente para el SND) y la manera de leer los números (por ejemplo, 132 se lee «ciento treinta y dos», mientras que $132_{(4}$ se lee «uno, tres, dos en base cuatro»).

Si utilizamos diferentes sistemas de numeración para representar un número obtenemos varias expresiones para él que se llaman Numerales. Así, por ejemplo: 7, $21_{(3}$, VII..., son numerales que corresponden a la cantidad de días de una semana. Como generalmente el trabajo con números y operaciones se hace referido a un solo sistema de numeración, se asimila la palabra *numeral* a la palabra *número* y se utilizan indistintamente.

Desarrollamos a continuación algunos ejemplos de sistemas posicionales en otras bases.

Sistema de numeración en base 5

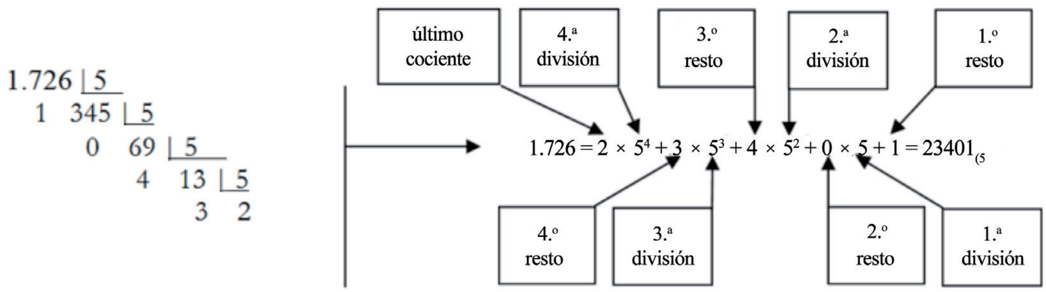
Es un sistema que se ha utilizado a lo largo de la historia debido a que 5 es el número de los dedos de una mano. Utiliza las cifras 0, 1, 2, 3 y 4, y se cambia de orden de unidades, añadiendo una cifra a la izquierda del numeral, cuando se llega a un agrupamiento de 5 unidades de cualquier orden (por lo que nunca debe aparecer el valor de la base entre las cifras de un número, ni superior a ella).

Cuando tenemos expresada una cantidad en base 5, podemos saber el numeral que le corresponde en el SND a partir de unas sencillas operaciones de adición y multiplicación. Supongamos que el número, escrito en base 5, es: $23401_{(5}$. Si queremos saber cuál es su valor en el SND, será necesario desarrollar su descomposición polinómica en la base 5, y realizar las operaciones que en esta se indican:

$$23401_{(5} = 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 1 = 2 \times 625 + 3 \times 125 + 4 \times 25 + 1 = 1.726$$

El papel de las potencias de 10 en el SND, en este momento, lo hacen las potencias de 5.

Recíprocamente, también se puede pasar un numeral expresado en el SND a un sistema de base 5. Utilizando los mismos números de antes, supongamos que queremos escribir en base 5 el número 1726. Numéricamente, el procedimiento a seguir consiste en dividir por 5 el número 1726 y, sucesivamente, los distintos cocientes que obtenemos en cada división hasta alcanzar un cociente menor que 5, ordenando a continuación los resultados de las diferentes divisiones. En el numeral que buscamos se construye: el último cociente es la cifra de las unidades del orden más alto y los residuos de las divisiones, colocados en orden inverso al de su obtención, serán las cifras de los siguientes órdenes descendientes.



Manipulativamente, es como si tuviéramos 1726 piezas sueltas y lo que se nos pide es hacer montones de 5 piezas, después montones de 5 montones, después de 5 montones de 5 montones, y así mientras podamos, ordenando los resultados obtenidos en cada tipo de agrupamiento de manera análoga al caso numérico.

Sistema de numeración en base 2

Es un sistema que se utiliza mucho en la actualidad en informática y en tecnología. Cualquier información se graba mediante ceros y unos.

Utiliza las cifras 0 y 1 y se cambia de orden de unidades, añadiendo una cifra a la izquierda del numeral, cuando se llega a un agrupamiento de 2 unidades de cualquier orden.

Siguiendo un proceso similar al descrito para la base 5, si tomamos el 100 y queremos pasarlo a base 2, dividimos sucesivamente por dos hasta obtener un cociente menor que este número y después ordenamos las cifras. Así:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
100 & \underline{|2} \\
0 & 50 & \underline{|2} \\
 & 0 & 25 & \underline{|2} \\
 & & 1 & 12 & \underline{|2} \\
 & & & 0 & 6 & \underline{|2} \\
 & & & & 0 & 3 & \underline{|2} \\
 & & & & & 1 & 1
\end{array}
\qquad 100 = 1100100_{(2}$$

Para averiguar el valor de esta expresión en base 10, escribimos la descomposición polinómica correspondiente y realizamos los cálculos:

$$1100100_{(2} = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 = 64 + 32 + 4 = 100.$$

Sistema de numeración duodecimal

En el siglo XVIII, el naturalista francés Georges-Louis Leclerc (1707-1783), conde de Buffon, propuso la adopción del sistema duodecimal, de base doce, que ya se conocía de la antigüedad, para aplicarlo a las unidades de medida (Ifrah, 1988).

La razón es fácil de comprender: el 10 es un número muy grande para la escasa cantidad de divisores enteros que tiene. Descartando los obvios 1 y 10, solo es divisible por 2 y por 5. En cambio, el doce, un poco más grande, tiene más divisores. Además del 1 y el mismo 12, encontramos el 2, el 3, el 4 y el 6. Estos divisores eran importantes por dos cosas: fraccionar la cantidad de mercancías y el precio de las unidades de medida de los productos, así, calcular precios y devolver dinero era una tarea más sencilla. La costumbre que hay hoy de contar las mercancías por docenas y de utilizar en algunos países unidades de medida que se relacionan entre sí de doce en doce (un pie, 12 pulgadas; un chelín, 12 peniques...) tiene su origen en este sistema.

Sistema de numeración sexagesimal

Este sistema es heredado de los sumerios y los babilonios. La base es el 60, y en la actualidad se sigue utilizando para medir el tiempo y los ángulos. La representación de los números del 1 al 59, se obtenía de forma aditiva combinando dos símbolos, uno para el 1 y otro para el 10. A partir del 60 el sistema de representación era posicional (Ifrah, 1988). Actualmente utilizamos el SND para representar las cantidades en cada orden de unidades sexagesimales, y por esta razón hay que expresar por separado las unidades de los diferentes órdenes.

Se puede considerar que se ha mantenido hasta nuestros días por la importancia que tuvieron los cálculos astronómicos y trigonométricos de los matemáticos antiguos. Al igual que el sistema de numeración duodecimal, la gran cantidad de divisores que tiene el 60 (es el menor número que se puede dividir a su vez por 2, 3, 4, 5 y 6) lo hacía óptimo para este tipo de cálculos.

En la actualidad, este sistema funciona únicamente con tres órdenes de unidades: segundos, minutos y horas o grados, si se está midiendo tiempo o ángulos. De esta manera, 60 segundos (1.^{er} orden) harán 1 minuto (2.º orden), y 60 minutos harán o bien una hora, o bien un grado (3.^{er} orden). A partir de este orden, las dos magnitudes han evolucionado de manera diferente con el fin de construir las nuevas unidades. Así, en el caso del tiempo, los días, las semanas, los meses, los años, etc., ya no se han formado agrupando 60 unidades de la orden anterior. En el caso de la medida de ángulos, no hay unidad de orden superior al grado, salvo la consideración del ángulo completo, que es de 360 grados.

Acusan más diferencias si observamos las maneras de expresar los órdenes de las unidades. Así, en el caso del tiempo, escribiremos *h* para indicar las horas, *min* para indicar los minutos y s para indicar los segundos, por ejemplo, 5 h 15 min 43 *s*. Para el caso de los ángulos, escribiremos º para indicar los grados, ‘ para indicar los minutos y ‘’ para indicar los segundos, por ejemplo 5º 15’ 43’’.

Cuando se quiere pasar una expresión numérica del SND a sexagesimal, o al revés, utilizamos criterios de proporcionalidad, es decir, expresamos con proporciones las equivalencias entre las agrupaciones decimales y los sexagesimales.

Por ejemplo, queremos saber en el sistema sexagesimal cuántas horas, minutos y segundos son 3,35 h. En este caso, como la expresión decimal viene dada en horas, la parte entera del número decimal indica la cantidad de estas unidades, es decir, 3 horas. Seguidamente hay que transformar la parte decimal en minutos, teniendo en cuenta que si en la parte decimal aparecen cifras hasta las centésimas, en el numerador de la primera fracción de la proporción pondremos un 100:

$$\frac{100}{35} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{35 \times 60}{100} = 21\,.$$

Como no aparecen decimales en la cantidad de minutos obtenidos, no hay que buscar segundos; entonces el resultado es: 3 h 21 min.

Nuevamente, si queremos saber en el sistema sexagesimal cuántas horas, minutos y segundos son 3,38 h, procedemos de la misma manera. Entonces tenemos 3 horas y debemos transformar 0,38 h en minutos:

$$\frac{100}{38} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{38 \times 60}{100} = 22{,}8\,.$$

Como ahora sí que obtenemos decimales en los minutos, habrá separar la parte entera, que son 22 minutos, de la parte decimal, 0,8 minutos, y aplicando la proporcionalidad correspondiente obtener los segundos. Como en el decimal solo aparecen décimas, en la fracción inicial colocaremos un 10 al numerador:

$$\frac{10}{8} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{8 \times 60}{10} = 48.$$

En este caso el resultado es 3 h 22 min 48 s.

En el último ejemplo se pasará del sistema de numeración sexagesimal al SND. Para realizar estos cálculos, es necesario convertir cada unidad sexagesimal en la elegida para la expresión en el SND. Si queremos saber cuántos minutos son 5 h 30 min 22 s, se tendrá que operar de la siguiente manera:

$$5\text{ h} = 5 \times 60\text{ min} = 300\text{ min}$$
$$22\text{ s} = \frac{22}{60}\text{min} = 0{,}37\text{ min}$$

Por tanto, 5 h 30 min 22 s son en el SND (300 + 30 + 0,37) min = 330,37 min.

Evidentemente, estos procedimientos son aplicables de manera análoga al caso de la medida de ángulos.

En el uso cotidiano de las expresiones de la medida del tiempo, hay que evitar interferencias incorrectas entre el SND y el sistema sexagesimal, así:

- Cinco horas y media no son 5,30 h; son 5,5 o bien 5 h 30 min
- Tres cuartos de hora no son 0,45 h; son 0,75 o bien 45 min
- Un cuarto de hora no es 0,15 h; es 0,25 o bien 15 min

4. Los Números Naturales en el aula de Primaria

4.1. Consideraciones previas

Cuando los alumnos comienzan la etapa de escolarización obligatoria, la Educación Primaria, no es la primera vez que tienen acceso a los números, este hecho hay que tenerlo muy presente. La cotidianidad con la que el número se presenta en nuestro medio, sea hablado o sea escrito, en cualquiera de las diferentes manifestaciones de comunicación que establecemos, hace que sea habitual en su consciente, desde edades muy tempranas, la presencia de unas palabras y de unos signos, grafías o guarismos que representan o cuentan cosas que pasan a su alrededor.

¿Quiere decir esto que hay una idea formada en su interior de lo que significan estos números? Seguramente aún no, ni incluso cuando hayan cursado la Educación Infantil, y esa es la tarea que hay que desarrollar en la Educación Primaria: que el número sea entendido como la invención que las personas han hecho para representar, simbolizar, nombrar las cantidades y también ordenarlas. Esto en un primer momento. Es evidente que hay más usos del número natural, pero estas dos funciones son uno de los objetivos principales del tema. Estamos hablando de las funciones cardinal y ordinal, que seguro están incorporadas de manera intuitiva al pensamiento de los niños antes de entrar en la escuela: «tengo cinco juguetes», «tengo más juguetes que tú». Estas dos ideas podemos considerarlas como punto de partida a la hora de trabajar en Educación Primaria.

Si nos preguntamos «¿qué contenidos se trabajan de los 6 a los 11 años en este tema que corresponde al bloque Números y Operaciones?», en la respuesta debemos incluir, además de completar la conceptualización numérica que pueden llevar de la Educación Infantil, la introducción y desarrollo del SND. Para avanzar en este contenido, construiremos a partir de agrupamientos de 10 en 10, las ideas de decena, centena, unidad de millar, etc., introduciendo las nuevas simbolizaciones correspondientes para resolver un problema, que no es solo el de contar, es también el de aclararnos al representar los números cuando son muchos los elementos considerados. Dejaremos las operaciones para el siguiente tema de esta publicación.

Y todo ello sin olvidar que la numeración, como parte de las Matemáticas, tiene su punto de partida y de llegada en la realidad y que nuestro trabajo matemático en el aula será significativo, en la medida en que lo contextualizamos socioculturalmente y lo integramos en un trabajo globalizado que no deje como compartimiento estanco cualquier tipo de saber.

Estas consideraciones se complementan necesariamente con la utilización de materiales didácticos específicos que apoyan la construcción del SND.

4.2. Materiales utilizados para trabajar los sistemas de numeración

De la gran cantidad de materiales que nos podemos encontrar en la Educación Primaria para trabajar el SND, analizaremos a continuación los tres siguientes: bloques multibase, ábacos y regletas Cuisenaire; aunque utilizaremos preferentemente los dos primeros por ser los que consideramos que ayudan mejor en la construcción de los conocimientos relacionados con el sistema de numeración decimal.

4.2.1. Bloques multibase

Los bloques multibase de Dienes son un recurso matemático diseñado para que los niños y las niñas puedan comprender los sistemas de numeración sobre una base manipulativa concreta, a partir de unas piezas de un tamaño determinado que nos informa de su valor numérico.

Este material consta de una serie de piezas, tradicionalmente de madera, que representan las unidades de primer, segundo, tercer y cuarto orden en diferentes sistemas de numeración posicional (unidades, decenas, centenas y unidades de millar, en el caso del SND). Se presentan en forma de:

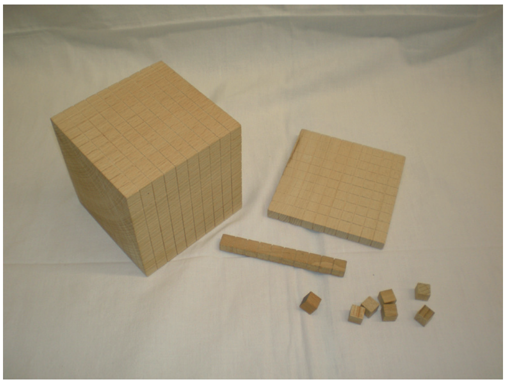
- Cubos de 1 cm de arista, que representan las unidades simples o de primer orden.

- Barras. Prismas cuadrangulares de 1 cm^2 de sección y *b* cm de largo (donde *b* es la base del sistema de numeración). Están compuestos de tantos cubos unidos como marque la base del sistema de numeración, si se utiliza base diez, la barra constará de diez cubos unidos; cada unidad está perfectamente señalada por una ranura. Representan las unidades de segundo orden. En el SND, corresponderían a las decenas.

- Placas. Prismas cuadrangulares de b^2 cm^2 de base y 1 cm de altura (donde *b* es la base del sistema de numeración). Están compuestas de tantas barras unidas como marque la base del sistema de numeración. Representan las unidades de tercer orden. En el SND correspondería a las centenas.

- Bloques. Cubos de b^3 cm^3 (donde *b* es la base del sistema de numeración). Están compuestos de tantas placas unidas como marque la base del sistema de numeración. Representan las unidades de cuarto orden. En el SND, el bloque tendría 10 × 10 × 10 cubos, es decir 1.000 cubos, y, por tanto, representaría la unidad de millar.

En las imágenes de la figura 15 se muestran en madera las piezas para los materiales de base 10 y de base 2.



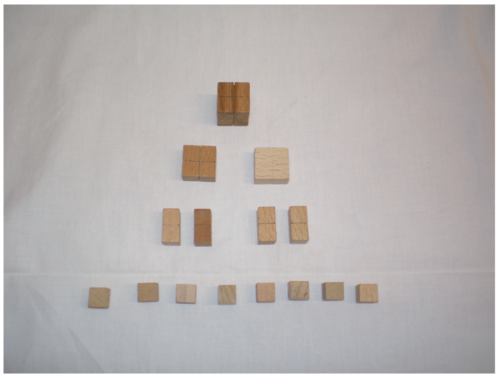


Figura 15. Bloques multibase de base 10 (izquierda) y base 2 (derecha) (fabricados por Tauvi)

Para averiguar la representación de un determinado número con este material se debe comenzar agrupando los cubos correspondientes a ese número y sustituyendo cada grupo de *b* piezas de un tipo por una pieza del tipo siguiente (cada *b* unidades de un orden por una unidad del orden siguiente).

En la figura 16, encontramos un ejemplo concreto de la representación final de un número con bloques multibase (en este caso de plástico), una vez se ha hecho la manipulación y los cambios de piezas necesarios que favorecen la representación del numeral.

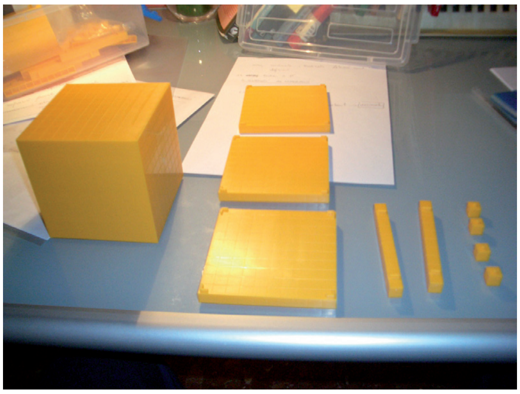


Figura 16. Representación del número 1.324 con bloques multibase de base 10
(fabricados por Miniland)

Este material permite ver claramente y comprender el valor de cada una de las unidades de los diferentes órdenes que componen un número. También los podemos utilizar para:

1. Hacer agrupamientos con los cubos en bases diferentes.
2. Trabajar los conceptos de unidades de orden superior con un apoyo concreto.
3. Llegar a comprender el valor posicional de las cifras, así, al cubo se le supone un valor diferente al de un barra.
4. Realizar las operaciones de adición y sustracción.
5. Trabajar los conceptos de doble y mitad.
6. Iniciar de manera manipulativa las operaciones de multiplicación y división.
7. Ayudar a la resolución de problemas cotidianos con las operaciones con números naturales.
8. Trabajar las fracciones y números decimales.
9. Afianzar los conceptos introducidos con otros recursos.
10. Utilizar los bloques como unidades de medida de longitud, superficie y volumen.

Este material puede ser sustituido por otros de fabricación propia que permitan la misma conceptualización mediante una manipulación semejante. Hemos de tener en cuenta que lo que se pretende es tener un soporte manipulable en el que se pueda distinguir los diferentes órdenes del Sistema de Numeración a partir de su tamaño o aspecto externo. Así, por ejemplo, los garbanzos pueden recrear las unidades y con bolsitas se pueden agrupar los órdenes superiores (una bolsita de 10 garbanzos será una decena, una caja con 10 bolsitas de las anteriores será una centena…). Los macarrones (o palitos de plástico del café) representan las unidades y con hilo se pueden ensartar y agrupar en función de los órdenes (10 macarrones enhebrados forman una decena, una bolsa con 10 de los anteriores forma una centena…).

4.2.2. Ábacos

Un ábaco es una herramienta que sirve para representar números de manera posicional y para el cálculo manual de operaciones aritméticas. Generalmente, consiste en un soporte horizontal con varillas verticales por donde se deslizan bolas o aros o fichas perforadas, etc.; en adelante optaremos por nombrarlas bolas. Se pueden representar números en la base que se quiera, y cada varilla de bolas representa de derecha a izquierda las unidades simples o de primer orden, las unidades de segundo orden y así sucesivamente.

Para representar un determinado número con este material se tienen que colocar las bolas correspondientes al número en la primera varilla de la derecha, sustituyendo cada grupo de *b* bolas de una varilla por una bola en la varilla inmediata a su izquierda (cada *b* unidades de un orden por una unidad del orden siguiente).

Hay de diferentes tipos:

1. Ábacos cerrados, las varillas de los cuales tienen forma de U invertida. Pueden tener 10 o 20 bolas por guía (figura 17).

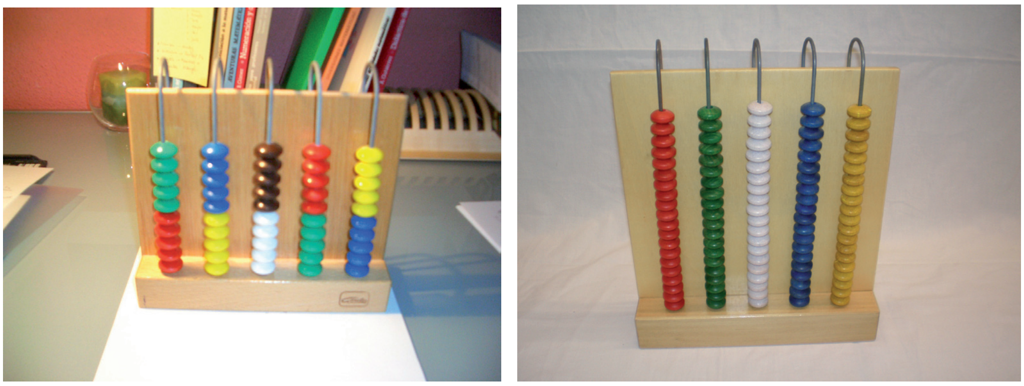


Figura 17. Ábacos verticales cerrados de 10 bolas (izquierda) y 20 bolas (derecha) (fabricados por Goula)

   Los de 10 bolas no permiten realizar operaciones llevadas en el SND, solo se usan para representar números y para operaciones sin llevar.

   Los de 20 bolas sí lo permiten, pero debemos tener cuidado en la identificación errónea de que los niños pueden hacer del color de las bolas de los diferentes órdenes de unidades. Así, es conveniente utilizar ábacos que no tengan los mismos colores de bolas para los mismos órdenes de unidades o ábacos que utilizan bolas de un mismo color para todos los órdenes de unidades o ábacos que no tengan en cada varilla todas las bolas del mismo color.

2. Ábacos abiertos, las varillas de los cuales son completamente verticales y en las que se pueden poner bolas o aros combinando los colores de forma que se evitan los problemas mencionados por los ábacos cerrados (figura 18).

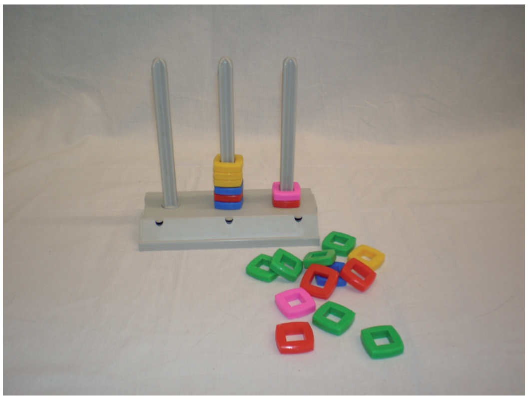


Figura 18. Ábaco vertical abierto de 3 varillas en el que se ha representado el número 62 (fabricado por Nathan)

Como se puede observar en las figuras 17 y 18, hay ábacos de diferente número de varillas. Podemos conseguir expresar cantidades grandes alineando más de un ábaco.

Muchos de los objetivos que se han descrito para los bloques multibase se pueden trabajar igualmente con los ábacos que exigen un nivel de abstracción numérica más elevado, dado que el tamaño de las bolas no nos informa de su valor, sino que es necesario tener clara su posición para conocerlo.

De manera semejante al último apartado de los bloques multibase, los ábacos comercializados pueden ser sustituidos por otros fabricados con materiales propios. Por ejemplo, en una base de corcho se incrustan verticalmente lápices y se utilizan anillas (de madera, de plástico, de cartón…) para representar las unidades de los diferentes órdenes. También se pueden utilizar ábacos planos mediante el dibujo de columnas que se rellenan con garbanzos, botones u otros objetos que indican la cantidad de las distintas unidades. En la parte de arriba o de abajo de cada columna se escribirá la inicial correspondiente al nombre de las unidades de cada orden.

4.2.3. Las regletas Cuisenaire

Las regletas Cuisenaire son un material matemático cuyos objetivos son que los niños y las niñas aprendan la composición y la descomposición de los números e iniciarlos en las actividades de cálculo, todo ello sobre una base manipulativa. El material consta de un conjunto de regletas de madera o plástico (prismas cuadrangulares) de 1 cm^2 de sección, de diez longitudes que van de 1 a 10 cm y de 10 colores diferentes asociados cada uno a una determinada longitud. Cada regleta representa un número determinado:

- La regleta blanca, con 1 cm de longitud, representa el número 1.
- La regleta roja, con 2 cm, representa el número 2.
- La regleta verde claro, con 3 cm, representa el número 3.
- La regleta rosa, con 4 cm, representa el número 4.
- La regleta amarilla, con 5 cm, representa el número 5.

- La regleta verde oscuro, con 6 cm, representa el número 6.
- La regleta negra, con 7 cm, representa el número 7.
- La regleta marrón, con 8 cm, representa el número 8.
- La regleta azul, con 9 cm, representa el número 9.
- La regleta naranja, con 10 cm representa el número 10.

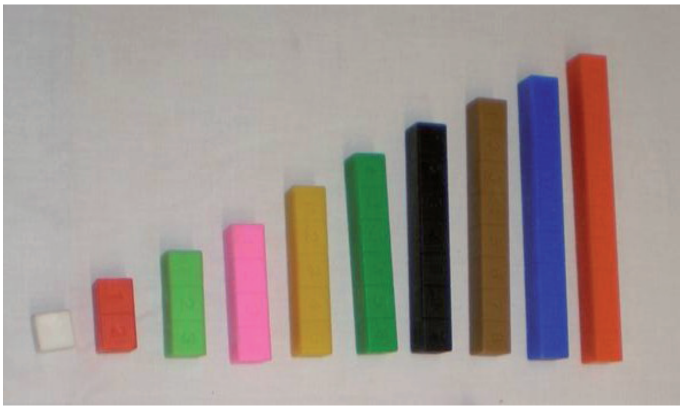


Figura 19. Regletas Cuisenaire ordenadas del 1 al 10 (fabricadas por Lado)

Los objetivos que queremos conseguir con este material son:

1. Asociar la longitud con el color correspondiente.
2. Completar la serie numérica del 1 al 10 de manera ascendente y descendente.
3. Comprobar la relación de inclusión de la serie numérica.
4. Trabajar manipulativamente las relaciones «mayor que», «menor que» los números basándose en la comparación de longitudes.
5. Realizar composiciones y descomposiciones de números.
6. Construir la décima y trabajar los números de dos cifras.
7. Iniciar las operaciones de adición y sustracción de manera manipulativa.
8. Comprobar empíricamente las propiedades conmutativa y asociativa de la adición.
9. Iniciar la multiplicación.
10. Comprobar empíricamente las propiedades de la multiplicación.
11. Iniciar la división.
12. Iniciarlos en los conceptos doble y mitad.
13. Introducir fracciones y decimales.
14. Trabajar la divisibilidad.

4.3. Capacidades a desarrollar en el aula de Primaria

Cómo establecer los primeros pasos de una manera secuencial y adecuada a 1.[er] ciclo de Educación Primaria respecto de los Números Naturales también es el objetivo del tema, contribuyendo a desarrollar en el alumnado las siguientes capacidades:

1. Clasificar conjuntos según su cardinal.
2. Ordenar conjuntos según su cardinal y ordenar los cardinales de estos conjuntos. Contar progresiva y regresivamente.

3. Descubrir las reglas de los sistemas de numeración posicionales a partir de la agrupación de objetos. Verbalizar y representar gráficamente los agrupamientos realizados.
4. Introducir el SND. Construir las unidades de los diferentes órdenes (decenas, centenas...): cifras y números. Leer y escribir números naturales.
5. Descomponer los números naturales atendiendo al valor posicional de sus cifras, llegando a expresarlos en forma polinómica.
6. Ordenar números naturales. Introducir el vocabulario y la notación correspondientes. Contar progresiva y regresivamente.
7. Reflexionar sobre los diferentes usos de los números naturales en situaciones cotidianas.
8. Leer y escribir cantidades en el sistema de numeración romano.
9. Introducir el sistema de numeración sexagesimal.

4.4. Desarrollo de las capacidades

En este apartado se recorren por orden creciente de dificultad los procedimientos para la construcción de los conceptos que se trabajan en el tema, desde el primer contacto que los niños tienen con ellos en el aula, hasta al grado de adquisición de los mismos que se puede alcanzar al finalizar esta etapa.

En general, trabajaremos a partir de situaciones reales que se plantean y se desarrollan en el aula y en el entorno, y tendremos que aprovechar las experiencias anteriores de los niños y niñas para cogerlas como punto de partida para la construcción de los conceptos matemáticos correspondientes. En este proceso deberemos tener en cuenta la necesidad de partir de actividades manipulativas/experimentales que, acompañadas de la necesaria verbalización, se dirigirán hacia la representación matemática de los conceptos y también hacia la abstracción que puedan conseguir estos alumnos.

Los materiales didácticos específicos son una ayuda que siempre hay que tener en el aula de Educación Primaria como complemento de las situaciones antes mencionadas, para que su uso posibilite la creación de referentes gráficos e imágenes mentales a los que recurrir cuando se intenta hacer cualquier paso hacia la abstracción.

Hay que invertir tiempo para conocer las posibilidades que un material ofrece, pensar actividades para desarrollar las potencialidades de los alumnos de Educación Primaria y, evidentemente, trabajar las capacidades que se estudian a continuación.

Se conseguirá dotar un aula de Educación Primaria con el material didáctico necesario, bien comprándolo en tiendas especializadas, o bien construyéndolo el propio docente con ayuda del alumnado y/o de los familiares.

1. Clasificar conjuntos según su cardinal

Lo que se pretende ahora es comprobar si tienen interiorizado el concepto de número asociado a la idea de cantidad y si son capaces de considerar esta como una propiedad característica de los conjuntos que les permite agruparlos para formar clases de conjuntos equivalentes.

Al principio de 1.^{er} curso de Primaria se continuará el trabajo iniciado en Educación Infantil, porque se trata de profundizar en el conocimiento del concepto de número, para conseguir que el alumnado lo integre de manera natural en su pensamiento, dado que el número es un concepto que siempre está presente en la realidad.

Podemos desarrollar este trabajo a partir de un material preparado, buscado o construido por nosotros mismos en el que, junto con cualidades como colores, formas, etc., aparezca también la cantidad como una más de las características de las piezas que componen el material. Por ejemplo, preparamos 24 bolsas y 24 vasos de plástico transparente, con 3, 4 o 5 caramelos del mismo tipo (con palo o sin palo) y del mismo sabor (fresa, naranja, lima o sandía) en cada recipiente. Será necesario que los clasifiquen de todas las maneras posibles que se les pueda ocurrir. En un primer momento el criterio elegido será el sabor, el tipo de caramelo o el de recipiente, para hacer las clases de equivalencia. Posteriormente, insistiendo en que continúen clasificando de maneras diferentes a las que ya han hecho, debe aparecer espontáneamente la clasificación por cardinales, es decir, la agrupación de todos los envases que tengan tres caramelos, por un lado, todos los que tengan cuatro, por otro y todos los que tengan cinco por otro.

En este momento es cuando ya han considerado el cardinal del conjunto como una propiedad que puede caracterizar conjuntos y, por tanto, puede servir como criterio para clasificar los conjuntos. Se ha producido de manera natural la asociación cantidad y número, por lo tanto se ha identificado el número con la cantidad que le corresponde.

De manera análoga a lo que ocurre en las clasificaciones anteriores (con palo, los de lima, las bolsas...), podemos poner nombre a cada uno de los conjuntos del último grupo. Así, el nombre que corresponde a la clase de equivalencia formada por todos los envases de tres caramelos podría ser «los de 3». «Los de 4» sería el nombre de la clase formada por los envases con cuatro caramelos y «los de 5» sería el de la clase formada por los de cinco caramelos. Hay que darse cuenta de que estamos haciendo uso de la definición formal de número natural según Cantor (véase la introducción de este tema) y que las clases obtenidas en la última clasificación se han construido al aplicar la relación binaria de equivalencia «tener mismo cardinal». Será pues el número natural lo que caracteriza a todos los conjuntos de una misma clase.

También es conveniente que miren a su alrededor y encuentran situaciones en las que se clasifican conjuntos por su cardinal: envases con huevos, cajas de lápices de colores, de gomas de borrar, paquetes de hojas, etc.

Más adelante trabajaremos esta capacidad utilizando materiales gráficos en los que aparezca el cardinal como una de las características de las piezas del mismo. Por ejemplo, podemos fabricar un material compuesto por fichas de cartulina con dibujos de flores, árboles y setas, de tres colores diferentes y con dos, tres o cuatro dibujos iguales en cada ficha.

Pueden clasificarlas por colores de las figuras de manera bastante fácil. Nuestro interés será que lo hagan también por el número de dibujos de cada ficha, para llegar a los mismos fines que el caso de las actividades manipulativas.

Es imprescindible que el alumnado verbalice todo el trabajo que haga con objetos reales o gráficos y que exprese correctamente las relaciones que se establecen entre las diferentes piezas de los materiales y las igualdades numéricas que se tienen en cuenta para establecer las clases de equivalencia.

2. *Ordenar conjuntos según su cardinal y ordenar los cardinales de estos conjuntos. Contar progresiva y regresivamente*

Como complemento de la capacidad anterior se pretende ahora comprobar si el alumnado de 1.º de Primaria es capaz de ordenar los números que se han estudiado en Educación Infantil.

Comenzaremos comparando las cantidades de elementos de tres conjuntos que pueden o no corresponder a números consecutivos y, después de verbalizar sus desigualdades, se llegará a la expresión del orden entre los números implicados. Por ejemplo, si en la canasta donde los niños y las niñas dejan sus almuerzos tenemos dos bocadillos de paté, cuatro de atún y seis de jamón york, entre otros, ordenarán los conjuntos correspondientes y verbalizarán: hay menos bocadillos de paté que de atún y menos de atún que de jamón york, para poder decir después que dos es menor que cuatro y cuatro es menor que seis. Evidentemente también se podría realizar la comparación inversa y ordenar así los números de mayor a menor. Estas situaciones, que trabajaremos primero con objetos reales y después con representaciones gráficas, irán complicándose hasta que puedan llegar a ordenar nueve conjuntos y, con ellos, los nueve números asociados.

Es importante que completemos estas actividades con otras en las que sea necesario contar ordenadamente diferentes cantidades de objetos para ayudarles a fijar la ordenación de los números de manera natural en su pensamiento. Podemos ayudarnos de juegos o canciones (los elefantes en la tela de la araña, las manzanitas, las botellas...) en las que el conteo se realice tanto progresiva como regresivamente, acompañándolo de la representación real de lo que están cantando, para que no se trate solo de recitar los números sin más, sino de asociarlos a la cantidad de objetos que les corresponde.

3. Contar cantidades elevadas de objetos a partir de su agrupación en conjuntos del mismo cardinal

Para comenzar este trabajo y mostrar la utilidad de la base para hacer conteos de números elevados, podemos provocar una situación de clase en la que los alumnos están organizados por grupos y todos los grupos disponen de la misma cantidad elevada de caramelos, que han de meter en bolsas de plástico para una fiesta de bienvenida en el colegio. Se les pide que preparen las bolsas metiendo en ellas montones del mismo número de caramelos, que será superior a uno para evitar la utilización de una bolsa para cada caramelo, y que digan después en asamblea cuántos caramelos tiene cada grupo expresándolo con ayuda de la cantidad de montones que han hecho (de bolsas que han utilizado) y de la cantidad de caramelos que han metido en cada bolsa (que será la base del sistema que están utilizando para contar).

Si el número de caramelos que proporcionamos a cada grupo es primo (43, por ejemplo) no podrán hacer todos los montones de la misma cantidad y necesariamente deberán explicar y expresar lo que ocurre. De esta manera llegaremos a expresiones del tipo: «tenemos 7 montones de 6 caramelos y nos ha sobrado 1» o «tenemos 8 montones de 5 caramelos y nos han sobrado 3», que pueden abreviarse escribiendo respectivamente: 7m6 s1 o 8m5 s3.

Si el número no es primo (40, por ejemplo) podemos encontrar algún grupo de alumnado al que no le quede ninguna caramelo suelto: «tenemos 6 montones de 6 caramelos y sobran 4» o «tenemos 8 montones de 5 caramelos y no sobra ninguno», que pueden expresarse: 6m6 s4 o 8m5 s0.

En cualquiera de los casos, como saben que cada grupo tenía la misma cantidad de caramelos, se generará un conflicto al comprobar que cada uno ha obtenido una expresión diferente. También podemos plantearles dudas si no les avisamos de que todos los grupos tienen la misma cantidad de caramelos y les pedimos que nos digan si un grupo tiene más caramelos que otro, puesto que no sabrán si fijarse en el número de montones o en el de elementos de cada montón para averiguarlo. Podemos encontrar algunos que piensan «7m6 s1 es mayor que 5m8 s3 porque hay más montones» o de otros que piensan «5m8 s3 es mayor que 7m6 s1 porque los montones son mayores».

La reflexión sobre estos conflictos les tiene que llevar a la necesidad de que todos los grupos hagan los montones de la misma cantidad de caramelos para poder entenderse. Como hace falta que podamos entendernos no solo con los alumnos de la clase sino con todas las demás personas, les preguntaremos cómo cuentan los demás, para llegar a la conclusión de que, de manera universal, las agrupaciones se hacen de 10 en 10. Esta conclusión abre la puerta a la capacidad siguiente y el trabajo específico con el SND.

4. Introducir el SND*. Construir las unidades de los diferentes órdenes (decena, centena...): cifras y números. Leer y escribir números naturales*

De acuerdo con el trabajo realizado en la capacidad anterior y lo que desarrollaremos con esta, el procedimiento para construir el SND en las aulas de Primaria recorrerá las siguientes fases: descubrir la conveniencia de la elección de una base para conteos; reflexionar sobre la necesidad de la unicidad de la base; introducir la base 10 y, a partir de ella, las unidades de los diferentes órdenes, para llegar a la generalización del funcionamiento del SND.

Una vez hemos llegado al 10 como la cantidad a partir de la cual agrupamos los objetos que estamos contando, es decir, como la base del sistema de numeración que vamos a utilizar, es necesario reflexionar en torno a este número que no es solo el que sigue al 9, sino el primero que necesita dos dígitos para escribirlo.

Hasta ahora, siempre que se añadía una unidad a un número conocido, aparecía un nuevo número que se representaba con un solo dígito. Pasó así con el 2 = 1 + 1, el 3 = 2 + 1, ..., el 9 = 8 + 1. No es el caso del diez. Es evidente que el alumnado ya puede conocerlo por ámbitos exteriores al trabajo realizado en clase, o también dentro, cuando el 10 ha aparecido por cualquier motivo circunstancial. Pero habrá que reflexionar que no hay un nuevo dígito, diferente a los anteriores, con el fin de expresar este número sino que su representación está formada por dos dígitos ya conocidos, el 1 y el 0, que nos indican el número de montones que hemos hecho, el 1, y el de unidades que han sobrado, el 0, ordenados de la misma manera que hemos ordenado las expresiones alfanuméricas de los números que han obtenido cuando han agrupado caramelos, es decir, a la izquierda situamos el dígito que indica los montones que hemos hecho y a la derecha el que indica las unidades que han quedado sueltas. Así 9 + 1 = 10, que también se puede expresar como 1 [10] 0, si se hace necesario para facilitar la comprensión de la estructura de este numeral (donde el 10 dentro de los corchetes indica el número de elementos que componen cada agrupación).

En estos momentos, cuando llegamos a números que necesitan más de un dígito para representarlos, debemos introducir el concepto de cifra para referirnos a cada uno de los dígitos individuales que conocemos de Educación Infantil y que utilizaremos a partir de ahora para representar los números mayores que 9.

Para apoyar el aprendizaje de los números podemos utilizar materiales estructurados, como los bloques multibase de Dienes (BM) y los ábacos, ya conocidos. Es el momento de trabajar el funcionamiento de estos materiales cuando representamos el SND (véase 4.2). Así en los BM, cuando añadimos un cubo a otros nueve, obtenemos diez cubos que se sustituirán por un barra. Entonces el 10 simbolizará lo que hay en el material: 1 barra y 0 cubos sueltos (figura 20).

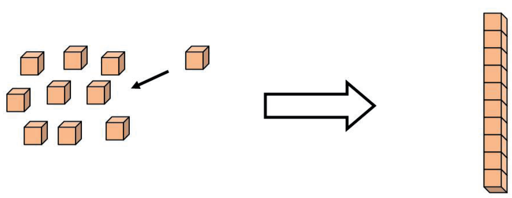


Figura 20. Construcción del 10 con bloques multibase

Con los ábacos, cuando añadimos una bola a las nueve de la primera varilla por la derecha, obtenemos diez bolas que se sustituirán por una en la siguiente varilla a la izquierda. No queda ninguna bola en la varilla de la derecha y una en la de la izquierda. Por lo tanto el paso a la expresión simbólica está claro: el 10 representa el material porque hay 1 bola a la izquierda y ninguna en la de la derecha en las dos primeras varillas contabilizadas de derecha a izquierda (figura 21).

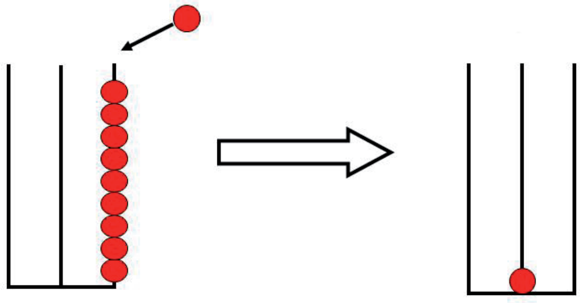


Figura 21. Construcción del 10 con ábacos

Con este trabajo hemos construido una unidad de un nuevo orden, en este caso el segundo, y por tanto hay que trabajar los cuatro aspectos siguientes:

- Nombre: Decena
- Valor: 10 unidades
- Escritura: 10
- Lectura: Diez

A partir de que los niños y niñas conozcan la palabra decena, podemos representar también el diez como 1D 0U, si resulta esclarecedor para el alumnado.

A lo largo de 1.º de Primaria hay que llegar hasta la construcción de la expresión del 99 asociando el trabajo con situaciones en las que aparezcan los diferentes números de dos cifras. Irán construyendo con las ayudas necesarias y se verá cómo se escriben, cómo se leen... Por ejemplo, a partir de la necesidad de saber cuánto alumnado hay entre las dos clases de 1.º de Primaria para hacer una excursión y comprar las entradas del museo que se va a visitar, se plantea averiguar la expresión correcta del número correspondiente. Ante la dificultad de juntarlos en ese preciso momento, la maestra les ofrece una cantidad de cubos de BM equipotente a la cantidad de alumnos que quieren contabilizar (47 en este caso). Les pide que los agrupen intercambiando cubos por barras cuando sea necesario, hasta llegar a la expresión buscada. En las figuras 22 a 26 se muestran los pasos sucesivos para llegar a la expresión final.

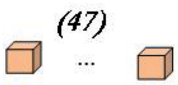


Figura 22. Se disponen los 47 cubos de manera individual

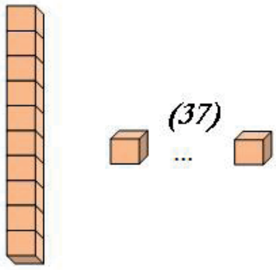


Figura 23. Resultado de la primera agrupación: 1 barra y 37 cubos sueltos

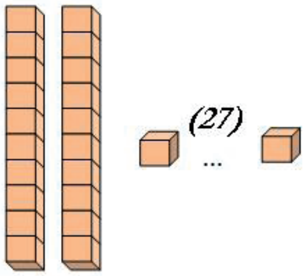


Figura 24. Resultado de la segunda agrupación: 2 barras y 27 cubos sueltos

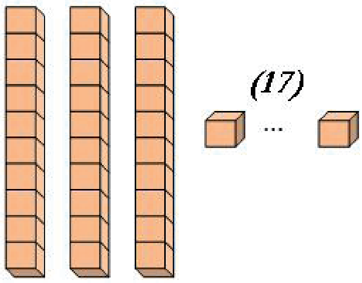


Figura 25. Resultado de la tercera agrupación: 3 barras y 17 cubos sueltos

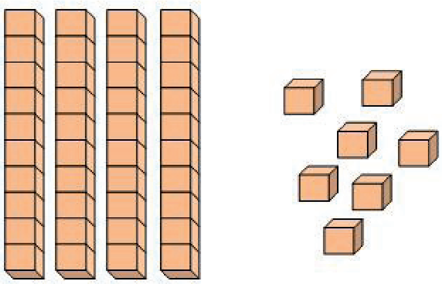


Figura 26. Resultado de la cuarta agrupación: 4 barras y 7 cubos sueltos

En el caso que el material que se utilice en el aula sean los ábacos, se partirá de cuarenta y siete bolas y un ábaco abierto. Cada vez que sitúen 10 bolas en la varilla de las unidades, las sustituyen por 1 en la de las decenas, hasta llegar a tener la representación final. En las figuras 27 a 31 se muestran los pasos sucesivos para llegar a la expresión final.

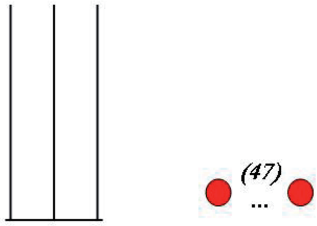


Figura 27. Se disponen las 47 bolas de manera individual al lado de un ábaco

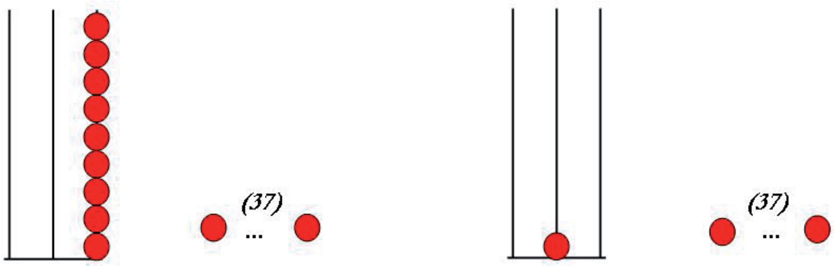


Figura 28. Proceso y resultado de la primera agrupación: 1 bola en la varilla de les decenas y 37 bolas sueltas

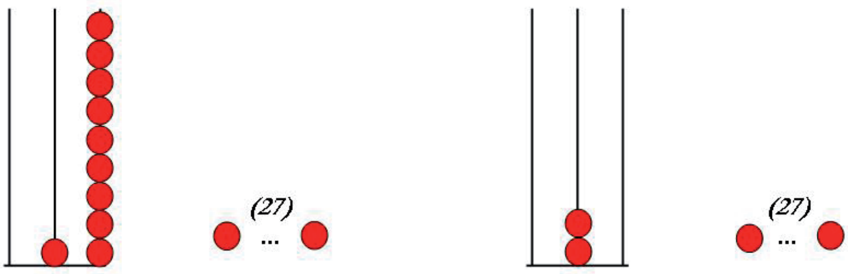


Figura 29. Proceso y resultado de la segunda agrupación: 2 bolas en la varilla de les decenas y 27 bolas sueltas

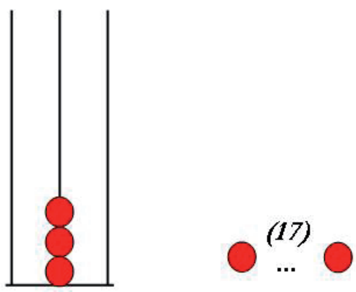


Figura 30. Resultado de la tercera agrupación: 3 bolas en la varilla de les decenas y 17 bolas sueltas

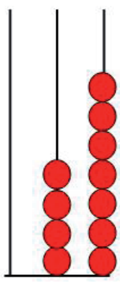


Figura 31. Resultado de la cuarta agrupación: 4 bolas en la varilla de les decenas y 7 bolas en la de les unidades

M. Alcalde / I. Pérez / G. Lorenzo - ISBN: 978-84-695-9565-7 Los Números Naturales en el aula de Primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia90
Índice

En todo este proceso de construcción de los números se puede usar, en los primeros momentos o cuando aparezcan dificultades, las escrituras intermedias mencionadas anteriormente que se puedan identificar con los materiales más intuitivamente que la representación estándar y que refuerzan el procedimiento por el que se van agrupando y creando las expresiones numéricas en el SND. En el ejemplo anterior, el cuarenta y siete, se puede representar por 4 [10] 7 (usando la lógica de 4 barras y 7 cubos, o bien de 4 bolas en la segunda varilla y 7 en la primera, si es que se usaron ábacos) o bien por 4D 7U (usando los nombres de las unidades de los diferentes órdenes del SND).

Cuando se produce el cambio a la decena siguiente, del 19 al 20, del 29 al 30..., pueden aparecer dificultades. Es necesario que quede muy claro que, por ejemplo, al añadir una unidad al 19 obtiene un nuevo grupo de 10 unidades, que nos permite formar una nueva decena y, por tanto, obtener el 20 (figuras 32 y 33).

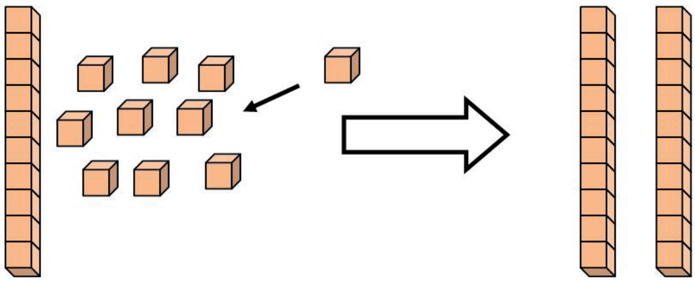


Figura 32. Representación con BM de la construcción de la segunda decena

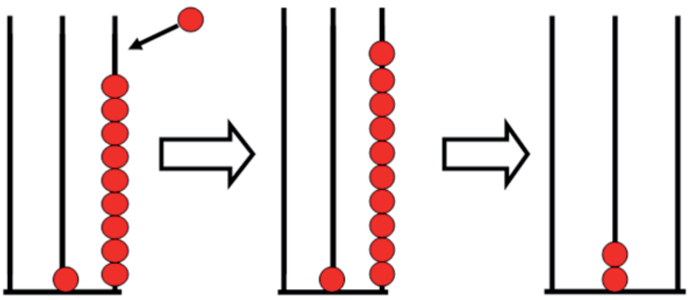


Figura 33. Representación con ábacos de la construcción de la segunda decena

En cualquiera de los dos casos, hay que hacer un esfuerzo para trasladar a la escritura numérica lo que se está trabajando con los materiales y se ha verbalizado con el alumnado, obteniendo de esta manera la representación del nuevo número:

$$\begin{array}{r} 1[10]\,9 \\ +\quad\;\; 1 \\ \hline 1[10]\,10 \end{array} \Rightarrow 2[10]\,0 \Rightarrow 20$$

Puede haber algún niño o niña que tenga dudas para entender que 20 > 19 porque 9 es mayor que 0, hay que reflexionar que lo es porque hay una decena más, un agrupamiento más que en 19. También podrían encontrar ayuda en los materiales comparando las piezas que representan cada número y pensando sobre su significado y su valor: dos barras tienen más valor que una barra y nueve cubos, o bien dos bolas en la segunda varilla valen más que una bola en la segunda y nueve en la primera (figuras 32 y 33).

A medida que se van construyendo los números se va viendo cómo se escriben y cómo se leen. Hay dos maneras diferenciadas de trabajarlo que realmente son como dos pasos para llegar a la forma estándar de hacer una escritura y lectura correcta:

1. Escritura y lectura individualizada o por unidades separadas.
2. Escritura y lectura global o estándar.

La primera de las maneras, consiste en denotar cada una de las cifras que componen el número, individualmente según el valor del orden que ocupa. Ejemplo, en el caso del 23 escribiremos 2 [10] 3 y leeremos «dos decenas y tres unidades». Si hay cero, en un primer momento se puede nombrar, pero debemos tender a que no se haga.

En la segunda de las maneras se trata de leer y escribir el número de manera global. Siguiendo con el ejemplo anterior, escribiremos 23 y leeremos «veintitrés».

En 2.º de Primaria se introduce el 100, como 99 + 1. Hay que reflexionar en torno a este número que no es solo el que sigue al 99, sino el primero que necesita tres dígitos para escribirlo.

Hasta ahora, siempre que se añadía una unidad a un número conocido de dos cifras, aparecía un nuevo número que se representaba también con dos cifras. Pasó así con el 12 = 11 +1, el 24 = 23 +1,..., el 99 = 98 +1. No es el caso del cien. Es evidente que el alumnado ya puede conocerlo por ámbitos exteriores al trabajo realizado en clase, o también dentro, cuando el 100 ha aparecido por cualquier motivo circunstancial. Pero habrá que reflexionar que su representación está formada por tres dígitos ya conocidos, un uno y dos ceros.

Para apoyar el aprendizaje de los números podemos utilizar materiales estructurados, como los bloques multibase y los ábacos, ya conocidos. Así en el caso de los BM, partiremos de 9 barras y 9 cubos y añadiremos otro cubo. Según hemos visto en la construcción de la decena, al agrupar los diez cubos sueltos obtenemos una nueva barra. Siguiendo el esquema de funcionamiento del SND, habrá que agrupar las 10 barras que ahora tenemos y sustituirlas por una placa, que representa la unidad de orden siguiente. Entonces el 100 simbolizará lo que hay en el material: 1 placa, 0 barras y 0 cubos sueltos (figura 34).

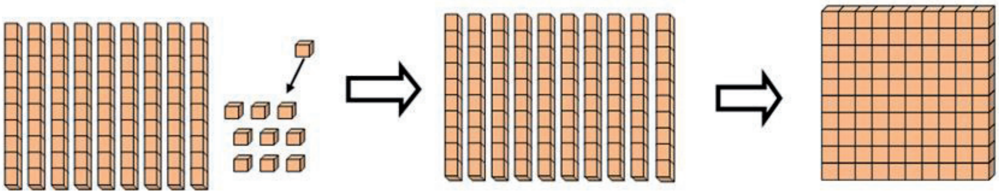


Figura 34. Construcción del 100 con BM

Con los ábacos, partiremos de uno con nueve bolas en la varilla de las decenas y nueve en la de las unidades. Cuando añadimos una bola a las nueve de la primera varilla por la derecha, obtenemos diez bolas que se sustituirán por una en la varilla de las decenas. Quedan diez bolas en la varilla de las decenas y ninguna en la de las unidades. De manera análoga al caso de los BM, sustituiremos las 10 decenas por una nueva bola en la varilla siguiente de la izquierda, que representa una unidad de tercer orden. Por lo tanto el paso a la expresión simbólica está claro: el 100 representa el material porque hay 1 bola en la tercera varilla, a contar por la derecha, ninguna en la segunda y ninguna en la primera (figura 35).

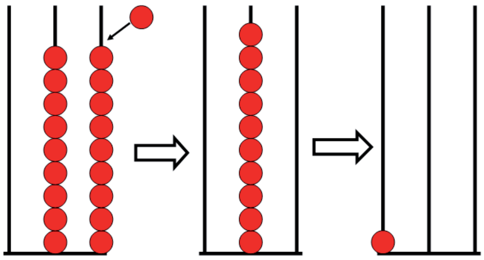


Figura 35. Construcción del 100 con ábacos

En cualquiera de los dos casos, hay que hacer un esfuerzo para trasladar a la escritura numérica lo que se está trabajando con los materiales y se ha verbalizado con el alumnado. En todo este proceso pueden aparecer representaciones similares a las siguientes:

$$\begin{array}{r} 9[10]\,9 \\ +\quad\ 1 \\ \hline 9[10]\,10 \end{array}$$

Como estamos en 2.º curso de Educación Primaria y se ha trabajado ya la adición, no es novedad la simbología que aparece. Rápidamente se darán cuenta que no es una representación correcta y apoyándose en el material llegamos a:

$$10[10]\,0$$

Continuando con el esquema de funcionamiento del SND, deberá sustituirse en la representación numérica las diez unidades de segundo orden por una del tercero, como hemos hecho en el material y expresaremos el 100 con ayuda de las unidades separadas, si es necesario, de la siguiente manera:

$$1[100]\,0[10]\,0$$

Como es una unidad de orden nueva, de manera análoga a la decena, hay que trabajar los cuatro aspectos siguientes:

- Nombre: Centena
- Valor: 10 decenas (100 unidades)
- Escritura: 100
- Lectura: Cien

La continuación del trabajo anterior es construir los números siguientes añadiendo unidades al 100. A lo largo de 2.º de Primaria hay que llegar hasta la construcción del 999 asociando el trabajo con situaciones en las que aparezcan los diferentes números de tres cifras. Irán construyendo con las ayudas necesarias y se verá cómo se escriben, cómo se leen... Por ejemplo, a partir de la necesidad de saber cuánto de alumnado hay entre las seis clases de la etapa de Primaria para encargar máscaras para el carnaval, se plantea averiguar la expresión correcta del número correspondiente. Ante la dificultad de juntarlos en ese preciso momento, la maestra les ofrece una cantidad de cubos de BM equipotente a la cantidad de alumnos que quieren contabilizar (147 en este caso). Les pide que los agrupan intercambiando cubos por barras y barras por placas cuando sea necesario, hasta llegar a la expresión buscada, que será la que aparece en la figura 36.

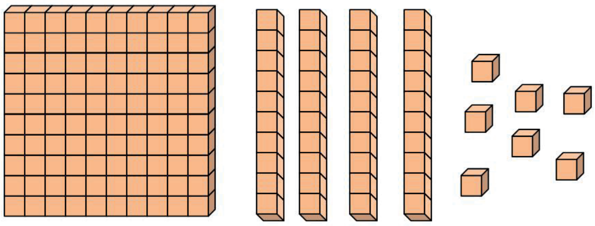


Figura 36. Representación de 147 con BM

En el caso de que el material que se utilice en el aula sea los ábacos, se partirá de ciento cuarenta y siete bolas y un ábaco abierto. Cada vez que sitúan 10 bolas en la varilla de las unidades, las sustituyen por 1 en la de las decenas. De la misma manera, cuando existan diez bolas en la varilla de las decenas se sustituirán por una en la de las centenas, hasta llegar a tener la representación final, que será la que aparece en la figura 37.

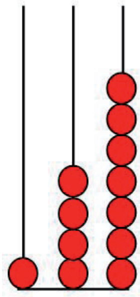


Figura 37. Representación de 147 con ábacos

Habrá que tener un especial cuidado en el paso de 109 a 110, y ayudándonos de los materiales didácticos y las posteriores verbalización y simbolización se intentará solucionar. En estos casos, solo es necesario reflexionar con los alumnos sobre la construcción de una nueva decena. Los siguientes pasos, de 119 a 120, 129 a 130... no suelen tener problemas.

A lo que sí habrá que dedicarle tiempo es el paso de 199 a 200, donde se deberá reflexionar con el alumnado la construcción de una nueva centena, que surgirá en el momento que se añade una unidad al 199 y se genere un grupo de diez decenas. En las figuras 38 y 39 se muestran las construcciones del 200 con BM y ábacos, respectivamente.

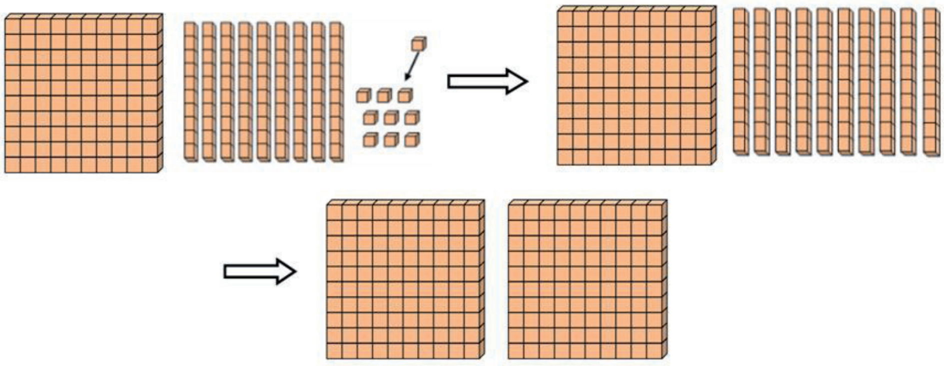


Figura 38. Construcción del 200 con BM

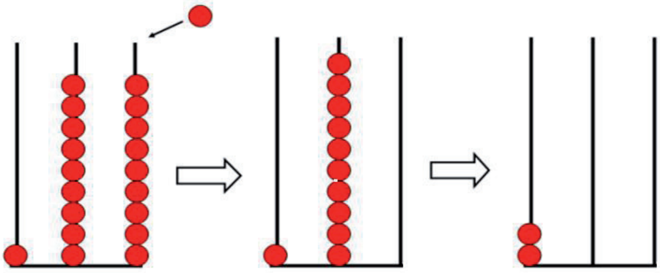


Figura 39. Construcción del 200 con ábacos

En cualquiera de los dos casos, hay que hacer un esfuerzo para trasladar a la escritura numérica lo que se está trabajando con los materiales y se ha verbalizado con el alumnado, obteniendo de esta manera la representación del nuevo número:

$$\begin{array}{rl} & 1[100]\ \ 9[10]\,9 \\ + & \qquad\qquad 1 \\ \hline & 1[100]\,10[10]\,0 \ \Rightarrow\ 2[100]\,0[10]\,0 \Rightarrow 200 \end{array}$$

Las expresiones numéricas con unidades separadas se usarán, mientras sea necesario, para facilitar al alumnado la comprensión de la construcción de los números. Además, se trabajará la escritura y la lectura de los números de acuerdo con las consideraciones mencionadas anteriormente (con unidades separadas y de manera estándar).

Así se llegará al final del Primer Ciclo hasta el 999, siendo capaces de escribir cualquier número del 0 al 999.

En 3.º de Primaria se introduce el 1000, como 999 + 1. Hay que reflexionar en torno a este número que no es solo el que sigue al 999, sino el primero que necesita cuatro dígitos para escribirlo.

Hasta ahora, siempre que se añadía una unidad a un número conocido de tres cifras, aparecía un nuevo número que se representaba también con tres cifras. Pasó así con el 137 = 136 + 1, el 245 = 244 + 1,..., el 999 = 998 + 1. No es el caso del mil. Es evidente que el alumnado ya puede conocerlo por ámbitos exteriores al trabajo realizado en clase, o también dentro, cuando el 1.000 ha aparecido por cualquier motivo circunstancial. Pero habrá que reflexionar que su representación está formada por cuatro dígitos ya conocidos, un uno y tres ceros.

De manera análoga a la decena y a la centena, si se considera necesario y para apoyar el aprendizaje de los nuevos números, podemos utilizar los materiales didácticos habituales. Así en el caso de los BM, partiremos de 9 placas, 9 barras y 9 cubos y añadiremos otro cubo. Según hemos visto en las construcciones de la decena y la centena, al agrupar los diez cubos sueltos obtenemos una nueva barra que con las nueve que ya teníamos forman una placa. Siguiendo el esquema de funcionamiento del SND, habrá que agrupar las 10 placas que hemos conseguido y sustituirlas por un bloque, que representa la unidad de orden siguiente. Entonces el 1.000 simbolizará lo que hay en el material: 1 bloque, 0 placas, 0 barras y 0 cubos sueltos (figura 40).

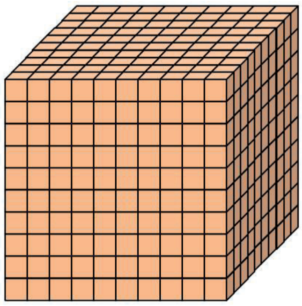


Figura 40. Representación del 1.000 con BM

Con los ábacos, partiremos de uno con nueve bolas en la varilla de las centenas, nueve en la de las decenas y nueve en la de las unidades. Cuando añadimos una bola a las nueve de la primera varilla por la derecha, obtenemos diez bolas que se sustituirán por una en la de las decenas. Quedan diez bolas en la varilla de las decenas y ninguna en la de las unidades. De manera análoga al caso de los BM, sustituiremos las 10 decenas por una nueva bola en la varilla siguiente de la izquierda, que representa una unidad de tercer orden. En este momento hay diez bolas en la de las centenas. Se hace necesario transformar estas en otra en la siguiente varilla, obteniendo una unidad de orden siguiente, el cuarto. Por lo tanto el paso a la expresión simbólica está claro: el 1.000 representa el material porque hay 1 bola en la cuarta varilla, a contar por la derecha, ninguna bola en la tercera, ninguna bola en la segunda y ninguna bola en la primera (figura 41).

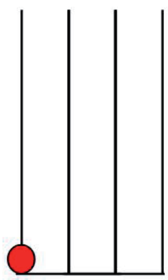


Figura 41. Representación del 1.000 con ábacos

En cualquiera de los dos casos, hay que hacer un esfuerzo para trasladar a la escritura numérica lo que se está trabajando con los materiales y se ha verbalizado con el alumnado, obteniendo de esta manera la representación del nuevo número:

$$
\begin{array}{r}
999 \\
+\quad 1 \\
\hline
1.000
\end{array}
$$

Como es una unidad de orden siguiente, de manera análoga a los anteriores, hay que trabajar de nuevo los cuatro aspectos:

- Nombre: Unidad de Millar
- Valor: 10 centenas (100 decenas o 1.000 unidades)
- Escritura: 1.000
- Lectura: Mil

Matemáticamente, para indicar este orden de unidades, se usa un punto entre la cuarta y la tercera cifra. Hay que notar que una expresión de este tipo dentro de una oración escrita puede inducir a error. Por ello desde un punto de vista filológico se recomienda no poner el punto en estos casos.

Análogamente a lo que se ha desarrollado para las decenas y las centenas se construyen los números de cuatro cifras superiores a 1.000, con la ayuda de los materiales didácticos cuando sea necesario, y se trabaja la escritura y la lectura de los números de acuerdo con las consideraciones mencionadas anteriormente (con unidades separadas en su caso y de forma estándar).

A lo largo del 2.º ciclo se debe trabajar también los números de cinco y seis cifras hasta llegar a 999.999, insistiendo en la formación de las unidades de los órdenes siguientes a la unidad de millar: decenas de millar y centenas de millar, y con la ayuda de los materiales didácticos si se considera necesario. En el 3.er ciclo se acaba de desarrollar el SND, trabajando los números a partir del millón.

5. *Descomponer los números naturales atendiendo al valor posicional de sus cifras, llegando a expresarlos en forma polinómica*

Al mismo tiempo que se trabaja la capacidad anterior y relacionado con la lectura y escritura de los números, aprovecharemos el conocimiento de la adición que el alumnado va adquiriendo desde el 1.er curso de la etapa para descomponer los números usando esta operación y el valor posicional de las cifras que lo componen. Esta forma de representar los números nos puede ayudar, durante los primeros cursos de Primaria, en el trabajo de desarrollo del cálculo mental y también en la enseñanza aprendizaje de los algoritmos de las operaciones.

Así, empezaremos con los números de dos y tres cifras acompañando las diferentes maneras de escribirlos y leerlos trabajadas anteriormente con su representación aditiva:

$$7[10]\ 8 = 70 + 8 \text{ o } 78 = 70 + 8$$

$$6[100]\ 7[10]\ 8 = 600 + 70 + 8 \text{ o } 678 = 600 + 70 + 8.$$

Los primeros pasos de este trabajo pueden darse con la ayuda de los materiales didácticos que hemos utilizado. Habrá que observar la equivalencia entre los valores de las diferentes piezas de la representación de los números con los BM y las diferentes representaciones numéricas que les correspondan, así como entre los valores de las bolas según su posición en el caso de los ábacos y las representaciones numéricas asociadas.

En el 2.º ciclo, cuando trabajamos números más grandes, utilizaremos también esa forma de representación hasta que el alumnado conozca la multiplicación por la unidad seguida de ceros. A partir de este momento, cada cifra irá acompañada del uno con tantos ceros como sean necesarios para indicar el orden de la unidad que representa, es decir, para resaltar el valor posicional de cada una de las cifras. Llegaremos así a una representación aditiva-multiplicativa que cambiará una expresión del tipo siguiente:

$$45.678 = 40.000 + 5.000 + 600 + 70 + 8$$

por una del tipo:

$$45.678 = (4 \times 10.000) + (5 \times 1.000) + (6 \times 100) + (7 \times 10) + 8.$$

Trabajaremos con estas expresiones hasta que, en el 3.er ciclo de Primaria, se introduzca la potenciación, con la que podremos transformar las últimas expresiones en otras que utilizan las potencias de la base del SND para indicar el valor posicional de las cifras que componen los números. Así, la expresión anterior se convertirá en:

$$45.678 = (4 \times 10^4) + (5 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (7 \times 10) + 8.$$

Como se ha mencionado en el punto 3.2.2, esta expresión se denomina descomposición polinómica de un número y nos sirve para reforzar con el alumnado, de una manera más clara y sistemática que las representaciones anteriores, el valor intrínseco que tiene cada una de las cifras en un número cualquiera según su posición.

Mientras los niños y niñas no conozcan la jerarquía de las operaciones, se deberá utilizar los paréntesis para clarificar las expresiones. Una vez se haya trabajado en el 3.er ciclo, se puede prescindir de estos y escribir las expresiones polinómicas de la siguiente manera:

$$45.678 = 4 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 7 \times 10 + 8.$$

6. Ordenar números naturales. Introducir el vocabulario y la notación correspondientes. Contar progresiva y regresivamente

En esta capacidad completaremos el conocimiento de los Números Naturales estudiando su aspecto ordinal y trabajando, por lo tanto, cómo están ordenados tanto desde el punto de vista procedimental, como desde el que se refiere a su nomenclatura.

Tendremos que empezar en el 1.er ciclo con el repaso de la ordenación de los números de una cifra que se ha trabajado en Educación Infantil. Aprovecharemos situaciones cotidianas de comparación numérica para trabajar con el alumnado las reglas de ordenación de los números. Por ejemplo, hay que repartir hojas con ejercicios. Hemos hecho 32 fotocopias y hay en clase 23 alumnos. Se les pide que contesten si sobrarán fotocopias para el alumnado que no han venido hoy a clase, es decir, queremos saber si 32 es mayor o menor que 23.

La manera inicial de averiguarlo será mediante una correspondencia uno a uno entre el alumnado y las fotocopias, por la que podrán contestar a la pregunta con la seguridad de saber que sí sobrarán fotocopias para los niños y niñas que no han venido hoy.

Posteriormente habrá que plantearse en clase la siguiente pregunta: «¿Podríamos saber cuál de los dos números es mayor comparando sus expresiones numéricas?». Para responder podemos ayudarnos del análisis de la representación de los dos números con los BM y/o los ábacos, mediante la cual observaremos las diferentes cifras que los componen y sus valores en función de las posiciones que ocupan, llegando a la conclusión de que 32 es mayor porque tiene tres decenas, mientras que 23 solo tiene dos.

La realización de más comparaciones de este tipo y la reflexión sobre los diferentes resultados que van obteniendo nos debe conducir al descubrimiento de las dos reglas siguientes:

- Si un número natural tiene más cantidad de cifras que otro, el primero es mayor que el segundo, porque contiene unidades de orden superior.
- Si dos números tienen la misma cantidad de cifras, habrá comparar estas comenzando de izquierda a derecha por las unidades de mayor orden, hasta llegar a dos cifras que sean diferentes. El número que contenga la cifra más alta de estas dos será el mayor.

Estas reglas se repasarán y se utilizarán en los siguientes ciclos de manera habitual para ordenar parejas de números naturales de cualquier cantidad de cifras. Así, siendo capaces de ordenar cualquier pareja de números, podremos llegar a tener ordenada la serie numérica de los números naturales que se trabajan en cada uno de los cursos de la etapa.

Como complemento de este trabajo, tendremos que introducir, a lo largo de la Etapa, el vocabulario y la notación asociadas a los ordinales. Por tanto, en el 1.er ciclo, revisaremos con el alumnado los nombres y las notaciones de los nueve primeros ordinales que conocen de Educación Infantil y añadiremos los de los siguientes: décimo (10.º), undécimo (11.º), duodécimo (12.º), decimotercero (13.º), etc., teniendo en cuenta que algunos ordinales de las potencias de 10 se pueden escribir y leer también terminados en -ésimo: centésimo, milésimo... Se deberá tener especial atención a las diferencias entre el valenciano y el castellano (se suponen conocidas por el lector). Habrá también que introducir los signos que nos permiten representar las comparaciones entre los números ($>$, $<$, $=$, $\neq$).

Respecto de contar, hay que hacer recuentos de 1 en 1, de 2 en 2,..., de 9 en 9, que mejorarán su conocimiento de la serie numérica natural y con la intención de que posteriormente les valga para memorizar la tabla de multiplicar y de 10 en 10, de 100 en 100..., para reforzar el SND.

7. Reflexionar sobre los diferentes usos de los números naturales en situaciones cotidianas

El objetivo que nos marcamos en el desarrollo de esta capacidad es que el alumnado observe la presencia casi constante de los números en su vida y que reconozca la utilidad de los mismos en cualquier situación cotidiana.

Trabajaremos a lo largo de todos los cursos de Primaria a partir de conversaciones entre ellos y ellas, lecturas de diferentes textos, explicaciones de distintas situaciones, producciones escritas por el alumnado..., para hacerles reflexionar acerca del momento en el que aparecen los números y cuál es su importancia en cada caso. Como actividad complementaria podemos intentar desarrollar el trabajo del aula durante una mañana sin utilizar ningún número, para darse cuenta de la dificultad que supondría prescindir de ellos.

La intención última es que los niños y niñas usen los números, que se den cuenta de que los están usando y que los sepan encontrar en situaciones en las que pueden aparecer, así como reconocer los diferentes usos que se hace de ellos: contar, ordenar, medir, operar e identificar o codificar.

8. Leer y escribir cantidades en el sistema de numeración romano

El sistema de numeración romano ha perdurado en nuestra sociedad en usos y contextos muy definidos como son: notación de los siglos, capítulos de libros, eventos (jornadas, congresos...), acompañando los nombres de algunos personajes importantes, etc.

Esto justifica su introducción hacia el 3.^er^ ciclo de Primaria. Será necesario que conozcan los símbolos numéricos y los valores correspondientes, así como las reglas que rigen su uso en la representación de los números (véase 3.1).

Para poder interpretar y producir representaciones numéricas en las que aparezcan números romanos, deberán trabajar en clase la equivalencia entre este sistema y el SND, siendo capaces de trasladar de un sistema a otro cantidades que llegan hasta los miles.

9. Introducir el sistema de numeración sexagesimal

El sistema de numeración sexagesimal se ha mantenido desde la antigüedad hasta nuestros días en dos contextos muy concretos: la medida del tiempo y la medida de la amplitud angular. Es cierto que, tanto en un ámbito como en el otro, cuando una medida concreta queda expresada en los diferentes órdenes de las unidades, todas estas no se encuentran en el sistema sexagesimal. Así por ejemplo, en el caso del tiempo, si hablamos de 2 días 4 h 30 min 8 s, los minutos y los segundos se encuentran expresados en el sistema sexagesimal, pero los días y las horas no. De la misma manera 45 º 23'45'', en la medida de la amplitud angular, los minutos y los segundos están expresados en el sistema sexagesimal, pero los grados no.

Dentro del bloque de magnitud y medida se encuentran estos ámbitos para trabajar con los alumnos de Primaria, y es por ello que en el 3.er ciclo hay que hacer un trabajo del sistema sexagesimal para poder concretarlo en los contextos mencionados (véase 3.1).

Tanto en el tiempo como en la amplitud angular, las medidas pueden ser expresadas como los ejemplos que se han ilustrado en este apartado (llamada la forma incompleja), o bien en el SND. Para esta última, hay que elegir un orden concreto y transportado el resto de órdenes a este (forma compleja).

TEMA 2

Operaciones con Números Naturales

En este tema se trabaja el tratamiento didáctico de la adición, sustracción, multiplicación y división con números naturales en el aula de Primaria mediante una propuesta didáctica de cuatro fases para su desarrollo. De acuerdo con éstas, se parte de la conexión de la operación con situaciones reales para darle significado. Se continúa simbolizando matemáticamente el resultado de las correspondientes acciones con los objetos reales y trabajando los algoritmos a partir de las ideas previas del alumnado y de sus propuestas personales para las diferentes operaciones aritméticas. También se abordan la resolución y la invención de problemas asociados a cada operación.

1. Introducción

Parece lógico pensar que lo inmediato, una vez se ha introducido el concepto de *número* y el de SND, debería ser el trabajo de operar con números naturales y signos aritméticos. Pero esta tarea requiere un nivel de abstracción superior al que se necesita para analizar adecuadamente las acciones con objetos, que pueden ser más intuitivas y, probablemente, no se las encuentra el alumnado en la escuela por primera vez.

Se puede afirmar, por tanto, que hay dos tipos de situaciones en referencia con el hecho «de operar». Unas serían extraescolares, por tanto, naturales, intuitivas y menudo necesarias (se deberían llamar también estas acciones *cálculo mental*, debido a que no se dispondrá en el momento de lápiz y papel). Otras son las escolares, donde muchos de los esfuerzos se encaminan a averiguar mecanismos para construir y aprender los algoritmos (conjunto sistemático de acciones que conducen a la obtención de un resultado) que permiten operar. Dos situaciones bien distintas *a priori* y con una respuesta también muy diferente por parte del alumnado.

La escuela, por un lado, debe solucionar esta situación de gran dicotomía, y por otro, debe ser el lugar donde se canalice y se respete el aprendizaje que el niño hace fuera del aula. Al mismo tiempo debe favorecer que este se integre en el conocimiento o «reconocimiento» de las operaciones aritméticas a desarrollar en clase. Y, claro, el objetivo es dotar a este alumno de más herramientas, más capacidades, con el fin de resolver los nuevos problemas que la realidad extraescolar le plantea. Por lo tanto, el esquema se simplifica de este modo: hay que partir de acciones de la realidad, trabajar las abstracciones de estas acciones para dotar a los alumnos de capacidades que, una vez alcanzadas, les permiten resolver nuevas situaciones de la realidad.

El objetivo de la escuela, pues, estará cubierto cuando el alumnado sea capaz de operar con signos matemáticos y reconozca la íntima relación que existe entre las acciones extraescolares y las escolares. Cabe mencionar que la realidad a veces es muy diferente y el aprendizaje escolar no garantiza la eliminación de los obstáculos entre estas dos situaciones. Así, el reto será encontrar la manera de acercarse al conocimiento de los niños y las niñas los procedimientos que les permitirán operar y que tradicionalmente han podido ser algoritmos oscuros alejados de la intuición. Las formalizaciones de la adición y la multiplicación de Números Naturales se han tratado ya en el tema anterior. No se presentan las de la sustracción y la división porque no son operaciones internas, pero en el desarrollo del tema estudiaremos su relación con la complementación y las particiones de conjuntos.

2. Las operaciones con Números Naturales en el aula de Primaria

2.1. Fases para la enseñanza-aprendizaje de las operaciones

Para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje (en adelante E-A) de las operaciones con Números Naturales en las aulas de Educación Primaria, proponemos las siguientes fases:

1. Exponer el significado de la operación partiendo de situaciones reales y de su relación con la Teoría de Conjuntos, para que la operación tenga sentido para el alumnado.
2. Traducir simbólicamente la operación.
3. Automatizar la operación. Conocer el algoritmo, saber utilizarlo.
4. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la operación.

Cuando trabajemos estas fases, la expresión numérica de la operación será la transcripción de las manipulaciones de los niños. Hay que tener en cuenta la dificultad que supone para el alumno pasar de una acción concreta con los objetos a su expresión simbólica. Por ejemplo, entre la situación de reunir un conjunto de tres manzanas y otro de seis, y la expresión 3 + 6, se han de salvar una serie de dificultades debidas a los significados diferentes que tienen para ellos y ellas las dos acciones. La utilización de signos matemáticos para escribir las operaciones, para simbolizarlas, exige una preparación previa por medio de algunas etapas sucesivas. En primer lugar, repetiremos la manipulación con los objetos las veces que consideremos necesarias. Al mismo tiempo, trabajaremos la traslación al lenguaje verbal pidiendo a los niños que nos cuenten qué han hecho, sus reflexiones, sus pensamientos. Superado satisfactoriamente este momento, podemos introducir la traslación al lenguaje gráfico y a su expresión por medio de símbolos y signos matemáticos.

El problema del maestro es conseguir que los alumnos sean capaces de relacionar las acciones reales o imaginadas con su traducción al lenguaje matemático, que utiliza sus signos propios y sus fórmulas. No se trata, por tanto, de hacer comprender a los niños y niñas el significado de la operación después de haberles enseñado a calcularla, sino al contrario, hace falta que utilicen una operación, en la medida que comprendan lo que esta expresa y significa. Al mismo tiempo, hemos de trabajar la reversibilidad de la operación en el sentido de Piaget, es decir, resulta necesario que el alumnado sea capaz de inventar situaciones problemáticas que se resuelvan con la operación propuesta.

En los aspectos referentes a la construcción y descubrimiento de los algoritmos estándar de las operaciones que se estudian en Primaria, empezaremos analizando los procesos y estrategias personales de cálculo inventadas por el alumnado en las diferentes situaciones problemáticas que se plantean en el aula (Gallego, 2005). A continuación y dentro del trabajo de reflexión asociado a este análisis, dirigiremos la atención hacia la necesidad de conocer la estructura y el funcionamiento que tienen universalmente los mencionados algoritmos y que son los que utilizan las restantes personas que se encuentran en el entorno del alumnado. En este sentido y para evitar aprendizajes mecánicos y memorísticos, nuestro trabajo pretende ayudar a los niños y niñas a descubrir de manera razonada cuáles son las reglas y cuáles los pasos que rigen estos algoritmos, partiendo de situaciones reales y de la manipulación de materiales didácticos adecuados para llegar a las expresiones numéricas correspondientes poniendo el acento en sus relaciones y en las regularidades de estas.

2.2. Capacidades a desarrollar en el aula de Primaria

El trabajo en Educación Primaria referente a las operaciones con Números Naturales, tiene como objetivo contribuir a que el alumnado consiga alcanzar las capacidades que se expresan en el siguiente listado, cuya finalidad es favorecer el desarrollo de la competencia matemática de los niños y las niñas y representar una ayuda para el del resto de competencias de Educación Primaria.

Hemos organizado las capacidades en función de las cuatro operaciones trabajadas. Para cada una de ellas el orden propuesto es secuencial, es decir, progresivo y de intensidad de dificultad creciente:

A. Adición

- A. 1. Construir el concepto de adición a partir de la unión de dos conjuntos disjuntos, expresando los cardinales respectivos.
- A. 2. Utilizar los signos «+» e «=» para simbolizar adiciones. Identificar los términos y signos de la adición.

A. 3. Realizar adiciones de números a partir de la unión de conjuntos disjuntos.
A. 4. Construir la tabla de la adición de números naturales.
A. 5. Comprobar experimentalmente las propiedades conmutativa y asociativa de la adición. Reconocer y aplicar estas propiedades.
A. 6. Descubrir el algoritmo de la adición «sin llevar» y utilizarlo para realizar adiciones «sin llevar» con los sumandos dispuestos vertical y horizontalmente.
A. 7. Descubrir el algoritmo de la adición «llevando» y utilizarlo para realizar adiciones «llevando» con los sumandos dispuestos vertical y horizontalmente.
A. 8. Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de la adición.
A. 9. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la adición.
A.10. Realizar ejercicios prácticos de adiciones en el sistema de numeración sexagesimal.

B. Sustracción

B. 1. Construir la idea de sustracción a partir del complementario de un subconjunto de un conjunto dado, expresando los cardinales respectivos.
B. 2. Utilizar los signos «–» e «=» para simbolizar sustracciones. Identificar los términos y signos de la sustracción.
B. 3. Realizar sustracciones de números a partir de la complementación de conjuntos.
B. 4. Asociar la sustracción con uniones de conjuntos disjuntos en las que falte uno de los conjuntos, expresando los cardinales respectivos.
B. 5. Completar adiciones en las que falte un sumando y simbolizar estas adiciones incompletas usando los signos «–» e «=». Repasar los términos y signos de la sustracción.
B. 6. Asociar la sustracción con la comparación de los cardinales de dos conjuntos. Utilizar los signos «–» e «=» para expresar numéricamente la diferencia entre los mencionados cardinales. Repasar los términos y signos de la sustracción.
B. 7. Conocer los resultados de las sustracciones básicas (las que se deducen de la tabla de la adición).
B. 8. Descubrir el algoritmo de la sustracción «sin llevar» y utilizarlo para realizar sustracciones «sin llevar», con el minuendo y el sustraendo colocados vertical y horizontalmente.
B. 9. Descubrir el algoritmo «natural» de la sustracción «llevando» y utilizarlo para realizar sustracciones «llevando», con el minuendo y el sustraendo colocados vertical y horizontalmente.
B.10. Descubrir el algoritmo «estándar» de la sustracción «llevando» y utilizarlo para realizar sustracciones «llevando», con el minuendo y el sustraendo situados vertical y horizontalmente.
B.11. Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de la sustracción.
B.12. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la sustracción.
B.13. Realizar ejercicios prácticos de sustracciones en el sistema de numeración sexagesimal.

C. Multiplicación

C. 1. Construir la idea de multiplicación a partir de la unión de conjuntos disjuntos equipotentes, expresando los cardinales respectivos y simbolizando las adiciones de sumandos iguales realizadas.
C. 2. Utilizar los signos «×» e «=» para expresar, por medio de una multiplicación, una adición de sumandos iguales. Identificar y utilizar correctamente los términos y signos de la multiplicación.
C. 3. Realizar multiplicaciones de números utilizando adiciones de sumandos iguales.
C. 4. Construir la tabla de multiplicar.
C. 5. Descubrir el algoritmo de la multiplicación por una cifra y utilizarlo para realizar multiplicaciones en las que aumente progresivamente el número de cifras del multiplicando.
C. 6. Identificar números pares e impares.
C. 7. Comprobar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación. Reconocer y aplicar estas propiedades.
C. 8. Descubrir el algoritmo de la multiplicación por 10, 100, 1.000,.... y utilizarlo para realizar gráfica y mentalmente multiplicaciones por la unidad seguida de ceros.
C. 9. Descubrir el algoritmo de la multiplicación de dos números de varias cifras y utilizarlo para realizar multiplicaciones de dificultad creciente.
C.10. Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de la multiplicación.
C.11. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la multiplicación.
C.12. Adquirir la noción de potencia como producto de factores iguales. Identificar la base y el exponente de una potencia.

D. División

D. 1. Construir la idea de división exacta utilizando particiones en las que todas las partes sean equipotentes y expresando los cardinales que intervengan en ellas. Simbolizar estas particiones utilizando los signos «×» e «=».
D. 2. Cambiar simbolizaciones de multiplicaciones incompletas por otras que usen los signos «:» e «=». Identificar y utilizar correctamente los términos y signos de la división exacta.
D. 3. Construir la idea de división entera utilizando particiones en las que todas las partes menos una sean equipotentes y expresando los cardinales que intervengan en ellas. Simbolizar estas particiones usando los signos «+», «×» e «=».
D. 4. Simbolizar divisiones enteras usando la representación habitual. Identificar y utilizar correctamente los términos y signos de la división entera.
D. 5. Realizar divisiones de números utilizando particiones de conjuntos en partes equipotentes.
D. 6. Descubrir el algoritmo de la división exacta y entera por una cifra y utilizarlo para realizar divisiones exactas y enteras en las que aumente progresivamente el número de cifras del dividendo.

D. 7. Descubrir el algoritmo de la división por dos cifras y utilizarlo para realizar divisiones en las que aumente progresivamente el número de cifras del dividendo. Automatizar la división en todos los casos.
D. 8. Reconocer las relaciones que existen entre dividendo, divisor, cociente y resto y utilizarlas como «prueba de la división».
D. 9. Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de la división.
D.10. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la división.

2.3. Desarrollo de las capacidades

A. Adición

La noción de adición de números naturales va ligada al concepto de conjunto; por tanto, es válido lo que se ha visto en el tema anterior y que hace referencia a este concepto.

Atendiendo a la definición, la adición es la operación que nos permite calcular la suma de dos números, entendiendo que esta suma es el cardinal del conjunto que resulta de unir dos conjuntos disjuntos que tienen como cardinales los números que vamos a sumar.

A.1. Construir el concepto de adición *a partir de la unión de dos conjuntos disjuntos, expresando los cardinales respectivos*

En esta capacidad desarrollamos el trabajo correspondiente a la primera de las fases de E-A de la adición, que se realiza en el 1.^er^ curso de la etapa.

Es necesario partir de actividades prácticas y manipulativas con la finalidad de recrear situaciones que los niños puedan identificar rápidamente. Las situaciones que hemos de presentar son aquellas en las que, en el estado final, hay un aumento de la cantidad de elementos respecto del estado inicial.

Si para pintar una casita les dejamos encima de la mesa en primer lugar tres lápices de colores y después dos más, y la pregunta es «¿cuántos hay?», lo que harán es contar 1, 2, 3..., y la respuesta será «cinco lápices de colores». No han pensado «dos más tres igual a cinco», solo han contado.

Verbalmente dirán «si tengo tres colores y me dan dos más, entonces tengo cinco colores». En posteriores repeticiones de las acciones, la verbalización irá evolucionando pasando por expresiones como «si tengo tres y me dan dos más, entonces tengo cinco» hasta llegar a «tres más dos son cinco».

Es conveniente que el alumnado acompañe la manipulación y la verbalización con una representación gráfica (figura 42) de lo que ha ocurrido con el material, en la que además aparezcan los números involucrados.

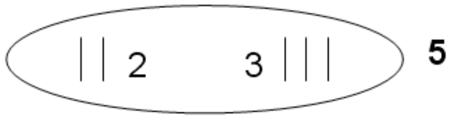


Figura 42. Representación del agrupamiento de 2 y 3

Esta tarea constituirá el primer paso para valorar la importancia de aprender a resolver estas situaciones solo con los números, sin que sea necesario tener siempre a nuestro alcance los objetos concretos que intervienen en ellas, facilitando así el acceso a la fase simbólica. Se introducirá la palabra adición asociada a las relaciones numéricas que aparecen a partir de estas acciones manipulativas.

El final de la fase será pedir a los niños y niñas que sean ellos los que encuentren o reconozcan situaciones de su vida personal que estén relacionadas con la operación (dinero de la hucha, golosinas...).

A.2. Utilizar los signos «+» e «=» para simbolizar adiciones. Identificar los términos y signos de la adición

Continuando en el 1.er curso, una vez realizadas las acciones anteriores y conocida la palabra adición, es el momento de pasar a la segunda fase de E-A de la operación, introduciendo los signos «+» e «=»; entonces, el enunciado verbal «tres más dos son cinco» se cambia por el enunciado numérico «3 + 2 = 5», en un primer momento de manera horizontal, que cambiaremos posteriormente a la disposición vertical $\begin{array}{r} 3 \\ +\ 2 \\ \hline 5 \end{array}$ para facilitar más adelante el aprendizaje del algoritmo.

Además, se debe conocer la nomenclatura específica: el 3 y el 2, que son los términos de la operación, se llaman *sumandos*, y el 5, que es el resultado, se llama *suma*. El signo «+» se lee *más*, y el signo «=», *igual*.

Cuando se conozcan los términos y signos de las restantes operaciones, se debe comprobar que el alumnado los identifica y diferencia correctamente.

A.3. Realizar adiciones de números a partir de la unión de conjuntos disjuntos

Es importante que después de haber introducido la expresión simbólica de la operación, esta no se desconecte de las acciones con las que se relaciona. Por eso, también en el 1.er curso y en momentos posteriores al trabajo de la capacidad anterior, será necesario mostrarles expresiones simbólicas de adiciones que deberán resolver por medio de uniones de diferentes objetos.

Es este un trabajo inverso al realizado en las dos capacidades anteriores, en las que el alumnado avanzaba desde las acciones con los objetos hasta las expresiones numéricas de las situaciones.

Si los niños y las niñas son capaces de encontrar los resultados de las adiciones propuestas sin recurrir a los objetos, pueden resolverlas numéricamente de esta manera, pero tendremos que reflexionar con ellos y ellas sobre el significado de la operación y sobre su relación inequívoca con situaciones en las que se añaden unos elementos a otros obteniendo como resultado un número mayor que los iniciales.

A.4. Construir la tabla de la adición de números naturales

Simultáneamente al trabajo de manipulación de objetos cotidianos, que habrán agrupado, contado, etc., de diversas maneras y con la intención de recoger los resultados de las adiciones realizadas, pueden rellenar una cuadrícula en la que se recogen las sumas básicas obteniendo como resultado la tabla siguiente:

+	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Será necesario conseguir que el alumnado del 1.^{er} curso sea capaz de memorizar estos resultados para facilitar los cálculos posteriores con la adición.

A.5. Comprobar experimentalmente las propiedades conmutativa y asociativa de la adición. Reconocer y aplicar estas propiedades

Dos propiedades de la adición que se pueden trabajar muy fácilmente son las llamadas conmutativa y asociativa. En los dos casos la introducción en el aula se llevaría a cabo de manera gradual, con ejemplos de números que representen poca cantidad y aumentando la dificultad poco a poco.

Es probable que, al construir la tabla, el alumnado de 1.^{er} ciclo observe que las adiciones con sumandos iguales pero cambiados de orden dan el mismo resultado. Con la intención de confirmar estas observaciones y generalizarlas en la medida de sus posibilidades, comprobaremos que esto ocurre con todas las adiciones que podamos hacer. Los ejemplos que se utilizarán tendrán en primer lugar una fase manipulativa, en la que quedará claro que agrupando de diferente manera dos cantidades de objetos el resultado es el mismo y, posteriormente, una fase simbólica. En el ejemplo «dos pelotas más tres pelotas es la misma cantidad que tres mandarinas y dos mandarinas», resolverán $2 + 3 = 5$ y $3 + 2 = 5$. A continuación expresarán la igualdad de resultados de la siguiente manera: $2 + 3 = 5 = 3 + 2$ y por último $2 + 3 = 3 + 2$.

La ausencia de resultado en la expresión simbólica requiere un esfuerzo mental más grande. Hay que tener en cuenta que si la lógica de una operación es obtener un resultado, en esta última manera de expresar la situación real parece no tener importancia. Conseguir que se comprenda que el objetivo no es encontrar un resultado sino que hay dos caminos para llegar a él, es el reto. Se repetirán más veces situaciones parecidas, hasta que se pueda considerar esto como un hecho general.

Introduciremos la denominación de *propiedad conmutativa* para referirnos a este hecho y trabajaremos su enunciado «el orden de los sumandos no altera la suma», o lo que es lo mismo, la operación de la adición permite obtener el mismo resultado independientemente del orden de colocación de los sumandos. En lenguaje matemático:

$$\forall a, b \in N : a + b = b + a.$$

Se puede completar el proceso de E-A de esta propiedad realizado con situaciones reales trabajándola específicamente con materiales didácticos. Las regletas Cuisenaire pueden ser interesantes para indicar que se consigue la misma longitud final colocando en diferente orden las regletas que representan los sumandos.

A lo largo del 2.º y 3.er ciclo, se trabajarán actividades interesantes con la finalidad de reconocer y aplicar esta propiedad. Para reconocerla, se propondrá un listado en el que haya parejas de problemas con el mismo resultado, pero con dos sumandos iguales en orden de adición diferente. Se buscarían las soluciones de todos los problemas, y para acabar se trabajaría la propiedad, haciéndolos conscientes de que no hacía falta resolver el segundo de cada pareja, porque la operación ya estaba hecha.

Para comprobar si saben aplicar la propiedad, se planteará un listado semejante al anterior en el que deberán reconocer las parejas de problemas con los mismos datos ordenados de manera diferente y decidir no resolver el segundo de cada pareja, porque ya saben la solución.

Completando el trabajo anterior podemos proponerles dos adiciones y que inventen enunciados o situaciones reales cuyas soluciones sean las maneras indicadas de agrupar los dos números; posteriormente los alumnos inventarán situaciones problemáticas con la intención de usar la propiedad conmutativa de la adición sin ninguna indicación de qué adiciones deben aparecer en ellas.

En el 2.º ciclo completaremos las propiedades de la adición trabajando también la *propiedad asociativa*. Hemos de tener en cuenta que esta requiere dos momentos cognitivos secuenciados. Habrá una situación que obligará a sumar dos números, y posteriormente se añadirá un tercero. En una segunda situación, a la cantidad que antes ocupaba el primer lugar, habrá que añadirle el resultado de sumar las dos últimas cantidades.

Trabajaremos a partir de dos situaciones problemáticas, por ejemplo:

En el aula hay dos cajas con pelotas de colores. En la primera caja hay 5 pelotas blancas y 6 negras, ¿cuántas hay en esta caja? En la segunda hay 7 verdes. Se quieren reunir todas las pelotas en la primera caja. ¿Cuántas hay en total?

En el aula hay dos cajas con pelotas de colores. En la primera hay 5 pelotas blancas. En la segunda hay 6 pelotas negras y 7 verdes, ¿cuántas hay en la segunda? Se quieren reunir todas las pelotas en la primera caja. ¿Cuántas hay en total?

Favoreceremos que el orden respectivo de las operaciones y de los sumandos sea el siguiente:

- Para la 1.ª situación $5 + 6 = 11$ $11 + 7 = 18$
- Para la 2.ª situación $6 + 7 = 13$ $5 + 13 = 18$

En el segundo momento cognitivo y en todos los ejemplos que trabajemos hemos de llegar a simbolizar las dos adiciones de cada situación en una sola expresión:

- Para la 1.ª situación $(5 + 6) + 7 = 18$
- Para la 2.ª situación $5 + (6 + 7) = 18$

En este momento se introducirá por primera vez el uso del paréntesis, que les servirá para indicar la secuencia de realización de las operaciones.

A continuación expresarán la igualdad de resultados de la manera siguiente $(5 + 6) + + 7 = 18 = 5 + (6 + 7)$, y finalmente $(5 + 6) + 7 = 5 + (6 + 7)$. La reflexión irá por el mismo camino que en la propiedad anterior: no es tan importante llegar al 18, sino descubrir que la manera de asociar los sumandos no altera el resultado. Tendremos que insistir en que asociar significa «agrupar secuencialmente».

Introduciremos la denominación de *propiedad asociativa* para referirnos a este hecho y trabajaremos su enunciado «la manera de agrupar tres o más sumandos no altera la suma». En lenguaje matemático:

$$\forall a, b, c \in N : (a + b) + c = a + (b + c).$$

El esquema de trabajo de la propiedad asociativa en el aula de Primaria es semejante al de la conmutativa y por tanto el alumnado también deberá reconocer y aplicar esta propiedad. Para reconocerla se propondrá un listado en el que haya parejas de problemas con igual resultado, pero no con la misma secuenciación de adiciones. Se buscarían las soluciones de los problemas y se trabajaría la propiedad, haciéndoles conscientes de que no era necesario resolver el segundo de cada pareja, porque estas operaciones ya estaban hechas.

Para comprobar si saben aplicar la propiedad, se planteará un listado semejante al anterior en el que habrán de reconocer las parejas de problemas con los mismos datos agrupados de manera diferente y decidir no resolver el segundo de cada pareja, porque ya saben la solución.

Completando el trabajo anterior podemos proponerles tres datos y que inventen dos enunciados o situaciones reales en las que las soluciones se obtengan agrupando de manera diferente estos datos como sumandos; finalmente los alumnos inventarán situaciones problemáticas para usar la propiedad asociativa de la adición sin ninguna indicación de qué datos han de utilizar en ellas.

A.6. Descubrir el algoritmo de la adición «sin llevar» y utilizarlo para realizar adiciones «sin llevar» con los sumandos dispuestos vertical y horizontalmente

En la 3.ª fase de E-A de la adición, y cuando se presente en el aula una situación en la que sea necesario sumar con los sumandos de más de una cifra, será el momento de introducir el algoritmo de esta operación (no se necesita para sumar dos números de una cifra).

A continuación se propone la primera parte de una secuencia didáctica ordenada por niveles de dificultad, según la cual se debería introducir el algoritmo de la operación en el 1.er ciclo de Educación Primaria.

Comenzaremos por el algoritmo de la adición «sin llevar» (el resultado no pasará de 9 en ninguno de los órdenes de unidades) que puede recorrer los siguientes tramos:

1. Adición de dos números de dos cifras, por ejemplo: 12 + 24
2. De uno de dos cifras y otro de una: 13 + 5
3. De dos números de tres cifras: 325 + 124
4. De uno de tres cifras y otro de una o dos cifras: 325 + 4 o 325 + 24

Trabajaremos la construcción de este algoritmo, para su comprensión y posterior automatización, con la ayuda de los materiales didácticos que ya conocen (como son los BM y los ábacos) y la transcripción escrita de las acciones que realizan.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Nos encontramos en la clase de 1.º de Primaria y somos 24. Por la tarde vendrán 12 compañeros de 2.º curso y queremos saber cuántas sillas habrá que preparar para todos».

Se comentará con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta al problema y concluiremos que es necesario resolver la adición de 12 y 24, pero no la saben calcular numéricamente aún porque sus sumandos son de dos cifras y ya no se encuentran en la tabla de la adición.

Después de que diferentes miembros del alumnado presenten sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de la manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo estándar correspondiente.

Haciendo uso de los materiales didácticos, en el caso de los BM, para el 12 tendrán una barra y dos cubos y para el 24, dos barras y cuatro cubos. Si utilizan dos ábacos verticales, en el primero representarán un sumando que será el 12 y en el segundo el otro sumando, el 24. Se representa en la figura 43 esta ayuda, por ejemplo, con los ábacos.

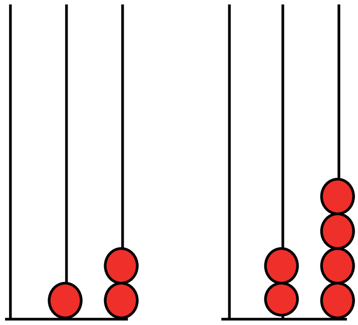


Figura 43. Representación de 12 y 24 con ábacos

Antes de continuar con la manipulación de los materiales se comenta con el alumnado la necesidad de expresar por escrito lo que ocurre numéricamente, para guardar memoria del proceso que se está desarrollando y del resultado final. Para indicar las decenas y las unidades a la hora de simbolizar la operación, podemos utilizar, si es necesario, las expresiones con unidades separadas:

$$\begin{array}{r} 1\,[10]\;2 \\ +\,2\,[10]\;4 \\ \hline ?\;? \end{array}$$

Les preguntamos qué deberían hacer para obtener el resultado final. Con los BM reúnen las piezas agrupando por una parte los cubos y por otra las barras, y ya pueden dar el resultado de la operación: tres barras y seis cubos; por tanto, 36. El proceso ha consistido en reorganizar el material, verbalizando en todo momento lo que hacen.

Con los ábacos, agrupan las bolas por varillas en uno de los dos, empezando por las unidades. Al finalizar la tarea, encuentran 6 bolas en la varilla de las unidades y 3 en la de las decenas, como se muestra en la figura 44. Por tanto, el resultado es el número 36.

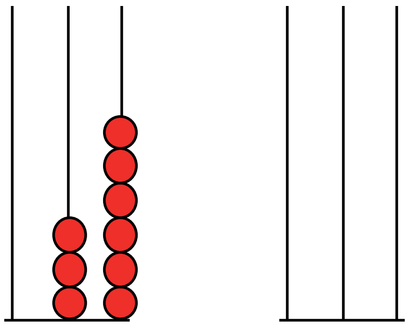


Figura 44. Representación con ábacos del resultado de 12 + 24

También podría utilizarse solo un ábaco, representando el 12 en él y añadiendo el 24 encima de esta representación.

De manera simultánea a la manipulación con los materiales y la correspondiente verbalización, trabajaremos la representación simbólica con las cifras:

$$\begin{array}{r} 1[10]\ 2 \\ +\ 2[10]\ 4 \\ \hline \underbrace{3[10]\ 6}_{36} \end{array}$$

Cuando el alumnado deje de necesitar las unidades separadas para entender la operación, se escribirá la adición con la expresión estándar: $\begin{array}{r} 12 \\ +\ 24 \\ \hline 36 \end{array}$

La comprensión clara de las cifras que representan cada orden de unidades hará que la colocación de los sumandos en columna sea correcta, sin necesitar las expresiones con unidades separadas. No se debería pasar a la disposición horizontal (12 + 24 = 36) hasta que no esté clara la representación vertical.

Para volver al contexto del trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Nos encontramos en la clase de 1.º de Primaria y somos 24. Por la tarde vendrán 12 compañeros de 2.º curso y tendremos que preparar 36 sillas para todos».

Se tienen que hacer más ejemplos de adición reflexionando con el alumnado sobre la relación entre las cifras de los sumandos y las de la suma, ayudándoles a que, por medio de las situaciones problemáticas trabajadas, lleguen a la siguiente conclusión: «la cifra de las unidades del resultado es la suma de las cifras de las unidades de los sumandos y la cifra de las decenas del resultado es la suma de las cifras de las decenas de los sumandos». De esta manera el alumnado observa que se ha transformado una adición de números de dos cifras en dos adiciones de números de una cifra, que ya sabían resolver. Y así descubren cómo funciona el algoritmo estándar de la adición sin llevar.

Numéricamente se seguirá un procedimiento semejante para sumar sin llevar en los diferentes tramos de la secuencia didáctica propuesta.

En el 1.er ciclo de Primaria ha de quedar consolidado este algoritmo, y así no habrá problemas con la adición sin llevar cuando trabajen con números más grandes en cursos posteriores, tanto si la operación se realiza en disposición vertical como horizontal.

El objetivo final será llegar a usar este algoritmo de la adición con la expresión estándar de los sumandos como la manera natural de resolver las adiciones asociadas a la resolución de situaciones problemáticas.

A.7. Descubrir el algoritmo de la adición «llevando» y utilizarlo para realizar adiciones «llevando» con los sumandos dispuestos vertical y horizontalmente

Una vez está consolidada la adición sin llevar, y todavía en 1.º de Primaria, es el momento para superar la barrera que los separa del reto siguiente: resolver el problema que supone la adición de números, cuando en algún orden de unidades la suma de cifras supera el nueve, lo que quiere decir que se está haciendo una adición «llevando».

Proponemos ahora la segunda parte de la secuencia didáctica ordenada por niveles de dificultad, según la cual se debería introducir el algoritmo de la operación en el 1.er ciclo de Educación Primaria y que se refiere a la adición «llevando»:

1. Adición llevando en las unidades, por ejemplo: 15 + 28, 18 + 5, 425 + 439, 325 + 28...
2. En las decenas únicamente: 425 + 491, 345 + 82...
3. En las unidades y en las decenas: 137 + 285, 176 + 69...

Continuamos trabajando la construcción de este algoritmo, para su comprensión y posterior automatización, con la ayuda de los materiales didácticos y la transcripción escrita de las acciones que realizan.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Para organizar el aperitivo por las fiestas de la Magdalena, el alumnado de las dos aulas de 1.º de Primaria necesita 15 € para refrescos, agua... y 28 € para comprar tortas, cacahuetes... ¿Cuánto dinero han de recoger en total?».

Se comentará con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta al problema y llegaremos a concluir que es necesario resolver la adición de 15 y 28, pero no la saben calcular numéricamente aún porque hay una de las columnas (orden de unidades) cuya suma es mayor que 9.

Después de que diferentes miembros del alumnado presenten sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de la manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo estándar correspondiente.

Utilizando los materiales didácticos, en el caso de los BM, para el 15 tendrán una barra y cinco cubos y para el 28, dos barras y ocho cubos. Si utilizan dos ábacos verticales, en el primero representarán un sumando que será el 15 y en el segundo el otro sumando, el 28. Se representa en la figura 45 esta ayuda, por ejemplo con los BM.

Figura 45. Representación de 15 y 28 con BM

Antes de continuar manipulando los materiales y con la finalidad de tener un registro del proceso que se va a desarrollar y del resultado final que obtengamos, simbolizaremos la operación utilizando las expresiones con unidades separadas, si es necesario.

$$\begin{array}{r} 1[10]\ 5 \\ +\ 2[10]\ 8 \\ \hline 3[10]13 \end{array}$$

Les preguntamos qué deberían hacer para obtener el resultado final. Con los BM agrupan por una parte los cubos, obteniendo trece, y por otra las barras, reuniendo tres, como se muestra en la figura 46.

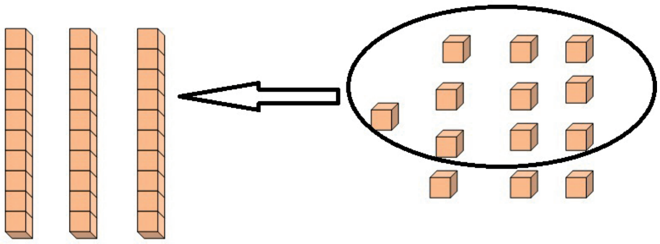


Figura 46. Representación de la agrupación de 15 y 28 con BM

Si trabajamos con los ábacos empiezan por las unidades, añadiendo las 5 bolas del primero en el segundo, con lo que en la varilla de las unidades hay ahora 13 bolas. Continúan con la varilla de las decenas, añaden una bola donde había dos, y quedan 3 bolas en el segundo ábaco.

De manera simultánea al trabajo con cualquiera de los dos materiales, verbalizan lo que ha pasado y lo representan numéricamente:

$$\begin{array}{r} 1[10]\ 5 \\ +\ 2[10]\ 8 \\ \hline 3[10]13 \end{array}$$

Se dan cuenta de que la representación numérica del resultado obtenida no cumple las reglas del SND. Verbalizan esta situación y su solución. Transforman 10 unidades en 1 decena y la añaden a la adición de las decenas de los sumandos, «han llevado una». Con los materiales implica sustituir los cubos por barras en el caso de los BM (figura 47) o cambiar bolas y situarlas en las varillas adecuadas, en el caso de los ábacos.

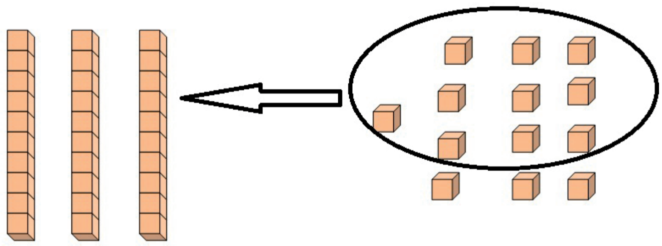


Figura 47. Transformación de 10 cubos en una barra

Así, llegan a tener 4 piezas representando las decenas y 3 las unidades, por lo que la suma total es 43. Se representa en la figura 48 este ejemplo con los BM.

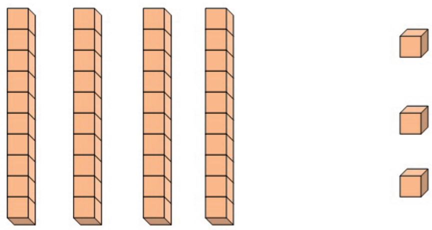


Figura 48. Representación con BM del resultado de 15 + 28

A continuación mostramos de manera detallada los cambios numéricos que acompañan a la manipulación de los materiales:

$$\begin{array}{r} 1[10]\ \ 5 \\ +\ 2[10]\ \ 8 \\ \hline \underbrace{3[10]\ \underbrace{13}_{1[10]\ 3}}_{4[10]\ 3} \end{array}$$

Con el alumnado, simultáneamente a la manipulación con los materiales y la correspondiente verbalización, modificaremos la representación simbólica del resultado, llegando a la expresión:

$$\begin{array}{r} {}^{1}\quad\quad\ \ \\ 1[10]\ \ 5 \\ +\ 2[10]\ \ 8 \\ \hline 4[10]\ \ 3 \end{array}$$

donde la decena que resulta de la suma de las unidades y que se añade a las decenas («hemos llevado una»), se puede recordar de manera gráfica con un 1 más pequeño encima de la columna de las decenas.

Cuando el alumnado deje de necesitar las unidades separadas para entender la operación, se escribirá la adición en la expresión estándar:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 15 \\ +\,28 \\ \hline 43 \end{array}$$

De nuevo, la comprensión clara de las cifras que representan cada orden de unidades hará que la colocación de los sumandos en columna, y del resultado, la suma, sean correctas, sin necesitar las expresiones con unidades separadas.

No se debería pasar a la disposición horizontal (15 + 28 = 43) hasta que no esté clara la representación vertical.

Para volver a contextualizar el trabajo de la operación, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Para organizar el aperitivo de Magdalena el alumnado de las dos aulas de 1.º de Primaria necesita 15 € para refrescos, agua..., y 28 € para comprar tortas, cacahuetes..., por lo que deben recoger un total de 43 euros».

Se harán más ejemplos de adiciones reflexionando con el alumnado sobre la relación entre las cifras de los sumandos y las de la suma, ayudándoles a que, por medio de las situaciones problemáticas trabajadas, lleguen a la conclusión: «se suma de derecha a izquierda y, como en la adición de las unidades de los sumandos obtenemos una decena, tendremos que añadirla («llevar una decena») a la adición de las decenas de los sumandos».

A partir de este momento, y posiblemente sin necesidad de utilizar los materiales, en las siguientes adiciones aplicarán lo que acaban de aprender y a continuación de sumar las unidades, procederán a transformar las 10 unidades en 1 decena («llevan una») que añadirán a la posterior adición de las decenas de los sumandos. La representación simbólica (con unidades separadas, si es necesario) sería:

$$\begin{array}{rrr} {\scriptstyle 1} & & \\ 1 & [10] & 5 \\ +\;2 & [10] & 8 \\ \hline & & 3 \end{array}$$

Los pasos siguientes de este trabajo se desarrollarán de manera semejante a lo explicado anteriormente (finalizar la operación, recontextualizar...).

En la reflexión con el alumnado sobre la relación de las cifras de los sumandos y las de la suma, les ayudaremos a que por medio de los ejemplos trabajados lleguen a una conclusión semejante a: «se suma de derecha a izquierda, la cifra de las unidades de la suma es la cifra de las unidades del resultado de la adición de las unidades de los sumandos y la cifra de las decenas de la suma es el resultado de la adición de las decenas de los sumandos más la decena que llevamos». Han completado el descubrimiento del algoritmo estándar de la adición llevando en unidades.

El objetivo final será llegar a usar el algoritmo estándar de la adición con la expresión numérica de los sumandos como la manera natural de resolver las adiciones en las que la decena que se lleva (llevamos una) se recordará de manera mental.

En 2.º curso de Primaria, se seguirá un procedimiento semejante para sumar llevando en las decenas con números de tres cifras e intentaremos que para sumar llevando en unidades y en decenas no sea necesaria la utilización de los materiales.

A continuación se muestra un ejemplo de representación numérica de una de estas adiciones, 554 + 368, que se realizará con unidades separadas, si es necesario:

$$\begin{array}{rrrr} & \overset{1}{5}[100] & \overset{1}{5}[10] & 4 \\ + & 3[100] & 6[10] & 8 \\ \hline & 9[100] & 2[10] & 2 \end{array}$$

o directamente con la expresión estándar del algoritmo: $\begin{array}{r} 554 \\ +\,368 \\ \hline 922 \end{array}$

En 1.er ciclo de Primaria ha de quedar consolidado este algoritmo, y así no habrá problemas con la adición llevando cuando trabajen con números más grandes en cursos posteriores y generalicen su uso, tanto si la operación se realiza en disposición vertical como horizontal.

A.8. Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de la adición

Utilizaremos la adición para ejercitar el cálculo mental de manera espontánea, en voz alta, dentro de un juego, en diferentes situaciones..., y siempre en un nivel de dificultad inferior al que se esté trabajando en clase en el ámbito simbólico. Es necesario realizar el trabajo de sumar sin tener que usar lápiz y papel. De hecho, es la manera de calcular más relacionada con la vida real, ya que en situaciones extraescolares, en la calle, en casa..., es donde más adiciones harán.

En el 1.er ciclo de Primaria, se trabajarán los resultados de la tabla de la adición, las adiciones sencillas de números de dos cifras, empezando con decenas completas para que les resulte más fácil, y, como en clase se ha trabajado la descomposición polinómica, utilizaremos esta herramienta para el cálculo mental. Así, por ejemplo, si se les pide sumar 22 + 5, mentalmente se podrán ayudar pensando «22 es 20 + 2 → 5 + 2 = 7; entonces, 20 + 7 = 27».

Hemos de estar atentos también a todas las estrategias emergentes que aparecen en los niños y niñas y a la construcción de su propia manera de calcular mentalmente, así como a las ayudas que nos pueden ofrecer las propiedades conmutativa y asociativa de la adición. Por ejemplo si un niño o niña ha de sumar 15 + 9, es posible que le resulte más fácil sumar 15 + 10 y al resultado quitarle 1; o asumir que el 9 = 5 + 4 y por tanto le será más fácil sumar 15 + 5 y al resultado sumarle 4. Estas maneras «personales» de sumar comportan conocer la composición de los números de manera aditiva, la utilidad de las propiedades conmutativa y asociativa de la adición y que lleguen a ver una determinada cantidad en función de algunas descomposiciones aditivas, más útiles, que esta tenga. Por ejemplo el 100 = 25 + 25 + 25 + 25, esas «cuatro veces 25» les hacen llegar rápidamente a 25, 50, 75, 100. O el 60 = 15 + 15 + 15 + 15 y por tanto llegar rápidamente a 15, 30, 45, 60, etc.

Hay también estrategias «regladas» que pueden utilizar y que debemos trabajar en clase por si a alguno o alguna les pueden resultar útiles: la tabla del 100 o la línea numérica vacía (Barba, 2004).

La primera se encarga de construir una tabla de 10 por 10, en la que de manera horizontal se van colocando los 100 primeros naturales no nulos (figura 49), de forma que al tener que sumar 15 + 23, por ejemplo, nos situaríamos en el 15 y tendríamos que desplazarnos mentalmente sobre la tabla. Si elegimos primero sumar las dos decenas, el movimiento que deberíamos hacer sería de dos posiciones de manera vertical, llegando así al 35. En este punto y de manera horizontal hay que moverse tres posiciones hacia la derecha, alcanzando el 38. Este recorrido sería igual de válido si primero nos desplazamos de manera horizontal y después verticalmente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 49. Tabla del 100

El objetivo de trabajar con esta técnica es que el alumnado llegue a formarse una imagen mental de la tabla que le ayude a hacer el recorrido mental de la adición sin necesidad de tenerla presente.

Esta técnica tiene limitaciones. Por ejemplo en la adición 27 + 15, en el momento de desplazarnos horizontalmente al sumar las unidades, nos saldríamos de la tabla. Habría que hacer un esfuerzo añadido para imaginar que hace falta volver a entrar por el principio de la siguiente fila y es obvio que para cantidades superiores a 100, o bien nos imaginamos la tabla solo para las decenas y unidades o bien hay que crear una tabla más grande.

La línea numérica vacía es una estrategia semejante a la anterior pero intenta solucionar las mencionadas limitaciones. Se trata de representar sobre una línea horizontal, los saltos mentales que el niño o niña hace cuando suma. Recoge las anteriores estrategias emergentes y por tanto hay varias posibilidades para llegar al resultado. Por ejemplo, si hay que sumar 27 más 15 nos situamos en el 27 y a modo de saltos (de la cantidad de unidades que cada uno quiera, es libre) y que configuran el 15, nos acercamos al resultado final.

El objetivo, otra vez, es que contribuya al cálculo mental, utilizando la línea de manera mental haciendo cada vez saltos más adecuados a las cantidades que hemos de sumar.

A medida que se vaya dominando este cálculo mental y se trabajen las otras operaciones, se puede combinar gradualmente la adición con ellas para hacer un trabajo conjunto.

A.9. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la adición

Es en situaciones reales donde cobra especial sentido el trabajo hecho con la adición, porque realmente es la realidad la que origina interrogantes cuya respuesta pasará por saber, en este caso, resolver adiciones.

A pesar de que la resolución e invención de problemas aparece como la cuarta fase para trabajar las operaciones, nos encontramos en ella desde el principio, porque presentamos las operaciones de manera contextualizada, a partir de situaciones reales que han de resolverse y, por tanto, que pueden estar relacionadas con cualquier bloque de contenidos matemáticos.

Trabajaremos la resolución de problemas tomando como orientación las cuatro fases de Polya (entender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida) y reflexionando con el alumnado sobre la importancia, desarrollo y utilidad de cada una de ellas.

Cuando estén resolviendo los problemas, hemos de aprovechar los errores que puedan surgir para reflexionar con los niños y las niñas sobre ellos y, como consecuencia, potenciar nuevas situaciones de aprendizaje a partir de la reflexión. Es muy importante diferenciar entre los errores de cálculo y los errores de razonamiento dado que exigen métodos diferentes para su tratamiento.

Hemos de acostumbrarlos a estimar el resultado de la situación problemática con la finalidad de practicar el cálculo mental y que se hagan una idea del número que deben obtener.

Iniciaremos el trabajo en 1.º de Primaria, con problemas que necesiten ser resueltos con una adición, seguidos de otros que necesiten dos. Estos problemas serán con números de hasta dos cifras, para pasar en 2.º de Primaria a números de tres cifras.

También, y dentro de este 1.er ciclo, se pueden trabajar problemas que necesiten para su resolución la combinación de una adición y una sustracción.

Insistiendo en las fases de Polya mencionadas anteriormente y para posibilitar el correcto desarrollo de la primera de ellas tendremos que trabajar problemas con diferentes tipos de enunciados:

- En un primer momento, resolverán problemas con enunciados claros, ordenados, completos, sin errores...
- En un segundo momento, problemas con enunciados confusos, incompletos, con datos que falten, con datos que sobren...

El alumnado ha de trabajar también la invención de problemas relacionados con la adición. Lo que se pretende es comprobar si son capaces de generar situaciones que se resuelvan con la operación estudiada. El trabajo de inventar problemas será posterior al de resolverlos. No les pediremos nunca que inventen un problema de un tipo que aún no se haya resuelto.

Cada vez que les propongamos la invención de un tipo nuevo de problemas seguiremos los pasos que se muestran a continuación y que se encuentran secuenciados según nuevas dificultades, independientemente del curso en el que estemos:

- Con ayudas:

  – Les daremos los números, las operaciones y el contexto que intervienen en la situación (*inventa un problema de patos y conejos, con un 15 y un 38, que se resuelva con una adición*, por ejemplo).
  – Les daremos los números y las operaciones, pero no el contexto (*inventa un problema con un 15 y un 38, que se resuelva con una adición*, por ejemplo).

- Sin ayudas: les daremos solo las operaciones que han de aparecer en la situación problemática (*inventa un problema que se resuelva con una adición,* por ejemplo).

En un momento posterior al de inventar las situaciones problemáticas, las intercambiarán con los compañeros para que ningún niño o niña resuelva la que él mismo ha inventado, con la finalidad de potenciar su capacidad tanto de redacción como de expresión matemática, que implicará la exigencia de claridad y de totalidad en datos e incógnitas.

En los ciclos posteriores se continuará con las tareas de resolución e invención de situaciones problemáticas relacionadas con la adición, en las que esta operación se combinará con las otras tres a medida que vayan dominándolas.

A.10. Realizar ejercicios prácticos de adiciones en el sistema de numeración sexagesimal

Este tipo de adiciones se trabajarán en el 3.^{er} ciclo de Primaria, aprovechando que pueden encontrarse situaciones problemáticas más complejas relacionadas con la medida del tiempo o de la amplitud angular. Esta introducción a la adición en el sistema sexagesimal se desarrollará de manera progresiva, haciendo operaciones sin llevar y posteriormente llevando, en los segundos, en los minutos, en los dos a la vez...

La adición sin llevar en el sistema sexagesimal se realizará sumando por separado cada uno de los órdenes de unidades como se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rrrr} & 25\,\text{h} & 15\,\text{min} & 19\,\text{s} \\ + & 10\,\text{h} & 40\,\text{min} & 20\,\text{s} \\ \hline & 35\,\text{h} & 55\,\text{min} & 39\,\text{s} \end{array}$$

Hay que observar que en la operación conviven las cifras indoarábigas y los órdenes de las unidades del sistema sexagesimal, y que resulta imprescindible tener presente este hecho para la comprensión del algoritmo de la adición en este sistema.

Es necesario incidir con el alumnado en que el hecho de llevar ocurre en este caso cuando sobrepasamos los 60 en alguno de los dos primeros órdenes de unidades y que se hacen las transformaciones de los resultados sin memorizar los procesos de «llevar una» por la poca frecuencia con la que necesitamos estas operaciones y para evitar el trabajo mental con números tan grandes.

A continuación presentamos un ejemplo de adición en el sistema sexagesimal, llevando en los segundos, en el que representamos de manera numérica el proceso de la operación y los cambios necesarios para llegar al resultado final correcto:

$$\begin{array}{rrrr} & 25\,\text{h} & 15\,\text{min} & 19\,\text{s} \\ + & 10\,\text{h} & 40\,\text{min} & 50\,\text{s} \\ \hline & \underline{\underline{35\,\text{h}}} & 55\,\text{min} & \cancel{69}\,\text{s} \\ & & & \underline{\underline{9}}\,\text{s} \\ & & \underline{+1\,\text{min}} & \\ & & \underline{\underline{56\,\text{min}}} & \end{array}$$

Análogamente, se muestra ahora un ejemplo de adición en el sistema sexagesimal, llevando en los segundos y en los minutos:

$$
\begin{array}{rrr}
25\text{ h} & 15\text{ min} & 19\text{ s} \\
+10\text{ h} & 46\text{ min} & 50\text{ s} \\
\hline
35\text{ h} & & \\
+1\text{ h} & 61\text{ min} & \cancel{69}\text{ s} \\
\hline
36\text{ h} & & \\
\hline\hline
 & & 9\text{ s} \\
 & +1\text{ min} & \\
 & \cancel{62}\text{ min} & \\
 & 2\text{ min} &
\end{array}
$$

El procedimiento será análogo cuando trabajemos con cantidades referentes a la amplitud angular.

B. Sustracción

La noción de sustracción de números naturales va ligada, de la misma manera que la de la adición, al concepto de conjunto.

Atendiendo a su definición, la sustracción es la operación que nos permite calcular la resta o diferencia entre dos números, entendiendo que esta resta es el cardinal del complementario de un subconjunto, cuyo cardinal es el número menor, respecto de un conjunto, cuyo cardinal es el número mayor.

Pero, a diferencia de la adición que solo estaba relacionada con situaciones «de añadir y reunir», la sustracción se asocia con varios tipos de situaciones que le dan también significados diferentes.

Partiremos de actividades prácticas y manipulativas, para recrear situaciones que nos permitan trabajarlos todos y utilizaremos la sustracción como herramienta para resolver los tipos de situaciones siguientes:

- De disminuir: «8 alumnos están haciendo un dibujo, acaban 5, ¿cuántos quedan dibujando aún?». Este caso es una aplicación directa de la definición. Hay una situación final en la que se ha encontrado el complementario del subconjunto de niños que ya han acabado el dibujo. Se trata de simbolizar con una sustracción lo que ha pasado.

- De añadir para llegar a una nueva cantidad: «Si una niña necesita 9 piezas para montar un juguete y solo tiene 3, ¿cuántas le faltan?». Esta situación recuerda a la adición, pero en el fondo es una acción contraria a sumar, porque consiste en completar una unión de dos conjuntos en la cual se conoce uno y el resultado de la unión. Por tanto, la simbolización partirá de una adición incompleta para llegar a una sustracción.

- De comparar cardinales: «Tengo 4 euros y tú 7, ¿cuántos tienes más que yo?». La acción real es comparar los cardinales de dos conjuntos disjuntos, pero de nuevo la operación interna es la sustracción. Llegaremos a su simbolización reflexionando sobre la idea de que los niños tienen de la operación adquirida en las situaciones anteriores.

Por medio de ejemplos clarificadores y utilizando números pequeños, iremos propiciando los tres tipos de situaciones expuestas antes para conseguir una visión completa de la operación.

Se puede observar claramente que el fundamento matemático de esta operación es siempre el que se ha mencionado en la definición y que, en cualquiera de los tres tipos de situaciones reales, estamos encontrando el complementario de un subconjunto: de forma directa en el primer caso; a partir de su unión con el subconjunto correspondiente en el segundo; a partir de la inmersión mediante una correspondencia biunívoca del conjuntos con menos elementos en el otro y de su identificación con un subconjunto de este, en el tercer caso.

B.1. Construir la idea de sustracción a partir del complementario de un subconjunto de un conjunto dado, expresando los cardinales respectivos

En esta capacidad desarrollamos el trabajo correspondiente a la primera de las fases de E-A de la sustracción, que se realiza en el 1.er curso de la etapa.

Partiremos de actividades prácticas y manipulativas con el fin de recrear situaciones que puedan identificar rápidamente. Tendremos que presentar situaciones en las que, en el estado final, haya una disminución de la cantidad de elementos respecto del estado inicial (prestar, perder, gastar, romper...).

Por ejemplo, si un niño o una niña tiene 5 lápices de colores para pintar una casita y le presta 2 a un compañero, le podemos preguntar, ¿cuántos tienes ahora? Normalmente lo que hará es contar los que le quedan 1, 2, 3, y responder: 3 lápices de colores. Mentalmente no ha pensado «5 menos 2 es igual a 3», simplemente ha contado.

Les propondremos que expliquen verbalmente lo que ha pasado con los objetos insistiendo en la utilización de los números que han intervenido en la situación. Así, dirán «tenía cinco colores y he prestado dos, entonces me quedan tres colores». En posteriores repeticiones de las acciones, la verbalización irá evolucionando desde expresiones como «tenía cinco y he prestado dos, entonces me quedan tres» hasta llegar a «cinco menos dos son tres».

Es conveniente que el alumnado acompañe la manipulación y verbalización con una representación gráfica (figura 50) de lo que ha ocurrido con el material, en la que además aparezcan los números involucrados.

Figura 50. Representación de la manipulación de 5 menos 2

Esta tarea constituirá, igual que en la adición, el primer paso para valorar la importancia de aprender a resolver estas situaciones solo con los números, sin que sea necesario tener siempre a su alcance los objetos concretos que intervienen en ellas, facilitando así el acceso a la fase simbólica. Se introducirá la palabra *sustracción* asociada a las relaciones numéricas que aparecen a partir de estas acciones manipulativas.

El final de la fase será pedir a los niños y niñas que sean ellos y ellas quienes encuentren o reconozcan situaciones de su vida personal que estén relacionadas con la operación (libros, cromos...).

B.2. Utilizar los signos «–» e «=» para simbolizar sustracciones. Identificar los términos y signos de la sustracción

Continuando en el 1.er curso, una vez realizadas las acciones anteriores y conocida la palabra sustracción, es el momento de pasar a la segunda fase de E-A de la operación, introduciendo los signos «–» e «=»; entonces, el enunciado verbal «cinco menos dos son tres» se cambia por el enunciado numérico «5 – 2 = 3», en un primer momento de manera horizontal, que cambiaremos posteriormente a la disposición vertical $\begin{array}{r} 5 \\ -\,2 \\ \hline 3 \end{array}$ para facilitar más adelante el aprendizaje del algoritmo.

Además, se tendrá que conocer la nomenclatura específica: el 5 y el 2, que son los términos de la operación, se llaman *minuendo* y *sustraendo* respectivamente, y el 3, que es el resultado, se llama *resta* o *diferencia*. El signo «–» se lee *menos*, y el signo «=», *igual* (que ya conocen de la adición).

En el momento que se conozcan los términos y signos de las restantes operaciones, tendremos que comprobar que el alumnado los identifica y diferencia correctamente.

B.3. Realizar sustracciones de números a partir de la complementación de conjuntos

Es importante que después de haber introducido la expresión simbólica de la operación, esta no se desconecte de las acciones con las que se relaciona. Para eso, también en el 1.er curso y en momentos posteriores al trabajo de la capacidad anterior, será necesario mostrarles expresiones numéricas de sustracciones que deberán resolver por medio de acciones de retirar una determinada cantidad de objetos de un conjunto y averiguar cuántos quedan después de hacerlo.

Este es un trabajo inverso al realizado en las dos capacidades anteriores, en las que el alumnado avanzaba desde las acciones con los objetos hasta las expresiones simbólicas de las situaciones.

Si los niños y las niñas son capaces de encontrar los resultados de las sustracciones propuestas sin recurrir a los objetos, pueden resolverlas de esta manera, pero tendremos que reflexionar con ellos y ellas sobre el significado de la operación y sobre su relación inequívoca con situaciones en las que se retiran unos elementos de un conjunto de partida obteniendo como resultado un número menor que el cardinal inicial de este.

B.4. Asociar la sustracción con uniones de conjuntos disjuntos en las que falte uno de dichos conjuntos, expresando los cardinales respectivos

Después de haber introducido las primeras situaciones reales que necesitan la sustracción y aún dentro de la primera fase de E-A de esta operación en el 1.er curso de la etapa, trabajaremos un nuevo tipo de situaciones que también se resuelven restando y en las cuales es necesario añadir elementos a un conjunto inicial para formar otro con un cardinal mayor.

Por ejemplo, si un niño o una niña tiene 5 lápices de colores y necesita 8 para pintar una casita, la pregunta será, ¿cuántos te faltan? Normalmente, lo que hará es coger de una bandeja los 3 que le faltan, añadiéndolos a los 5 iniciales, mientras va contando desde 5 hasta 8.

Les propondremos que expliquen verbalmente qué ha pasado con los lápices de colores insistiendo en la utilización de los números que han intervenido en la situación. Surgirán expresiones del tipo «tenía cinco colorines y he tenido que coger tres más para tener ocho», que iremos abreviando hasta llegar a «tenía cinco y he cogido tres para tener ocho».

De la misma manera que en la capacidad B.1, es conveniente que el alumnado acompañe la manipulación y la verbalización con una representación gráfica (figura 51) de lo que ha ocurrido con el material, en la que, además, aparezcan los números involucrados.

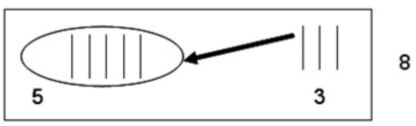


Figura 51. Representación de la manipulación de 5 hasta 8

Esta tarea constituirá de nuevo el primer paso para valorar la importancia de aprender a resolver estas situaciones solo con los números, sin que sea necesario tener siempre a su alcance los objetos concretos que intervienen en ellas, facilitando así el acceso a la fase simbólica.

Si les preguntamos cómo se podría escribir lo que ha pasado de una manera más rápida, solo con los números, encontraremos que la operación que se relaciona con acciones de añadir elementos es la adición. Surgirá así una expresión del tipo 5 +__= 8, en la que el número buscado es uno de los sumandos de una adición incompleta.

B.5. Completar adiciones en las que falte un sumando y simbolizar estas adiciones incompletas usando los signos «–» e «=». Repasar los términos y signos de la sustracción

Con un trabajo semejante al de la capacidad B.3, propondremos en clase algunas adiciones numéricas incompletas para que el alumnado las resuelva: 3 +__= 9, por ejemplo.

Se pretende que relacionen las expresiones matemáticas de las adiciones incompletas con las situaciones reales que las provocan, es decir, situaciones de añadir euros, bolígrafos, niños, bocadillos..., a los que tienen al principio, para conseguir una cantidad mayor. De nuevo es un trabajo inverso al realizado en la capacidad anterior en la cual se avanzaba de los objetos hasta los números.

Ante esta forma «extraña» de expresar las operaciones que estamos haciendo, les podemos preguntar qué operación da el resultado que obtenemos en cada caso partiendo de los datos iniciales, con la intención de llegar a transformar las adiciones incompletas en sustracciones, el minuendo de las cuales es el resultado conocido de la adición y el sustraendo es el sumando también conocido. Así nuestra adición anterior se transformaría en: 9 – 3 = __.

Una vez relacionada la sustracción con estas situaciones, repasaremos los términos y los signos correspondientes, revisando sus nombres y significados, y reforzando a la vez la asociación del minuendo con el número mayor y del sustraendo con el menor en cualquiera de los casos que se presente.

A partir de este momento resolveremos las situaciones «de añadir para llegar a una nueva cantidad» usando la sustracción.

B.6. Asociar la sustracción con la comparación de los cardinales de dos conjuntos. Utilizar los signos «–» e «=» para expresar numéricamente la diferencia entre dichos cardinales. Repasar los términos y signos de la sustracción

En esta capacidad continuamos todavía en el 1.[er] curso de la etapa, dentro de la primera de las fases de E-A de esta operación y trabajaremos un nuevo tipo de situaciones que también se resuelven restando y en las cuales es necesario comparar los cardinales de dos conjuntos disjuntos para averiguar la diferencia entre ellos.

Por ejemplo, estamos en la biblioteca del aula e Inés ha cogido 6 cuentos. Si Ángel tiene 4, les podemos preguntar ¿cuántos tiene Inés más que Ángel?

Para responder la pregunta se establece una correspondencia biunívoca entre los conjuntos, que asocia todos los elementos de uno de ellos con algunos del otro y se cuenta los que quedan sin asociar, en este caso 2.

Análogamente a los casos anteriores les propondremos que nos expliquen verbalmente qué han pensado para responder y que hagan un dibujo que lo represente (figura 52), en el que aparezcan los números involucrados en la situación.

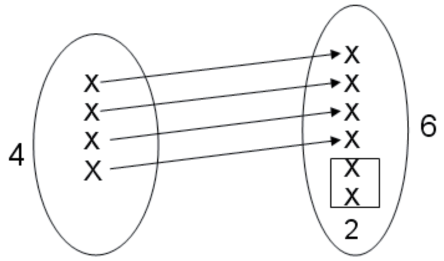


Figura 52. Representación de la comparación entre los cardinales 4 y 6

Una vez encontrado el 2 como solución, les preguntaremos si es necesario siempre hacer las correspondencias para resolver este tipo de situaciones o si se pueden averiguar los resultados directamente con los números. Se trata de saber si alguna de las operaciones que conocen da como resultado el número obtenido partiendo de los datos iniciales en cada caso. Después de que los niños respondan refiriéndose a la sustracción, el resultado de nuestra comparación se simbolizaría: 6 – 4 = 2.

Asociaremos entonces la sustracción con las situaciones de comparación de cardinales trabajadas y, a partir de ahora, siempre la utilizaremos como la operación que resuelve este tercer tipo de situaciones.

Representaremos las sustracciones de la forma ya conocida por las capacidades anteriores y repasaremos la identificación del minuendo con el cardinal mayor y del sustraendo con el menor, recordando también los signos de la operación.

B.7. Conocer los resultados de las sustracciones básicas (las que se deducen de la tabla de la adición)

Simultáneamente al trabajo de manipulación de objetos cotidianos, que habrán retirado, añadido, comparado cuantitativamente, etc., y con el fin de almacenar los resultados de las sustracciones realizadas, pueden rellenar una cuadrícula en la que se recojan las sustracciones básicas, con el objetivo de ayudarles en los cálculos de las sustracciones posteriores.

En 1.er curso de Primaria, se representarán solo resultados de sustracciones sin llevar y se obtendrá la tabla siguiente (se consideran como minuendos los números situados en el eje horizontal y como sustraendos los colocados en el vertical):

-	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2		0	1	2	3	4	5	6	7
3			0	1	2	3	4	5	6
4				0	1	2	3	4	5
5					0	1	2	3	4
6						0	1	2	3
7							0	1	2
8								0	1
9									0

Observaremos que no pueden rellenarse todas las casillas. Las de la parte inferior izquierda de la tabla se quedan vacías porque el número a colocar sería negativo y aún no conocen números de este tipo.

En 2.º curso se empieza a trabajar la sustracción llevando. Es el momento de ampliar la tabla anterior añadiendo en la parte de los minuendos los números que aparecen como resultados en la tabla de la adición y manteniendo los mismos sustraendos. De esta manera se incorporan a la tabla los resultados de las sustracciones inmediatas, necesarias para trabajar los algoritmos llevando que desarrollaremos a continuación.

Por tanto, la tabla se extenderá hacia la derecha con la incorporación de las casillas siguientes:

-	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
1	9								
2	8	9							
3	7	8	9						
4	6	7	8	9					
5	5	6	7	8	9				
6	4	5	6	7	8	9			
7	3	4	5	6	7	8	9		
8	2	3	4	5	6	7	8	9	
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

También ahora observamos que no se llenen todas las casillas. Las de la parte superior derecha de la tabla se quedan vacías porque es innecesario recordar esos resultados de manera automática ya que no corresponden a sustracciones inmediatas.

B.8. Descubrir el algoritmo de la sustracción «sin llevar» y utilizarlo para realizar sustracciones «sin llevar», con el minuendo y el sustraendo colocados vertical y horizontalmente

En la 3.ª fase de E-A de la sustracción y cuando se presente en el aula una situación en la que sea necesario restar con el minuendo y el sustraendo de más de una cifra, será el momento de introducir los algoritmos de esta operación (no se necesitan para restar dos números de una cifra).

A continuación se propone la primera parte de una secuencia didáctica ordenada por niveles de dificultad según la cual se deberían introducir los algoritmos de la operación en el 1.er y 2.º ciclo de Educación Primaria.

Empezaremos por la sustracción «sin llevar» (ninguna de las cifras del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo) que puede recorrer los siguientes tramos:

1. Sustracción de dos números de dos cifras: 25 – 13.
2. De uno de dos cifras con otro de una: 13 – 5.
3. De dos números de tres cifras: 325 – 124.
4. De uno de tres cifras con otro de una o dos cifras: 325 – 4, 325 – 24.

Trabajaremos la construcción de este algoritmo, para su comprensión y posterior automatización, con la ayuda de los materiales didácticos que ya conocen (como son los BM y los ábacos) y la transcripción escrita de las acciones que realizan.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Nos encontramos en la clase de 1.º de Primaria y contamos con 27 euros para comprar material escolar. Si gastamos 12 euros en papel, ¿cuántos nos quedarán para bolígrafos, gomas, etc.?».

Se comentará con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta al problema y llegaremos a la conclusión de que es necesario resolver la sustracción de 27 menos 12, pero no la saben calcular numéricamente aún porque sus términos son de dos cifras y ya no se encuentran en la tabla de la sustracción.

Después de que diferentes miembros del alumnado presenten sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de la manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo estándar correspondiente.

Haciendo uso de los materiales didácticos, en el caso de los BM, para el 27 tendrán dos barras y siete cubos, y para el 12 una barra y dos cubos. Si utilizan dos ábacos verticales, en el primero representarán el minuendo que será el 27 y en el segundo el sustraendo, el 12. Se muestra en la figura 53 esta ayuda, por ejemplo con los ábacos.

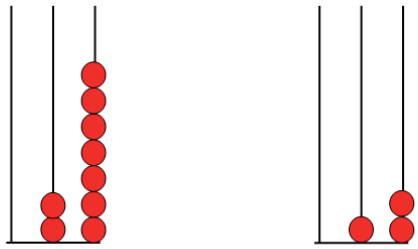


Figura 53. Representación de 27 y 12 con ábacos

Antes de continuar con la manipulación de los materiales se comenta con el alumnado la necesidad de expresar por escrito lo que ocurre numéricamente, para guardar memoria del proceso que se está desarrollando y del resultado final. Para indicar las decenas y las unidades a la hora de simbolizar la operación, podemos utilizar, si es necesario, las expresiones con unidades separadas:

$$\begin{array}{r} 2\,[10]\,7 \\ -\;1\,[10]\,2 \\ \hline \underbrace{1\,[10]\,5}_{15} \end{array}$$

Les preguntamos qué deberían hacer para obtener el resultado final. Con los BM lo resuelven quitando, uno a uno, los cubos y las barras del 12 a la vez que quitan la misma cantidad, respectivamente, en el 27. A continuación nos dicen lo que queda del 27, cuando del 12 ya no haya ninguna pieza. El resultado es una barra y cinco cubos; es decir, 15. El proceso ha consistido en retirar la misma cantidad de piezas iguales de los dos términos hasta que en el sustraendo no quede nada, verbalizando en todo momento lo que hacen.

En el caso de los ábacos tendrán que ir quitando igual cantidad de bolas de las mismas posiciones en los dos ábacos hasta que en el ábaco del sustraendo no quede ninguna (figura 54).

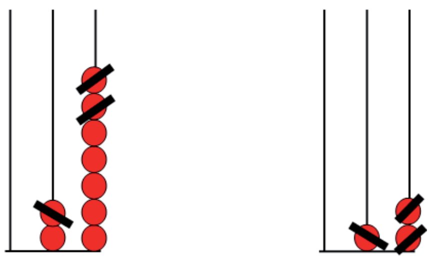


Figura 54. Representación del proceso de la sustracción: 27 – 12

Cuando del sustraendo no quede ninguna bola, en el ábaco del minuendo estará representado el resultado final de la operación. Al finalizar la tarea, encontrarán 5 bolas en la varilla de las unidades y 1 en la de las decenas como se muestra en la figura 55. Por tanto, el resultado es el número 15.

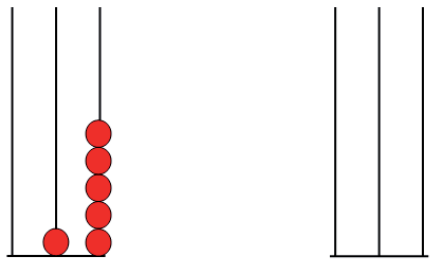


Figura 55. Representación con ábacos del resultado de 27 – 12

También se podría realizar la operación utilizando un ábaco solamente y aplicando el procedimiento adecuado. Representan el 27, que es el minuendo y quitan 12, es decir, quitan dos bolas de la primera varilla y una de la siguiente empezando por la derecha. El número que queda representado es el 15.

De manera simultánea a la manipulación con cualquiera de los materiales y la correspondiente verbalización, trabajaremos la representación simbólica con las cifras:

$$\begin{array}{r} 2\,[10]\,7 \\ -\;1\,[10]\,2 \\ \hline \underbrace{1\,[10]\,5}_{15} \end{array}$$

Cuando el alumnado deje de necesitar las unidades separadas para entender la operación, se escribirá la sustracción con la expresión usual:

$$\begin{array}{r} 27 \\ -\;12 \\ \hline 15 \end{array}$$

La comprensión clara de las cifras que representan cada orden de unidades hará que la colocación de los términos de la sustracción en columna sea correcta, sin necesitar las expresiones con unidades separadas. No se debería pasar a la disposición horizontal (27 – 12 = 15) hasta que no esté clara la representación vertical.

Para volver al contexto del trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Nos encontramos en la clase de 1.º de Primaria y contamos con 27 euros para comprar material escolar. Si gastamos 12 euros en papel, nos quedarán 15 para bolígrafos, gomas, etc.».

Se han de hacer más ejemplos de sustracción reflexionando con el alumnado sobre la relación entre las cifras del minuendo y sustraendo y las de la resta o diferencia, ayudándoles a que por medio de las situaciones problemáticas trabajadas lleguen a la conclusión: «la cifra de las unidades del resultado es la diferencia entre las cifras de las unidades del minuendo y sustraendo, y la cifra de las decenas del resultado es la diferencia entre las cifras de las decenas de los mencionados términos». De esta manera el alumnado observa que se ha transformado una sustracción de números de dos cifras en dos sustracciones de números de una cifra, que ya sabían resolver y así descubren cómo funciona el algoritmo usual de la sustracción sin llevar.

Numéricamente se seguirá un procedimiento semejante para restar sin llevar en los diferentes tramos de la secuencia didáctica propuesta.

En el 1.^{er} ciclo de Primaria ha de quedar consolidado este algoritmo, y así no habrá problemas con la sustracción sin llevar cuando trabajemos con números más grandes en cursos posteriores, tanto si la operación se realiza en disposición vertical como horizontal.

El objetivo final será llegar a usar este algoritmo de la sustracción con la expresión usual de los términos como la manera natural de resolver las sustracciones asociadas a la resolución de situaciones problemáticas.

> Una vez está entendida la sustracción sin llevar y ya en 2.º de Primaria, es el momento para superar la barrera que los separa del reto siguiente: resolver el problema que supone la sustracción de números, cuando en algún orden de unidades la cifra del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, lo que quiere decir que es necesario hacer una sustracción «llevando».
>
> Proponemos ahora la segunda parte de la secuencia didáctica ordenada por niveles de dificultad según la cual se deberían introducir los algoritmos (natural y estándar) de la operación en el 1.^{er} y 2.º ciclo de Educación Primaria y que se refiere a la sustracción «llevando»:
>
> 1. Sustracción «llevando» en las unidades, por ejemplo: 52 – 35, 23 – 5, 545 – – 439, 335 – 28...
> 2. En las decenas únicamente: 325 – 82, 525 – 431...
> 3. En las unidades y decenas: 532 – 285, 436 – 69...
> 4. En las centenas y órdenes superiores: 1375 – 747, 12715 – 4972...

B.9. Descubrir el algoritmo «natural» de la sustracción «llevando» y utilizarlo para realizar sustracciones «llevando», con el minuendo y el sustraendo colocados vertical y horizontalmente

Seguimos en la 3.ª fase de E-A de la sustracción y a continuación presentamos, para 2.º curso de Primaria, la construcción del algoritmo natural de la sustracción llevando, que consiste en pedir prestada en el minuendo una unidad a la cifra del orden siguiente al que encontramos la dificultad para restar y añadirla a la cifra problemática descompuesta en 10 unidades de su orden.

Tal como se ha trabajado en algoritmos anteriores, para la construcción, comprensión y posterior automatización, se utilizarán materiales didácticos que ya conocen (como son los BM y los ábacos) y la transcripción numérica de las acciones que realizan.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Nos encontramos en la clase de 2.º de Primaria y de 45 libros que tiene una colección de cuentos en el aula tenemos 28. Queremos saber cuántos quedan en la biblioteca del colegio, sin tener que ir hasta allí para contarlos».

Después de que diferentes miembros del alumnado presenten sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de una manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo natural de la sustracción llevando.

La idea es que puedan construir el algoritmo a partir de la manipulación de los materiales mencionados, reflexionando sobre los pasos que les conducirán a encontrar la solución.

El primer paso será representar los números 45 y 28 con los materiales didácticos que estén utilizando. De la misma manera que en los ejemplos anteriores, para el caso de los BM seleccionan 4 barras y 5 cubos para el 45, y dos barras y ocho cubos para el 28 (figura 56). Si utilizan dos ábacos verticales, en el primero representarán el minuendo que será el 45 y en el segundo el sustraendo, el 28.

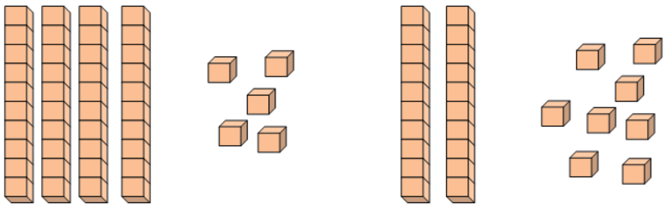


Figura 56. Representación de 45 y 28 con BM

Para guardar registro numérico de lo que hacen y de manera análoga a los casos anteriores, les pediremos que representen la operación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 4\,[10]\,5 \\ -\;\;2\,[10]\,8 \\ \hline ?? \end{array}$$

Cuando intenten resolverla, observarán que no tienen 8 cubos u 8 bolas para quitar de las unidades del minuendo y dedicarán tiempo a pensar para resolver este problema.

El conocimiento del SND les hará llegar, sin demasiada ayuda, a hacerse la pregunta: «¿Podemos coger un barra de las cuatro que tenemos y sustituirla por diez cubos o una bola de la varilla de las decenas y sustituirla per diez bolas de la varilla de las unidades?». A partir de dar una respuesta afirmativa a esta pregunta, les queda claro lo que han de hacer: pedir prestada una decena en el minuendo y descomponerla en 10 unidades para añadirlas a las unidades de este término (figura 57).

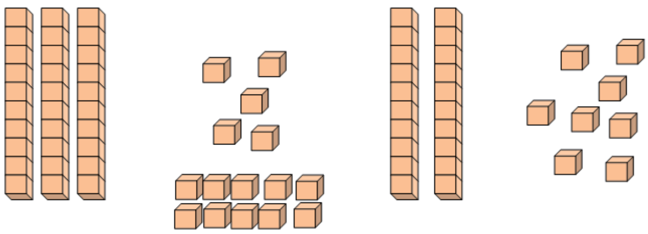


Figura 57. Representación de la transformación de una decena del 45 en 10 unidades

Los 10 cubos transformados o las 10 bolas de la varilla de las unidades de los ábacos convierten en 15 las unidades del minuendo. Ahora sí pueden quitar 8 unidades de los dos términos, además de quitar después las dos decenas (figura 58).

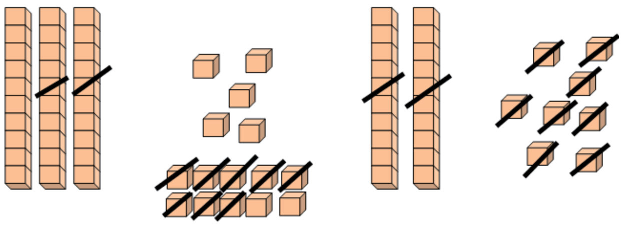


Figura 58. Representación del proceso de la sustracción de 45 menos 28

El resultado obtenido será 17 y, por tanto, verbalizarán «cuarenta y cinco menos veintiocho son diecisiete», y podrán trasladarlo a la expresión numérica siguiente:

$$\begin{array}{r} \overset{3}{\cancel{4}}\,[10]\,15 \\ -\ \ 2\,[10]\ \ 8 \\ \hline \underbrace{1\,[10]\ \ 7}_{17} \end{array}$$

Este es el procedimiento que llamamos *algoritmo natural, de descomposición* o *de préstamo* porque, como hemos dicho antes y acabamos de poner en práctica, consiste en pedir prestada en el minuendo una unidad a la cifra del orden siguiente al que encontramos la dificultad para restar y añadirla a la cifra problemática descompuesta en 10 unidades de su orden.

Cuando el alumnado deje de necesitar las unidades separadas para entender el algoritmo, se escribirá la sustracción con la expresión usual: $\begin{array}{r} \overset{3}{\cancel{4}}\ {}^{1}5 \\ -2\ \ 8 \\ \hline 1\ \ 7 \end{array}$,

en la que indicamos la transformación realizada y las diez unidades que se añaden a las unidades del minuendo se anotan de manera gráfica con un 1 más pequeño sobre la columna de las unidades en posición exponencial-anterior.

La comprensión clara de las cifras que representan cada orden de unidades hará que la colocación de los términos de la sustracción en columna sea correcta, sin necesitar las expresiones con unidades separadas. No se debería pasar a la disposición horizontal (45 – 28 =17) hasta que no esté clara la representación vertical.

Una vez se ha obtenido la solución de la operación se proporciona la respuesta a la situación problemática planteada: «De los 45 libros que tiene una colección de cuentos, en el aula hay 28. Quedan, por tanto, 17 en la biblioteca del colegio».

Se deben hacer más ejemplos de sustracción reflexionando con el alumnado sobre la relación entre las cifras del minuendo y sustraendo y las de la resta o diferencia, ayudándoles a que por medio de las situaciones problemáticas trabajadas lleguen a la conclusión: «si la cifra de las unidades del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo transformamos una decena del minuendo en diez unidades que añadimos a las unidades del minuendo, y entonces procedemos como si fuera una sustracción sin llevar». Así descubren cómo funciona el algoritmo natural de la sustracción en estos casos.

Se seguirá un procedimiento semejante para restar llevando en las decenas con números de tres cifras e intentaremos que para restar llevando en unidades y en decenas no sea necesaria la utilización de los materiales.

A continuación se muestra un ejemplo de representación numérica de una sustracción llevando en las decenas, 554 – 362, que se realizará con unidades separadas, si es necesario:

$$\left.\begin{array}{rrr} 5[100] & 5[10] & 4 \\ -\ 3[100] & 6[10] & 2 \\ \hline & ?? & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr} \overset{4}{\cancel{5}}[100] & 15[10] & 4 \\ -\ 3[100] & 6[10] & 2 \\ \hline 1[100] & 9[10] & 2 \end{array}\right\}$$

o directamente con la expresión definitiva del algoritmo natural: $\begin{array}{rrr} \overset{4}{\cancel{5}} & {}^{1}5 & 4 \\ -\ 3 & 6 & 2 \\ \hline 1 & 9 & 2 \end{array}$.

Se harán más ejemplos de sustracciones asociadas a la resolución de situaciones problemáticas, hasta que los alumnos utilicen este algoritmo como la manera usual de resolver las sustracciones llevando.

B.10. Descubrir el algoritmo «estándar» de la sustracción «llevando» y utilizarlo para realizar sustracciones «llevando», con el minuendo y el sustraendo colocados vertical y horizontalmente

Este algoritmo, llamado también *usual* o *habitual*, se introduce como una continuación del anterior, después de comprobar que el algoritmo natural puede resultar complicado en sustracciones con gran cantidad de ceros en el minuendo, como por ejemplo, 20.003 – 1.956. Además de esta razón más práctica, hay otras, como el extendido uso social de este algoritmo y la normativa vigente, que indica la necesidad de trabajar los algoritmos estándar.

A partir de situaciones problemáticas que necesitan una sustracción para resolverlas, se introducirá este algoritmo con la ayuda del teorema de las sustracciones Equivalentes, también llamado *propiedad de la compensación*.

A continuación pasamos a trabajar el teorema:

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Manuel explica a los compañeros y compañeras: tengo 13 cuentos de una colección de 20 cuentos, ¿cuántos me faltan para completarla? Este fin de semana compraré dos más, pero me he enterado de que la editorial ha decidido aumentar la colección en dos volúmenes. ¿Cuántos me faltan ahora para completarla?».

Los compañeros de clase proceden a resolver la situación planteada por Manuel:

- Cuentos que le faltan ahora: 20 – 13 = 7.
- Cuentos que le faltarán después del fin de semana: (20 + 2) – (13 + 2) = 22 – – 15 = 7.

El resultado de la 2.ª sustracción no ha variado.

Las sustracciones 22 – 15 y 20 – 13 por tener el mismo resultado se llaman *sustracciones equivalentes*.

Se harán más ejemplos de sustracciones asociadas a la resolución de situaciones problemáticas de este tipo, reflexionando con el alumnado sobre la relación de los dos resultados obtenidos, ayudándoles a que lleguen a la conclusión: «si aumentamos o disminuimos en la misma cantidad los dos términos de la sustracción la diferencia no varía».

Este hecho se conoce con el nombre de *teorema o propiedad de las sustracciones equivalentes*, y es la base teórica del algoritmo estándar o habitual de la sustracción llevando.

La expresión formal de este teorema o propiedad es:

$$\forall\, a,\, b,\, c \in N \;/\; a \geq b \geq c : \;\; (a \pm c) - (b \pm c) = a - b\,.$$

Cuando los niños y las niñas hayan interiorizado esta propiedad de las sustracciones, será el momento de introducir el algoritmo estándar de la sustracción llevando. Estamos en la 3.ª fase de E-A de la sustracción, pero en 3.er curso de Primaria. Para trabajar la comprensión y la automatización del algoritmo, utilizaremos los materiales didácticos que ya conocen (como son los bloques multibase y los ábacos) y la transcripción escrita de las operaciones que realicen.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Nos encontramos en la clase de 3.º de Primaria y de 45 libros que tiene una colección de cuentos, en el aula hay 28. Queremos saber cuántos quedan en la biblioteca, sin tener que ir hasta allí para contarlos».

Se comentará con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta a la situación y llegarán a la conclusión de que deben resolver la sustracción de 45 menos 28. Después de que diferentes miembros del alumnado presenten sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de una manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo estándar correspondiente.

Haciendo uso de los materiales didácticos, en el caso de los BM, para el 45 tendrán cuatro barras y cinco cubos, y para el 28 dos barras y ocho cubos. Si utilizan dos ábacos verticales, en el primero representarán el minuendo que será el 45 y en el segundo el sustraendo, el 28. Se representa en la figura 59 esta ayuda con los ábacos.

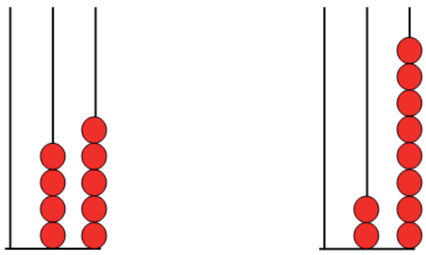


Figura 59. Representación de 45 y 28 con ábacos

Antes de continuar con la manipulación de los materiales se comenta con el alumnado la necesidad de expresar por escrito lo que ocurre numéricamente, para tener memoria del proceso que se va a desarrollar y del resultado final. Para indicar las decenas y las unidades a la hora de simbolizar la operación, pueden utilizar, si es necesario, las expresiones con unidades separadas:

$$\begin{array}{r} 4\,[10]\;5 \\ -\;\;2\,[10]\;8 \\ \hline ?\,? \end{array}$$

Les preguntamos qué deberían hacer para obtener el resultado final y observan que no pueden quitar las 8 unidades del sustraendo a las unidades del minuendo; dedican tiempo a pensar para resolver este problema. Como han aprendido en el algoritmo natural, proponen descomponer una decena del minuendo en diez unidades y añadirlas a las que ya tenía este término. Les diremos que la condición para operar ahora es que no pueden transformar decenas en unidades, que han de buscar otro procedimiento para resolver la operación.

De nuevo dedican tiempo a pensar. Es más complicado y, en un primer momento, con la referencia del algoritmo natural, como el problema de no poder restar se les presenta en las unidades, para el caso de los BM lo resuelven añadiendo 10 cubos a la representación del minuendo (que es el 45). Preguntamos al alumnado si esta acción modificará el resultado de la operación. Ayudándoles en la reflexión y la búsqueda de la respuesta, intuyen ellas y ellos que sí; entonces hemos de continuar haciendo alguna cosa para que el resultado no varíe y recordando el Teorema de las Sustracciones Equivalentes, lleguen a la conclusión de añadir también la misma cantidad de cubos al sustraendo (que es el 28), con lo que en el minuendo tendremos 4 barras y 15 cubos, y en el sustraendo 2 barras y 18 cubos.

Análogamente, en el caso de los ábacos procederían añadiendo 10 bolas en las unidades de la representación del minuendo y para que el resultado no varíe añadirían también 10 bolas en las unidades del sustraendo, como se muestra en la figura 60.

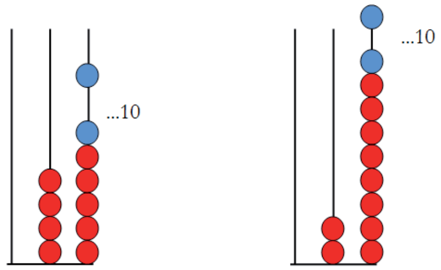


Figura 60. Representación con ábacos de cómo se añaden 10 unidades a los términos de 45 – 28

De manera simultánea al trabajo con cualquiera de los dos materiales, verbalizan lo que ha pasado y lo representan numéricamente:

$$\begin{array}{rr} & 4[10]\ 15 \\ - & 2[10]\ 18 \\ \hline & ?? \end{array}$$

Comprueban que las unidades añadidas no son la solución porque así continúan teniendo más unidades en el sustraendo que en el minuendo. Por el buen conocimiento que tienen del funcionamiento del SND y para solucionar la situación, en el caso de los BM transforman los 10 cubos del sustraendo en una barra y la añaden a las decenas: así sí que tenemos mayor cantidad de unidades en el minuendo para poder restar, concretamente, tenemos 4 barras y 15 cubos, y en el sustraendo 2 + 1 barras y 8 cubos. En los ábacos, análogamente al trabajo hecho con los BM, llegan a transformar las 10 bolas que se habían añadido a las unidades del sustraendo en una bola en la varilla de las decenas del mismo término. Se representa en la figura 61 el resultado de la transformación con los ábacos.

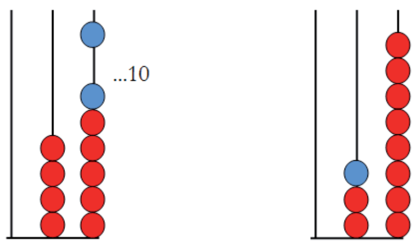


Figura 61. Representación con ábacos de la transformación de 10 unidades en una decena en el sustraendo

Con el alumnado, simultáneamente a la manipulación con los materiales, verbalizaremos lo que ha pasado y lo representarán numéricamente:

$$\begin{array}{rr} & 4[10]15 \\ - & 2+1[10]\ \ 8 \\ \hline & ?? \end{array}$$

En los BM ahora sí pueden retirar 8 cubos de ambos términos de la sustracción, quedándonos del minuendo solo 7 cubos, entonces quince menos ocho son siete. Con los ábacos quitan bolas de la varilla de las unidades de los dos ábacos al mismo tiempo hasta que no quede ninguna en el sustraendo, como se muestra en la figura 62.

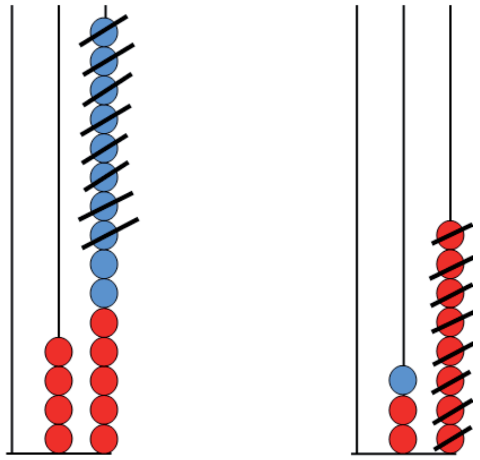


Figura 62. Representación con ábacos de la sustracción en las unidades

Combinado con el trabajo de manipulación de los materiales y la correspondiente verbalización, se realiza la representación simbólica con las cifras, para fijar lo que se ha hecho:

$$\begin{array}{r} 4[10]\ 15 \\ -2+1[10]\ \ \ 8 \\ \hline 7 \end{array}$$

Para acabar la manipulación de los BM y completar el proceso, quitarán de los dos términos la cantidad de barras que ahora hay en el sustraendo, es decir, 4 menos 3 es 1. Ya tenemos el resultado, una barra y siete cubos, diecisiete, entonces cuarenta y cinco menos veintiocho son diecisiete. En los ábacos, quitan una a una bolas de la varilla de las decenas del sustraendo y del minuendo hasta que del sustraendo desaparezcan todas, quedándoles en el minuendo solo una bola, es decir, 4 menos 3 es 1. Ya tenemos el resultado, una bola y siete bolas en las últimas varillas de la derecha, respectivamente, como se muestra en la figura 63.

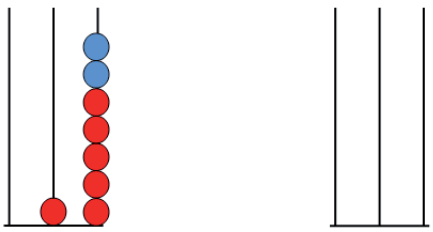


Figura 63. Representación en ábacos del resultado de 45-28

Simultáneamente a la manipulación con cualquiera de los materiales y la correspondiente verbalización, trabajaremos la representación simbólica con las cifras:

$$\begin{array}{r}
4[10]\;\;15\\
-2+1[10]\;\;\;8\\
\hline
1[10]\;\;\;7
\end{array}$$

Cuando el alumnado deje de necesitar las unidades separadas para entender la operación, se escribirá la sustracción con la expresión usual, inicialmente con ayudas: $\begin{array}{rr} 4 & {}^{1}5\\ -2^{+1} & 8\\ \hline 1 & 7\end{array}$,

donde las diez unidades que se añaden a las unidades del minuendo se señalan de manera gráfica con un 1 más pequeño sobre la columna de las unidades en posición exponencial-anterior y la decena añadida al sustraendo con un más 1 en posición exponencial.

La comprensión clara de las cifras que representan cada orden de unidades hará que la colocación de los términos de la sustracción en columna sea correcta, sin necesitar las expresiones con unidades separadas. No se debería pasar a la disposición horizontal (45 – 28 = 17) hasta que no esté clara la representación vertical.

Para volver al contexto del trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «De los 45 libros que tiene una colección de cuentos, en el aula hay 28. Quedan, por tanto, 17 en la biblioteca del colegio».

Se han de hacer más ejemplos de sustracción reflexionando con el alumnado sobre la relación entre las cifras del minuendo y sustraendo y las de la resta o diferencia, ayudándoles a que, por medio de las situaciones problemáticas trabajadas, concluyan que en las sustracciones llevando en las unidades: «añadir la misma cantidad de la misma forma (10 unidades) al minuendo y al sustraendo es un paso inútil».

A partir de este momento, y posiblemente sin necesidad de utilizar los materiales, en las siguientes sustracciones aplicarán lo que acaban de descubrir, y añadirán directamente 10 unidades a la representación del minuendo y 1 decena a la del sustraendo. De esta manera consiguen transformar la sustracción llevando en otra sin llevar. La representación simbólica (con unidades separadas, si es necesario) sería:

$$\begin{array}{r}
4[10]\;\;15\\
-\;\;2+1[10]\;\;\;8\\
\hline
7
\end{array}$$

Los pasos siguientes de este trabajo se desarrollarán de manera semejante a lo que se ha explicado anteriormente (finalizar la operación, recontextualizar...).

En la reflexión con el alumnado sobre la relación entre las cifras de los términos y las del resultado, les ayudaremos a que por medio de los ejemplos trabajados lleguen a una conclusión semejante a: «si la cifra de las unidades del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo añadimos diez unidades a las unidades del minuendo y una decena a las decenas del sustraendo, entonces procedemos como si fuera una sustracción sin llevar». Han descubierto cómo funciona este procedimiento que llamamos *algoritmo estándar* para sustracciones llevando en las unidades.

El objetivo final será llegar a usar el algoritmo estándar con la expresión usual de los términos de la sustracción, como la manera habitual de resolver las sustracciones llevando, en las que las unidades que se añaden y la decena que se lleva se recordarán de manera mental.

En 3.er curso de Primaria, se seguirá un procedimiento semejante para restar llevando en las decenas con números de tres cifras e intentaremos que para restar llevando en unidades y en decenas no sea necesaria la utilización de los materiales. Para verlo en unidades y decenas, desarrollamos el ejemplo siguiente, 751 – 362 que se realizará con unidades separadas, si es necesario:

$$\left.\begin{array}{rrr} 7[100] & 5[10] & 1 \\ -\ 3[100] & 6[10] & 2 \\ \hline & ?? & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr} 7\,[100] & 15\,[10] & 11 \\ -\ 3+1\,[100] & 6+1\,[10] & 2 \\ \hline 3\,[100] & 8\,[10] & 9 \end{array}\right\}$$

o directamente con la expresión definitiva del algoritmo estándar: $\begin{array}{r} 751 \\ -\,362 \\ \hline 389 \end{array}$.

En 3.er curso de Primaria ha de quedar consolidado el funcionamiento de este algoritmo, y así no habrá problemas con el algoritmo estándar de la sustracción llevando cuando trabajen con números más grandes en cursos posteriores y generalicen su uso, tanto si la operación se realiza en disposición vertical como horizontal.

B.11. Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de la sustracción

De manera espontánea, y utilizando el mismo procedimiento que en la adición, en voz alta, en un juego, en diferentes situaciones, etc., y siempre en un nivel de menos dificultad que el que en clase se trabaje en el ámbito simbólico, utilizaremos la sustracción para trabajar el cálculo mental. Es necesario realizar actividades de restar sin usar lápiz y papel. De hecho, es otro de los cálculos más relacionados con la vida real junto con la adición, porque en la calle y en casa, en situaciones extraescolares, es donde más adiciones y sustracciones harán.

En 1.er ciclo de Primaria, se trabajará la tabla de la sustracción, sustracciones de dos cifras, empezando con decenas completas, y como en clase se ha trabajado la descomposición polinómica, utilizaremos esta herramienta para el cálculo mental. Así, si, por ejemplo, se les pide restar 29 – 5, mentalmente deberían pensar «29 es 20 + 9 → 9 – 5 = 4 entonces 29 – 5 = 24».

Análogamente al caso de la adición, hemos de estar atentos también a todas las estrategias emergentes que aparecen en los niños y niñas, a la construcción de su propia manera de calcular mentalmente y a los instrumentos de ayuda explicitados en la capacidad A.8. Por ejemplo, si un niño o niña tiene que restar 15 – 9, es posible que le resulte más fácil restar 15 – 10 y al resultado añadirle 1; o asumir que el 9 = 5 + 4 y por tanto es más fácil restar 15 – 5 y al resultado restarle 4. Estas maneras «personales» de restar comportan conocer la composición de los números de manera aditiva y llegar a ver una determinada cantidad en función de algunas descomposiciones, más útiles, que tenga. Por ejemplo, el 100 = 25 + 25 + 25 + 25, esas «cuatro veces 25» les hacen llegar rápidamente a 100, 75, 50, 25. O el 60 = 15 + + 15 + 15 + 15 y, por tanto, llegar rápidamente a 60, 45, 30, 15, etc.

A medida que se va dominando este cálculo mental y se trabajen las otras operaciones, se puede combinar gradualmente la sustracción con ellas para realizar un trabajo conjunto.

B.12. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la sustracción

Es en situaciones reales donde cobra especial sentido el trabajo hecho con esta operación, porque realmente es la realidad la que origina interrogantes cuya respuesta pasará por saber, en este caso, resolver sustracciones.

Como en el caso de la adición, aunque la resolución e invención de problemas aparece como la cuarta fase para trabajar las operaciones, también ahora nos encontramos en ella desde el principio, porque presentamos las sustracciones de manera contextualizada, a partir de situaciones reales que han de resolver y que, igualmente, estarán relacionadas con cualquier bloque de contenidos matemáticos.

Continuaremos trabajando la resolución de problemas a partir de las cuatro fases de Polya y de la reflexión con el alumnado sobre su importancia, desarrollo y utilidad.

Como se ha comentado en la capacidad A.9 y con las mismas consideraciones, aprovecharemos los errores para generar nuevos aprendizajes y continuaremos con el trabajo de estimación de los resultados de las situaciones problemáticas.

Iniciaremos el trabajo en 1.º de Primaria, con problemas que necesitan ser resueltos con una sustracción. Es muy importante que, en los primeros momentos, prestemos atención de manera individual a cada una de las diferentes situaciones utilizadas para introducir la operación (de disminuir, de añadir para llegar a una nueva cantidad, de comparar cardinales). Así, cada vez que introduzcamos un nuevo tipo de situaciones para la sustracción, tendremos que trabajar la resolución de problemas relacionados con ellas, para reforzar el significado de la operación que tienen asociado. Cuando ya reconozcan la sustracción como la operación que sirve para resolver cualquiera de estas situaciones, plantearemos problemas relacionados con ellas sin tener cuidado de que aparezcan de manera aislada.

Más adelante y aún en el 1.er ciclo trabajaremos problemas que necesiten dos sustracciones para su resolución. Los problemas mencionados hasta ahora serán de números de dos cifras, para pasar en 2.º de Primaria a números de tres cifras.

También y dentro de este 1.er ciclo, se pueden proponer problemas que necesiten para su resolución la combinación de una sustracción y una adición.

En referencia a los enunciados de las situaciones problemáticas seguiremos los mismos pasos que para la adición (capacidad A.9) pero tendremos que hacer una consideración añadida. Se trata de la necesidad de que dentro de los enunciados claros, ordenados, completos, sin errores..., tengamos cuidado al principio de hacer aparecer las datos de manera ordenada de acuerdo con su papel en la sustracción que han de realizar; es decir, que el primer número sea el minuendo y el segundo el sustraendo («Si tienes 25 euros y gastas 12 en unos cromos, ¿cuántos te quedan?»). Avanzado el ciclo no será necesario respetar este orden («Si has gastado 12 euros en cromos y tenías 25, ¿cuántos te quedan?»).

En este caso, la aparición de problemas con enunciados confusos, incompletos, con datos que faltan, con datos que sobran... tendrá que ser un poco más retardada que en el trabajo con la adición.

Desarrollaremos también tareas de invención de problemas relacionados con la sustracción con las mismas orientaciones dadas para la adición (capacidad A.9), tanto referidas al ofrecimiento de ayudas al alumnado como a la necesidad de intercambiar entre los niños y las niñas los enunciados inventados. Como detalle diferente resaltaremos la necesidad de trabajar la invención de los tres tipos de situaciones relacionadas con la sustracción. Así, cuando les proponemos que inventen una situación y les damos los números, el contexto, etc., podemos pedirles también que la situación sea de disminuir, de añadir para llegar a una nueva cantidad o de comparar cardinales, para comprobar si han captado el significado de la operación en todas sus vertientes y son capaces de generar situaciones relacionadas con todas ellas.

En los ciclos posteriores se continuará con las tareas de resolución e invención de situaciones problemáticas relacionadas con la sustracción, en las que esta operación se combinará con las otras tres a medida que las vayan dominando. Tendremos que procurar a lo largo de toda la etapa que las situaciones trabajadas se refieran siempre a los tres tipos de situaciones problemáticas relacionadas con esta operación.

Hacia al final del 1.er ciclo o ya en el 2.º hemos de trabajar con el alumnado para observar que cualquier adición genera siempre dos sustracciones, de manera que los tres números quedan relacionados con las operaciones adición y sustracción de la manera siguiente:

$$\forall a,\ b,\ c \in N : a + b = c \Leftrightarrow c - a = b \wedge c - b = a\ .$$

La traducción a situaciones reales para los niños podría ser:

«Tengo 13 cuentos de una colección. Me regalan 7 más y ya está completa. ¿Cuántos cuentos forman la colección?» 13 + 7 = 20.
«Tengo 13 cuentos para completar la colección de 20, ¿cuántos me faltan? 20 – 13 = 7.
«Me faltan 7 cuentos para completar la colección de 20, ¿cuántos tengo?» 20 – 7 = 13.

Tanto en una sustracción como en la otra, el número de cuentos que tengo más el número de cuentos que me faltan, hacen el número de cuentos de la colección, que es la primera adición que hemos calculado. Entonces también podemos escribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\forall a, b, c \in N: \ c - a = b \wedge c - b = a \Leftrightarrow \ a + b = c.$$

Se harán más ejemplos de sustracciones asociadas a la resolución de situaciones problemáticas, reflexionando con el alumnado alrededor de este hecho, ayudándoles a que lleguen a concluir la norma general: «el minuendo es igual al sustraendo más la diferencia».

A partir de este momento, con la finalidad de conseguir que el alumnado se pueda sentir «matemático» (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) y responsable de la corrección de sus resultados, se utilizarán estas relaciones como forma de comprobar si las sustracciones están bien hechas.

B.13. Realizar ejercicios prácticos de sustracciones en el sistema de numeración sexagesimal

Análogamente a la adición, esta capacidad se trabajará en el 3.er ciclo de Primaria. Se introducirá en el sistema sexagesimal una vez quede clara la operación, haciendo sustracciones sin llevar, y posteriormente llevando, en los segundos, en los minutos, en los dos al mismo tiempo. El algoritmo que se utilizará será el natural o de préstamo.

La sustracción sin llevar en el sistema sexagesimal se realizará restando por separado cada uno de los órdenes de las unidades como se puede ver en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rrrr} & 25\text{ h} & 15\text{ min} & 19\text{ s} \\ - & 10\text{ h} & 43\text{ min} & 7\text{ s} \\ \hline & \underline{\underline{15}}\text{ h} & 12\text{ min} & \underline{\underline{12}}\text{ s} \end{array}$$

Recordamos la convivencia de las cifras indoarábigas y los órdenes de las unidades del sistema sexagesimal, y la necesidad de tener presente este hecho para la comprensión del algoritmo de la sustracción en este sistema.

Tendremos que incidir con el alumnado en que la necesidad de llevar se presenta en este caso cuando alguna de las cantidades que aparecen en los dos primeros órdenes de unidades del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo. Resolveremos estas operaciones utilizando el algoritmo natural de la sustracción llevando sin llegar al estándar ni a la memorización de «llevar una» por la poca frecuencia con la que necesitamos estas operaciones y para evitar el trabajo mental con números tan grandes.

A continuación presentamos un ejemplo de sustracción en el sistema sexagesimal, llevando en los segundos, en el que representamos de manera numérica el proceso de la operación y los cambios necesarios para llegar al resultado final correcto:

$$\begin{array}{r}
54 \text{ min } 79 \text{ s} \\
25 \text{ h } \cancel{55} \text{ min } \cancel{19} \text{ s} \\
-10 \text{ h } 42 \text{ min } 57 \text{ s} \\
\hline
15 \text{ h } 12 \text{ min } 22 \text{ s} \\
\hline\hline
\end{array}$$

Análogamente, se muestra ahora un ejemplo de sustracción en el sistema sexagesimal, llevando en los segundos y en los minutos:

$$\begin{array}{r}
24 \text{ h } \;\; 74 \text{ min} \qquad \\
\cancel{14} \text{ min } 79 \text{ s} \\
\cancel{25} \text{ h } \cancel{15} \text{ min } \cancel{19} \text{ s} \\
-10 \text{ h } 43 \text{ min } 55 \text{ s} \\
\hline
14 \text{ h } 31 \text{ min } 24 \text{ s} \\
\hline\hline
\end{array}$$

En este caso el procedimiento será también análogo cuando trabajemos con cantidades referentes a la amplitud angular.

C. Multiplicación

La noción de multiplicación de números naturales va ligada al concepto de conjunto; por tanto, es válido lo que se ha visto en el tema anterior y que hace referencia a este concepto.

Atendiendo a la definición, la multiplicación es la operación que nos permite calcular el producto de dos números, entendiendo que este es el cardinal del conjunto que resulta de construir el producto cartesiano de dos conjuntos que tienen como cardinales los números que vamos a multiplicar.

Por resultar más intuitiva la idea, con el alumnado de Primaria entenderemos en un principio la multiplicación como la operación que deriva de una adición en la cual los sumandos son todos iguales. Desde este punto de vista, por ser una operación que nace directamente de la adición, está también relacionada con la teoría de conjuntos, entendiendo en este caso el producto como el cardinal del conjunto que resulta de la unión de un número de conjuntos disjuntos y equipotentes igual a uno de los números a multiplicar, el cardinal de los cuales es el otro número que se multiplica. Recordemos que por conjuntos disjuntos se entiende aquellos que no comparten elementos, y por equipotentes aquellos que tienen el mismo cardinal.

C.1. Construir la idea de multiplicación a partir de la unión de conjuntos disjuntos equipotentes, expresando los cardinales respectivos y simbolizando las adiciones de sumandos iguales realizadas

En esta capacidad desarrollamos el trabajo correspondiente a la primera de las fases de E-A de la multiplicación, que se realiza en el 2.º curso de la etapa.

Es necesario partir de actividades prácticas y manipulativas con la finalidad de recrear situaciones que puedan identificar rápidamente. Las situaciones que hemos de presentar son aquellas en las que aparezcan adiciones con todos los sumandos iguales y en las que nos interese encontrar un nuevo método para calcular el resultado.

Por ejemplo, «En la clase de 2.º hemos hecho grupos de 3 niños y niñas. Cada uno de los alumnos ha de recortar 6 figuras de animales para el mural de la granja. ¿Cuántas figuras tendrá cada grupo?». Para responder a la pregunta reunirán las figuras de los tres miembros del grupo, las contarán y nos dirán que tienen dieciocho figuras. Mentalmente no han pensado «seis por tres igual a dieciocho», simplemente han contado lo que tienen en las manos.

Les propondremos que nos expliquen verbalmente lo que ha pasado con las figuras recortadas, insistiendo en la relación de la situación con una adición de sumandos iguales y en la utilización de los números que han intervenido en ella. Con la intención de hacer más cortas las frases que utilizan, les ayudaremos a modificar el enunciado «hemos reunido seis figuras de Ana, seis de José y seis de Marga y ahora tenemos dieciocho figuras», pasando por «seis más seis más seis es igual a dieciocho», hasta llegar a «sumamos el seis tres veces y nos da dieciocho», donde ya aparecen los dos términos que intervienen en la multiplicación.

Acompañando la verbalización, y por las mismas razones que en las operaciones anteriores, podemos proponerles una representación gráfica (figura 64) de lo que ha ocurrido, en la que aparezcan los números en su expresión matemática,

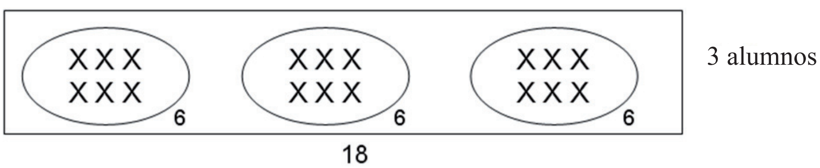


Figura 64. Representación de la unión de 3 conjuntos de 6 elementos

con lo que nos iremos acercando un poco más a la representación numérica de lo que ha pasado con los objetos.

De manera análoga a las otras operaciones, les preguntaremos cómo se podría escribir todo esto solo con los números, para llegar a la representación de una adición de sumandos iguales:

$$6 + 6 + 6 = 18 \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ +\ 6 \\ \hline 18 \end{array}$$

Relacionada con estas adiciones introduciremos la palabra *multiplicación,* y deberíamos conseguir que la evolución verbal en los ejemplos fuera del tipo: si sumamos el 6 repetidamente 3 veces, obtenemos el 18. Posteriormente: tengo el 6 repetido 3 veces, es decir, tengo 18. Continuaremos con: 6 multiplicado por 3 son 18. Al final se debería decir: 6 por 3 son 18.

El final de la fase será pedir a los niños y niñas que sean ellos quienes encuentren o reconozcan situaciones de su vida personal que estén relacionadas con la operación (dinero, juguetes, lápices de colores...).

C.2. Utilizar los signos «×» e «=» para expresar, por medio de una multiplicación, una adición de sumandos iguales. Identificar y utilizar correctamente los términos y signos de la multiplicación

Continuando en el 2.º curso, una vez realizadas las acciones anteriores y conocida la palabra multiplicación, es el momento de pasar a la segunda fase de E-A de la operación, introduciendo los signos «×» e «=»; entonces, el enunciado verbal «seis por tres son dieciocho» se cambia por el enunciado numérico «6 × 3 = 18», en un primer momento de manera horizontal, que cambiaremos posteriormente a la disposición vertical $\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 3 \\ \hline 18 \end{array}$ para facilitar más adelante el aprendizaje del algoritmo.

Pero lo que ha de quedar claro es que esta nueva operación deriva de la adición de sumandos iguales: $\begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ +\ 6 \\ \hline 18 \end{array}$

Introduciremos también la nomenclatura específica de esta operación: el 6 se llama *multiplicando* (número que se repite), el 3 *multiplicador* (cantidad de veces que se repite) y el 18 *producto*. El signo «×» se lee *por*, y el signo «=», *igual* (que ya conocían).

Hay que destacar que, a diferencia de las operaciones anteriores, en esta los dos términos no son cualitativamente iguales. El multiplicando hace referencia al número de elementos de los conjuntos equipotentes (cuenta elementos), y el multiplicador al número de estos conjuntos (cuenta conjuntos). Usualmente se escribirá en primer lugar el multiplicando y, en segundo, el multiplicador.

Cuando conozcan todos los términos y signos de las restantes operaciones, tendremos que comprobar que el alumnado los identifica y diferencia correctamente.

C.3. Realizar multiplicaciones de números utilizando adiciones de sumandos iguales

Es importante que después de haber introducido la expresión simbólica de la operación, esta no se desconecte de las acciones con las que se relaciona. Para ello, también en el 2.º curso y en momentos posteriores al trabajo de la capacidad anterior, habrá que mostrarles expresiones simbólicas de multiplicaciones que deberán calcular por medio de reuniones de conjuntos disjuntos equipotentes o a partir de adiciones de sumandos iguales.

Este es un trabajo inverso al realizado en las dos capacidades anteriores, en las cuales el alumnado avanzaba desde las acciones con los objetos hasta las expresiones numéricas de las situaciones.

Si los niños y las niñas son capaces de encontrar los resultados de las multiplicaciones propuestas sin recurrir a los objetos o a las adiciones, pueden resolverlas numéricamente de esta manera, pero tendremos que reflexionar con ellos sobre el significado de la operación y sobre su relación inequívoca con situaciones en las que se reúnen conjuntos disjuntos equipotentes y se resuelven adiciones de sumandos iguales.

C.4. Construir la tabla de multiplicar

Simultáneamente al trabajo de manipulación de objetos cotidianos, en el que habrán reunido conjuntos disjuntos con el mismo cardinal de diversas maneras y, con el objetivo de recoger los resultados de las multiplicaciones realizadas, pueden rellenar una cuadrícula en la que se recogen los productos básicos y que da como resultado la tabla siguiente:

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Será necesario conseguir que entre 2.º y 3.^{er} curso el alumnado sea capaz de memorizar estos resultados para facilitar los cálculos con la multiplicación.

C.5. Descubrir el algoritmo de la multiplicación por una cifra y utilizarlo para realizar multiplicaciones en las que aumente progresivamente el número de cifras del multiplicando

En la 3.ª fase de E-A de la multiplicación y cuando se presente en el aula una situación en la que sea necesario multiplicar con el multiplicando de más de una cifra, será el momento de introducir el algoritmo de esta operación (no se necesita para multiplicar dos números de una cifra).

A continuación se propone la primera parte de una secuencia didáctica ordenada por niveles de dificultad, según la cual se deberían introducir los algoritmos de la operación hacia el final del 1.º y en el 2.º ciclo de Educación Primaria.

Empezaremos por multiplicaciones con multiplicandos de más de una cifra y multiplicadores de una sola, en las que se pueden recorrer los siguientes tramos:

1. Multiplicación sin llevar con multiplicando de dos cifras: 12 × 3.
2. Llevando con multiplicando de dos cifras: 25 × 3.
3. De tres cifras: 341 × 2, 725 × 3.
4. Multiplicando con cualquiera cantidad de cifras.

Trabajaremos la construcción de este algoritmo, para su comprensión y posterior automatización, con la ayuda de los materiales didácticos que ya conocen (como son los BM y los ábacos) y la transcripción escrita de las acciones que realizan.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Nos encontramos en la clase de 2.º de Primaria y estamos organizando un fin de semana en una granja escuela, en la que las habitaciones son triples. Si cada alumno ha de aportar 12 € para el viaje, ¿cuánto cuesta cada habitación?».

Se comentará con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta y llegaremos a la conclusión de que hemos de resolver la multiplicación de 12 por 3, pero no la saben calcular numéricamente aún porque uno de sus términos es de dos cifras y no se encuentra en la tabla de la multiplicación.

Antes de continuar con la manipulación de los materiales, se comenta con el alumnado la necesidad de expresar por escrito lo que ocurre numéricamente para tener la memoria del proceso que se va a desarrollar y del resultado final. Para indicar las decenas y las unidades a la hora de simbolizar la operación, pueden utilizar, si es necesario, las expresiones con unidades separadas:

$$\begin{array}{r} 1[10]\ 2 \\ \times\ \ 3 \\ \hline ?? \end{array}$$

Después de que diferentes miembros del alumnado presenten sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de la manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo estándar correspondiente.

Haciendo uso de los materiales didácticos, en el caso de los BM, para el 12 tendrán una barra y dos cubos, repetidos tres veces y diferenciados. Si utilizan ábacos verticales, representarán el multiplicando tres veces, una en cada uno de ellos.

Seguidamente, agrupan el material y dan el resultado, 36. ¿Qué ha pasado? En los BM se ha triplicado el número de cubos y el de barras del multiplicando, en el caso de los ábacos también, pero de las bolas correspondientes a cada varilla de uno de ellos. ¿Hace falta entonces representar con material desde el principio 3 veces el 12? (esta pregunta es la transposición de «es necesario buscar el resultado como si se hiciera una adición de sumandos iguales»). Lo piensan y llegan a la conclusión de que no, que es suficiente con representarlo una vez y entonces triplicar primero los cubos y después las barras en los BM o las bolas correspondientes a cada varilla de un solo ábaco. Están construyendo el algoritmo de la multiplicación por un número de una cifra empezando por las unidades de primer orden.

De manera simultánea a la manipulación con los materiales y la verbalización correspondiente, haremos la representación numérica, con unidades separadas si es necesario:

$$\begin{array}{r} 1[10]\ 2 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \underbrace{3[10]\ 6}_{36} \end{array}$$

El objetivo final será llegar a usar la expresión usual del algoritmo: $\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline 36 \end{array}$.

Para volver al contexto de trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Nos encontramos en la clase de 2.º de Primaria y estamos organizando un fin de semana en una granja escuela, en la cual las habitaciones son triples. Si cada alumno ha de aportar 12 € para el viaje, cada habitación cuesta 36 €».

Se han de hacer más ejemplos de multiplicación reflexionando con el alumnado sobre la relación entre las cifras del multiplicando y multiplicador y las del producto o resultado, ayudándoles a llegar a una conclusión semejante a: «para multiplicar un número de dos cifras por otro de una sola, se multiplica este número por la cifra de las unidades y posteriormente por la de las decenas, obteniendo, respectivamente, las cifras de las unidades y las decenas del resultado». Se ha convertido una multiplicación con un multiplicando de dos cifras que no se sabía resolver, en dos multiplicacion es de números de una cifra que sí saben hacer.

Numéricamente se seguirá un procedimiento semejante para multiplicar sin llevar en los diferentes tramos de la secuencia didáctica propuesta.

En 2.º curso de Primaria ha de quedar consolidado este algoritmo y así no habrá problemas en las multiplicaciones con multiplicandos de más cifras, tanto si la operación se realiza en disposición vertical como horizontal.

El objetivo final será llegar a usar este algoritmo de la multiplicación con la expresión usual de los términos como la manera natural de resolver las multiplicaciones por una cifra sin llevar asociadas a la resolución de situaciones problemáticas.

Continuamos en 2.º de Primaria con el paso siguiente en el algoritmo de esta operación introduciendo multiplicaciones por una cifra, pero ahora llevando. Otra vez, trabajaremos la construcción de este algoritmo, para su comprensión y posterior automatización, con la ayuda de los materiales didácticos que ya conocen y la transcripción escrita de las acciones que realizan.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Nos encontramos en la clase de 2.º de Primaria y estamos organizando un fin de semana en una estación de esquí, en la cual las habitaciones son triples. Si cada alumno tiene que aportar 25 € para el alojamiento, ¿cuánto cuesta cada habitación?».

Se comentará con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta y llegaremos a la conclusión de que es necesario resolver la multiplicación de 25 por 3, pero no la saben calcular numéricamente aún porque al multiplicar la cifra de las unidades obtienen un resultado superior a 9.

Antes de continuar con la manipulación de los materiales se comenta con el alumnado la necesidad de expresar por escrito lo que ocurre numéricamente. Utilizaremos, si es necesario, las expresiones con unidades separadas:

$$\begin{array}{r} 2[10]\ 5 \\ \times\ \ 3 \\ \hline ?? \end{array}$$

Después de que diferentes miembros del alumnado presenten sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de la manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo estándar correspondiente.

Haciendo uso de los materiales didácticos, en el caso de los BM, cogerán dos barras y cinco cubos. Triplicarán los cubos y las barras sucesivamente. Al intentar expresar el resultado, se dan cuenta de que tienen 6 barras y 15 cubos. En el caso de los ábacos, representarán el número 25 y de manera semejante al caso anterior, triplicarán las bolas de las varillas de las unidades y de las decenas (figura 65).

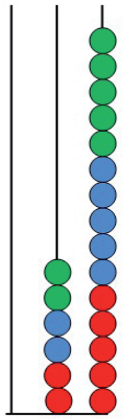


Figura 65. Representación del resultado de triplicar 25 con un ábaco

De manera simultánea al trabajo con cualquiera de los dos materiales, verbalizan lo que ha pasado y lo representan numéricamente:

$$\begin{array}{r} 2[10]\ \ 5 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 6[10]\ 15 \end{array}$$

Análogamente al caso de la adición, transforman 10 unidades en 1 decena y la añaden a la multiplicación de las decenas, «han llevado una». Con los materiales implica sustituir los cubos por barras en el caso de los BM o cambiar bolas y situarlas en las varillas adecuadas, en el caso de los ábacos (figura 66).

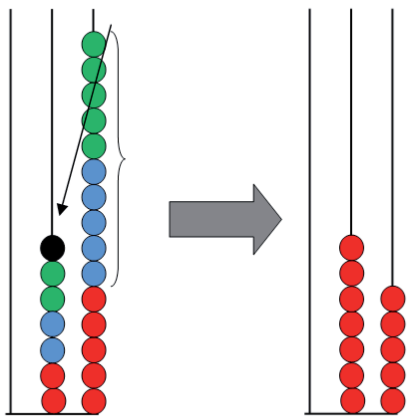


Figura 66. Representación del resultado de multiplicar 25 por 3 con un ábaco

A continuación mostramos de manera detallada los cambios numéricos que acompañan a la manipulación de los materiales:

$$\begin{array}{r} 2[10]\ \ 5 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \underbrace{6[10]\ \underbrace{15}_{1[10]\,5}}_{\underbrace{7[10]\,5}_{75}} \end{array}$$

Con el alumnado, simultáneamente a la manipulación con los materiales y la correspondiente verbalización, modificaremos la representación simbólica del resultado, llegando a la expresión:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}[10]\ 5 \\ \times\ 3 \\ \hline 7[10]\ 5 \end{array},$$

donde la decena que resulta de la multiplicación de las unidades y que se añade a *las decenas* («hemos llevado una»)*, se puede recordar de manera gráfica con un 1* más pequeño sobre de la columna de las decenas.

Cuando el alumnado deje de necesitar las unidades separadas para entender la operación, se escribirá la multiplicación con la expresión estándar:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}5 \\ \times 3 \\ \hline 75 \end{array}$$

Para volver al contexto de trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Nos encontramos en la clase de 2.º de Primaria y estamos organizando un fin de semana en una estación de esquí, en la cual las habitaciones son triples. Si cada alumno tiene que aportar 25 € para el alojamiento, cada habitación cuesta 75 €».

Se tienen que hacer más ejemplos de multiplicación reflexionando con el alumnado sobre la relación entre las cifras del multiplicando y multiplicador y las del producto o resultado, para ayudar a los alumnos a llegar a una conclusión semejante a la siguiente: «se multiplica de derecha a izquierda y la cifra de las unidades del producto es la cifra de las unidades del resultado de multiplicar las unidades del multiplicando y la cifra de las decenas del producto es el resultado de multiplicar las decenas del multiplicando y añadirle la o las decenas que se lleven».

A partir de este momento, y posiblemente sin necesidad de utilizar los materiales, en las siguientes multiplicaciones aplicarán de manera numérica lo que acaban de aprender.

En 2.º ciclo de Primaria ha de quedar consolidado este algoritmo, y así no habrá problemas con la multiplicación por una cifra de números con más cifras que realizarán en cursos posteriores, tanto si la operación se realiza en disposición vertical como horizontal.

El objetivo final será llegar a usar el mencionado algoritmo de la multiplicación con la expresión usual de los términos como la manera natural de resolver las multiplicaciones llevando asociadas a la resolución de situaciones problemáticas.

C.6. Identificar números pares e impares

Hacia al final del 1.er ciclo de Educación Primaria y relacionado con el aprendizaje de las diferentes columnas de la tabla de multiplicar, tendremos que observar con el alumnado que algunos números siempre se pueden obtener multiplicando otro número por 2, mientras que el resto no pueden obtenerse nunca de esta manera. Será el momento de introducir los conceptos de número par e impar, respectivamente.

Aprovecharemos alguna situación real en la que aparezcan los números organizados por esta característica (numeración de los edificios en una calle, de las butacas en un cine...) para insistir en la diferencia entre los dos tipos de números y completaremos su conocimiento cuando en 3.er curso se trabaje la división y se puedan reconocer los pares como los números que pueden dividirse por 2 de manera exacta y los impares como los que no pueden hacerlo. De esta manera clasificamos los Números Naturales en dos subconjuntos complementarios.

Al trabajar la divisibilidad en los Números Naturales, se ampliarán estos conceptos, relacionando los números pares con los múltiplos de dos y los impares con el resto.

C.7. Comprobar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación. Reconocer y aplicar estas propiedades

Para trabajar esta capacidad, nos situaremos en el 2.º ciclo de Primaria. Se puede pensar que las propiedades de la multiplicación parecen conclusiones de la operación una vez ya se ha consolidado esta, pero la realidad nos hace utilizarlas para introducir algunos aspectos de la operación, por ejemplo, la multiplicación por un número de dos cifras. Estudiaremos con el alumnado las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, además de la distributiva de la multiplicación respecto de la adición. En cualquiera de los casos la introducción en el aula se llevará a cabo de manera gradual, con ejemplos de números que representen poca cantidad y aumentando la dificultad poco a poco.

1. Propiedad conmutativa de la multiplicación

«El orden de los factores no altera el producto» o, lo que es lo mismo, la operación de la multiplicación permite obtener el mismo resultado independientemente del orden de colocación de los factores. En lenguaje matemático: $\forall a, b \in N \rightarrow a \times b = b \times a$.

En el momento de introducir esta propiedad, se produce un fenómeno propio de la multiplicación: el cambio de nombre de los términos multiplicando y multiplicador, por el de factores. Al principio tenía sentido diferenciar, porque el multiplicador indicaba el número de veces que se sumaba el multiplicando. Pero este nuevo paso en la abstracción implica comprender que la cantidad de elementos utilizados es la misma si, por ejemplo, *regalamos 3 juguetes a cada uno de los 4 niños* o *4* *juguetes a cada una de las 3 niñas*. Es por esto que la palabra *factor* supondrá una simplificación en la nomenclatura; nunca han de pensar que este cambio implica una complicación añadida a la operación.

Los ejemplos que utilizaremos y el uso de la tabla de multiplicaciones por una cifra, han de ser suficientes para entender esta propiedad. La manera de expresar los dos resultados del ejemplo anterior será: $3 \times 4 = 12$ y $4 \times 3 = 12$. A continuación expresará la igualdad de resultados de la manera siguiente: $3 \times 4 = 12 = 4 \times 3$, y finalmente: $3 \times 4 = 4 \times 3$. Se repiten más veces situaciones semejantes, hasta que se pueda considerar una propiedad general.

La ausencia de resultado en la expresión simbólica requiere un esfuerzo mental mayor. Llegar a que se comprenda que el objetivo no era encontrar un resultado, 12, sino más importante, que hay dos caminos para llegar a él, es el reto, al igual que pasaba con la propiedad conmutativa de la adición.

Ha de quedar claro, otra vez, que la palabra «conmutar» significa «cambiar el orden», pero como no es la primera vez que ven esta propiedad, pueden captarla más rápidamente. Entonces será necesario diferenciar bien las operaciones y no caer en el error de confundir las propiedades conmutativas de la adición y de la multiplicación.

Aunque probablemente ha aparecido de manera intuitiva esta propiedad en el 1.er ciclo de Primaria al construir la tabla de la operación, es en el 2.º ciclo cuando habrá que trabajarla específicamente con ejemplos sencillos en los que aparezcan los mismos datos numéricos, pero en diferente orden de multiplicación. Una actividad interesante es proponer una lista de parejas de problemas con el mismo resultado, pero con dos factores iguales en orden de multiplicador y multiplicando diferente, al estilo de lo que se hacía en la adición. Se resolverán todos, y para concluir se reconocerá la propiedad, y se les hará conscientes de que no es necesario operar para resolver el segundo de cada pareja, porque la operación ya estaba hecha.

El objetivo posterior será «saber aplicar la propiedad». Al plantear una lista semejante a la anterior, han de reconocer las parejas de problemas y decidir no resolver el segundo de cada una, porque ya sabrán la solución.

Posteriormente les proponemos las dos multiplicaciones y que inventen enunciados o situaciones reales cuyas soluciones sean las maneras indicadas de multiplicar los dos números; por último los alumnos inventarán situaciones problemáticas para usar la propiedad conmutativa de la multiplicación sin ninguna indicación de qué multiplicaciones han de usar.

> *Nota*: Aplicación de la propiedad conmutativa para justificar las multiplicaciones 4×1 y 4×0.
>
> Si se hace uso de la definición, no hay lógica. El caso de 4×1 quiere decir que multiplicamos el 4 por 1, es decir, que lo sumamos una vez. *¿Hay adiciones de un sumando?* Nos pueden preguntar...

En el caso de 4 × 0, aún es más dramática la pregunta *¿Hay adiciones de ningún sumando?* y mucho más la respuesta que les damos: *el resultado es cero*.

Pero utilizando la propiedad conmutativa en los dos casos, se pueden transformar estas multiplicaciones en otras que tienen más sentido:

$4 \times 1 = 1 \times 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$
$4 \times 0 = 0 \times 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.$

Ahora ya tiene un poco más de lógica y, de esta manera, conseguimos que incorporen los resultados de estas multiplicaciones a sus conocimientos sobre la operación.

2. Propiedad asociativa de la multiplicación

«La manera de agrupar tres o más factores no altera el producto». En lenguaje matemático: $\forall a, b, c \in N \rightarrow (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Hemos de hacer la misma reflexión que se hizo para la propiedad asociativa de la adición. Es importante tener en cuenta que esta propiedad también requiere dos momentos cognitivos secuenciados. Partiremos de una situación que exigirá la multiplicación de tres números y que será interesante para el alumnado con el fin de favorecer la propiedad. Por ejemplo: «En la biblioteca del aula hay 3 estanterías, con 5 estantes cada una. Si caben 7 libros en cada estante, ¿cuántos libros caben en total?».

Se dejará que los niños resuelvan el problema libremente y se compararán los diferentes procedimientos utilizados, que tendrán el mismo resultado. Podemos encontrar niños que hayan hecho 3 × 5 = 15 y después 15 × 7 = 105, y otros que hayan hecho 5 × 7 = 35 y después 3 × 35 = 105 (tendremos en cuenta que esta última multiplicación la harán de la forma 35 × 3, porque aún no saben multiplicar con multiplicador de dos cifras). Si se diera el caso de que no aparecieran las dos opciones, se plantearían preguntas intermedias para que lo hagan: «¿cuántos estantes hay?, ¿cuántos libros hay en total?». O bien, «¿cuántos libros caben en cada estantería?, ¿cuántos libros hay en total?».

En esta y en otras situaciones, es importante llegar a poder simbolizar las dos multiplicaciones que se realizan en cada método de resolución:

- Para la 1.ª forma de resolución 3 × 5 = 15 15 × 7 = 105.
- Para la 2.ª forma de resolución 5 × 7 = 35 3 × 35 = 105.

En el 2.º momento cognitivo y en todos los ejemplos que trabajemos hay que llegar a simbolizar las dos multiplicaciones de cada método en una sola expresión:

- Para la 1.ª forma de resolución (3 × 5) × 7 = 105.
- Para la 2.ª forma de resolución 3 × (5 × 7) = 105.

A continuación expresarán la igualdad de resultados de la manera siguiente: $(3 \times 5) \times 7 = 105 = 3 \times (5 \times 7)$, y finalmente: $(3 \times 5) \times 7 = 3 \times (5 \times 7)$. Se repiten más veces situaciones semejantes, hasta que se pueda considerar una propiedad general.

La reflexión irá por el mismo camino que en la propiedad anterior; no es tan importante llegar al 105, lo es más descubrir que la manera de asociar los factores no altera el resultado.

Tendremos que insistir en la idea de asociar, que es agrupar secuencialmente los factores, pero como no es la primera vez que ven esta propiedad, pueden captarla más rápidamente. Entonces será necesario diferenciar las operaciones y no confundir las propiedades asociativas de la adición y de la multiplicación.

El esquema de trabajo de la propiedad asociativa en el aula de Primaria es semejante al de la conmutativa. Se introducirá también en el 2.º ciclo de Primaria, con ejemplos sencillos en los que aparezcan situaciones con diferentes maneras de agrupar los factores. Una actividad interesante para reconocer la propiedad será usar una lista de parejas de problemas en las que el resultado de la secuenciación de las multiplicaciones de los tres factores sea el mismo. Posteriormente, los niños han de aplicarla, y tendrán que dejar de resolver los problemas que pertenezcan a parejas en las que uno ya esté resuelto.

Para acabar trabajaremos la invención de situaciones problemáticas relacionadas con la propiedad asociativa, de manera análoga a como hemos hecho con la conmutativa.

3. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición

«El resultado de multiplicar un factor por una suma de dos números es el mismo que la suma de los resultados de multiplicar este factor por cada uno de los sumandos iniciales». En lenguaje matemático: $\forall a, b, c \in N \rightarrow a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$.

A partir de una situación concreta llegaremos a la propiedad, por ejemplo: «En el quiosco venden golosinas a 9 céntimos cada una. Compramos 5 golosinas de fresa y 6 de melón, ¿cuánto pagamos en total?».

Se dejará que los niños resuelvan el problema libremente y se compararán los diferentes procedimientos utilizados, que tendrán el mismo resultado. Podemos encontrar niños que hayan hecho $9 \times 5 = 45$ y $9 \times 6 = 54$ y después $45 + 54 = 99$, y otros que hayan hecho $5 + 6 = 11$ para después multiplicar $11 \times 9 = 99$. Si se diera el caso de que no aparecieran las dos opciones, se plantearían preguntas intermedias para que lo hagan: «¿cuánto cuestan las de fresa?, ¿y las de melón?, ¿cuánto cuestan todas las golosinas?». O bien, «¿cuántas golosinas compramos?, ¿cuánto cuestan todas?».

En esta y en otras situaciones, es importante llegar a poder simbolizar las operaciones que se realizan en cada método de resolución:

- Para la 1.ª forma de resolución $5 + 6 = 11$ $9 \times 11 = 99$.
- Para la 2.ª forma de resolución $9 \times 5 = 45$ y $9 \times 6 = 54$ $45 + 54 = 99$.

En el 2.º momento cognitivo y en todos los ejemplos que se trabajen, es importante llegar a poder simbolizar las operaciones de cada método en una sola expresión (utilizarán el paréntesis hasta que tengan clara la jerarquía operacional):

- Para la 1.ª forma de resolución $9 \times (5 + 6) = 99$.
- Para la 2.ª forma de resolución $(9 \times 5) + (9 \times 6) = 99$.

A continuación expresarán la igualdad de resultados de la manera siguiente: $9 \times (5 + 6) = 99 = (9 \times 5) + (9 \times 6)$, y acabaremos escribiendo $9 \times (5 + 6) = (9 \times 5) + (9 \times 6)$. Se repiten más veces situaciones semejantes, hasta que se pueda considerar una propiedad general.

La reflexión irá por el mismo camino que en la propiedad anterior; no es tan importante llegar al 99, lo es más descubrir que la manera de operar no altera el resultado. Las multiplicaciones pueden aparecer en cualquier otro orden y, como ya conocen la propiedad conmutativa, sabrán que son válidas igualmente.

El esquema de trabajo de la propiedad distributiva en el aula de Primaria es semejante a los anteriores y se introducirá también en 2.º ciclo, con ejemplos sencillos en los que aparezcan situaciones en las que puedan organizar los números de manera diferente.

Una actividad interesante será usar una lista de parejas de problemas en las que el resultado de las operaciones de los tres números sea el mismo $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. Posteriormente, los niños han de reconocer y aplicar esta propiedad, y han de dejar de resolver los problemas que pertenezcan a parejas en las que uno ya esté resuelto.

Tendremos que dedicar especial atención a no confundir la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, con la asociativa de la multiplicación, para evitar llegar a expresiones como $\forall a, b, c \in N \rightarrow a \times (b \times c) = (a \times b) \times (a \times c)$, que, evidentemente, no son ciertas.

Es importante que los estudiantes de Primaria utilicen esta propiedad para descubrir que cuando un factor se repite en los sumandos de muchas adiciones se puede sacar como factor común. Este hecho les permitirá simplificar operaciones aritméticas y posibilitará un futuro pensamiento algebraico.

Para acabar trabajaremos la invención de situaciones problemáticas relacionadas con la propiedad distributiva, de manera análoga a como lo hemos hecho con la conmutativa y asociativa.

C.8. Descubrir el algoritmo de la multiplicación por 10, 100, 1.000... y utilizarlo para realizar gráfica y mentalmente multiplicaciones por la unidad seguida de ceros

Este tipo de multiplicaciones merece un apartado especial, por su facilidad y por la gran utilidad que tiene multiplicar por decenas completas, o centenas completas...

En 3.º de Primaria, a partir de una situación donde haya que multiplicar 3 × 10, se introducirá esta multiplicación: «En el campeonato escolar de baloncesto 3 × 3 participan 10 equipos mixtos. ¿Cuántos niños y niñas participan en el campeonato?». El conocimiento que ya tienen del SND y la reflexión sobre la formación de decenas a partir de la repetición de 10 unidades justifica que el resultado de esta multiplicación sea 3 decenas. La expresión escrita será 30 y se obtiene añadiendo un cero a la derecha del multiplicando. Si hay algún alumno que con esta reflexión no comprenda el procedimiento, se recurrirá a los materiales didácticos para que lo consiga.

Para volver a contextualizar la operación, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «En el campeonato escolar de baloncesto 3 × 3 participan 10 equipos mixtos, en total participan treinta niños y niñas».

Ahora pediremos a los alumnos que se fijen en los números que aparecen en la expresión numérica de la operación, que busquen alguna relación, y llegarán a la conclusión: «el producto es el número del multiplicando seguido del cero del multiplicador».

Se harán más ejemplos de multiplicar cifras por 10 reflexionando con los niños y niñas sobre la relación de las cifras de los términos y las del producto y observarán la regla «el resultado de multiplicar una cifra por 10 se obtiene añadiendo un cero a la derecha de la cifra».

Se seguirá un procedimiento semejante para multiplicar por 10 números de diversas cifras. El conocimiento que ya tienen del sistema de numeración decimal y la reflexión sobre la formación de decenas a partir de la repetición de 10 unidades justificará que el resultado de estas multiplicaciones sea el multiplicando seguido del cero del multiplicador.

Posteriormente se plantea la operación 3 × 100. Se puede obtener el resultado haciendo una reflexión análoga al caso anterior o utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación (que previamente se habrá trabajado con los niños).

- Por ejemplo, a partir de una situación problemática: «Si en el campeonato autonómico de baloncesto 3 × 3 escolar participaran 100 equipos mixtos. ¿Cuántos niños y niñas participarían en el campeonato?».
- Utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación: $3 \times 100 = 3 \times (10 \times 10) = (3 \times 10) \times 10 = 30 \times 10 = 300$.

Para volver a contextualizar la operación, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Si en el campeonato autonómico de baloncesto

3 × 3 escolar participaran 100 equipos mixtos, en total participarían trescientos niños y niñas».

Se harán más ejemplos de multiplicar cifras por 100. Seguiremos multiplicando por 100 números de varias cifras y, haciendo que los niños se fijen siempre en los números que aparecen en la expresión numérica de la operación, deducirán que «la multiplicación por 100 se hace añadiendo 2 ceros a la derecha del multiplicando».

Una vez aprendida la multiplicación por 100, les planteamos 3 × 1.000. Obtendrán el resultado haciendo una reflexión análoga a los casos anteriores o utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación:

- A partir de una situación problemática, por ejemplo: «Si en el campeonato estatal de baloncesto 3 × 3 escolar participaran 1.000 equipos mixtos. ¿Cuántos niños y niñas participarían en el campeonato?».
- Utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación:
  $3 \times 1.000 = 3 \times (10 \times 100) = (3 \times 10) \times 100 = 30 \times 100 = 3.000$.

Para volver a contextualizar la operación, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Si en el campeonato estatal de baloncesto 3 × 3 escolar participaran 1.000 equipos mixtos, en total participarían tres mil niños y niñas».

Multiplicarán más números de una cifra por 1.000 y se seguirá un procedimiento semejante para multiplicar por 1.000 números de varias cifras. Haremos que los niños se fijen en los números que aparecen en la expresión numérica de la operación y deducirán que: «la multiplicación por 1.000 se hace añadiendo 3 ceros a la derecha del multiplicando».

Después de comprobar estos casos particulares, y como regla general, observarán que «el resultado de multiplicar un número por la unidad seguida de ceros se obtiene añadiendo a la derecha del número la cantidad de ceros que acompaña a la unidad» y, por tanto, se puede operar de manera automática.

Una vez está aprendida la multiplicación sin llevar y ya en 3.º de Primaria, es el momento de superar la barrera que les separa del reto siguiente: resolver el problema que supone la multiplicación de números, cuando en el multiplicador hay más de una cifra.

Proponemos ahora la segunda parte de la secuencia didáctica ordenada por niveles de dificultad según la cual se tendría que introducir el algoritmo estándar de la multiplicación por multiplicadores de más de una cifra:

1. Multiplicaciones en las que el multiplicador tiene dos cifras con una unidad en las decenas: 24 × 13, 524 × 13.
2. Multiplicador de dos cifras cualesquiera: 24 × 63, 243 × 56.
3. Multiplicador de cualesquiera número de cifras.

C.9. Descubrir el algoritmo de la multiplicación de dos números de varias cifras y utilizarlo para realizar multiplicaciones de dificultad creciente

Seguimos en la 3.ª fase de E-A de la multiplicación. Nos situamos en 4.º de Primaria y una vez aprendida la multiplicación por una cifra será el momento de ampliar el conocimiento del algoritmo estándar de esta operación, presentando una situación en la que sea necesario multiplicar por un multiplicador de varias cifras.

Para resolver multiplicaciones cuyo multiplicador tenga dos cifras ya no es conveniente trabajar con material didáctico, a causa de la gran cantidad de piezas que se necesitaría y de la dificultad de generar el algoritmo a partir de la manipulación. Una vez llegados a este punto de la secuencia didáctica, pasaremos directamente a la fase simbólica y, por tanto, utilizaremos lápiz y papel.

Cuando en la multiplicación el multiplicador tiene varias cifras, es necesario que los niños y niñas hayan trabajado previamente la descomposición polinómica de los números naturales, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, la propiedad asociativa de la multiplicación y la multiplicación por la unidad seguida de ceros.

Se introducirá la multiplicación por dos cifras, comenzando con una situación problemática en la cual sea necesario multiplicar por un número de dos cifras que tenga un 1 en las decenas. Por ejemplo: «Si los 24 niños y niñas de 4.º de Primaria, como una actividad de Educación Física hemos ido 13 veces a la piscina en este trimestre, ¿cuántas entradas hemos comprado?».

Comentaremos con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta y llegaremos a la conclusión de que hay que resolver la multiplicación de 24 por 13, pero no la saben calcular numéricamente todavía.

Entre sus propuestas de resolución de la operación, algunas podrían consistir en descomponer el multiplicador en 10 y 3, y hacer dos multiplicaciones diferentes que sí saben resolver, sumando después los resultados. Para comprobar si estas propuestas son válidas, tendremos que buscar la justificación matemática de las mismas, mediante la utilización de los requisitos ya dichos.

Entre todos y todas, intentaremos expresar matemáticamente los pasos que nos conducirán a la respuesta y que son los siguientes:

$$24 \times 13 = 24 \times (10 + 3) = (24 \times 10) + (24 \times 3) = 240 + 72 = 312.$$

D. polinómica	P. distributiva	Mult. por 10

Para llegar la expresión estándar, usual o habitual del algoritmo, tendrán que trasladar los pasos de la expresión anterior a la disposición vertical del algoritmo, ya conocida por las multiplicaciones con multiplicadores de una cifra. Para realizar este trabajo comenzaremos por la derecha, y en primer lugar, escribirán el resultado de la

Índice

multiplicación de las unidades del multiplicador por el multiplicando. A continuación anotarán debajo del anterior el resultado de multiplicar la decena del multiplicador por el multiplicando y finalmente sumarán ambos resultados:

$$\begin{array}{r} 2\;4 \\ \times\; 1\;3 \\ \hline 7\;2 \\ 2\;4\;0 \\ \hline 3\;1\;2 \end{array}$$

Para responder a la pregunta de la situación problemática de partida, contestarán: «Si los veinticuatro niños y niñas de 4.º de Primaria, como una actividad de Educación Física hemos ido 13 veces a la piscina en este trimestre, hemos comprado trescientas doce entradas».

El paso siguiente de la secuencia didáctica nos exige resolver una situación en la cual el multiplicador sea cualquier número de dos cifras, igual o superior a 20. Por ejemplo, 24 × 63: «Si los 24 niños y niñas de 4.º de Primaria, como una actividad de Educación Física hemos ido hasta ahora 63 veces a la piscina en todos los años de colegio, ¿cuántas entradas hemos comprado?».

Comentaremos con ellos y ellas cómo encontrar la solución y rápidamente afirman que hay que calcular la multiplicación de 24 por 63. Con un procedimiento análogo al caso anterior y aplicando a la multiplicación por 60 lo que han aprendido de la multiplicación por 10, llegarán a resolver la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} 2\;4 \\ \times\; 6\;3 \\ \hline 7\;2 \\ 1\;4\;4\;0 \\ \hline 1\;5\;1\;2 \end{array}$$

Si hay problemas con la multiplicación de 24 por 60, les haremos ver que $60 = 6 \times 10$ y que, por la propiedad asociativa de la multiplicación, tenemos que $24 \times 60 = 24 \times (6 \times 10) = (24 \times 6) \times 10 = 144 \times 10 = 1.440$. Si es necesario se harán más ejemplos de multiplicar por decenas completas y se reflexionará con el alumnado sobre los números que aparecen en la expresión de la operación, para llegar a una conceptualización semejante a «el producto de multiplicar un número por decenas completas se obtiene añadiendo un cero a la derecha del resultado de multiplicar el multiplicando por la cifra de las decenas».

La validez de este procedimiento se expresa matemáticamente en los pasos siguientes:

$$24 \times 63 \underset{\boxed{\text{D. polinómica}}}{\overset{}{=}} 24 \times [(6 \times 10) + 3] \underset{\boxed{\text{P. distributiva}}}{=} [24 \times (6 \times 10)] + [24 \times 3] =$$

$$\underset{\boxed{\text{P. asociativa}}}{=} [(24 \times 6) \times 10)] + [24 \times 3] = [144 \times 10] + 72 \underset{\boxed{\text{M. por 10}}}{=} 1.440 + 72 = 1.512$$

Se harán más ejemplos de multiplicaciones que sean solución de situaciones problemáticas reflexionando con el alumnado sobre la posición de los números. Observarán que el resultado parcial de multiplicar por la decena siempre presenta un cero en la cifra de las unidades, y a partir de este momento pueden dejar de escribirlo, llegando de esta manera a la expresión habitual del algoritmo, que representamos a continuación con el mismo ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & 4 \\ & \times & 6 & 3 \\ \hline & & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & \\ \hline 1 & 5 & 1 & 2 \end{array}$$

Para volver al contexto de trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Si los 24 niños y niñas de 4.º de Primaria, como una actividad de Educación Física hemos ido hasta ahora 63 veces a la piscina en todos los años de colegio, hemos comprado 1512 entradas».

Se harán más ejemplos de multiplicación asociados a la resolución de situaciones problemáticas. En la reflexión con el alumnado sobre la relación del multiplicando y multiplicador con el producto o resultado, les ayudaremos a que lleguen a una conclusión semejante a: «para multiplicar un número por otro de dos cifras, se multiplica el primero por la cifra de las unidades del segundo y posteriormente por la de las decenas de este. Obtenemos así los dos productos parciales, que se tendrán que situar correctamente para sumarlos y llegar al producto final». Han descubierto cómo funciona este procedimiento que denominamos *algoritmo estándar* de multiplicar por un número de dos cifras.

El objetivo final será que los alumnos utilicen la expresión estándar del algoritmo como la manera habitual de resolver las multiplicaciones de las situaciones problemáticas que se les presentan.

Aprendido el algoritmo de la multiplicación por dos cifras, se irán introduciendo situaciones en las cuales se vaya aumentando el número de cifras tanto del multiplicando como del multiplicador, procediendo de forma semejante a como se ha visto hasta ahora. Así, para el caso de la multiplicación de 574 × 263, por ejemplo, tendremos que enseñarles primero a multiplicar por centenas completas, 574 × 200, que se hará de manera análoga a la multiplicación por decenas completas, continuando con el procedimiento anterior hasta llegar al resultado final.

C.10. Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de la multiplicación

De manera espontánea y de forma semejante a las operaciones anteriores, en voz alta, en un juego, en diferentes situaciones..., y siempre con un nivel de dificultad inferior al trabajado en clase en el ámbito simbólico, utilizaremos la multiplicación para ejercitar el cálculo mental. Ha de quedar clara la necesidad y la conveniencia de memorizar la tabla de multiplicar, pero solo como una herramienta de rapidez, para economizar esfuerzos y nunca como una finalidad en sí misma. Ha de servir para resolver situaciones de la vida real revividas en clase.

Habrá que insistir también en la automatización de las multiplicaciones por la unidad seguida de ceros y en la utilidad de estas para reforzar el funcionamiento del sistema de numeración decimal y la formación de unos órdenes de unidades a partir de otros.

Al final del 1er ciclo de Primaria, se trabajará la tabla de la multiplicación y multiplicaciones de dos cifras en el multiplicando, que al duplicar, triplicar o cuadruplicar puedan encontrar fácilmente el resultado porque tengan relación con las descomposiciones aditivas trabajadas en la capacidad A.8. Por ejemplo, el doble, triple, etc., de 15, de 25 o de 30, es una consecuencia inmediata de algunas descomposiciones aditivas de 45, 100 y 60, entre otros.

No olvidaremos las estrategias personales que cada alumno haya creado tanto en la adición como en la sustracción para aplicarlas también a la multiplicación, pidiéndoles que verbalicen lo que hacen al calcular mentalmente para asegurarnos que están pensando correctamente. De la misma manera les insistiremos en las ayudas que las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva les pueden ofrecer para realizar los cálculos mentales.

A medida que se va dominando este cálculo mental y el de las otras operaciones, se puede combinar gradualmente la multiplicación con ellas para hacer un trabajo conjunto.

Además, se dispone de materiales didácticos que, con la ayuda del juego, facilitan la memorización de la tabla de multiplicar.

Dominó de la multiplicación (fabricado por Taskmaster Ltd.)

Es un material para trabajar la multiplicación. Se reparten fichas del juego, y por turnos tienen que asociar el resultado con la multiplicación correspondiente, si es que tienen la ficha adecuada (figura 67).

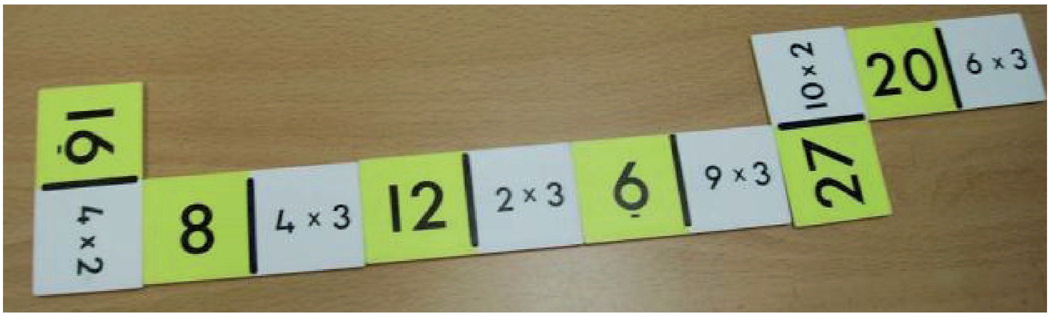


Figura 67. Imagen de una secuencia de juego con el *Dominó de la multiplicación*

Este material presenta cuatro tipos de fichas. Unas, con la parte del resultado pintada de color amarillo, tienen multiplicaciones por 2 y por 3. Otras, con la parte del resultado pintada de color rojo, tienen multiplicaciones por 4 y por 5. Otras, con la parte del resultado pintada de color verde, tienen multiplicaciones por 6 y por 7. Finalmente, otras, con la parte del resultado pintada de color azul, tienen multiplicaciones por 8 y por 9. El juego se puede plantear separadamente o combinando los cuatro tipos de fichas.

Triominó de la multiplicación (fabricado por Taskmaster Ltd.)

Muy semejante al material anterior, pero con un formado triangular, en la figura 68 se muestra una tirada:

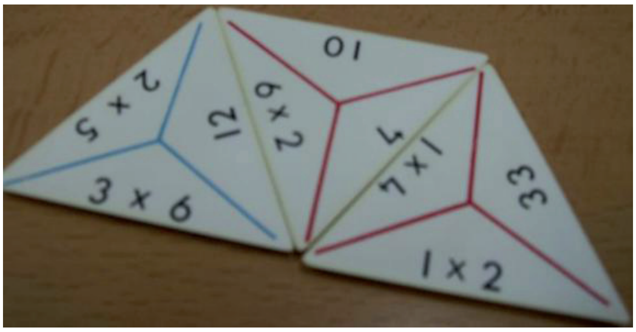


Figura 68. Imagen de una secuencia de juego con el *Triominó de la multiplicación*

Este material presenta tres tipos de fichas. Unas, con marcas de separación de color rojo, tienen multiplicaciones por 2, 3 y 4. Otras, con marcas de separación de color azul, tienen multiplicaciones por 5, 6 y 7. Finalmente, otras, con marcas de separación de color verde, tienen multiplicaciones por 8, 9 y 10. El juego se puede plantear separadamente o combinando los tres tipos de fichas.

Como los dos materiales anteriores son de fabricación inglesa, incorporan multiplicaciones que contienen como factores 11 y 12.

Penkamino (fabricado por Royal Games)

Introduce un poco más de dificultad y por ello se presenta en tercer lugar. Los factores se encuentran en los brazos de las cruces y los resultados en los vértices de los cuadrados. Se les reparten fichas de las dos maneras, y por turnos, tienen que asociar las multiplicaciones con los resultados (figura 69).

Figura 69. Imagen de una secuencia de juego con el *Penkamino*

Bingo de la multiplicación (fabricado por Jocdi-Goula, Toyland, SA)

Pese a que el formado parece más infantil, es el material que requiere más agilidad con la multiplicación, porque tienen que colocar el número encima de la operación al mismo tiempo que escuchan a quien canta el resultado y, además, no equivocarse (figura 70).

Figura 70. Imagen de una secuencia de juego con el *Bingo de la multiplicación*

C.11. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la multiplicación

Como ya se ha dicho, es en situaciones reales donde cobra especial sentido el trabajo hecho con esta operación, porque realmente es la realidad la que origina interrogantes cuya respuesta pasará por saber, en este caso, resolver multiplicaciones.

Como en el caso de la adición y la sustracción, aunque la resolución e invención de problemas aparece como la cuarta fase para trabajar las operaciones, también ahora nos encontramos en ella desde el principio, porque presentamos las multiplicaciones de manera contextualizada, a partir de situaciones reales que tienen que resolver y que, igualmente, estarán relacionadas con cualquier bloque de contenidos matemáticos.

Continuaremos trabajando la resolución de problemas a partir de las cuatro fases de Polya y de la reflexión con el alumnado sobre su importancia, desarrollo y utilidad.

Como se ha comentado en las capacidades A.9 y B.9, y con las mismas consideraciones, aprovecharemos los errores para generar nuevos aprendizajes y continuaremos con el trabajo de estimación de los resultados de las situaciones problemáticas.

Iniciaremos el trabajo en 2.º de Primaria, con situaciones problemáticas que necesiten ser resueltas con una multiplicación. Es muy importante que, en los primeros momentos, prestemos atención al paso de una adición de sumandos iguales a una multiplicación donde el multiplicador indique el número de sumandos que se están operando.

Cuando ya reconozcan la multiplicación como la operación que sirve para resolver cualquiera de estas situaciones, plantearemos problemas relacionados con ellas teniendo cuidado de que las multiplicaciones aparezcan de manera aislada.

Más adelante trabajaremos problemas que necesiten dos multiplicaciones para su resolución. Los problemas vistos hasta ahora eran de números de dos o tres cifras, para pasar en 3.º de Primaria a situaciones con números cualesquiera.

También, y a finales del 1.^er^ ciclo e inicios del 2.º, se pueden proponer problemas que necesitan para su resolución la combinación de una sustracción, una adición y una multiplicación.

En referencia a los enunciados de las situaciones problemáticas seguiremos los mismos pasos que para la adición y la sustracción (capacidades A.9 y B.9) pero tendremos que hacer una consideración añadida. Se trata de la necesidad de que en los enunciados claros, ordenados, completos, sin errores... tengamos cuidado, al principio, de hacer aparecer los datos de manera ordenada de acuerdo con su papel en la multiplicación que tienen que realizar; es decir, que el primer número sea el multiplicando y el segundo el multiplicador (*si cada alumno necesita 8* *folios para una actividad y hay 5 alumnos por grupo, ¿cuántos folios tendremos que preparar?*). Avanzado el ciclo no será necesario respetar este orden (*si hay 5 alumnos por grupo en clase y se necesitan 8 folios para una acitividad, ¿cuántos folios tendremos que preparar por cada grupo?*).

En este caso, la aparición de problemas con enunciados confusos, incompletos, con datos que falten, con datos que sobren... tendrá que ser retrasada un poco más que en el trabajo con la adición y la sustracción.

Desarrollaremos también tareas de invención de problemas relacionados con la multiplicación con las mismas orientaciones dadas para la adición y la sustracción (capacidades A.9 y B.9), tanto referidas a la oferta de ayudas al alumnado como a la necesidad de intercambiar entre los niños y las niñas los enunciados inventados. La diferencia en este caso será el trabajo inicial de diferenciación entre la adición de sumandos repetidos y la multiplicación donde el multiplicando sea el sumando y el multiplicador el número de sumandos. Y, sobre todo, las ventajas que esta última operación ofrece frente a la primera.

En los ciclos posteriores se continuará con las tareas de resolución e invención de situaciones problemáticas relacionadas con la multiplicación, en las cuales esta operación se combinará con las otras tres a medida que las vayan dominando.

A medida que avanza el 2.º ciclo hay que completar la información sobre la multiplicación presentando a los alumnos situaciones reales que se resuelvan multiplicando y que intuitivamente no correspondan a una expresión numérica de adiciones de sumandos iguales. Serán situaciones en las cuales la multiplicación surge como la operación que nos permite calcular el cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos que tienen como cardinales los factores de la multiplicación. La expresión formal del producto cartesiano de dos conjuntos A y B es $A \times B = \{(a,\, b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$ y si $m = card(A),\, n = card(B)$ se define: $m \times n = card(A \times B)$.

Podemos ver cómo se desarrollan estas situaciones en el aula con el siguiente ejemplo: «Para hacer una merienda de cumpleaños en el aula hemos comprado 5 tipos diferentes bocadillos y 3 tipos de bebida. ¿De cuántas maneras diferentes puede merendar cada niño, eligiendo un bocadillo y una bebida?».

Para resolver esta situación, los niños formarán todas las parejas posibles con un tipo de bocadillo y una clase de bebida y, después de comprobar que el número de posibilidades es 15, tendrían que responder a nuestra pregunta sobre cuál es la operación que resolverá numéricamente situaciones de este tipo sin que sea necesario formar todas las parejas. Evidentemente, la respuesta tiene que ser la multiplicación. A partir de este momento y de la realización de ejemplos semejantes, utilizarán la multiplicación para resolver cualquier situación que tenga este tipo de planteamiento.

C.12. Adquirir la noción de potencia como producto de factores iguales. Identificar la base y el exponente de una potencia

La potenciación de Números Naturales es una nueva manera de denominar la multiplicación cuando se produce una situación concreta. Esta situación se origina cuando todos los factores de la multiplicación coinciden. Por ejemplo: «Si tenemos dos muebles con dos cajones y en cada uno dos juguetes de dos piezas cada uno. ¿Cuántas piezas hay?». Resulta evidente expresar la respuesta con $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, pero de la misma forma que se llegó a una nueva manera de expresar una adición de sumandos iguales cuando se introdujo la multiplicación, ahora tendríamos que conseguir que se llegara a otra forma de expresar esta situación. La nueva operación, llamada potenciación, transforma la multiplicación representándola de la forma siguiente: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$. Es más económica de escritura y más intuitiva, porque no es necesario contar cuántos factores hay. Pero, es evidente que, para simplificar en un futuro los cálculos, es necesario introducir esta nueva notación, y ello es una dificultad añadida en principio. Se introducirá en 3.^{er} ciclo de Primaria.

Hay que poner nombre a los elementos de esta nueva expresión, además de leerla correctamente. En el ejemplo anterior, el 2 se denomina *base*, el 4 *exponente,* y el 16 *potencia,* y se lee «dos elevado a cuatro o dos a la cuarta».

Para agilizar los cálculos con esta operación y con el objetivo de preparar el camino hacia el álgebra, en el último curso del ciclo se trabajarán las siguientes propiedades de la potenciación:

1. Multiplicación de potencias de la misma base.

Trabajaremos a partir de una situación problemática, por ejemplo: «Un edificio de viviendas tiene 3 escaleras, en cada una hay 3 alturas y en cada altura 3 viviendas. ¿Cuántas viviendas hay? Cada vivienda dispone de 3 habitaciones, cada una de las cuales tiene 3 enchufes. ¿Cuántos enchufes hay por vivienda? ¿Cuántos enchufes necesitará el promotor del edificio?».

La operación necesaria para responder a la primera pregunta es 3^3. Para responder a la segunda, 3^2; y para responder a la tercera, $3^3 \times 3^2 = 27 \times 9 = 243$.

En este momento se les planteará la situación de la manera siguiente: «Un edificio de viviendas tiene 3 escaleras, en cada una hay 3 alturas, en cada altura 3 viviendas, cada vivienda tiene 3 habitaciones, cada una de las cuales dispone de 3 enchufes. ¿Cuántos enchufes necesitará el promotor del edificio?».

Después de responder 3^5, y llegar al $3^5 = 243$, observamos los dos procedimientos que les han conducido a resultados iguales, y los expresamos numéricamente: $3^3 \times 3^2 = 243 = 3^5$, y fijándose en las bases y los exponentes les ayudaremos a obtener la conclusión siguiente: $3^3 \times 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$.

Después de comprobar este hecho con diversos ejemplos numéricos, la propiedad se puede enunciar: «Para multiplicar potencias de la misma base, se deja la base y se suman los exponentes». En lenguaje matemático: $\forall b, m, n \in \mathrm{N}: b^m \times b^n = b^{m+n}$.

2. División de potencias de la misma base

Trabajaremos de nuevo a partir de una situación problemática, por ejemplo: «En cada una de las tres clases de un colegio rural se dispone de tres armarios con tres cajas en cada uno. En cada caja hay tres bolsas con tres carpetas cada una. ¿Cuántas carpetas hay? Hacemos tres grupos de tres alumnos para distribuirlas entre los compañeros. ¿Cuántos alumnos van a distribuirlas? Si repartimos las carpetas entre estos alumnos, ¿cuántas corresponden a cada alumno?».

La operación necesaria para responder a la primera pregunta es 3^5. Para responder a la segunda, 3^2; y para responder a la tercera $\frac{3^5}{3^2} = \frac{243}{9} = 27$.

En este momento, y para encontrar una relación directa entre las potencias iniciales y el resultado, se les pide que expresen este como una potencia de 3 y obtendrán $27 = 3^3$, con lo que se llegará a $\frac{3^5}{3^2} = 27 = 3^3$. Se les preguntará por la relación que hay entre los exponentes iniciales de los términos de la división y el del resultado, concluyendo que: $\frac{3^5}{3^2} = 3^3 = 3^{5-2}$.

Después de comprobar este hecho con varias situaciones problemáticas y ejemplos numéricos, la propiedad se puede enunciar: «Para dividir potencias de la misma base, se deja la base y se restan los exponentes». En lenguaje matemático: $\forall\, b, m, n \in \mathrm{N}: \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$.

3. Potencia de una potencia

Trabajaremos también a partir de una situación problemática (hay que decir que será más complicado encontrarla que en las otras propiedades), por ejemplo: «En una ciudad hay cuatro clubes de fútbol, cada club tiene equipos en cuatro categorías, y en cada categoría cuatro equipos. ¿Cuántos equipos de fútbol hay en esta ciudad? Se organiza un torneo futbolístico con otra ciudad, que tiene el mismo número de clubes, categorías y equipos que la primera. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden organizar partidos con un equipo de cada ciudad, si pueden enfrentarse los de cualquier categoría?».

La operación necesaria, para responder a la primera pregunta es 4^3. La segunda ciudad tiene el mismo número de equipos, por tanto, 4^3. Para responder a la segunda pregunta es necesario multiplicar todos los equipos de la primera ciudad por los de la segunda, así, $4^3 \times 4^3 = 6^4 \times 6^4 = 4.096$. A continuación se les pide que expresen el resultado como una potencia de base 4, y tienen que llegar a 4^6.

Por definición de potencia, la expresión inicial $4^3 \times 4^3$ pueden expresarla como $(4^3)^2$. Por tanto, $(4^3)^2 = 4^6$. Comparamos los dos miembros de esta igualdad y les pedimos que relacionen sus exponentes, con lo cual llegan a $(4^3)^2 = 4^6 = 4^{3x2}$.

Después de comprobar este hecho con varias situaciones problemáticas y ejemplos numéricos, la propiedad se puede enunciar: «Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la base y se multiplican los exponentes». En lenguaje matemático: $\forall\ b, m, n \in \mathrm{N} : \left(b^m\right)^n = b^{m \times n}$.

Nota: Casos particulares

1. A partir del conocimiento de la potenciación, se puede expresar la descomposición de un número en su forma polinómica correcta: $3.654 = 3 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10 + 4$.
2. Cualquier potencia de exponente 1 da como resultado la base, ya que hay un único factor que es la base.
3. Cualquier potencia de exponente 0 da como resultado 1 si la base es distinta de cero.

La explicación que les podríamos dar se deduce de la segunda propiedad de la potenciación: como sabían que $\frac{3}{3} = 1$ y $\frac{3}{3} = 3^{1-1} = 3^0$, se concluye $3^0 = 1$.

D. División

De la misma manera que el resultado de la sustracción se puede obtener buscando el sumando que le faltaba a una adición, la multiplicación se deduce de una adición de sumandos iguales y la potenciación de una multiplicación con un factor que se repite; la nueva operación que se presenta, la división, también deriva de una operación anterior. Además, conecta directamente con algunas de las acciones intuitivas que antes de entrar en la escuela los niños y niñas ya han realizado, las de repartir elementos o formar grupos con ellos.

La definición de la *división exacta* que se deriva de la teoría de conjuntos, la presenta como la operación que nos permite calcular el cociente de dos números, entendiendo el cociente como el cardinal de cualquiera de los subconjuntos que resultan de la partición de un conjunto en un número determinado de subconjuntos equipotentes, o bien la operación que nos permite calcular el cociente de dos números, entendiendo el cociente como el número de subconjuntos equipotentes de un determinado cardinal, que se obtienen de la partición de un conjunto.

Esta definición a partir de subconjuntos equipotentes nos hace pensar inmediatamente en la multiplicación trabajada con anterioridad y entender la división exacta como la operación que busca el factor que le falta a una multiplicación de la cual se conoce el resultado y el otro factor.

D.1. Construir la idea de división exacta utilizando particiones en las cuales todas las partes sean equipotentes y expresando los cardinales que intervengan en ellas. Simbolizar estas particiones utilizando los signos «×» e «=»

En esta capacidad desarrollamos el trabajo correspondiente a la primera de las fases de E-A de la división, que se realiza en el 3.er curso de la etapa, cuando ya tienen bastante avanzado el conocimiento de la multiplicación.

Como se deduce de la definición, esta operación se relaciona con dos tipos de situaciones, de agrupar y de repartir. Partiremos, por tanto, de actividades prácticas y manipulativas en las cuales los niños y las niñas tienen la necesidad de agrupar o repartir una cantidad inicial de elementos en conjuntos equipotentes y disjuntos.

Podemos comenzar con una situación de agrupar, como por ejemplo: «*Si tenemos 8 caramelos y hemos de dar 2 a cada niño, ¿para cuántos niños hay?*». De manera intuitiva, sin necesidad de demasiadas explicaciones, lo que harán es coger los 8 caramelos y agruparlos de 2 en 2 hasta que se acaben, haciendo 4 conjuntos equipotentes.

Cuando les proponemos que nos expliquen qué ha pasado con los caramelos utilizando los números que han intervenido en la situación, es imprescindible que sean conscientes de que había un conjunto inicial de 8 caramelos y ahora hay 4 subconjuntos de 2. De esta manera conectaremos directamente con la multiplicación, porque 2 caramelos de cada niño por 4 niños, son 8 caramelos. Por tanto, queda la puerta abierta para decir que lo que se está buscando es un factor desconocido de esa multiplicación, y nos encontramos con la representación siguiente: 2 × ?? = 8.

Con la intención de acercar a la nueva operación las frases que utilicen para explicar qué ha pasado con los caramelos, les ayudaremos en la evolución verbal modificando el enunciado «si 8 caramelos los agrupamos de 2 en 2, tenemos para 4 niños», hasta llegar a «8 agrupados de 2 en 2, da 4 grupos» y completar así la multiplicación anterior con el 4 que faltaba: 2 × 4 = 8.

Hasta ahora no han necesitado una nueva operación para responder a la pregunta inicial, lo han hecho utilizando la multiplicación incompleta. Pero esta es una forma extraña de trabajar la multiplicación y, además, cuando los números sean más grandes y no se puedan manipular los elementos, nos hará falta una nueva manera numérica de resolverlo. Esta manera de resolver numéricamente las situaciones la llamaremos división y podremos cambiar las expresiones anteriores por «si dividimos 8 entre 2 da 4» o bien «8 dividido entre 2 es 4».

Para completar la iniciación a la división tendremos que trabajar también con situaciones de repartir. Podemos hacerlo con el ejemplo «Hay 8 caramelos para repartir en partes de la misma cantidad entre 2 niños. ¿Cuántos hay para cada niño?». En esta ocasión lo que harán es coger los 8 caramelos y uno a uno repartirlos entre los niños hasta que no queden.

Cuando expliquen qué ha pasado con los caramelos utilizando los números que han intervenido en la situación, tendrán que ser conscientes de que había un conjunto inicial de 8 caramelos y ahora hay 2 subconjuntos de 4. De nuevo conectarán con la multiplicación, porque *4 caramelos de cada niño por 2 niños son 8 caramelos*. Otra vez queda la puerta abierta para decir que lo que se está buscando es un factor que desconocen de esa multiplicación, y nos encontramos con la representación siguiente: ?? × 2 = 8.

Con la intención de acercar las frases que utilicen hacia la nueva operación, les ayudaremos a modificar el enunciado «si repartimos 8 caramelos entre 2 niños, tocan a 4 cada uno», hasta llegar a «8 repartido entre 2, da 4» y completar así la multiplicación anterior con el 4 que faltaba: 4 × 2 = 8.

En este momento conectarán con la idea de división introducida antes y utilizarán de nuevo las expresiones «si dividimos 8 entre 2 da 4» o bien «8 dividido entre 2 es 4».

Se repetirán situaciones problemáticas de los dos tipos anteriores hasta que estas ideas estén afianzadas.

El final de la fase será pedir a los niños y niñas que sean ellos quienes encuentren o reconozcan situaciones de su vida personal que estén relacionadas con la operación (platos, bocadillos...).

D.2. Cambiar simbolizaciones de multiplicaciones incompletas por otras que usen los signos «:» e «=». Identificar y utilizar correctamente los términos y signos de la división exacta

Continuando en 3.er curso, una vez realizadas las acciones anteriores y conocida la palabra *división*, es el momento de pasar a la segunda fase de E-A de la operación, introduciendo los signos «:» e «=». Entonces, las multiplicaciones incompletas asociadas al enunciado verbal «8 dividido entre 2 es 4», 2 × ?? = 8 y ?? × 2 = 8, se cambian por la expresión numérica de la división «8 : 2 = 4».

Introduciremos también los nombres propios de los términos y el resultado de la división: el 8 se denominará *dividendo*, el 2 *divisor* y el 4 *cociente*. El signo «:» se lee *dividido por*, y el signo «=», *igual* (que ya conocían).

Es necesario señalar que el dividendo siempre es el número de elementos a agrupar o a repartir. El divisor puede ser el número de elementos de cada subconjunto equipotente en el primer caso o el número de subconjuntos equipotentes a formar en el segundo, y el cociente será, respectivamente, el número de subconjuntos equipotentes que se forman o el cardinal de los subconjuntos equipotentes formados.

Como el alumnado ya conoce los términos y signos de las otras operaciones, tendremos que comprobar que los identifican y los diferencian correctamente de los que acabamos de introducir.

D.3. Construir la idea de división entera utilizando particiones en las cuales todas las partes menos una sean equipotentes y expresando los cardinales que intervengan en ellas. Simbolizar estas particiones usando los signos «+», «×» e «=»

Después de introducir el significado de la operación con los ejemplos anteriores que generan divisiones exactas, y para extender la operación a cualquier pareja de números naturales trabajaremos, siguiendo un procedimiento análogo, con situaciones del tipos: «Hay 9 caramelos para dar 2 a cada niña. ¿Para cuántas niñas hay?» o bien «Hay 9 caramelos para repartir los en partes de la misma cantidad entre 2 niñas. ¿Cuántos hay para cada niña?».

En estos casos llegarán a agrupamientos o a repartos en los cuales una de las partes no es equipotente con las otras y darán lugar a divisiones enteras. Las expresiones de los casos anteriores 2 × ?? = 8 y ?? × 2 = 8 no sirven para estas. Habrá que reformularlas y así aparecerá un nuevo término que representa el cardinal de la parte no equipotente con las otras (2 × ??) +1 = 9 y (?? × 2) +1 = 9.

En las explicaciones del alumnado para decir qué ha pasado en el primer ejemplo con los caramelos, les ayudaremos en la evolución verbal y encontraremos expresiones como:

- *Si 9 caramelos los agrupamos de 2 en 2, tenemos para 4 niñas, y sobra 1.*
- *9 agrupados en grupos de 2, da 4 grupos y sobra 1.*
- *Si dividimos 9 entre 2 da 4 y sobra 1.*
- *9 dividido entre 2 es 4 y sobra 1.*

Y para el segundo:

- *Si 9 caramelos los repartimos en partes de la misma cantidad entre 2 niñas, tocan a 4 cada una y sobra 1.*
- *9 repartido en partes de la misma cantidad entre 2 da 4 y sobra 1.*
- *Si dividimos 9 entre 2 da 4 y sobra 1.*
- *9 dividido entre 2 es 4 y sobra 1.*

Se repetirá también el trabajo con situaciones problemáticas de estos tipos, para profundizar en la nueva consideración de la división y se pedirá a los niños y niñas que sean ellos quienes encuentren o reconozcan situaciones de su vida personal que estén relacionadas con la operación.

A partir de este momento habrá que utilizar el vocabulario asociado a los dos tipos de división que hemos introducido. Así, tendrán que reconocer las divisiones exactas como aquellas en las cuales, después de hacer los agrupamientos o el reparto, no sobra ningún elemento, y las divisiones enteras como las que sí sobra.

D.4. Simbolizar divisiones enteras usando la representación habitual. Identificar y utilizar correctamente los términos y signos de la división entera

Continuando en 3.^{er} curso, una vez realizadas las acciones anteriores, es el momento de pasar en estas otras divisiones a la segunda fase de E-A de la operación, introduciendo los términos y los signos correspondientes. En el caso de la división entera, no se puede utilizar la expresión 9 : 2 = 4, porque no es cierta. Entonces, se hace necesario usar una disposición diferente de los términos para representar esta nueva situación: $\begin{array}{l|l} 9 & \underline{2} \\ 1 & 4 \end{array}$ en la cual la «caja» $|\underline{\qquad}$ ha sustituido los dos puntos, y como aparece un término nuevo, el 1, se introducirá el nombre y el significado de este: *resto*, que representa el número de elementos que quedan sin repartir. Los otros números de la división reciben el mismo nombre que en el caso de la división exacta y tienen el mismo significado.

D.5. Realizar divisiones de números utilizando particiones de conjuntos en partes equipotentes

Es importante que después de haber introducido la expresión simbólica de la operación, esta no se desconecte de las acciones con las cuales se relaciona. Por ello, también en el 3.^{er} curso y en momentos posteriores al trabajo de las capacidades anteriores, habrá que mostrarles expresiones simbólicas de divisiones que deberán calcular mediante particiones de conjuntos en partes equipotentes, bien mediante agrupamientos o bien por repartos.

Este es un trabajo inverso al realizado en las capacidades anteriores, en las cuales el alumnado avanzaba desde las acciones con los objetos hasta las expresiones numéricas de las situaciones.

Si los niños y las niñas son capaces de encontrar los resultados de las divisiones propuestas sin recurrir a los objetos, pueden resolverlas numéricamente de esta manera, pero tendremos que reflexionar con ellos y ellas sobre el significado de la operación y sobre su relación inequívoca con situaciones en las cuales se parte un conjunto inicial en subconjuntos equipotentes.

En la 3.ª fase de E-A de la división trabajaremos su algoritmo, que envuelve una serie de dificultades que no estaban presentes en las anteriores operaciones. Estas complicaciones hay que tenerlas en cuenta para poder resolver los posibles conflictos que se presenten al alumnado, y son las siguientes:

- Es un algoritmo que avanza por las cifras del dividendo de izquierda a derecha, con lo que rompe el orden establecido en las operaciones anteriores.
- Se busca un resultado y se encuentran dos, cociente y resto.
- Hay restricciones: el resto (r) tiene que ser menor que el divisor (d), y el dividendo (D), mayor o igual que el divisor. Se tiene que cumplir: $D \geq d > r$.
- Necesita otras operaciones para desarrollar su algoritmo. En particular de la sustracción y de la multiplicación.

- No es automático, necesita pasos:
  - Separar en el dividendo, «¿cuántas cifras es necesario separar?».
  - Estimar una cifra para el cociente, «¿a cuánto le cabrá?».
  - La cifra estimada, multiplicada por el divisor, tiene que dar un resultado que no exceda la cantidad separada en el dividendo, «pero que esté lo más próximo posible».
  - Comprobar el cálculo anterior y rehacer, si nos hemos equivocado, los cálculos.

Todo ello hace que el algoritmo de la división sea el más complicado de todos los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas.

D.6. Descubrir el algoritmo de la división exacta y entera por una cifra y utilizarlo para realizar divisiones exactas y enteras en las cuales aumente progresivamente el número de cifras del dividendo

En esta 3.ª fase de E-A de la división y cuando en el trabajo en clase se presente una situación problemática que implique dividir dos números el cociente de los cuales no se deduzca directamente de la tabla de multiplicar, será el momento de introducir el algoritmo de la división de un número de dos cifras, por otro de una.

De manera análoga a las otras operaciones, se propone la primera parte de una secuencia didáctica, ordenada por niveles de dificultad, según la cual se tendrían que introducir los algoritmos de la operación en el 2.º y 3.er ciclo de Educación Primaria.

Comenzaremos por divisiones exactas y enteras de un número de varias cifras por un número de una sola cifra, recorriendo los siguientes tramos:

1. Dos cifras en el dividendo y dos en el cociente, con restos parciales iguales a cero, por ejemplo, 64 : 2, 64 : 3.
2. Dos cifras en el dividendo y dos en el cociente, con restos parciales diferentes de cero, por ejemplo, 64 : 4, 74 : 3.
3. Tres cifras en el dividendo y tres en el cociente, con restos parciales iguales o diferentes de cero, por ejemplo, 642 : 2, 643 : 2, 652 : 4, 653 : 4.
4. Tres cifras en el dividendo y dos en el cociente, con restos parciales iguales o diferentes de cero, por ejemplo, 142 : 2, 143 : 2, 152 : 4, 153 : 4.
5. Cualquier número de cifras en el dividendo.

De la misma manera que en las otras operaciones, trabajaremos la construcción de este algoritmo, para su comprensión y posterior automatización, con la ayuda de los materiales didácticos que ya conocen (como son los BM y los ábacos) y la transcripción escrita de las acciones que realizan.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Los alumnos de 3.º de Primaria de un colegio van de excursión. Tienen que coger dos autobuses y por tanto se tienen que repartir en dos grupos de la misma cantidad. ¿Cuántos irán en cada autobús si son 64 alumnos en total?».

Se comentará con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta y llegaremos a la conclusión de que es necesario resolver la división de 64 entre 2, pero no la saben calcular numéricamente todavía, porque no se corresponde con ningún resultado de multiplicación de la tabla, que sí conocen.

Antes de continuar con la manipulación de los materiales, se comenta con el alumnado la necesidad de expresar por escrito lo que ocurre numéricamente para tener registrado el proceso que se va a llevar a cabo y el resultado final:

$$\begin{array}{r|l} 64 & \underline{\ 2\ } \\ & ?? \end{array}$$

Después de que presenten sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de la manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo estándar correspondiente.

Haciendo uso de los materiales didácticos, en el caso de los BM, representarán el 64 y después lo separarán en dos subconjuntos que tengan el mismo número de elementos. Obtendrán en cada subconjunto tres barras y dos cubos, es decir , 32, que será el cociente de la división. ¿Qué ha pasado? Posiblemente han repartido en primer lugar el número de barras y, en segundo lugar, el de cubos y, si no es así, intentaremos guiarles para que hagan el reparto del material comenzando por las unidades de orden superior, ya que les ayudará en la posterior expresión numérica de la operación. Están construyendo lo que será el algoritmo de la división por una cifra, comenzando por las barras (decenas) y continuando por los cubos (unidades), es decir , de izquierda a derecha (figura 71).

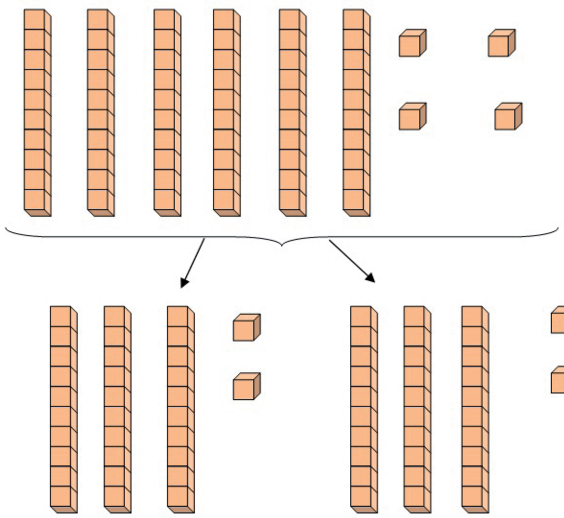


Figura 71. Representación con BM de la división de 64 entre 2

En el caso de los ábacos, representarán el dividendo en un ábaco y habrá que repartirlo en dos partes equipotentes. Necesitamos dos ábacos más para colocar las bolas que quitamos del ábaco inicial. Para repartir las bolas, y con las mismas consideraciones que en el caso anterior, comenzaremos por la varilla de las decenas hasta que no quede ninguna; posteriormente repartirán las unidades. En cada uno de los dos ábacos queda representado el cociente, que es el 32.

De manera simultanea a la manipulación con los materiales y la correspondiente verbalización, continuamos con la expresión numérica que habían escrito en un primer momento:

$$\begin{array}{l|l} 64 & \underline{\;2\;} \end{array}$$

El hecho de separar las barras o comenzar a repartir por la varilla de las decenas se indica poniendo una coma entre el 6 y el 4 o una marca encima del 6 (aunque, para no complicar el desarrollo, se elige la primera forma):

$$\begin{array}{l|l} 6,4 & \underline{\;2\;} \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{l|l} \widehat{6}\,4 & \underline{\;2\;} \end{array}$$

Una vez repartidas las decenas con el material, anotarán numéricamente lo que ha ocurrido, escribiendo la cifra de las decenas del cociente, especificando la sustracción intermedia y el resto parcial, que es cero:

$$\begin{array}{r|l} 6,4 & \underline{\;2\;} \\ \underline{-6} & \;3 \\ 0 & \end{array}$$

Quedan por repartir cuatro unidades. Es necesario especificarlo numéricamente, situando la cifra de las unidades del dividendo al lado del resto parcial. Es lo que se conoce como *bajar la cifra siguiente*. Esta acción tiene un sentido más completo cuando trabajamos los restos parciales diferentes de cero, pero ahora les diremos que colocamos el 4 al lado del 0 para indicar que solo quedan 4 unidades por repartir . Si lo dejáramos arriba, podría no verse claro al estar al lado del 6:

$$\begin{array}{r|l} 6,4, & \underline{\;2\;} \\ \underline{-6} & \;3 \\ 0\;4 & \end{array}$$

Una vez han repartido las unidades, anotan en el cociente la cifra correspondiente a las unidades, así como la sustracción asociada:

$$\begin{array}{r|l} 6,4, & \underline{\;2\;} \\ \underline{-6} & \;32 \\ 0\;4 & \\ \underline{-\;4} & \\ \underline{0} & \end{array}$$

El objetivo será utilizar este algoritmo sin necesidad de escribir las sustracciones porque las hagan mentalmente. Es lo que se conoce como la expresión estándar del algoritmo.

$$\begin{array}{l|l} 6{,}4{,} & 2 \\ \cline{2-2} 0\,4 & 32 \\ \ \ \underline{0} & \end{array}$$

Para volver al contexto de trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Los alumnos de 3.º de Primaria de un colegio van de excursión. Tienen que coger dos autobuses y por tanto se tienen que repartir en dos grupos de 32 personas».

En el caso que se acaba de trabajar, los restos parciales son iguales a cero. Pero en otras casos existe la dificultad añadida de encontrar restos parciales diferentes de cero, que habrá que atender trabajando también con materiales didácticos y de una manera semejante al proceso realizado para restos parciales iguales a cero.

Supongamos que se presenta en clase una situación problemática como la siguiente: «Los alumnos de 3.º de Primaria de un colegio van de excursión y se alojan en un albergue. Tienen que repartirse en 4 habitaciones con el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos tendrán que ponerse en cada habitación?».

En un primer momento parece una división igual a las que ya saben hacer, y por tanto se disponen a realizarla numéricamente:

$$\begin{array}{l|l} 6{,}4 & 4 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Una vez han comprobado que no es una división del tipo conocido, porque no encuentran el 6 en la tabla del 4, llegarán a la conclusión que es necesario volver al material para ayudarse a resolver la operación.

En el caso de los BM, representarán el 64 e iniciarán el reparto de las decenas en 4 conjuntos equipotentes (figura 72).

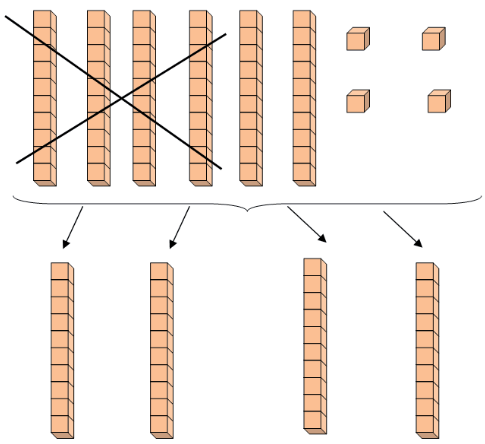


Figura 72. Representación con BM del reparto de las decenas de la división de 64 entre 4

M. Alcalde / I. Pérez / G. Lorenzo - ISBN: 978-84-695-9565-7 Los Números Naturales en el aula de Primaria - UJI - DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia90

Simultáneamente a estas manipulaciones, es necesario que simbolicen numéricamente lo que está ocurriendo:

$$\begin{array}{r|l} 6,4 & \underline{\;4\;} \\ \underline{-4} & \;1 \\ 2 & \end{array}$$

La barra que hemos repartido en cada uno de los cuatro conjuntos equipotentes se representa en el cociente con un 1 que corresponde a la cifra de las decenas de este. Y el resto parcial que se obtiene, el 2, se corresponde con las 2 barras sin repartir.

Por la necesidad de continuar con la operación, vuelven a los BM y transforman en 20 cubos las dos barras que no han podido asignar a ninguno de los cuatro conjuntos como decenas completas. Entonces tienen 24 unidades para repartir (figura 73).

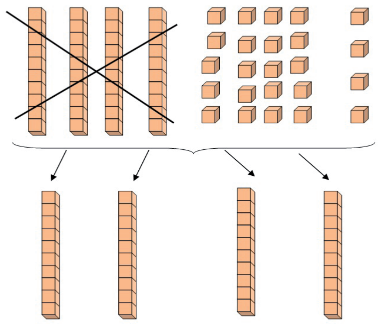


Figura 73. Representación con BM del resultado de la descomposición de 2 barras en 20 cubos

La representación numérica en este momento expresa lo que hemos mencionado anteriormente como «bajar la cifra siguiente». Este hecho tiene como consecuencia que las dos decenas del resto parcial pasan a considerarse como 20 unidades que, junto con las 4 que ya había en el dividendo, forman las 24 que hay que repartir:

$$\begin{array}{l|l} 6,4, & \underline{\;4\;} \\ \underline{-4} & \;1 \\ \;\;2\,4 & \end{array}$$

Por último, se reparten los 24 cubos en los 4 conjuntos equipotentes, como se ve en la figura 74.

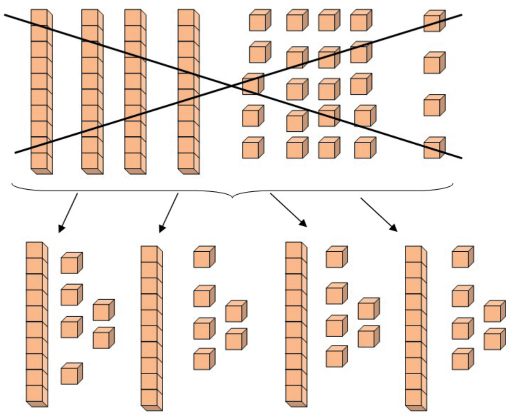


Figura 74. Representación con BM del resultado de repartir 64 entre 4

Numéricamente, anotaremos en el cociente la cifra de las unidades y se realizará la correspondiente sustracción parcial para finalizar la operación:

$$\begin{array}{r|l} 6{,}4, & \underline{\ 4\ } \\ \underline{-4} & 16 \\ 2\,4 & \\ \underline{-2\,4} & \\ \underline{0\,0} & \end{array}$$

En el caso de los ábacos, representarán el dividendo en un ábaco y habrá que repartirlo entre otros 4. Siguiendo un procedimiento análogo al del caso anterior, comenzaremos por la varilla de las decenas hasta que lleguen a darse cuenta de que hay 2 bolas que no se pueden repartir. El conocimiento del SND y la necesidad de continuar repartiendo hará que decidan descomponer las 2 decenas en 20 unidades y añadirlas a las 4 que ya tienen. Han de repartir 24 unidades entre los 4 subconjuntos, situando 6 bolas en cada ábaco. De esta manera obtienen 1 decena y 6 unidades en cada ábaco, es decir 16, que es el cociente.

También ahora el objetivo será utilizar este algoritmo sin necesidad de escribir las sustracciones para que las hagan mentalmente. Es lo que se conoce como la *expresión estándar del algoritmo*.

$$\begin{array}{r|l} 6{,}4, & \underline{\ 4\ } \\ 2\,4 & 16 \\ \underline{0} & \end{array}$$

Este resultado también lo recontextualizaremos con la situación problemática: «Los alumnos de 3.º de Primaria de un colegio van de excursión y se alojan en un albergue. Tienen que repartirse en 4 habitaciones con el mismo número de alumnos y por tanto se tienen que distribuir en cuatro grupos de 16 personas».

Se harán más ejemplos de divisiones exactas con restos parciales iguales o diferentes de cero. En la reflexión con el alumnado sobre la relación del dividendo y divisor con el cociente, les ayudaremos a que lleguen a una conclusión semejante a: «para dividir un número de dos cifras entre otro de una sola, se separan las cifras del dividendo, de izquierda a derecha. A continuación se busca un número que, multiplicado por el divisor, dé un valor igual o próximo por defecto a la cifra de las decenas del dividendo, y se coloca en el cociente. El resultado de este número multiplicado por el divisor se resta mentalmente a la cifra de las decenas del dividendo y esta diferencia se coloca debajo de ella. Al lado de este resultado bajamos la cifra de las unidades del dividendo. Nuevamente es necesario encontrar un valor que multiplicado por el divisor nos dé o se aproxime por defecto al valor que en este momento se encuentra debajo del dividendo. Con la colocación del resultado final, tanto del valor del cociente como del resto, tenemos finalizada la división, el resultado de la cual será el número que se encuentra en el cociente». Se ha convertido una división de dos cifras en el dividendo, que no sabían resolver, en dos divisiones que sí saben resolver.

Utilizando, por ejemplo, las divisiones 64 : 3 y 74 : 3, se seguirá un procedimiento análogo para comenzar el trabajo con divisiones enteras por una cifra, en las cuales la única diferencia con las anteriores será la existencia del resto final diferente de cero.

Nuevamente harán más ejemplos con divisiones exactas y enteras, con restos parciales iguales o diferentes de cero, asociados a la resolución de situaciones problemáticas, hasta que los alumnos utilicen la expresión estándar del algoritmo como la manera habitual de resolver las divisiones por una cifra.

> Una vez está aprendida la división por una cifra y ya en 4.º de Primaria, es el momento para introducir la división por varias cifras.
>
> Proponemos ahora la segunda parte de la secuencia didáctica ordenada por niveles de dificultad según la cual se tendría que introducir el algoritmo estándar de la división cuando el divisor tiene más de una cifra:
>
> 1. Dos cifras en el divisor y una en el cociente: 48 : 12, 37 : 12, 124 : 62.
> 2. Dos cifras en el divisor y más de una en el cociente: 946 : 13, 715 : 26.
> 3. Divisiones con ceros en el cociente: 4456 : 43, 556 : 54.
> 4. Cualquier división.

D.7. Descubrir el algoritmo de la división por dos cifras y utilizarlo para realizar divisiones en las cuales aumente progresivamente el número de cifras del dividendo. Automatizar la división en todos los casos

Seguimos en la 3.ª fase de E-A de la división. Nos situamos en 4.º de Primaria y una vez aprendida la división por una cifra será el momento de ampliar el conocimiento del algoritmo estándar de esta operación, presentando una situación en la que sea necesario dividir con un divisor de dos cifras.

Para resolver divisiones donde el divisor tenga varias cifras, ya no es conveniente trabajar con material didáctico, a causa de la gran cantidad de material que se necesitaría y de la dificultad de generar el algoritmo a partir de la manipulación. Una vez llegado a este punto de la secuencia didáctica, pasaremos directamente a la fase simbólica y, por tanto, utilizaremos lápiz y papel.

Para poder hacer estas divisiones, es necesario que los niños y niñas sean conscientes de que dividir es buscar el factor que le falta a una multiplicación, de la que se conoce el resultado y el otro factor.

Se introducirá la división por dos cifras con una sola cifra en el cociente, comenzando con una situación problemática en la cual sea necesario dividir, por ejemplo, 48 : 12: «Entre 3.º y 4.º de Primaria hay 48 niños y niñas. Si queremos hacer 12 grupos de la misma cantidad de alumnos para las actividades de Navidad, Carnaval, fiestas del pueblo, final de curso, etc., ¿de cuántos niños y niñas será cada grupo?».

Comentaremos con ellos y ellas cómo encontrar la respuesta y llegaremos a la conclusión de que es necesario resolver la división de 48 entre 12, pero no la saben calcular numéricamente todavía.

Después que diferentes miembros del alumnado presentan sus propuestas de resolución de la operación y en la búsqueda de la manera común de hacerlo, introduciremos el algoritmo correspondiente planteándoles la pregunta «¿qué debemos hacer para encontrar el cociente?». Cuando la respuesta sea que han de encontrar un factor que multiplicado por 12 les dé 48, pero que desconocen la tabla del 12, les podemos proponer que la confeccionen.

Así, harán: $12 \times 1 = 12$, $12 \times 2 = 24$, $12 \times 3 = 36$, $12 \times 4 = 48$, y en este punto pararán por haber llegado a la solución. Se traslada a la expresión numérica de la operación, siguiendo todos los pasos que se han utilizando en las divisiones de una cifra, para fijarlos:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{00} & 4 \end{array}$$

Para responder a la pregunta de la situación problemática de partida, contestarán: «Si entre 3.º y 4.º de Primaria hay 48 niños y niñas y queremos hacer 12 grupos de la misma cantidad de alumnos para las actividades de Navidad, Carnaval, fiestas del pueblo, final de curso, etc., cada grupo será de 4 niños y niñas».

Se harán más ejemplos de división reflexionando con el alumnado sobre la relación del cociente, el dividendo y el divisor, ayudándoles a que mediante las situaciones problemáticas trabajadas lleguen a la conclusión: «el cociente es el número que multiplicado por el divisor nos da el dividendo». Han descubierto cómo funciona el algoritmo en estos casos.

Los ejemplos incluirán divisiones enteras, 37 : 12; divisiones con tres cifras en el dividendo, 124 : 62, etc., utilizando siempre para el cálculo el recurso de la construcción de la tabla de multiplicar del divisor.

El objetivo final será utilizar este algoritmo sin necesidad de escribir la sustracción para que la hagan mentalmente, lo que se conoce como expresión estándar del algoritmo:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{00} & 4 \end{array}$$

Continuando con la secuencia didáctica de la E-A de la división por varias cifras, nos encontraríamos con una situación problemática en la cual aparece la división siguiente: 946 : 13, donde el cociente tendrá más de una cifra: «Preparando una excursión a Galicia con el alumnado de 4.º de Primaria sabemos que desde el punto de partida hay 946 km. Si la empresa de autobuses nos ha dicho que nos costaría llegar 13 horas, queremos saber cuántos kilómetros recorreremos aproximadamente en cada hora».

Intentarán calcular el cociente mediante la construcción de la tabla del divisor, es decir del 13, que es el último procedimiento que han aprendido, pero se dan cuenta de que es necesario hacer muchas multiplicaciones del trece. Inmediatamente descubren que lo tendrían que multiplicar por números mayores que diez, pues 13 × 10 = 130, que deberían multiplicarlo por números de varias cifras, por lo que el cociente también las tendrá.

Entonces se les puede ocurrir, o si no les podríamos ayudar a que lo descubran, que siguiendo un procedimiento semejante a la división con un divisor de una cifra que produce más de una en el cociente, habrá que separar las cifras del dividendo; es decir, elegiremos dividendos parciales y haremos divisiones parciales de divisor 13.

Como 9 centenas no se pueden repartir en 13 grupos de centenas, es necesario descomponerlas en decenas y añadirlas a las 4 que ya hay, es decir, es necesario coger las dos primeras cifras del dividendo, lo cual indicarán poniendo una coma; así, la división que ahora se plantean es 94 entre 13.

$$\begin{array}{r|l} 94{,}6 & \underline{\,13\,} \end{array}$$

Esta división es semejante a las que se han hecho anteriormente, por tanto, ya saben resolverla con la ayuda de la tabla del 13: 13 × 1 = 13,..., 13 × 6 = 78, 13 × 7 = 91, 13 × 8 = 104, entonces el cociente será 7. En este momento, trasladan el resultado parcial encontrado. Habrá que insistir en el hecho de que este valor es la cifra de las decenas del cociente:

$$\begin{array}{r|l} 94{,}6 & \underline{\,13\,} \\ -\,\underline{91} & \;\;7 \\ 03 & \end{array}$$

Para continuar con la división, bajarán ahora la cifra siguiente, lo cual implica descomponer las 3 decenas en unidades y añadirlas a las 6 que ya hay, como indicarán en la expresión numérica de la división que están haciendo:

$$\begin{array}{r|l} 94{,}6, & \underline{\,13\,} \\ -\,\underline{91}\;\; & \;\;7 \\ 036 & \end{array}$$

A continuación dividen las 36 unidades y, consultando la tabla del 13, encuentran el nuevo resultado parcial, que es la cifra de las unidades del cociente, y lo trasladan a la expresión numérica de la división:

$$\begin{array}{r|l} 94{,}6 & 13 \\ \cline{2-2} -\ \underline{91} & 72 \\ 036 & \\ -\ \underline{26} & \\ \underline{10} & \end{array}$$

En este momento ya ha finalizado la división, porque se han dividido las unidades y el resto obtenido es menor que el divisor, y han encontrado que el cociente es 72 y que el resto es 10.

Para volver al contexto de la situación problemática de partida, contestarán: «En la excursión que estamos preparando a Galicia, aproximadamente recorreremos 72 km cada hora y todavía nos faltarán 10 km para llegar».

En la reflexión con el alumnado sobre la relación entre los términos y los resultados de la división, les ayudaremos a que lleguen a una conclusión parecida a: «para dividir dos números de varias cifras se separarán de izquierda a derecha las cifras del dividendo y haciendo divisiones parciales del dividendo entre el divisor iremos encontrando las cifras del cociente». Han descubierto cómo funciona el algoritmo estándar en estos casos.

El objetivo final será utilizar este algoritmo sin necesidad de escribir las sustracciones para que las hagan mentalmente. Ello es lo que se conoce como *expresión estándar del algoritmo*:

$$\begin{array}{r|l} 94{,}6{,} & 13 \\ \cline{2-2} 036 & 72 \\ \underline{10} & \end{array}$$

En los ejemplos de resolución de situaciones problemáticas se reflexionará también con el alumnado sobre la dificultad de continuar trabajando con las tablas de los divisores y sobre la posibilidad de acortar en tiempo y cálculos la resolución de estas divisiones.

Para ayudarles en la reflexión, podemos sugerir que para deducir la primera cifra del cociente observen la relación entre la primera o las dos primeras cifras del dividendo y la primera del divisor. De esta manera, están usando solo las tablas de multiplicar hasta el 9 y los mecanismos conocidos de las divisiones por una cifra, para llegar a la versión definitiva del algoritmo estándar de la división.

La expresión numérica no cambia, lo que se modifica es el mecanismo mental para llegar.

Siguiendo con la secuencia didáctica y para ver el funcionamiento de este nuevo mecanismo mental, nos encontraríamos con una situación problemática en la cual aparece la división 715 : 26: «En 4.º curso de Primaria se realizará una salida a un parque de Educación Vial. El precio total de la excursión (autobús, entrada y comida) es de 715 €. Si el número de alumnos de la clase es 26, ¿cuánto dinero tiene que aportar cada uno?».

Después de identificar la división como la operación que da respuesta a esta pregunta, su resolución separando las dos primeras cifras del dividendo e intentando dividir 71 entre 26:

$$\begin{array}{r|l} 71{,}5 & \underline{\;26\;} \end{array}$$

Si observan la primera cifra del dividendo y la primera del divisor, pueden pensar que la primera cifra del cociente será el 3. Comprueban si el 3 es la adecuada haciendo los cálculos con el divisor completo:

$$\begin{array}{rl} 71{,}5 & \big|\,\underline{\;26\;} \\ 78 & \;\;\;3 \end{array}$$

Mediante el planteamiento de la sustracción intermedia vemos mejor que el producto de 3 por 26 excede las cifras seleccionadas del dividendo, es necesario que propongan otra cifra menor para el cociente, y volver a hacer los cálculos:

$$\begin{array}{rl} 71{,}5 & \big|\,\underline{\;26\;} \\ -\,\underline{52}\;\; & \;\;\;2 \\ 19\;\; & \end{array}$$

Han encontrado el 2 como la primera cifra del cociente y el 19 como resto parcial, siendo ambos decenas.

Continúan haciendo la división bajando el 5, lo cual implica descomponer las 19 decenas en unidades al añadir el 5 y, por tanto, dividir 195 unidades entre 26:

$$\begin{array}{rl} 71{,}5{,} & \big|\,\underline{\;26\;} \\ -\,\underline{52\;\;} & \;\;\;2 \\ 195 & \end{array}$$

El procedimiento para resolver esta nueva división parcial es semejante al que se ha utilizado para resolver la inicial, es decir, tienen que buscar la cifra del cociente, relacionando el 19 con el 2 (se coge el 19 porque el 1 es menor que el 2) y proponiendo el 9 como la cifra adecuada:

$$
\begin{array}{rl}
71{,}5{,} & \underline{|\,26\,} \\
-\underline{52} & \;\;29 \\
195 & \\
234 &
\end{array}
$$

Nuevamente, mediante el planteamiento de la sustracción intermedia se ve que el 9 no ha resultado la cifra adecuada y, con los cálculos necesarios, llegarán a encontrar el 7 como la cifra de las unidades del cociente:

$$
\begin{array}{rl}
71{,}5{,} & \underline{|\,26\,} \\
-\underline{52} & \;\;27 \\
195 & \\
-\underline{182} & \\
\underline{013} &
\end{array}
$$

En este momento ya ha finalizado la división, porque se han dividido las unidades y el resto obtenido es menor que el divisor, y han encontrado el 27 como cociente de la división y el 13 como resto, entonces: «Cada alumno de 4.º curso tendrá que aportar 27 € para la salida al parque de Educación Vial y se pagarán 13 € del fondo de la clase para completar los 715 €».

Se harán más ejemplos de división reflexionando con el alumnado sobre la relación de las cifras del cociente, el dividendo y el divisor, ayudándoles a que mediante las situaciones problemáticas trabajadas lleguen a una conclusión semejante a: «para dividir dos números de varias cifras se separarán de izquierda a derecha las cifras del dividendo y haciendo divisiones parciales del dividendo entre el divisor encontraremos las cifras del cociente, observando la relación entre la primera o las primeras cifras del dividendo y la primera del divisor». Han descubierto cómo funciona definitivamente el algoritmo estándar de la división.

El paso final en el proceso será llegar la expresión estándar del algoritmo de la división, en la cual no se expresan las sustracciones intermedias, sino que se hacen mentalmente. Si cogemos el ejemplo anterior:

$$
\begin{array}{rl}
71{,}5{,} & \underline{|\,26\,} \\
19\,5 & \;\;27 \\
\underline{01\,3} &
\end{array}
$$

Aprendido el algoritmo de la división por dos cifras, se introducirán situaciones en las cuales vaya aumentando el número de cifras del dividendo y del divisor.

En este proceso de resolución de diferentes tipos de divisiones, pueden encontrar algunas que presentarán una dificultad añadida por el hecho de tener ceros entre las cifras del cociente.

Por ejemplo, en la división 4.456 : 43, observarán que no se pueden repartir las decenas y habrá que poner cero en la cifra de las decenas del cociente y bajar la cifra de las unidades para poder continuar la división:

$$
\begin{array}{r|l}
44{,}5{,}6{,} & \underline{\;43\;\;\;} \\
\multicolumn{1}{r}{015\,6} & 103 \\
\multicolumn{1}{r}{\underline{27\;}} &
\end{array}
$$

Las reflexiones sobre estas divisiones les ayudarán a llegar a una conclusión del tipo: «cuando no hay suficiente cantidad del orden en el cual se esté dividiendo, es necesario poner un cero en el cociente para indicar que no hay unidades de este orden y hemos de continuar dividiendo con el orden siguiente de izquierda a derecha».

En otros casos, por ejemplo 556 : 54, también encontraremos ceros en el cociente, pero no en una posición intermedia:

$$
\begin{array}{r|l}
55{,}6 & \underline{\;54\;} \\
\multicolumn{1}{r}{\underline{016}} & 10
\end{array}
$$

En este caso, al no poder repartir las 16 unidades entre 54, los alumnos tienen que anotar en el cociente un cero en el lugar de la cifra de las unidades.

La conclusión a la que hemos de llegar ahora es: «cuando no hay suficiente cantidad de unidades de 1.^{er} orden en el dividendo, es necesario poner un cero en el cociente para indicar que no hay unidades de este orden y habremos terminado la división».

Estas dos últimas situaciones son de especial dificultad y habrá que insistir en ellas para que los niños y las niñas no olviden poner los ceros en el cociente en el lugar correspondiente. Para solucionarlo, sería conveniente verbalizar el orden de unidades de las cifras del cociente que van encontrando, para que puedan reconocer la ausencia de cantidad en algún orden y, además, podrían detectar el olvido si hicieran siempre la prueba de la división.

D.8. Reconocer las relaciones que existen entre dividendo, divisor, cociente y resto y utilizarlas como «prueba de la división»

Cuando a finales de 3.º o en 4.º curso de Primaria ya esté normalizada esta operación, volveremos una vez más al significado de la división y reflexionaremos con el alumnado sobre las relaciones que hay entre sus términos.

Partiremos de divisiones numéricas sencillas, que representamos aquí en general como:

$$\begin{array}{l|l} D & \underline{d} \\ \underline{r} & q \end{array}$$

y tendrán que comprobar, según los casos, que:

1) Si r = 0, entonces $D = d \times q$

o bien que:

2) Si r $\neq$ 0, entonces $D = (d \times q) + r$

A partir de este momento, con la finalidad de conseguir que el alumnado se pueda sentir «matemático» (Chevallard y otros, 1997) y responsable de la corrección de sus resultados, se utilizarán estas relaciones como forma de comprobar si las divisiones están bien hechas.

D.9. Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de la división

De manera espontánea y de la misma forma que en las operaciones anteriores, en voz alta, en un juego, en diferentes situaciones..., y siempre a un nivel de menos dificultad del que en clase se esté trabajando simbólicamente, utilizaremos la nueva operación, la división, para ejercitar el cálculo mental. Como está íntimamente relacionada con la multiplicación, en el cálculo mental también lo estará. Es un buen momento para recordar que se ha de trabajar con materiales reales al principio de la multiplicación y la división y hacer reflexiones del tipo doble o mitad, triple o dividido por tres, etc. Solo son multiplicaciones y divisiones por números muy básicos, pero representan relaciones muy incorporadas a la vida real, por tanto, tienen que estar muy asumidas por los alumnos. Han de servir para resolver situaciones cotidianas revividas en clase.

En 4.º de Primaria, con un dominio evidente y contrastado de las tablas de multiplicar, tienen que dominar también el papel de los términos y sus relaciones según se esté utilizando la multiplicación o la división. Por ejemplo, con el 2, el 3 y el 6, si es una multiplicación lo que interesa resolver en la situación concreta, el 2 puede ser multiplicando o multiplicador, igual que el 3. Ambos son factores, y el 6 es el resultado de la multiplicación. Pero si es una división, el 6 es el dividendo y el 2 y el 3 son divisor y cociente indistintamente (al margen de saber mentalmente que esta división es exacta).

Análogamente a las otras operaciones, trabajaremos las estrategias personales que cada alumno ha creado en ellas para aplicarlas también a la división, pidiéndoles que verbalicen lo que hacen al calcular mentalmente, para asegurarnos que están pensando correctamente.

A medida que se va dominando este cálculo mental y el de las otras operaciones, se puede combinar gradualmente la división con ellas para hacer un trabajo conjunto. Además, se dispone de materiales didácticos que, con la ayuda del juego, facilitan el cálculo mental con la división.

Dominó de la división (fabricado por Nardil, SL)

Se reparten fichas del juego y, por turnos, tienen que asociar una división inmediata por una cifra indicada numéricamente con su resultado (figura 75).

Figura 75. Imagen de una asociación de fichas con el *Dominó de la división*

Triominó de la división (fabricado por Taskmaster Ltd.)

De manera análoga se reparten fichas del juego y, por turnos, los jugadores tienen que asociar una división indicada, de la misma dificultad que en el juego anterior, con su resultado (figura 76).

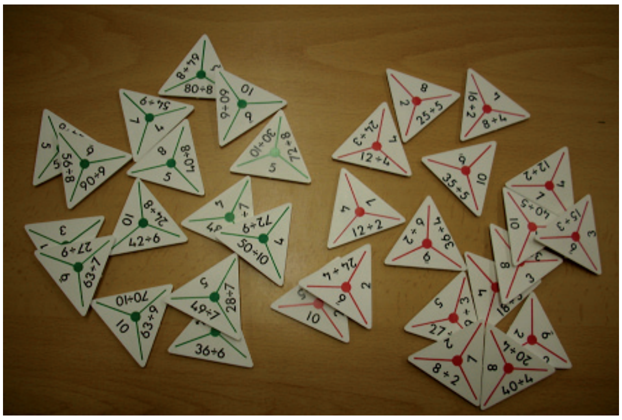


Figura 76. Imagen de las fichas del *Triominó de la división*

Este material presenta dos tipos de fichas. Unas, con marcas de separación de color rojo, tienen divisiones de divisores 2, 3, 4 o 5. Otras, con marcas de separación de color verde, tienen divisiones de divisores 6, 7, 8, 9 o 10. El juego se puede plantear separadamente o combinando los dos tipos de fichas.

Se ha comentado ya que, una vez trabajada en el cálculo mental la nueva operación que nos ocupa, se integra al trabajo anterior. A partir de 4.º de Primaria, ya se pueden utilizar las cuatro operaciones. Los siguientes materiales combinan las cuatro y requieren un cierto dominio del cálculo mental.

Mathable (fabricado por Diset)

En este material se reparten fichas con números de una y dos cifras y las tienen que colocar como resultado de alguna de las cuatro operaciones, obtenido con los números de las dos casillas contiguas a la que se ocupa. En las casillas sin signo se puede realizar cualquier operación y en las que tienen un signo representado, la operación que está asignada.

Cada jugador anota en su jugada la suma de todos los valores de las fichas que coloca y la acumula a los que ya tenía. Gana quien más puntos hace (figura 77).

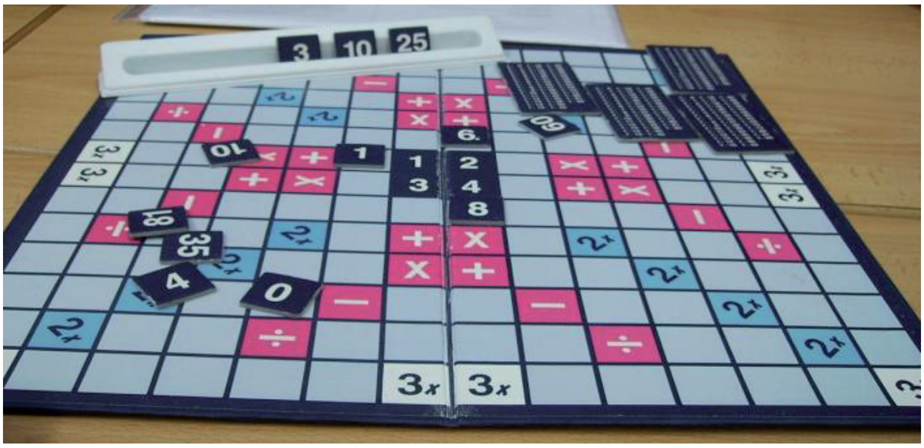


Figura 77. Imagen de un momento del juego *Mathable*

El Mil (fabricado por Nardil SL)

El material dispone de un tablero de plástico dividido en casillas en las cuales se indica el signo de una de las cuatro operaciones trabajadas acompañado por un número de una, dos o tres cifras (figura 78).

En la primera tirada cada jugador partirá del centro del tablero y tendrá que recorrer tantas casillas con lado común como indique la tirada del dado, haciendo la operación señalada en la casilla de llegada. En las tiradas siguientes se moverá por el tablero con las mismas normas, haciendo siempre la operación de la última casilla. Ganará la partida el primer jugador que consiga de manera exacta el número pactado al principio, 100, 500, 1.000...

Figura 78. Imagen del tablero de *El Mil*

Top Score (fabricado por Diset)

El material consta de un dado negro decaédrico con una cifra del 0 al 9 en cada una de sus caras y de seis dados hexaédricos, en las caras de los cuales aparecen distribuidos de diferentes maneras los números del 1 al 9, además del 10, 25, 50, 75 y 100 (figura 79).

Se lanza el dado negro tres veces y se compone un número con las cifras obtenidas en los lanzamientos. A continuación se realiza una tirada con el cubilete y los otros seis dados. Combinando los seis números, que se han obtenido en este último lanzamiento, con las cuatro operaciones elementales, se ha de intentar obtener el número de tres cifras o aproximarse a él lo más posible, siempre por defecto.

Figura 79. Imagen de los elementos que componen el juego *Top Score*

D.10. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la división

Como ya se ha dicho anteriormente, es en situaciones reales donde cobra especial sentido el trabajo hecho con esta operación, porque realmente es la realidad la que origina interrogantes cuya respuesta pasará por saber, en este caso, resolver divisiones.

Análogamente a las otras operaciones, aunque la resolución e invención de problemas aparece en la cuarta fase para trabajarlas, también ahora nos encontramos en ella desde el principio, porque presentamos las divisiones de manera contextualizada, a partir de situaciones reales que deben resolverse y que, igualmente, estarán relacionadas con cualquier bloque de contenidos matemáticos.

Continuaremos trabajando la resolución de problemas a partir de las cuatro fases de Polya y de la reflexión con el alumnado sobre su importancia, desarrollo y utilidad.

Como se ha comentado en las capacidades A.9, B.9 y C.11 y con las mismas consideraciones, aprovecharemos los errores para generar nuevos aprendizajes y continuaremos con el trabajo de estimación de los resultados de las situaciones problemáticas.

Iniciaremos el trabajo en 3.º de Primaria, con problemas que necesitan ser resueltos con una división. Es muy importante que, en los primeros momentos, prestemos atención de manera individual a cada una de las diferentes situaciones utilizadas para introducir la operación (de agrupar y de repartir). Así, cada vez que introducimos un nuevo tipo de situaciones para la división, tendremos que trabajar la resolución de problemas relacionados con ellas, para reforzar el significado de la operación que tienen asociado y el papel de sus términos en cada caso.

También tendremos que dedicar atención, al principio de manera específica, a los dos tipos de división que hemos trabajado, las exactas y las enteras, planteando de manera separada problemas que se resuelvan con divisiones de las dos clases y aprovechando este trabajo para insistir en las diferencias entre ellas y en la utilización del vocabulario asociado.

Cuando ya reconozcan la división como la operación que sirve para resolver cualquiera de las mencionadas situaciones, plantearemos problemas relacionados con ellas teniendo cuidado de que las divisiones aparezcan de manera aislada.

Más adelante trabajaremos problemas que necesitan dos divisiones para su resolución y, hacia el final de 3.er curso o ya en 4.º, se pueden proponer problemas que necesiten para su resolución la combinación de una división con alguna de las otras operaciones.

En referencia a los enunciados de las situaciones problemáticas seguiremos los mismos pasos que en las operaciones anteriores (capacidades A.9, B.9 y C.11) pero, en este caso, la aparición de problemas con enunciados confusos, incompletos, con datos que falten, con datos que sobren, etc., relacionados con la división, tendrían que retrasarse hasta el último curso del 2.º ciclo, para dar tiempo al alumnado a que adquiera mejor la operación.

Hacia el final del 3.er curso, iniciaremos también el desarrollo de tareas de invención de problemas relacionados con la división, con las mismas orientaciones dadas en los otros casos (capacidades A.9, B.9 y C11), tanto referidas a la oferta de ayudas al alumnado como a la necesidad de intercambiar entre los niños y las niñas los enunciados inventados.

En el 3.er ciclo se continuará con las tareas de resolución e invención de situaciones problemáticas relacionadas con la división, en las cuales esta operación se combinará con las otras tres a medida que las vayan dominando.

TEMA 3

Divisibilidad en Números Naturales

En este tema se trabaja el tratamiento didáctico de la divisibilidad con Números Naturales a partir de la construcción de los conceptos asociados a ella de una manera muy intuitiva y que pueda ser abordada por los alumnos de 3.^{er} ciclo de Primaria.

1. Introducción

1.1. De carácter general

Desde hace más de 2.000 años, los números primos atraen la atención de matemáticos y aficionados de todo el mundo, por varias razones. Una de ellas es la fascinación que produce la irregular distribución de estos números a lo largo de la recta numérica. Los números primos aparecen esparcidos por aquí y allá y se encuentran sectores donde abundan y otros donde escasean.

Euclides, ya entonces, nos aseguró que el conjunto de números primos es infinito, igual que el conjunto numérico al cual pertenecen, los Números Naturales. Lo demostró utilizando propiedades de la divisibilidad de los Números Naturales, en el libro IX de *Los elementos.*

El conjunto de los Números Naturales diferentes de la unidad está formado por dos grandes subconjuntos de números, los que se denominan primos (aquellos que se pueden dividir solo por sí mismo y por la unidad) y los compuestos, los restantes. El estudio de la divisibilidad en el conjunto de los naturales permite averiguar si un número natural dado pertenece a uno de estos subconjuntos o al otro.

Históricamente se ha dado a los números primos connotaciones mágicas, místicas, fuera del ámbito numérico. Se les califica de misteriosos e indomables ya que parece no haber ninguna regla que determine su ubicación entre los otros números naturales. Han sido investigados, estudiados, trabajados... Hay un problema abierto: la conjetura de Goldbach. En el año 1742 Goldbach envía una carta a Euler diciendo «todo número impar mayor que 5 es la suma de 3 números primos». Por ejemplo 15 = 3 + 5 + 7. Euler, al responder, establece la conocida como conjetura de Goldbach, que dice «Todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos».

Si se piensa que puede ser una curiosidad, hay más, como los números primos gemelos, aquellos cuya diferencia es 2 unidades: ((5,7), (11,13), (821,823) ...). En el mundo cinematográfico aparecen también referencias a los números primos en la película *Contact* (dirigida por Robert Zemeckis en el año 1997; basada en una novela de Carl Sagan), en la que son los números primos la manera de comunicarse los alienígenas con nosotros y, más recientemente, en *La habitación de Fermat* (dirección y guión de Luis Piedrahíta y Rodrigo Sopeña, 2007) donde la conjetura de Goldbach forma parte esencial de la historia.

Pero no se trata de un tema desconectado de la realidad. Podemos pensar que un concepto cuyo origen está en el siglo III a. C. con Euclides y con un tratamiento inicial matemático tan elemental se puede ver apartado de la ciencia actual. No es el caso. En los últimos años, relativo a los nuevos avances tecnológicos, como la información en la red (Internet), ha sido necesario crear métodos para garantizar la seguridad de esta información, muchas veces económica, personal, que nos afecta directamente. El nivel matemático de este tema ha evolucionado y se ha hecho muy complejo. La parte del álgebra, y más concretamente de la teoría de números, que se encarga de proporcionar esta seguridad (codificando información) se denomina criptografía. Uno de los métodos más populares en criptografía es el que se conoce como RSA, en honor de sus creadores R. L. Rivest, A. Shamir y L. Adleman. La seguridad del método se fundamenta en la dificultad de factorizar, de una manera concreta y que resulte eficiente y eficaz, los números naturales que son producto de dos números primos muy grandes. Las implementaciones más elaboradas del método RSA (así como también de otros similares) utilizan leyes aritméticas profundas, el conocimiento de las cuales sería inimaginable sin el soporte teórico que se ha desarrollado en torno a los números primos.

1.2. De carácter específico

Es evidente que lo que se ha expuesto en la primera parte de esta introducción no aparecerá en el aula de Primaria, aunque se puede conseguir una llamada de interés con curiosidades como estas. Pero sí que será necesario poner nombre a conceptos que a lo largo de toda su vida matemática tendrán que utilizar, como *factor, divisor, múltiplo, divisible*... Que este nombre sea preciso y que se identifique claramente con el concepto matemático que hay debajo, es el objetivo.

Realmente, en el aula de Primaria se pide que se inicie a la Divisibilidad con Números Naturales, concretamente a los múltiplos y divisores de un número, utilizando la tabla de multiplicar para encontrar los múltiplos y divisores de un número menor o igual que 100. También se exige conocer los números primos y los compuestos y, además, los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 10, para usarlos en la descomposición en factores primos de un número menor que 1.000.

En el desarrollo de este tema hemos considerado adecuado no separar por capacidades tal como se ha hecho en los temas anteriores, porque el trabajo que se propone con estos conceptos es un continuo que lleva de uno a otro tal como se haría en una aula de 6.º de Primaria.

Pero queremos ir un poco más allá. Pensemos que nos encontramos ante un problema importante en didáctica de la Matemática relativo a la divisibilidad con Números Naturales: *el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo*. Somos partidarios de introducirlo en el aula de Primaria, aunque no hay recomendación oficial al respecto, porque da coherencia a todo el trabajo previo y porque facilita los cálculos con fracciones. Tan importante o más que el cálculo será entender el concepto y la utilidad en muchos problemas de la vida cotidiana. Constatamos reiteradamente en nuestras relaciones con alumnos y estudiantes que el procedimiento para calcular estos valores ha suplantado la propia definición de los conceptos.

Por lo dicho, el momento de introducir este tema en Primaria será en 6.º curso, una vez ya estén asumidas la multiplicación y la división, y se intentará que sea un aprendizaje significativo; por tanto, respetaremos el ritmo del alumnado, trabajaremos el descubrimiento de los conceptos y provocaremos la construcción de nuevos instrumentos matemáticos que resuelvan de manera más eficaz los problemas planteados. Como material manipulativo se puede trabajar con los bloques multibase de Dienes y las regletas Cuisenaire para el cálculo de múltiplos y divisores.

Con las regletas Cuisenaire, por ejemplo, para el cálculo de los múltiplos de un número, elegiremos la regleta que lo representa y haremos trenes repitiendo esta, obteniendo así trenes del color de la regleta. Estos trenes serán representaciones de múltiplos del número inicial.

Para calcular divisores de un número elegiremos la regleta que lo representa y haremos trenes, con regletas todas iguales, de la misma longitud que la regleta elegida. Cada una de las regletas que componen cada tren, representa un divisor del número elegido.

1.3. Poniendo nombre

Si reflexionamos a partir de la multiplicación $45 = 5 \times 9$, podremos decir que:

- 45 es múltiplo de 5 y de 9
- 5 y 9 son divisores de 45
- 45 es divisible por 5 y por 9
- 5 y 9 son factores de 45

Estas palabras: *múltiplo, divisor, divisible* y *factor*, ya las conocen del trabajo con las operaciones multiplicación y división. Es necesario darse cuenta de los matices y concluir que, dependiendo del punto de vista (la operación) desde el cual se observa el escenario, a un mismo actor se le denominará de una manera o de otra. Es decir, si la operación es la multiplicación, hablaremos de múltiplo y factor. Si la operación es la división, las palabras serán divisor y divisible. Pero lo que tiene que quedar claro es que *múltiplo tiene un significado equivalente a divisible*, y *divisor equivalente a factor, teniendo en cuenta que el cero nunca puede ocupar el sitio de un divisor.*

Este hecho fundamentará la construcción del tema.

2. Múltiplos y divisores de los números naturales

2.1. Definición de *múltiplo de un número natural*

Cuando se ha visto el ejemplo en la introducción, pocos de nosotros y pocos de los niños y niñas habrían dudado en decir que *45 es múltiplo de 5*. Pero ¿por qué? ¿Qué es lo que hace que un número sea múltiplo de otro? Una primera aproximación, si miramos desde el punto de vista de la multiplicación, será porque el 45 contiene 9 veces el 5 o, lo que es lo mismo, porque 9 por 5 es 45. Si la aproximación la hacemos desde el punto de vista de la división, 45 dividido entre 5 es una división exacta y da 9 como cociente.
Estas son, pues, las posibles dos definiciones de múltiplo:

- Un número *a* es múltiplo de otro *b*, cuando la división «*a* entre *b*» es exacta.
- Un número *a* es múltiplo de otro *b*, cuando «*a* es divisible por *b*», es decir, cuando exista un número *c*, de tal manera que $a = b \times c$.

Formalmente: $\forall a,b \in \mathrm{N},\ a = \dot{b} \leftrightarrow \exists c \in \mathrm{N} /\ a = b \times c$, donde el punto sobre la *b* es la manera de indicar en lenguaje matemático que *a* es múltiplo de *b*.

Por tanto, es necesario transmitir en el aula de Primaria que un múltiplo no nulo de un número natural es un número más grande o igual que el mismo número.

2.2. Propiedades de múltiplo de un número natural

1. *Cualquier número siempre es múltiplo de sí mismo*.
   Por ejemplo, si consideramos el 6: 6 = 6 × 1.

2. *La suma (diferencia) de múltiplos de un número es también múltiplo de este número*.
   Por ejemplo, si consideramos el 3: 6 es múltiplo de 3; 9 es múltiplo de 3 y 6 + 9 = 15 es múltiplo de 3 y 9 – 6 = 3 es múltiplo de 3.

3. *El producto de múltiplos de un número es también múltiplo de este número*.
   Por ejemplo, si consideramos el 3: 6 es múltiplo de 3; 9 es múltiplo de 3 y 54 es múltiplo de 3 (54 = 3 × 18).

4. *Si un número es múltiplo de otro, y este lo es de un tercero, el primer número es múltiplo del tercero*.
   Por ejemplo, si consideramos el 12: 12 es múltiplo de 6, 6 es múltiplo de 3 y 12 es múltiplo de 3.
   Con más ejemplos semejantes, adquirirán estas propiedades.

En un primer momento se puede pensar que son poco prácticas. Es necesario revisarlas un poco más para descubrir que ofrecen muchas posibilidades y aplicaciones. Por ejemplo:

- ¿Es 72 un múltiplo de 12? Sí que lo es porque 72 = 60 + 12, y 60 es múltiplo de 12 y 12 también lo es (*propiedad 2*).
- ¿Es 72 múltiplo de 3? Sí que lo es porque 72 = 12 × 6 y 12 y 6 sí que lo son (*propiedad 3*).
- ¿Es 600 múltiplo de 15? Sí que lo es porque 600 = 20 × 30 y 30 = 15 × 2 (*propiedad 4*).

2.3. Definición de *divisor de un número natural*

De la misma manera que ha pasado en el caso de múltiplo, cuando se ha visto el ejemplo en la introducción, tampoco habríamos dudado en decir que *5 es divisor de 45*. La explicación en este caso es aún más sencilla. Como la última operación vista ha sido la división y se tiene claro el concepto de divisor, entonces de 45 : 5 = 9, el divisor es 5 o, lo que es lo mismo, 45 = 5 × 9; por tanto, 5 es uno de los factores de 45. Ya está clara la equivalencia entre divisor y factor.

Entonces, estas son las posibles dos definiciones de divisor:

- Un número *a* es divisor de otro *b*, cuando la división «*b* entre *a*» es exacta. (Es necesario notar el cambio de papeles entre *a* y *b* en la definición de múltiplo y de divisor.)
- Un número *a* es divisor de otro *b*, cuando *a* es un factor de *b*. (Es necesario notar que se trata de otra manera de decir lo mismo que *ser divisible por*, pero cambiando los papeles de *a* y de *b*)

Formalmente: $\forall a,\ b \in \mathrm{N},\ a|b \leftrightarrow \exists c \in \mathrm{N} / \ b = a \times c$, donde la barra vertical que separa *a* y *b* es la manera de indicar en lenguaje matemático que *a* es divisor de *b*.

Por tanto, es necesario transmitir a la clase que un divisor de un número natural es un número menor o igual que este número.

2.4. Propiedades de divisor de un número natural

1. *Cualquier número siempre es divisor de sí mismo* (consecuencia directa de la 1.ª propiedad de múltiplo).
2. *Si un número es divisor de otros dos, lo es también de la suma, de la diferencia y del producto de estos* (consecuencia directa de las propiedades 2.ª y 3.ª de múltiplo).
3. *Si un número es divisor de otro, y este lo es de un tercero, el primer número también es divisor del tercero* (consecuencia directa de la 4.ª propiedad de múltiplo).

3. Criterios de divisibilidad

La divisibilidad con Números Naturales permite hacer cálculos con estrategias que dan rapidez y agilidad a las operaciones. Los criterios de divisibilidad son un ejemplo. Sin ser esenciales para el hecho del calcular, conociéndolos se facilita mucho esta tarea.

Nunca se han de entender como reglas que es necesario dar y aplicar. El alumnado tendrá que construirlas desde los ejemplos que le orientará en la elaboración del enunciado del criterio, hasta la comprobación, en un número considerable de ocasiones, de la regla que ha enunciado.

Por ejemplo, es necesario hacer la reflexión de que un número no es que sea *divisible por 2* porque hay un criterio que lo dice, sino que hay un criterio de divisibilidad por 2, porque todos los números que son divisibles por 2 lo verifican. Por ello, esta norma que todos cumplen se denomina *criterio de divisibilidad por 2*, y es esta la que han de llegar a poder enunciar a partir de los ejemplos trabajados.

Finalmente, una vez construidos, podemos decir que los criterios de divisibilidad son unas reglas que nos permiten saber si un número es o no divisible por otro (o múltiplo de otro) sin necesidad de hacer la división.

En el aula de Primaria estos criterios se han de trabajar en bloque una vez llegados al punto de tener diferenciados los conceptos de los epígrafes anteriores. En este apartado se expondrán los criterios de divisibilidad de más números naturales, pero, en Primaria, los que el alumnado debe obtener y trabajar son, como hemos mencionada anteriormente, los del 2, 3, 5, 9 y 10.

Los hay que son más intuitivos, como por ejemplo el del 2. Y que los niños y las niñas lleguen a la conclusión dependerá de la cantidad de repeticiones de divisiones por 2 que hicieran en su momento o en este. Al trabajar la multiplicación y la división, se les hizo caer en la cuenta de que cualquier número par genera una división exacta al dividirlo entre dos y ahora utilizamos este resultado para obtener el correspondiente criterio. Generalmente, cuando se hace una división nos interesan en particular el cociente y el resto, aunque ahora para llegar a construir el criterio de divisibilidad por 2 será necesario fijarse en el dividendo, y consecuentemente darse cuenta de que un número es divisible por 2 cuando termina en cifra par.

De la misma manera puede pasar con el 5, 10, 100, 1.000... Otros criterios no son tan intuitivos, como el del 7, 11... Los más complicados no se podrán deducir, habrá que enunciarlos y aplicarlos. Se tiene que insistir en el hecho de que llegar a elaborar un criterio de divisibilidad es el resultado del estudio, durante mucho tiempo, de las propiedades de los números por parte de alguna persona que ha llegado a esta conclusión. No es magia.

Los criterios de divisibilidad se enuncian como:

1. *Criterio de divisibilidad por 2*:
   Un número es divisible por 2 cuando la cifra de las unidades es múltiplo de 2 (es un número par).

2. *Criterio de divisibilidad por 3*:
   Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

3. *Criterio de divisibilidad por 4*:
   Un número es divisible por 4 cuando el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 4.
   Ejemplo: 1.516, 1.504, 100...

4. *Criterio de divisibilidad por 5*:
   Un número es divisible por 5 cuando la cifra de las unidades es 0 o 5.

5. *Criterio de divisibilidad por 6*:
   Un número es divisible por 6 cuando lo es por 2 y por 3.
   Ejemplo: 144: es par, y $1 + 4 + 4 = 9$.

6. *Criterio de divisibilidad por 7*:
   Un número es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es múltiplo de 7 (en el sentido que se pueda hacer esta resta).

   Ejemplo: 343 : $34 – 6 = 28$ múltiplo de 7 (7×4).
   749 : $74 – 18 = 56$ múltiplo de 7 (7×8).
   91 : $9 – 2 = 7$ múltiplo de 7.
   77 : $7 – 14$... no se puede calcular ; $14 – 7 = 7$ sí que se puede calcular.

7. *Criterio de divisibilidad por 8*:
   Un número es divisible por 8 cuando el número formado por las tres últimas cifras es múltiplo de 8. Si el número tiene menos de tres cifras, es necesario hacer la división.
   Ejemplo: 5.888, 1.016, 1.000...

8. *Criterio de divisibilidad por 9*:
   Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
   Ejemplo: 729: $7 + 2 + 9 = 18$.

9. *Criterio de divisibilidad por 10*:
   Un número es divisible por 10 si la cifra de las unidades es cero.
   Ejemplo: 120, 1.540.

10. *Criterio de divisibilidad por 11*:
    Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupen lugar par y la suma de las que lo ocupan impar, en el sentido posible, es múltiplo de 11.
    Ejemplo: 3817 : $(8 + 7) – (3 + 1) = 15 – 4 = 11$.

11. *Criterio de divisibilidad por 12*:
    Un número es divisible por 12 cuando lo es por 3 y por 4.
    Ejemplo: 288 : 2 + 8 + 8 = 18; por tanto, 288 es múltiplo de 3 y 88 es múltiplo de 4.

12. *Criterio de divisibilidad por 25*:
    Un número es divisible por 25 cuando el número formado por las últimas dos cifras es múltiplo de 25.
    Ejemplo: 175 : 75 es múltiplo de 25.

13. *Criterio de divisibilidad por 100*:
    Un número es divisible por 100 si las últimas cifras son dos ceros.
    Ejemplo: 2.700.

14. *Criterio de divisibilidad por la unidad seguida de ceros*:
    Un número es divisible por 1.000, 10.000... si las últimas cifras son tres, cuatro... ceros.

Nota: Los criterios de divisibilidad se pueden combinar (como se ve por ejemplo en el caso del 6), pero podemos encontrar que un número sea a la vez múltiplo de muchos números, por ejemplo de 2, 3, 5... y entonces, las posibilidades se multiplican haciendo demasiado complicados estos criterios (algunos de estos casos serían 30, 60, 90...).

4. Números primos y compuestos

4.1. Números primos

Como se ha comentado en la introducción, cuando se habla de números primos es obligado hablar de Euclides. Por la distancia cronológica que nos separa y por los datos poco fiables de que disponemos, se llega a dudar que existiera. Hay tres teorías:

1. Euclides existió y escribió las obras que se le atribuyen. Nació alrededor del año 325 a. C. y murió hacia el 265 a. C.
2. Euclides era el jefe de un equipo de matemáticos que trabajaban en la biblioteca de Alejandría. Entre todos escribieron las obras que él firmaba.
3. Euclides no existió. Las obras atribuidas a Euclides fueron escritas por un equipo de matemáticos que cogieron este nombre de un personaje real (Euclides de Megara), que vivió cien años antes.

El hecho histórico es interesante por sí mismo, pero lo que trae al personaje de Euclides a nuestro tema es la producción que desarrolló. Sin duda, la obra más importante de Euclides (y posiblemente de las matemáticas) es *Los elementos*. Se han hecho más de mil ediciones de este libro desde el siglo IX y es, por este hecho, el matemático más leído de toda la historia.

En este libro destaca la claridad con que se plantean los problemas y el rigor con el cual son probados los teoremas, todo contrastando con la datación. El teorema que nos asegura la estructura de este tema es el llamado *Teorema Fundamental de la Aritmética* y que dice: «cualquier número natural mayor que 1 se puede descomponer de manera única en factores primos». La demostración de este teorema se obviará, pero se trata de encontrar la existencia de esta descomposición para cualquier número natural mayor que 1 y, además, demostrar la unicidad de la misma.

Pero no terminando todavía con la historia, hay otro personaje que nos interesa. Es Eratóstenes. Nació en Cyrene (ahora Libia) también en el siglo III a. C. y fue un reconocido astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo griego. También formó parte de la Escuela de Alejandría y dirigió su biblioteca por encargo de Ptolomeo III. Por el hecho que es más conocido y por el cual ocupa un destacado lugar en los libros de matemáticas es por su manera de encontrar los números primos. Esta contribución a nuestra formación matemática se denomina Criba de Eratóstenes. Hay que decir que también se le adjudica la medida, con extraordinaria precisión, de la longitud del meridiano terrestre y las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna. Sus estudios versan sobre gramática, filosofía, matemáticas y astronomía. Al final de su vida se vio afectado por la ceguera y murió de hambre, por voluntad propia, el año 194 a. C. en Alejandría.

El método para conseguir los números primos es el siguiente: partimos de la cantidad de números naturales distintos del 1 que se quiera, se pone una marca a los múltiplos de dos (pares) distintos de él, a los múltiplos de 3 distintos de él. Análogamente con 5, 7, 11... y los que no tengan marca serán los números primos.

El hecho de ir eliminando los números compuestos establece el paralelismo con el hecho de pasar por la criba o cedazo los cereales. De manera que los que no pasen por esta criba son los números primos.

El conjunto de los números primos es infinito, y la demostración es por reducción al absurdo, considerando que es finito y llegando a la conclusión de que esta hipótesis es falsa.

A continuación tenemos la lista de los 100 primeros números primos:

En general, para determinar si un número es primo no es necesario dividirlo entre todos los números menores que él. Si es par, diferente de 2, es compuesto. Si es impar, es suficiente dividirlo entre los números impares menores o iguales que la raíz cuadrada del número. Si no se encuentra ningún divisor entre ellos, entonces es primo; en caso contrario, es compuesto.

2	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

4.2. Números compuestos

Se podría decir que los números compuestos son los elementos del complementario del subconjunto de los números primos respecto del conjunto de números Naturales diferentes de la unidad, es decir, cualquier número natural diferente del uno que no es primo.

Una definición un poco más cuidada sería: un número natural será compuesto si lo podemos descomponer en otros factores que no son ni el mismo número ni la unidad. De otra manera, un número natural será compuesto si tiene divisores diferentes de sí mismo y de la unidad.

En el aula de Primaria, llegar a la conclusión de que la mejor descomposición en factores de un número es la de números primos, no debería ser enunciativa, sino constructiva. Una manera de conseguirlo es obtener los divisores de un número grande, sin poner ninguna restricción. Por ejemplo, 60.

Aleatoriamente, los alumnos propondrán divisores y todos serán buenos:

$60 = 2 \times 30 \quad 60 = 3 \times 20 \quad 60 = 4 \times 15 \quad 60 = 5 \times 12 \quad 60 = 6 \times 10$

Las preguntas pueden ser: «¿los tenemos todos? ¿Hay un método para encontrarlos todos?».

Para tratar de responder podríamos pasar a descomponer los divisores ya encontrados, por ejemplo:

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ o bien $60 = 2 \times 30 = 2 \times 3 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5$
$60 = 3 \times 20 = 3 \times 2 \times 10 = 3 \times 2 \times 2 \times 5$ o bien $60 = 3 \times 20 = 3 \times 4 \times 5 = 3 \times 2 \times 2 \times 5$
$60 = 4 \times 15 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ o bien $60 = 4 \times 15 = 4 \times 3 \times 5 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$60 = 5 \times 12 = 5 \times 2 \times 6 = 5 \times 2 \times 2 \times 3$
$60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5$ o bien $60 = 6 \times 10 = 6 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 2 \times 5$

Con lo que encontramos de una manera natural que, en todos los casos, se llega a la descomposición en factores primos, y que de manera consensuada expresamos así: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Mediante más ejemplos concluiremos que «la descomposición en factores primos unifica y clarifica todas las descomposiciones», que además es una manera de comprobar constructivamente el teorema fundamental de la aritmética.

Para simplificar la obtención de esta descomposición se recomienda que se comience a buscar factores primos por los números más pequeños, en primer lugar por 2, por 3... Se introduce una nueva forma de representación, que utiliza una línea vertical, donde a la parte de la izquierda se indican los cocientes de las divisiones exactas, los divisores de las cuales se colocan a la derecha, hasta llegar al cociente 1. Por ejemplo, en el caso del 60:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces, la descomposición del 60 en factores primos sería: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

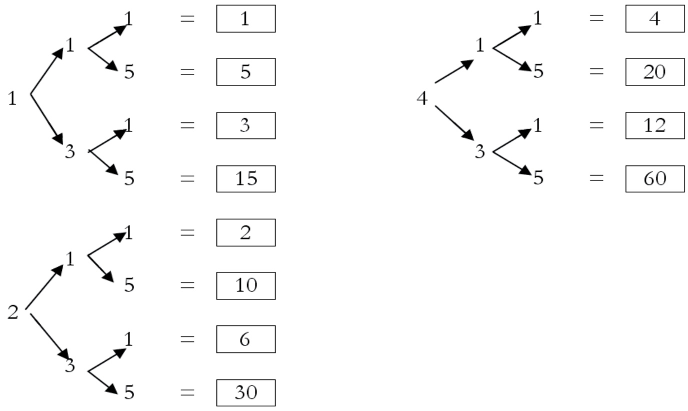
En este momento ya se puede comenzar a responder a las preguntas de saber todos los divisores de 60 y de encontrar un método para calcularlos. Se dirigen las preguntas hasta llegar al punto en el que todos los divisores que los alumnos habían propuesto son también productos de los factores primos de 60; por tanto si los divisores son el resultado de productos de los factores primos de 60, si multiplicamos factores primos de 60, obtendremos los divisores. Y si además lo hacemos ordenadamente para no dejarnos ninguno, los tendremos todos. Luego ya tenemos el método: *multiplicaremos ordenadamente los factores primos de 60 y obtendremos sus divisores*.

Lo hacemos. Calculemos todos los divisores de 60:

1. Para saber la cantidad de divisores de un número es necesario escribir la descomposición factorial del número como producto de potencias (si es el caso) y hacer el producto del exponente más una unidad de cada unos de los factores. Este paso ayuda a comprobar si nos hemos dejado alguno o por el contrario si nos hemos pasado. $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$. Entonces la cantidad de divisores será: $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$.

2. Determinamos los divisores que se derivan de cada uno de los factores:
   $D(2^2) = D(4) = \{1, 2, 4\}$ $D(3) = \{1, 3\}$ $D(5) = \{1, 5\}$

3. Construimos un esquema con los divisores obtenidos y calculamos todos los productos que se pueden formar; los rectángulos finales contendrán los 12 divisores de 60:



D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

Como nos encontramos en 6.º de Primaria, el trabajo con números primos y compuestos se desarrollará mayoritariamente con lápiz y papel, pero, en caso de que estos conceptos no queden suficientemente claros, se puede optar por usar material que lo aclare.

Por ejemplo, con regletas Cuisenaire se les distribuiría por grupos suficiente cantidad de material con la indicación siguiente: hay que elegir una regleta cualquiera diferente de la blanca y encontrar los divisores del número representado por la regleta. Para conseguirlo, formarán todos los trenes posibles cuya longitud sea la de la regleta inicial, donde cada tren estará construido con un mismo tipo de regleta.

El objetivo final es diferenciar regletas que solo se pueden asociar con trenes formados por ella misma o por regletas blancas (representan números primos), de las que además se pueden asociar a otros trenes (representan números compuestos).

5. Máximo común divisor (mcd)

5.1. Introducción

Desde la introducción al tema, se ha asociado el término divisor al de factor. Por el punto anterior, queda evidente que los divisores de un número se obtienen a partir de los factores primos de este número.

Por alguna extraña razón, la denominación de este concepto parece hacer referencia a un número más grande que con los que se calcula. Tal vez porque el concepto comienza con la palabra *máximo*. Pero solo es una idea. Una propuesta de cambio de nombre sería *divisor común máximo*. Llegados a este punto, el resto del apartado 5 de este tema se dedicará a justificar con un ejemplo el cambio de nombre propuesto y cómo esta denominación potencia el método para calcularlo, haciendo así que nombre y método caminen juntos, cuestión que en este concepto no siempre se ha conseguido, agravado además por el hecho de denominarlo por las iniciales mcd.

Consideremos la siguiente situación problemática:

«Un pastelero utiliza 20 vasos de harina en la receta de las magdalenas y 30 vasos en la receta de los pasteles suizos. Pero es demasiado laborioso medir la harina vaso a vaso, por lo cual decide usar un recipiente más grande. ¿Cuál ha de ser la capacidad, en vasos, del mayor recipiente posible que le valga para medir la harina de ambas recetas?».

5.2. Construcción del concepto

En un primer momento no ha de aparecer por ningún lugar en el aula de Primaria el nombre de *divisor,* ni *común,* ni *máximo*. El ejemplo se planteará en clase como una cuestión matemática que el maestro propone porque se lo han preguntado. Mediante «una lluvia de ideas» los niños y las niñas pueden dar sus posibles resultados de la capacidad del recipiente: de 2 vasos puede ser, de 5 vasos también puede ser... *¿Nos interesa cualquiera?*

La duda les ha de hacer pensar que no, que interesa aquel recipiente que simplifique el trabajo, es decir, aquel cuya capacidad en harina pueda dividir la cantidad equivalente a 20 y a 30 vasos, y que sea necesario utilizar este recipiente la mínima cantidad de veces para realizar la actividad. Por tanto, será un divisor de 20 y 30, un divisor común, y estaremos buscando el mayor.

En este momento es necesario obtener todos los divisores de 20 y 30, elegir los comunes y de ellos el mayor:

1. Calcular todos los divisores de 20 y 30. Aplicarán la forma que ya han aprendido. Entonces, la primera cuestión es calcular las respectivas descomposiciones en factores primos de 20 y 30:
   $20 = 2^2 \times 5$ $\qquad$ $30 = 2 \times 3 \times 5$
   $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
   $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

2. *Encontrar los divisores comunes mediante la intersección de los dos conjuntos anteriores*:
   $D(20) \cap D(30) = \{1, 2, 5, 10\}$
2. *Elegir el mayor divisor común*:
   $\text{máx}\ [\ D(20) \cap D(30)\ ] = 10$

Como se busca la capacidad en vasos del mayor recipiente posible, esta será de 10 vasos: mcd (20, 30) = 10.

Para volver al contexto de trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «La capacidad en vasos del mayor recipiente posible para medir la harina de ambas recetas, será de 10 vasos».

Después de trabajar algunos ejemplos de este tipo, se podría hacer la pregunta «¿es necesario obtener siempre todos los divisores de los dos números o podemos buscar este divisor común de otra manera?».

Habría que llegar a descubrir que este divisor común lo podemos obtener también multiplicando los factores que están en el 20 y que también están en el 30: 2 y 5. El número así obtenido es divisor común porque divide a los dos y es el máximo porque no hay ningún divisor más grande que sea común. El número buscado es, por tanto, $10 = 2 \times 5$.

Hemos construido un número que es *divisor común máximo* de los otras dos.

5.3. Automatización del concepto

Recorreremos los siguientes pasos:

1. Como hemos de buscar un divisor común, factorizamos los números de la mejor manera conocida, en *factores primos*, expresándolo en forma multiplicativa, sin utilizar potencias (*).

2. Elegimos todos los factores que estén al mismo tiempo en las dos descomposiciones, sin dejarnos ninguno, para conseguir que el resultado sea divisor de los dos números y sea el más grande. No ponemos los que no coincidan, porque tienen que ser comunes.

6. Mínimo común múltiplo (mcm)

6.1. Introducción

Siguiendo con la misma idea, lo que se intentará es construir el concepto de la manera más intuitiva posible y por ello se tendrá que partir de un ejemplo que les pueda motivar.

«Dos amigos corren alrededor del patio del colegio. El primero tarda 60 segundos en hacer una vuelta completa y el segundo 65 segundos. Si parten juntos desde la línea de salida, ¿cuánto tiempo tardarán en volver a coincidir en ella, por primera vez?».

Este ejemplo pone de manifiesto que lo que buscamos es un número mayor que 60 y 65. Pero vuelve a entrar en conflicto con mínimo, que es la primera palabra del nombre del concepto. La propuesta de nombre es ahora *múltiplo común mínimo*.

6.2. Construcción del concepto

Como es un concepto que se explicará después del máximo común divisor, parte del camino de construcción es semejante, y los alumnos lo recorrerán más rápidamente. Una vez sea evidente que el número buscado tiene que ser un múltiplo de 60 y 65, mayor que cualquiera de ellos, habrá que obtener los múltiplos distintos de cero de ambos y encontrar los que coincidan, pero como queremos saber cuánto tiempo tardarán en volver a coincidir en la línea de salida por primera vez, nos interesa el más pequeño.

En este momento es necesario obtener múltiplos distintos de cero de 60 y 65, elegir los comunes y de ellos el menor:

1. Calcular múltiplos distintos de cero de 60 y 65
   M*(60): 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, 720, **780**, 840, 900, 960, 1.020, 1.080, 1.140, 1.200, 1.260, 1.320, 1.380, 1.440, 1.500, **1.560**, 1.620...
   M*(65): 65, 130, 195, 260, 325, 390, 455, 520, 585, 650, 715, **780**, 845, 910, 975, 1.040, 1.105, 1.170, 1.235, 1.300, 1.365, 1.430, 1.495, **1.560**, 1.625...

2. Encontrar los múltiplos distintos de cero comunes
   M*(60) ∩ M*(65): 780, 1560...

3. Elegir el menor múltiplo distinto de cero común
   mín [M*(60) ∩ M*(65)] = 780

Como se busca cuánto tiempo tardarán en volver a coincidir por primera vez en la línea de salida, este será de 780 segundos: mcm (60, 65) = 780.

Para volver al contexto del trabajo, responderemos a la pregunta de la situación problemática de partida: «Tardarán 780 segundos en volver a coincidir en la línea de salida por primera vez».

Después de trabajar algunos ejemplos de este tipo, se podría hacer la pregunta «¿es necesario obtener siempre muchos múltiplos de los dos números o podemos buscar este múltiplo común de otra manera?».

Se tiene que llegar a pensar que sí puede haber otro método. Entonces buscamos un *múltiplo distinto de cero*, que lo sea de los dos, por tanto, común y que además sea el menor de todos, por tanto, *mínimo.* Recordando la factorización en factores primos, utilizada en el apartado anterior, les proponemos aprovecharla para calcular también este múltiplo. Factorizamos los números:

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$65 = 5 \times 13$

Como el concepto de múltiplo se ha trabajado mucho desde la multiplicación, ya saben que un múltiplo de un número se puede conseguir multiplicando por cualquier valor este número.

Como $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, cualquier múltiplo de 60 será del tipo $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times A$.

Igualmente, como $65 = 5 \times 13$, cualquier múltiplo de 65 será del tipo $5 \times 13 \times B$.

La cuestión sería encontrar los valores menores de A y B, para que $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times A = 5 \times 13 \times B$, y entonces tendremos el menor múltiplo distinto de cero común. Pero esta cuestión es muy sencilla, porque para cada número, su factor desconocido es el factor o producto de factores que hay en el otro número y que no están en su factorización:

$$A = 13 \qquad B = 2 \times 2 \times 3$$

Es decir, construimos un número con todos los factores posibles de los dos:

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$$

Este número, que es el 780, es el formado por todos los factores de 60 y 65 sin repetir ninguno (*mínimo*). Si todavía les quedara alguna duda, se comprueba que es *múltiplo* de los dos:

$780 = 60 \times 13$
$780 = 65 \times 2 \times 2 \times 3$

Y, por tanto, es *común*.

Hemos construido un número que es *múltiplo común mínimo* de los otros dos.

6.3. Automatización del concepto

Recorreremos los pasos siguientes:

1. Como hemos de buscar un múltiplo común distinto de cero (formado por otros factores además de los propios), factorizamos los números de la mejor manera conocida, en *factores primos*, expresándolo en forma multiplicativa, sin utilizar potencias (*).

2. Elegimos todos los factores que estén en las factorizaciones, sin dejarnos ninguno, pero sin repetir los factores presentes en las descomposiciones de más de un número, para conseguir que el resultado sea múltiplo de los números y el más pequeño.

(*) *Nota*: Tradicionalmente, se ha utilizado la descomposición en factores primos expresada en forma de potencias, eligiendo los *comunes con el menor exponente* para el caso del máximo común divisor. Esta automatización implica mucha memoria y el hecho de no razonar qué es lo que se está haciendo provoca mucha confusión por dos motivos. A la ya comentada dificultad de *máximo* en el nombre del concepto, ahora se le ha de añadir la palabra *menor* exponente. La segunda confusión aparece en el mínimo común múltiplo, la automatización tradicional consiste en elegir los *comunes y no comunes con el mayor exponente*.

La mezcla entre máximo, mínimo, mayor y menor hace que se acabe la etapa de Educación Primaria con un problema grave de identificar y separar estos conceptos. La propuesta es, pues, abandonar este grado de automatización y quedarnos con lo propuesto antes, además de leer en diferente orden los nombres de estos dos conceptos.

ANEXO

Presentamos a continuación algunos conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos, necesarios para fundamentar los contenidos referentes a los Números Naturales que se trabajan en esta publicación. No son objeto de estudio por los futuros maestros, pero tienen la finalidad de facilitar su consulta a los lectores que lo necesiten.

1. Formalización de conceptos de Teoría de Conjuntos

La Teoría de Conjuntos es la encargada de simbolizar el lenguaje matemático. Es por ello que formando conjuntos expresamos algunos conceptos que componen el currículum escolar y favorecemos su aprendizaje.

Presentamos a continuación una breve formalización de los conceptos de Teoría de Conjuntos, necesarios para trabajar los contenidos de esta publicación.

1.1. Introducción

El concepto de *conjunto* es intuitivo y se podría entender como «una agrupación de elementos hecha con cualquier criterio». El criterio puede no ser una propiedad característica común, sino simplemente el deseo o la necesidad de agrupar ciertos elementos. Así, podemos hablar de un conjunto de personas, de ciudades, de bolígrafos, o del conjunto de objetos que hay en un momento determinado encima de una mesa.

Un conjunto está bien determinado si se sabe si un elemento dado pertenece o no al conjunto; así, el conjunto de los bolígrafos azules está bien definido, porque al ver un bolígrafo podemos saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque, al ver una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber diferentes personas que opinen si esa persona es alta o no lo es.

Los conjuntos se representan, normalmente, con una letra mayúscula: A, B, K...

Llamaremos *elemento* a cada uno de los objetos (físicos o abstractos) que forman parte de un conjunto. Estos elementos tienen carácter individual, cualidades que nos permiten diferenciarlos y cada uno de ellos es único, de manera que no hay elementos duplicados o repetidos. Los representaremos generalmente con una letra minúscula: a, b, k...

Se define *cardinal* de un conjunto como «la cantidad de elementos que hay en el conjunto».

Se denomina *conjunto universal* o *referencial*, que habitualmente representaremos con la letra U, al conjunto de todas las cosas de las cuales se esté tratando; así, si hablamos de Números Naturales, U es el conjunto de los Números Naturales; si hablamos de ciudades, U es el conjunto de todas las ciudades; este conjunto *universal* puede mencionarse explícitamente o, en la mayoría de los casos, se da por conocido según el contexto en el que se esté trabajando.

Siempre ha sido muy utilizada la idea de conjunto a lo largo de la historia, en cualquier representación o explicación matemática. Pero no será hasta el siglo XIX cuando se le otorgará rigor. En este siglo, Cantor, pone las bases para la construcción de la Teoría de Conjuntos: definiciones, introducción a los cardinales, conjunto bien ordenado...

Aparecen fisuras en esta teoría, como la paradoja de Russell, que surge cuando se supone un conjunto $\mathrm{A} = \left\{\mathrm{C\ conjuntos} / \mathrm{C} \notin \mathrm{C}\right\}$, a partir del cual se hace la pregunta de la pertenencia de A a sí mismo, es decir $A \in A \leftrightarrow A \notin A$. La respuesta nos lleva a la conclusión que ¿$A \in A$ o $A \notin A$? , que constituye la paradoja mencionada.

Para resolver estos problemas de la Teoría de Conjuntos se crean los sistemas axiomáticos correspondientes (son conjuntos de afirmaciones admitidas como verdaderas sin necesidad de demostración) y así tenemos los de Zermelo-Frenkel, los de Newman...

1.2. Conjuntos

En este apartado se hace un recorrido por algunos conceptos (operaciones, relaciones...) que se pueden definir en relación a los conjuntos.

1.2.1. Definiciones y conceptos básicos

Como se ha dicho en el punto anterior, se admite la idea de conjunto como la agrupación en un todo de determinados objetos bien caracterizados y diferenciados los unos de los otros.

- Conjuntos iguales: *aquellos que, elemento a elemento, son iguales.*

- Determinaciones de un conjunto:
  - Por comprensión: *explicitando la propiedad característica de sus elementos.*
  - Por extensión: *enumerando, uno por uno, todos los elementos que lo componen.*

- Representaciones de un conjunto:
  - Representación gráfica: diagrama lineal, diagrama de Venn (línea curva cerrada que delimita los elementos del conjunto) o cualquier línea cerrada.
  - Representación simbólica: como se ha dicho antes, se utilizarán letras en minúscula para representar los elementos de un conjunto y en mayúscula para representar los conjuntos.

- Subconjuntos: $A \subset C \leftrightarrow \forall a \in A \rightarrow a \in C$

- Conjunto universal o referencial: se representa con la letra *U*.

- Conjunto complementario de un subconjunto:

  $A \subset U : A_U^c = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$

- Conjunto vacío: Φ, aquel que no tiene elementos.

- Conjunto de partes de un conjunto: es un conjunto que está formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado, es decir: $P(A) = \{B \,/\, B \subset A\}$. Es importante notar que de esta definición se deduce que $A \in P(A)$ i $\Phi \in P(A)$.

Utilizando números combinatorios se puede demostrar que el conjunto *P(A)* tiene como cardinal $2^{card\,(A)}$: $card\left[P(A)\right] = 2^{card(A)}$.

1.2.2. Operaciones entre conjuntos

- Unión: $A \bigcup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

- Intersección: $A \bigcap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$. Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, estos se denominan *conjuntos disjuntos*.

Propiedades de la unión y de la intersección:

1. *Conmutativa*: $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} = \mathrm{B} \bigcup \mathrm{A}$ y $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} = \mathrm{B} \bigcap \mathrm{A}$
2. *Asociativa*: $\mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \bigcup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) \bigcup \mathrm{C}$ y $\mathrm{A} \bigcap (\mathrm{B} \bigcap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) \bigcap \mathrm{C}$
3. *Idempotencia*: $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{A} = \mathrm{A}$ y $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{A} = \mathrm{A}$
4. *Absorción*: $\mathrm{A} \bigcup \left(\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}\right) = \mathrm{A}$ y $\mathrm{A} \bigcap \left(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}\right) = \mathrm{A}$
5. *Distributiva:*

   $\mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \bigcap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) \bigcap (\mathrm{A} \bigcup \mathrm{C})$ y $\mathrm{A} \bigcap (\mathrm{B} \bigcup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}) \bigcup (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{C})$
6. $A \bigcup A^c = U$ y $A \bigcup \Phi = A$
7. $A \bigcap A^c = \Phi$ y $A \bigcap \Phi = \Phi$

   Nota: Leyes de De Morgan:

   - $\left(A \bigcup B\right)^C = A^C \bigcap B^C$
   - $\left(A \bigcap B\right)^C = A^C \bigcup B^C$

- Partición de un conjunto: $\{N_1, N_2,..., Nn\}$ es una partición de un conjunto A, si y solo si (en adelante sii):

$$
\begin{array}{|l}
1.\ N_i \subset A \ \wedge N_i \neq \Phi, \forall i = 1,..., n \\
2.\ \bigcup_{i=1}^{n} N_i = A \\
3.\ N_i \cap N_j = \Phi, \forall i \neq j
\end{array}
$$

- Diferencia de conjuntos: $A - B = \{x \in A / x \notin B\}$

- Producto cartesiano: $A\ x\ B = \{(a,\ b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Propiedades:

$$card(A \times B) = card(A) \cdot card(B)$$
$$A \times B \neq B \times A$$
$$A' \subset A,\ B' \subset B \leftrightarrow A' \times B' \subset A \times B$$
$$A \times B = \Phi \leftrightarrow A = \Phi \vee \ B = \Phi$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

1.3. Correspondencias

Una correspondencia **f** es una terna **(A, B, G)**, donde:

- **A**, **B** son conjuntos y $f : A \rightarrow B$ asocia elementos de **A** con elementos de **B**, denominándose **A** conjunto inicial y **B** conjunto final.

- $D(f) = \{x \in A / \exists y \in B : f(x) = y\}$, es el *conjunto dominio* de la correspondencia y está formado por los elementos (llamados *origen* o *antiimagen*) del conjunto inicial que tienen algún elemento correspondiente en el conjunto final.

- $\mathrm{Im}(f) = \{y \in B / \exists x \in A : f(x) = y\}$ es el *conjunto imagen* de la correspondencia y está formado por los elementos (llamados *imagen*) del conjunto final que se corresponden con algún elemento del dominio de la correspondencia.

- $G \subset AxB$, se denomina Grafo de la correspondencia y está formado por pares **(x, y)** donde $x \in D(f)$ e $y \in \mathrm{Im}(f)$:
$G(f) = \{(x, y) \in A \times B / x \in D(f) \wedge y \in \mathrm{Im}(f) \wedge f(x) = y\}$

- Cualquier correspondencia **f** nos permite definir su correspondencia recíproca o inversa, de la siguiente manera:

  $f^{-1}: B \to A \,/\, D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) \; i \; \mathrm{Im}(f^{-1}) = D(f)$.

  Algunas correspondencias pueden ser:

  - *Unívoca*: *a cada elemento de A le corresponde un elemento o ninguno de B*.
  - *Biunívoca: tanto f, como f^{-1}, son unívocas*.
  - *Aplicación: todo elemento de A tiene imagen en B y esta es única. Es decir*, $\forall a \in A, \exists! b \in B \,/\, f(a) = b$.

    Algunas aplicaciones pueden ser:

    – *Suprayectiva*: todo elemento de B es imagen de algún elemento de A: $\forall b \in B, \exists a \in A \,/\, f(a) = b$

    – *Inyectiva*: elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B: $\forall a, b \in A : a \neq b \to f(a) \neq f(b)$

    – *Biyectiva*: suprayectiva i inyectiva al mismo tiempo.

  - *Composición de aplicaciones: dada una aplicación* $f: A \to B$, *y otra* $g: B \to C$ *de forma que* $\forall a \in A \;\; f(a) = b \;\wedge\; \forall b \in B \;\; g(b) = c$, *se define la composición de aplicaciones como otra aplicación* $g \circ f: A \to C$, *cumpliéndose que* $\forall a \in A \;\; g \circ f(a) = g\big(f(a)\big) = g(b) = c$. Si las aplicaciones *f* y *g* son biyectivas su composición *f* o *g* también lo es.

1.4. Relaciones binarias

Una *relación binaria* es una asociación o conexión que se establece entre parejas de elementos de un conjunto. Puede haber muchas definidas en un mismo conjunto. Analíticamente, podemos decir que una relación **R** es una terna **(A, A, G)**, donde $G \subset A \times A$, como ocurre en el punto anterior, entonces diremos que **xRy** sii **(x,y)** pertenece a **G**.

Propiedades: $\forall x, y, z \in A$

1. *Reflexiva:* **xRx**
2. *Antirreflexiva:* **x** no se relaciona consigo mismo.
3. *Simétrica:* **xRy** → **yRx**
4. *Antisimétrica:* **xRy** ∧ **yRx** → **x = y** o bien, **x ≠ y** ∧ **xRy** → **y** $\overline{\mathbf{R}}$ **x**
5. *Transitiva:* **xRy** ∧ **yRz** → **xRz**
6. *Circular:* **xRy** ∧ **yRz** → **zRx**
7. *Conexa:* **xRy** ∨ **yRx**

Nota: si una relación binaria definida en un conjunto cumple algunas de las propiedades anteriores, recibe el nombre de:

- *Relación binaria de equivalencia: cumple reflexiva, simétrica y transitiva.*
- *Relación binaria de preordren: cumple reflexiva y transitiva.*
- *Relación binaria de orden (también llamada de orden amplio): cumple reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- *Relación binaria de orden estricto: cumple antireflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- *Cualquier relación de orden definida anteriormente se denominan de* orden parcial*, porque no se le ha exigido que cumpla la propiedad conexa. Si esta propiedad se cumple, las relaciones de orden se denominan de* orden total*.*

1.4.1. Clases de equivalencia

Una *relación binaria* de equivalencia definida en un conjunto, organiza sus elementos en subconjuntos que constituyen una partición del conjunto (véase anexo 1.2.2). Esta organización se denomina *clasificación* y cada uno de los subconjuntos se denomina *clase de equivalencia* y está formado por los elementos del conjunto que se relacionan mediante la relación.

1.4.2. Conjunto cociente

Una vez establecida una clasificación, las clases de equivalencia forman un conjunto que se denomina *conjunto cociente*. Si A es el conjunto donde tenemos definida la relación de equivalencia R, el conjunto cociente se representa por A/R.

1.5. Estructuras algebraicas

Cuando se estudian las propiedades de las operaciones en los diferentes conjuntos numéricos, se observan algunas que se repiten de manera regular en todos ellos, y otras que se presentan de manera específica. Estas contribuyen a determinar la estructura algebraica de dichos conjuntos numéricos.

En general, cuando hablamos de estructura algebraica nos referimos a las propiedades que cumplen las operaciones definidas entre los elementos de un conjunto. De acuerdo con estas se establece una clasificación de los conjuntos, en la cual cada una de las clases de equivalencia corresponde a una de las estructuras que se recogen a continuación.

Las operaciones necesarias para determinar una estructura pueden ser *internas* o *externas*:

- Se define operación interna, como una aplicación (*): **A**x**A** → **A**. Es decir, operando elementos de un conjunto **A**, obtenemos elementos del mismo conjunto.

- Se define operación externa, como una aplicación **(·) : K** × **A** → **A**. Es decir, operando elementos de un conjunto **A** con elementos de otro conjunto **K**, llamado de escalares, obtenemos elementos del conjunto **A**.

Las operaciones definidas pueden cumplir algunas de las siguientes propiedades:

- Asociativa (aso): $\forall a, b, c \in A$: **(a*b)*c = a*(b*c)**
- Conmutativa (conm): $\forall a, b \in A$: **a*b = b*a**
- Elemento Neutro (en): $\exists n \in A / \forall a \in A$: **a*n = n*a = a**
- Elemento Simétrico (es): $\forall a \in A, \exists a' \in A /$ **a*a´= a*a´= n**
- Distributiva de • respecto de *: ∀a, b∈ A ∧ ∀ k∈K: k • **(a*b) = (k • a) * (k •b)**

Las principales estructuras son:

Para la operación interna:

	Asociativa	*Conmutativa*	*Elemento neutro*	*Elemento simétrico*
Semigrupo	X			
Semigrupo conmutativo	X	X		
Monoide	X		X	
Monoide conmutativo	X	X	X	
Grupo	X		X	X
Grupo conmutativo o abeliano	X	X	X	X

Para dos operaciones internas:

	Primera operación					*Segunda operación*					*Distributiva de la 2ª respecto de la 1ª*
	aso	*conm*	*en*	*es*		*aso*	*conm*	*en*	*es*		
Semianillo	X	X	X			X					X
Semianillo conmutativo	X	X	X			X	X				X
Semianillo conmutativo unitario	X	X	X			X	X	X			X
Anillo	X	X	X	X		X					X
Anillo conmutativo	X	X	X	X		X	X				X
Anillo conmutativo unitario	X	X	X	X		X	X	X			X
Cuerpo	X	X	X	X		X		X	X (*)		X
Cuerpo conmutativo	X	X	X	X		X	X	X	X (*)		X

(*): Exceptuando el elemento neutro de la primera, todos los elementos del conjunto tienen simétrico para la segunda operación.

Habría que añadir, finalmente, las definiciones de *semimódulo* y *espacio vectorial*:

Un conjunto (M, *, ·), con una operación interna (*) y otra externa (·), definida con la ayuda de un semianillo (A, +, x), es un semimódulo si:

- $(M, *)$ s un semigrupo conmutativo.
- $\forall \alpha, \beta \in A \wedge \forall a, b \in M$ se cumplen las siguientes propiedades:

  – $(\alpha + \beta) \cdot a = (\alpha \cdot a) * (\beta \cdot a)$

  – $\alpha \cdot (a * b) = (\alpha \cdot a) * (\alpha \cdot b)$

  – $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \times \beta) * a$

Un conjunto **(V, *, ·)**, con una operación interna (*) y otra externa (·) definida con la ayuda de un cuerpo (**K**, +, ×) es un espacio vectorial si:

- **(V, *)** es un grupo abeliano.
- $\forall u, v \in V, \ \forall \lambda, \mu, 1 \in K$ se cumplen las siguientes propiedades:

  - $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) * (\mu \cdot v)$
  - $\lambda \cdot (u * v) = (\lambda \cdot u) * (\lambda \cdot v)$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v$
  - $1 \cdot v = v$

Referencias bibliográficas

Barba, D. (2004): «Matemàtiques des d'un punt de vista constructiviste o constructivisme des d'un punt de vista matemàtic?» Barcelona. *Guix*, 309. Novembre 2004.

Bishop, A. J. (1999): *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós. Barcelona.

Chevallard, Y. y otros (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* ICE Universitat de Barcelona-Editorial Horsori. Barcelona.

Gómez, B. (1988): *Numeración y cálculo*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 3. Síntesis. Madrid.

Gallego, C. y otros (2005): *Repensar el aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas para convivir comprendiendo el mundo*. Graó. Barcelona.

Ifrah, G. (2001): *Historia universal de las cifras. La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Espasa Calpe. Madrid.

— (1988): *Las cifras. Historia de una gran invención*. Alianza Editorial. Madrid.

Polya, G. (1992): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México.

Bibliografía recomendada

Alsina, C. y otros (1995): *Ensenyar matemàtiques*. Graó. Barcelona.

Balaux, A. (2003): *Manual de matemàtiques del professor de primària*. Ed. de la Universitat de Barcelona. Barcelona.

Biniés, P. (2008): *Conversaciones matemáticas con M.ª Antònia Canals: o cómo hacer de las Matemáticas un aprendizaje*. Graó. Barcelona.

Canals, M.ª A. (2009): *Primers nombres i primeres operacions*. Rosa Sensat. Barcelona.

Carrillo, D. (1989): *El aprendizaje del número y las regletas de Cuisenaire*. Universidad de Murcia, Secretariado de Publicaciones. Murcia.

Cascallana, M. T. (1988): *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Aula XXI, núm. 40. Madrid. Santillana.

Castro, E. (ed.) (2001): *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Síntesis*. Madrid.

Chamorro, M. C. (coord.) (2003): *Didáctica de las Matemáticas*. Pearson Educación. Madrid.

Codina, R. (coord.) (2004): *Matemàtiques i la seva didàctica*. Publicacions i Edicions UB, Textos Docents. Barcelona.

Dienes, Z. P. (1971): *Cómo utilitzar los Bloques Multibase*. Teide. Barcelona.

Fernández, J. A. (1989): *Los números en color de G. Cuisenaire: relaciones dinámicas para el descubrimiento de la matemática en el aula*. Seco Olea, DL. Madrid.

Forrellad, H. (2001): «Textos para calcular», *Aula de Innovación Educativa*, núm. 107, diciembre 2001.

Godino, J. D. (dir.) (2004): *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Granada.

— (dir.) (2004): *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Granada.

Maza, C. (1995): *Aritmética y representación: de la comprensión del texto al uso de materiales*. Paidós. Barcelona.

Monterde, M. (2001): «El jarrón mágico. El misterio de la multiplicación», *Aula de Innovación Educativa*, núm. 107, diciembre 2001.

Nctm (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas, Granada.

Orton, A. (1990): *Didáctica de las matemáticas. Educación Infantil y Primaria*. Morata sa-mec. Madrid.

Planas, N. (2012): *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Graó. Barcelona.

Planas, N. y Alsina, A. (coords.) (2009): *Educación matemática y buenas prácticas: infantil, primaria, secundaria y educación superior*. Graó. Barcelona.

Pons, C. (2001): «¿Para qué sirven los números?», *Aula de Innovación Educativa*, núm. 107, diciembre 2001.

Prada, M. D. de y Rodríguez, R. (1982): *Cómo enseñar la divisibilidad*. Anaya. Madrid.

Rigol, A. (2001): «Matemáticas para entender. Las matemáticas como cultura», *Aula de Innovación Educativa*, núm. 107, diciembre 2001.

Segovia, I. y Rico, L. (coords.) (2011): *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Pirámide. Madrid.

Sierra, M. y otros (1989): *Divisibilidad*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje, núm. 7. Síntesis. Madrid.

Torra, M. (1993): «Una propuesta didáctica para enseñar la decena», *Signos, teoría y práctica de la educación,* 8/9, enero-junio 1993, pp. 178-189.

Índice de figuras