Aportes para la enseñanza. **Nivel Medio**

Matemática

La función exponencial. Una secuencia posible

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad

Aportes para la enseñanza. Nivel Secundario

Matemática

La función exponencial, una secuencia posible

Ministerio de Educación

Buenos Aires Ciudad

Carpintero, Cristina
Matemática. La función exponencial, una secuencia posible / Cristina Carpintero y Estela Jeanne ; dirigido por Gabriela Azar. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, 2014.
E-Book.

ISBN 978-987-549-566-1

1. Matemática. 2. Formación Docente. I. Jeanne, Estela II. Azar, Gabriela, dir. III. Título
CDD 371.1

ISBN: 978-987-549-566-1

Dirección General de Planeamiento Educativo
Gerencia Operativa de Currículum
Av. Paseo Colón 275, 14º piso
C1063ACC - Buenos Aires
Teléfono/Fax: 4340-8032/8030
Correo electrónico: curricula@bue.edu.ar

Jefe de Gobierno
Mauricio Macri

Ministro de Educación
Esteban Bullrich

Subsecretaria de Gestión Educativa y Coordinación Pedagógica
Ana María Ravaglia

Subsecretario de Gestión Económica Financiera
y Administración de Recursos
Carlos Javier Regazzoni

Subsecretario de Políticas Educativas y Carrera Docente
Alejandro Oscar Finocchiaro

Subsecretaria de Equidad Educativa
María Soledad Acuña

Directora General de Planeamiento e Innovación Educativa
María de las Mercedes Miguel

Gerente Operativa de Currículum
Gabriela Azar

Aportes para la enseñanza. Nivel Secundario
MATEMÁTICA
La función exponencial, una secuencia posible

Gerencia Operativa de Currículum
Gabriela Azar

Elaboración del material

Coordinación pedagógica
Marta García Costoya

Especialistas

Docentes:
Cristina Carpintero
Estela Jeanne
Fabiana Marcovich
Silvia Veiga
Gabriela Waingarten

Coordinación:
Betina Duarte
Horacio Itzcovich

Asesoramiento:
Patricia Sadovsky

Edición a cargo de la Gerencia Operativa de Currículum

Coordinación editorial: María Laura Cianciolo
Edición: Gabriela Berajá, Marta Lacour y Sebastián Vargas
Diseño gráfico: Patricia Leguizamón, Alejandra Mosconi y Patricia Peralta

Presentación

El Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires desarrolla un conjunto de acciones dirigidas a promover que el conocimiento llegue a todos por igual –favoreciendo la verdadera inclusión educativa–, a mejorar la oferta de enseñanza y a propiciar aprendizajes que les permitan a los estudiantes ejercer sus derechos ciudadanos y continuar con estudios superiores si así lo desean.

En este marco, la Dirección General de Educación de Gestión Estatal (a través de las Direcciones de Educación Media, de Educación Técnica, de Educación Artística y de Educación del Adulto y del Adolescente así como la Dirección General de Planeamiento Educativo (a través de la Gerencia Operativa de Currículum, y de la Gerencia Operativa de Evaluación Educativa) promueven el fortalecimiento y el mejoramiento de la experien-cia educativa que ofrecen los establecimientos de ese nivel.

Los materiales curriculares que a continuación se presentan, contribuyen a configurar un contexto propicio para la profundización de la reflexión y el fortalecimiento de la mirada pedagógica sobre los procesos de enseñanza en la escuela secundaria.

Esta serie está concebida como una colección de recursos para la enseñanza, pretende atender al enfoque didáctico, favorecer las prácticas reflexivas de los profesores y colaborar con la lógica de organización de recursos por parte de la escuela, el departamento, la asignatura. Cada título que integra la serie posee una identidad temática. Es decir, los recursos que agrupa cada material remiten a algún contenido especificado en los trayectos de contenidos formulados para el Nivel Secundario. Tal es el caso, por ejemplo, de *Las relaciones coloniales en América* en Historia, o *Números racionales* en Matemática. La elección del tema se ha realizado considerando uno o más de los siguientes criterios: se aborda aquello sobre lo que hay mayor dificultad para enseñar y/o mayores obstáculos para que los alumnos aprendan, aquello sobre lo que no hay suficientes recursos, o aquello sobre lo que lo existente no está tratado según el enfoque adoptado en este trabajo. Cada material tiene la impronta de la asignatura, y, según el caso, incluye diversos recursos: selecciones de textos para los alumnos, artículos pe-riodísticos, mapas, imágenes (pinturas, grabados, fotografías, láminas), selecciones de videos, selecciones musicales, gráficos, propuestas de actividades, análisis de producciones de los alumnos.

Los siguientes títulos conforman la serie Aportes para la enseñanza. Nivel Medio[1]:

Biología. Darwin y la evolución. Se plantean sugerencias y orientaciones para trabajar en el aula y que los alumnos conozcan los aportes desarrollados por Darwin para la construcción de la biología y la ciencia en general, teniendo en cuenta que el enfoque evolucionista es un contenido presente en el currículum de las escuelas de la Ciudad.

[1] Actualmente, Aportes para la enseñanza. Nivel Secundario.

Biología. Procesos relacionados con la vida y su origen: la célula y las estructuras asociadas a sus funciones. Aborda contenidos del programa de 2º año: el origen de la vida, la nutrición en el nivel celular, la célula como sistema abierto y la diversidad biológica: nutrición y multicelularidad. La propuesta permite trabajar los contenidos antes mencionados partiendo de distintos recursos: textos científicos, láminas, video y actividades exploratorias y experimentales.

Biología. Los intercambios de materia y de energía en los seres vivos. Aborda contenidos del programa de 1º año: noción de modelo, concepto de sistema, estructura de la materia, estudio del modelo corpuscular, transformaciones químicas, composición de los seres vivos y de los alimentos, los seres vivos como sistemas abiertos, la obtención de materia y de energía, transformaciones de la materia y la energía en los ecosistemas. La propuesta permite trabajar los contenidos antes mencionados par-tiendo de distintos recursos: textos científicos, láminas, video y disco compacto con secuencias didácticas.

Geografía. Relaciones entre Estados: el caso de las plantas de celulosa en Fray Bentos. Atiende al programa de 2º año. Propone el trabajo a partir del caso de las pasteras que posibilita la articulación de contenidos de diversos bloques: "Los Estados y los territorios" (los conflictos entre los Estados, las relaciones y articulaciones entre los niveles nacional, provincial y municipal a partir de las decisiones y las acciones tomadas por sus gobiernos), del bloque: "Los cambios en la producción industrial y las transformaciones territoriales" (la industria, la organización de la producción y los territorios; los factores de localización industrial, los espacios industriales, los cambios en la división territorial del trabajo, etcétera). Para el desarrollo del tema se presentan artículos periodísticos, mapas, imágenes, cuadros estadísticos y un video.

Geografía. Problemáticas ambientales a diferentes escalas. Atiende al bloque de contenidos "La diversidad ambiental en el mundo" del programa de 1º año. Para el de-sarrollo del tema se presenta una selección de artículos periodísticos, mapas y video.

Historia. Los mundos del medioevo. Esta propuesta tiende a incrementar y diversificar los materiales disponibles para el desarrollo del programa de 1º año, en particular para el tratamiento del tercer bloque de contenidos: "Los mundos durante el medioevo". Se trata de un conjunto de recursos –documentos escritos, imágenes, interpretaciones de historiadores y mapas– que el docente podrá seleccionar y decidir el tipo de actividad por desarrollar a partir de las posibilidades que los mismos brinden.

Historia. Las relaciones coloniales en América. Para desarrollar el bloque de contenidos del programa de 2º año, se presentan fuentes testimoniales como la interpretación de historiadores, grabados, gráficos, documentos históricos, datos de población, normas y testimonios de la época.

Lengua y Literatura. El diario de Ana Frank. Se proponen situaciones de lectura y escritura para acompañar la lectura del *Diario* así como posibles recorridos para que los jóvenes lectores puedan abordar el texto por su cuenta. También se recomiendan sitios destacados en Internet, películas, series y documentales relacionados con la vida y la época de Ana Frank.

Lengua y Literatura. La diversidad lingüística. Este material se propone crear condiciones que favorezcan la reflexión sobre las relaciones entre lenguaje, sociedad y cultura, destacando la dimensión interaccional del lenguaje y su incidencia en la formación de la conciencia crítica del sujeto social. Aborda como eje temático la diversidad lingüística y su proyección en la literatura, y diversos contenidos pertenecientes a las prácticas de lectura, escritura y oralidad relativas al discurso literario, presentes en los programas de 1° y 2° año.

Matemática. Geometría. Enseñanza de la geometría, con referencia a temas de todas las unidades de los programas de 1° y 2° año. El trabajo en geometría adquiere características propias que lo diferencian del álgebra y la aritmética, y plantea a los docentes cuestiones específicas por tener en cuenta para involucrar a los alumnos en el aprendizaje. Se propone el trabajo con algunos de los teoremas clásicos de la geometría plana y en la construcción de figuras.

Matemática. Números racionales. El documento presenta características diferentes de los anteriores. En relación con su producción, es el resultado del trabajo conjunto de un equipo de profesores de la escuela secundaria de la Ciudad y especialistas de la Gerencia Operativa de Currículum. Respecto de la propuesta didáctica, aborda el bloque Números, unidad Números racionales. Desde el trabajo matemático, promueve la identificación de "las dificultades en el aprendizaje", para profundizar la construcción de conceptos como: proporcionalidad y orden en Q+; fracciones como medida y orden en Q+; orden y densidad en Q; producto en Q+; conjeturas y validación de propiedades en Q.

Música. Taller de audición, creación e interpretación. El material presenta recursos para atender los tres ejes de los programas de 1º y 2º año (producción, apreciación, contextualización), con propuestas de actividades para el aula relacionadas con la audición, la creación grupal y la interpretación vocal. Incluye dos discos compactos con pistas de audio, partituras y fichas de trabajo.

Plástica. El color, la textura y la forma en la indumentaria del habitante de la Ciudad. Presenta propuestas para el trabajo en el aula tomando como eje la indumentaria de los habitantes. El material se estructura a partir de un video, que el docente puede utilizar para promover el análisis y la reflexión de los alumnos sobre el tema. Está acompañado por propuestas pedagógicas.

Teatro. El espacio teatral. Presenta propuestas para el trabajo en el aula tomando como eje el concepto de espacio. Incluye un video que permite la apreciación de diversos tipos de escenarios, sus orígenes, su relación con el tipo de propuesta teatral.

Índice

Introducción

El documento que presentamos es producto de un trabajo llevado a cabo en conjunto por el Equipo de Matemática de la Gerencia Operativa de Currículum y un grupo de Profesores de Matemática de escuelas secundarias de la Ciudad de Buenos Aires. Este equipo contó también con la participación de una investigadora[1] –quien aportó sus estudios en el marco de un Doctorado en Didáctica de la Matemática acerca de los procesos de fundamentación por parte de alumnos de Escuelas Secundarias– y el asesoramiento de la Profesora Patricia Sadovsky.

Este material tiene por finalidad comunicar y compartir el trabajo desarrollado en torno a la enseñanza de la función exponencial. Es nuestro deseo, además, que esta producción pueda colaborar en la labor de planificar y llevar adelante un conjunto de situaciones de enseñanza que intentan dar cuenta de algunos aspectos del abordaje de este tipo de función.

La tarea desplegada por todo el equipo adquirió distintas características según los momentos de desarrollo del proyecto. En primer lugar, se llevaron a cabo reuniones con formato de taller en las cuales se debatieron aspectos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y la actividad matemática. En este marco se puso en el centro de atención la idea de recurrir a las funciones matemáticas como medio para que los alumnos se enfrenten no solo a desafíos vinculados a la modelización, sino al problema de fundamentar, mediante argumentos matemáticos, los resultados que van obteniendo.

En segundo lugar se analizaron diferentes problemas, aportados por todos los integrantes, que podrían posibilitar este tipo de trabajo con los alumnos, elaborando a partir de ellos una secuencia de enseñanza relativa a la función exponencial. Por último, se probó esta secuencia con los estudiantes en los cursos de los docentes, realizando observaciones y registros de clases que permitieron delinear con mayor precisión o redefinir algunas cuestiones en relación con los problemas y la forma de funcionamiento en el aula.

Este documento busca, entonces, compartir esta experiencia, poniendo el énfasis en que la secuencia presentada, que obviamente no es la única posible, favorece la elaboración por parte de los alumnos de algunas características de un modelo a partir del estudio de procesos que crecen de manera exponencial y, a la vez, permite poner en el centro de debate los modos en que los alumnos obtienen resultados, elaboran conjeturas, relaciones o propiedades, y producen fundamentos para sostenerlas o refutarlas.

1 Duarte, Betina; Universidad de San Andrés.

Para llevar adelante este proyecto se contó con la colaboración de las siguientes instituciones educativas: Normal Nº 8; Normal Nº 4; Normal Nº 1; Instituto J. B. Justo y Escuela J. P. Esnaola, que ofrecieron sus aulas para permitir que algunos de sus docentes de 4º o 5º año participen de esta experiencia y desarrollen esta secuencia.

Este documento está organizado en tres capítulos. En el **capítulo 1** se proponen diferentes situaciones que buscan promover el estudio y análisis de procesos cuya variación es exponencial. Así también se intenta caracterizar estos procesos a partir de algunas de sus propiedades.

En el **capítulo 2** se propicia el estudio de características que definen a la función exponencial, sus propiedades, gráficos, y se ahonda en situaciones que demandan procesos de fundamentación a partir de las propiedades que verifican este tipo de funciones.

Finalmente, en el **capítulo 3** se presentan algunas instantáneas del aula que buscan que el lector anticipe lo que podría pasar en su clase, si se decide a ensayar con sus alumnos algunas de estas situaciones. A su vez, se establecen ciertas marcas del trabajo docente que propicia la entrada de los alumnos en el terreno de la elaboración de fundamentaciones.

Se incluye también un anexo, en el que se presentan todos los problemas diseñados de manera tal que se facilite su fotoduplicación.

Durante todo el proceso de producción, el equipo de trabajo ha tenido la intención de que este material contribuya con la tarea de docentes y alumnos.

Capítulo 1
Caracterización de procesos exponenciales

En este capítulo se presenta una colección de problemas que tiene por finalidad que los alumnos estudien y caractericen –de algún modo– procesos que varían de forma exponencial.

La selección de los problemas y el armado de la secuencia se desarrollaron a lo largo de los talleres, por todo el equipo, poniendo especial interés en que los alumnos se vean enfrentados al estudio de procesos que favorecieran el surgimiento, aunque no de manera "mágica", del modelo exponencial, como forma de explicar diferentes fenómenos.

Se buscaba en dichos talleres que, en cada una de las situaciones, los alumnos indagaran sobre las características de procesos de crecimiento y decrecimiento de áreas de figuras geométricas (en este caso, cuadrados), de poblaciones (piojos y bacterias), de montos de dinero (variación de sueldos) y de la intensidad lumínica al descender en las profundidades de una laguna.

Los enunciados elaborados que se proponen en este capítulo muestran, a partir de distintos tipos de datos, un cambio en las variables mencionadas y en cada uno de ellos las consignas tienen la intención de invitar a explorar las situaciones y formular (ya sea como conjetura, hipótesis o como afirmación) un modelo de evolución de estas magnitudes.

Se acordó en los talleres entregar a los alumnos esta secuencia sin mediar explicación alguna sobre la función exponencial. Como se podrá observar, tampoco aparece mencionada la función exponencial en las consignas (ni como título, ni como parte de ningún enunciado). Se busca de esta manera que el modelo exponencial surja como la mejor respuesta a estos problemas, desalojando otros modelos que los alumnos propondrán utilizar en este proceso y se manifestarán como insuficientes. El trabajo propicia el uso de la calculadora científica en cada uno de los cálculos que lo requieran.

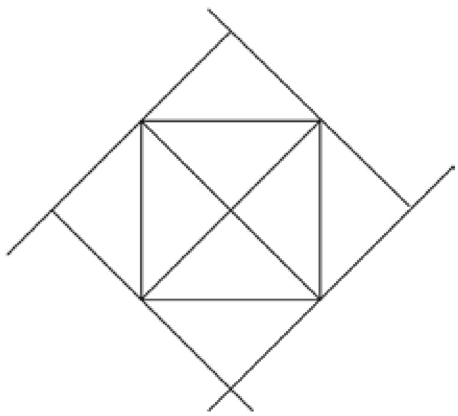
La implementación en clase permitió observar que es una tarea compleja lograr que los alumnos abandonen el modelo lineal como único posible, y puedan imaginar que ciertos procesos crecen de modo muy diferente de los lineales. Cada problema aporta algún elemento particular, que será considerado en el análisis.

Comparar áreas de cuadrados

El siguiente problema tiene dos fases. En la primera, el docente construye en el pizarrón, a la vista de sus alumnos, un cuadrado. A partir de esta construcción les relata, mientras dibuja, una nueva construcción:

“A partir de un cuadrado realizaremos una nueva construcción: se trazan las diagonales y por cada vértice se dibuja una paralela a cada diagonal. A esta construcción que da origen a otra figura la denominaremos *paso 1*.”

El dibujo final que observarán los alumnos es el siguiente:[2]



A partir de esta construcción, el docente pregunta a los alumnos si pueden decidir qué tipo de cuadrilátero queda formado. Se propiciará una discusión, entre todo el grupo de alumnos, que permita arribar a la conclusión de que la nueva figura es también un cuadrado. Una vez que esta fase ha concluido, el docente les entregará el siguiente grupo de consignas.

Problema 1

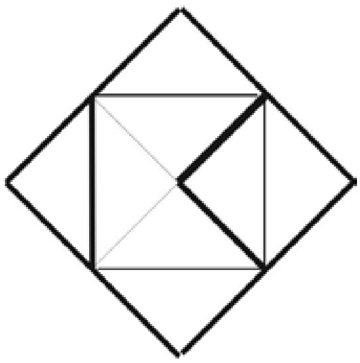
a. Compará el área del cuadrado obtenido en el paso 1 con el área del cuadrado original.
b. Si se repite el paso 1 varias veces (generando, a partir del paso 1, un paso 2, luego un paso 3, etcétera), ¿podrías indicar cómo serán las áreas de los cuadrados que se van obteniendo, respecto del cuadrado original?
c. Si llamamos A al área del cuadrado original, determiná qué área tendrá el cuadrado que se genere en el paso 17.
*d. ¿Se podría dar una expresión generalizada del área del cuadrado obtenido en el paso **n**? (también en este caso el cuadrado original tiene área A).*

2 La figura muestra la suma del cuadrado original, o “paso 0”, y el cuadrado mayor construido, que es el resultado del paso 1.

Comentarios sobre el problema 1

La primera fase de este problema tiene varias finalidades. Por un lado, determinar que la figura obtenida en el primer paso es efectivamente un cuadrado. Por el otro, convocar a los alumnos a desplegar razones que permitan arribar a esa conclusión mediante la elaboración de explicaciones. Esto promueve en los alumnos la búsqueda de relaciones que serán de utilidad también para avanzar en la resolución de la fase siguiente. Es así como se instala desde el inicio un aspecto central de la tarea: lo visual no es suficiente para estar seguros de que el dibujo obtenido es un cuadrado. Y esto es un aspecto que interesa destacar: la verdad en matemática debe ser establecida mediante fundamentos que la sostengan, basados en propiedades de los objetos matemáticos. No alcanza con medir o mirar.

Para resolver esta cuestión, los alumnos podrán apoyarse en la igualdad[3] de triángulos isósceles, en los cuadrados que se van obteniendo y que forman el cuadrado más grande o bien responder "a ojo".



Será interesante analizar con los alumnos las diferencias entre una respuesta comandada por "el ojo" y una respuesta que se basa en propiedades de las figuras que se tratan. Esta distinción es parte del objetivo del problema, como ya ha sido mencionado: una respuesta en matemática no puede apoyarse en lo que "se ve". Y estas normas del trabajo forman parte de lo que los alumnos deberán ir construyendo.

Cada parte del problema propicia de un modo distinto el estudio de la forma en la que varía el área en cada paso. Durante la discusión en los talleres, el equipo analizó dos alternativas para este trabajo. Una de ellas consistía en preguntar por el área en algunos pasos concretos (paso 1, paso 2, paso 17, por ejemplo). La otra consistía en comparar áreas de pasos sucesivos. Se concluyó que la primera no propiciaría el estudio de la variación del área característica de los procesos exponenciales que debería ponerse en juego. Sin comparación, los alumnos verían una regularidad a partir de la tabla armada, que traducirían a una fórmula $A \times 2^n$.

La otra alternativa permitiría manejar la recursividad para formular la expresión general.

3 En referencia a la congruencia de triángulos.

Se optó por esta última alternativa, ya que propiciaba una mejor fundamentación de la fórmula.

En la consigna **a**, habiendo trabajado en conjunto la construcción del primer cuadrado, es de esperar que los alumnos identifiquen algunas figuras que pueden utilizar ahora en el proceso de medición.

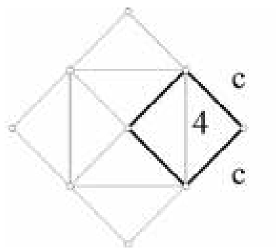
Algunos apelarán al conteo de cuadraditos –si recurren a hoja cuadriculada– o bien harán cálculos mediante el uso de la regla para medir la longitud del lado. En tanto que otros se apoyarán en las relaciones obtenidas en la primera fase para dar cuenta de que se duplica el área.

También es posible que identifiquen 4 triángulos rectángulos en el cuadrado inicial por el trazado de las diagonales. Posteriormente, podrán observar que en el cuadrado del paso 1 ese número se eleva a 8, y que sucesivamente se va duplicando en cada paso la cantidad de esos triángulos.

Resulta interesante analizar la diferencia entre estos procedimientos: los que apelan a triángulos o cuadrados recurren a propiedades de las figuras para dar cuenta de que se duplica el área. Los que se apoyan en conteo o cálculo, en cambio, no utilizan propiedades y, en función del tipo de figura que se obtiene, seguramente cometan errores por el redondeo o aproximación, y no consigan establecer con seguridad si se duplica o no el área. Los argumentos apoyados en propiedades dan una certeza que la estimación no brinda.

El siguiente extracto del registro de una observación de clase advierte la posibilidad de que aparezcan procedimientos de resolución que combinan propiedades de las figuras y recursos de cálculo, en este caso, apelando al uso del teorema de Pitágoras.

En una hoja cuadriculada, un alumno tiene dibujada la construcción original mide 4 cuadraditos de la hoja cuadriculada. El alumno anota que el área del cuadrado original es 16. Se observa la siguiente resolución en la hoja del alumno.



$c^2 + c^2 = 16 \qquad 2\,c^2 = 16 \qquad c^2 = 8$

$\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$

Al obtener este resultado y comparar con el área del cuadrado original, el alumno se sorprende. La profesora pregunta si esa es el área del cuadrado del paso 1. El alumno permanece desconcertado. La profesora pregunta entonces cuánto mide el lado del cuadrado grande. Inmediatamente el alumno se percata del error y corrige, escribiendo:
$2\sqrt{8} \times 2\sqrt{8} = 4 \times 8 = 32$, y sentencia: "Es el doble".

Vale la pena destacar dos cuestiones. La primera es que el alumno tiene presente que el área del cuadrado del paso uno "debiera ser mayor". Esto le permite revisar su procedimiento, encontrar el error de medición y corregirlo. El resultado aritmético se somete al control geométrico. En segundo lugar, la fundamentación que el alumno produce se apoya tanto en un valor asignado como en una propiedad geométrica.

Con este ejemplo se busca mostrar que la discusión generada a partir de la fase colectiva de la construcción dio distintas herramientas para averiguar el área del nuevo cuadrado.

En la resolución de la consigna ***b***, algunos alumnos podrán identificar que las áreas se van duplicando en cada paso. No obstante, no resulta sencillo comparar el área de cualquier cuadrado obtenido en un cierto paso con el área del cuadrado original. Frecuentemente, los alumnos considerarán que se trata de un proceso lineal. Los cálculos podrán colaborar en identificar que la variación no es lineal, pero no serán suficientes para caracterizar este tipo de crecimiento.

La consigna **c** intenta avanzar en el terreno de la generalización. Algunos alumnos podrán recurrir a la multiplicación sucesiva: área × 2, × 2, × 2…, en tanto que otros podrán identificar que se trata de un exponente (aunque no lo designen en estos términos y sí lo escriban: $A \times 2^n$). Estos resultados, así como la elaboración de argumentos que los justifiquen, son el soporte principal sobre el que los alumnos podrán tratar la consigna *d*, que busca explicitar la fórmula del área de un paso cualquiera mediante una expresión funcional que atrape el hecho de que, en cada paso, el área se duplica. Esta expresión, para algunos alumnos, no es evidente. El siguiente diálogo da cuenta de ello:

Alumno: En el paso 17, ¿va a ser 17 × 17?... No, digo: 17 × 2…
Profesora: ¿Y cómo llegaste a ese resultado?
A.: Y, el que armás es el doble que el anterior.
P.: Y este, ¿el doble de qué es? (la profesora le señala la expresión 17 × 17).
A.: Ah…, no es 17 × 17, no, no puede ser, acá no es doble… ¿Pero es 17 × 17?... Ah, no. No me digas que es 2 × 2 × 2… 17 veces…

La producción de la fórmula general ($y = A \cdot 2^n$ o alguna similar) demanda, de alguna manera, un proceso de reconstrucción, a partir de la experiencia realizada con los ítems anteriores, en particular el que solicita establecer el valor del área en el paso 17.

Consigna optativa

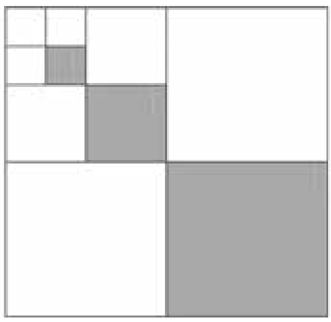
Concluido el problema, el docente podrá proponer, si lo considera pertinente, un nuevo ítem o consigna:

e. Indicar en qué porcentaje aumentó el área en cada paso.

Este nuevo ítem apunta a identificar o recuperar el concepto de porcentaje y su equivalente en términos de un producto que, para el caso de la duplicación, es del 100%.

Problema 2: Los cuadrados sombreados

Observá la siguiente figura:



A un cuadrado –el más grande, que llamaremos inicial– cuya área es 1, se le trazaron las medianas y se sombreó, de los 4 cuadrados menores resultantes, el cuadrado inferior derecho. En este caso llamaremos paso 1 al trazado de las medianas y al sombreado del cuadrado inferior derecho. Al cuadrado que queda determinado en la parte superior izquierda se le trazan sus medianas y se sombrea de los 4 cuadrados menores que quedan dentro de él, el inferior derecho (paso 2). Y así se continúa.

a. ¿Cuál es el área del cuadrado que queda sombreado en el paso 1, en el paso 2 y en el paso 4?
b. ¿Habrá algún paso en el que se sombree un cuadrado de área $\frac{1}{60}$*?*
c. Si sabemos que el área que quedó sombreada en el séptimo paso es $\frac{1}{6384}$*, ¿cuál será el área sombreada en el cuadrado que se obtenga en el siguiente paso? ¿Y en el anterior?*

d. ¿Habrá una expresión general que me permita conocer el área de los sucesivos cuadraditos sombreados, según la cantidad de pasos que se hicieron?

*e. ¿Podrías contestar la pregunta anterior, si el área del cuadrado original fuera **A** en lugar de 1?*

Comentarios sobre el problema 2

Para el desarrollo de este problema se propone que los alumnos trabajen solos o en pequeños grupos desde el inicio, de manera tal que se desplieguen diferentes procedimientos. Estas producciones serán insumo para propiciar un debate general.

Este problema, si bien tiene aspectos similares a los trabajados durante el problema 1, se diferencia en que se trata de un decrecimiento en lugar de un crecimiento. Por otro lado, en este caso se informa del valor del área del cuadrado original: 1.

La consigna **a** del problema obliga a los alumnos a identificar que los sucesivos pasos generan una cadena de áreas que permite "pasar de un paso al siguiente" dividiendo por 4 el área del paso anterior o, en forma equivalente, multiplicar por $\frac{1}{4}$, aunque esta equivalencia no sea reconocida por todos los alumnos al momento de la resolución y deba ser el docente quien colabore en establecerla.

Pero también es probable que algunos alumnos únicamente puedan arribar a la respuesta contando desde el área inicial cada vez que deban determinar el área en algún paso avanzado de la secuencia. Será parte del trabajo colectivo explicitar que cada área, en cada nuevo paso, es el resultado de dividir por 4 el área del paso anterior y reconocer la economía que aporta este procedimiento.

El desarrollo de uno u otro recurso por parte de los alumnos podrá estar acompañado de tablas de valores en las que se registren las áreas obtenidas en cada paso como medio de control. Estas tablas podrán ser un buen recurso para identificar, aunque sea en una primera aproximación, el modo en que varía el área.

La consigna **b** propone analizar qué tipo de fracciones podrán o no aparecer en esta cadena de áreas; en principio, desde el registro de los resultados que van apareciendo: $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$ ... y avanzar en la construcción de la secuencia de potencias de $\frac{1}{4}$ (o de 4), pero tratando de ligar esas potencias al lugar de la cadena que ocupan. Este punto demanda que los alumnos desplieguen conjeturas y argumentos para sostenerlo o rechazarlo.

Por ejemplo:

> Alumno: No hay ninguno que sea un sesenta (refiriéndose a la fracción).
> Profesor: ¿Por qué?
> A.: Porque te pasás, vas de 4 en 4, el anterior es 32 y saltás a 64, no tocás el 60. No llegás nunca a 60 **multiplicando siempre por 4**.
> P.: Pero 4 por 15 sí es 60, no entiendo cómo es esto de que vas de 4 en 4 y no llegás al 60. 60 está, sale de 4 × 15.
> (El alumno piensa frente a la intervención docente unos instantes. Luego responde.)
> A: No..., no son múltiplos de 4, es 4 × 4 × 4… No es 4 × 1, 4 × 2… son los elevados… no está el 60.

En este caso, se puede observar en el alumno una confusión inicial en cuanto a múltiplos y potencias de 4. Este valor fue elegido para el problema justamente para confrontar un decrecimiento en términos de múltiplos (lineal) con un decrecimiento en términos de potencias (exponencial). Es tarea del docente poner en evidencia estas contradicciones para generar nuevas explicaciones. Este proceso permite que algunos alumnos identifi quen que se trata efectivamente de potencias de 4 y no de múltiplos de 4, aportando a la idea del tipo de decrecimiento exponencial: 60 no es una potencia de 4, o bien $\frac{1}{60}$, no es una potencia de $\frac{1}{4}$.

La consigna **c** exige a los alumnos detectar el área anterior o posterior a una dada. Se trata de identifi car que para avanzar un paso, multiplico por $\frac{1}{4}$, y para retroceder un paso, divido por $\frac{1}{4}$. Es esperable en este caso que algunos sostengan que se multiplica por 4 o divide por 4, considerando que la operación se desarrolla sobre el denominador y no sobre el valor $\frac{1}{4}$. Parte de la discusión colectiva podrá hacerse cargo de analizar este aspecto.

La consigna **d** representa un salto en el problema, ya que se intenta que los alumnos avancen sobre la recurrencia "paso a paso" para elaborar una posible generalización de este proceso a través de una fórmula del área que dependa del paso ***n*** que se está considerando. Es esperable entonces que algunos alumnos escriban expresiones multiplicativas similares a la siguiente: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ ..., la cantidad de veces que sea necesario.

Otros alumnos, tal vez, elaboren expresiones generales exponenciales del tipo $(\frac{1}{4})^n$ o similares, lo que podría promover la aparición de fórmulas diferentes que permitirían proponer cierta confrontación y, a partir de la discusión, analizar y validar aquellas fórmulas que resulten equivalentes.

De no aparecer la expresión general, el docente podrá recuperar aquellas nociones que habiliten a los alumnos a considerar la potencia como expresión más pertinente. Las dificultades asociadas a esta producción pueden verse en el siguiente diálogo.

Alumno: Primero hicimos la parte ***d***, para tener la fórmula: $\frac{1}{4} \cdot n$, pero no nos da. ¿Tendría que ser potencia?
Profesora: ¿Y cómo sería entonces?
A.: ¿Y cómo anoto que es el 4 en potencia?
P.: Traten de anotar que la potencia es para el 4. ¿Cómo se escribiría eso?
A.: (Anota en su hoja.) $(\frac{1}{4})^n$

En la producción de la fórmula general el alumno se apoyó inicialmente en un modelo lineal. La confrontación con los cálculos ya realizados le muestran que su fórmula no se ajusta. La intervención docente le permite reconstruir la expresión. Consigue desarmar lo lineal a partir de la potencia, y se logra construir la fórmula general.

Es posible que en este ítem los alumnos no identifiquen la equivalencia entre expresiones como, por ejemplo, $(\frac{1}{4})^n$ y $\frac{1}{4^n}$. Es una buena oportunidad para revisar la propiedad en el contexto del problema.

La consigna **e** apunta a otro tipo de generalización: buscar diferentes cadenas de áreas para un valor genérico, A, de área equivalente al cuadrado inicial. Surge para algunos alumnos fórmulas del tipo $y = A \cdot a^n$. En caso de que no surjan las fórmulas, el docente podrá recuperar lo realizado en el problema 1, como referencia acerca del trabajo de producción de fórmulas algebraicas.

Consignas optativas

Al finalizar este problema, el docente podrá proponer a sus alumnos, si lo considera pertinente, los siguientes ítems o consignas, para profundizar el estudio de este tipo de variación, en función del área del cuadrado original:

f. Si el trabajo realizado sobre el cuadrado de área 1 fuera hecho sobre otro cuadrado de área 1.024, ¿podrías contestar las preguntas ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** *y* ***e***, *a partir de tus respuestas anteriores?*
g. Sobre un cuadrado, de área desconocida, se tuvieron que realizar 10 pasos para llegar a un cuadrado sombreado de área 1. ¿Te alcanza este dato para conocer el área del cuadrado inicial?
h. ¿Es posible inventar un valor A para el área del cuadrado original, de manera que en alguno de los pasos se obtenga un cuadradito cuya área sea $\frac{1}{60}$*? ¿Cuánto tendría que valer A, y cuál sería el paso?*

Problema 3: Los piojos

En la cabeza de un niño se coloca un número determinado de piojos a las 10 de la mañana del día lunes 5 de agosto, y se observa la evolución de la población de piojos mediante un sofisticado procedimiento computarizado (es decir, los piojos se pueden contar con precisión en cada momento).[4]

Transcurridos 10 días, el niño convive con 180 piojos en su cabeza. Si se sabe que una población cualquiera de piojos tarda 5 días en triplicarse…

a. ¿Cuántos piojos habrá transcurridos 20 días?
b. ¿Cuántos piojos había el 10 de agosto?
c. ¿Cuántos piojos se pusieron en la cabeza?
d. ¿Cuántos piojos había el 6 de agosto?

Comentarios sobre el problema 3

Este problema busca promover en los alumnos la aparición de nuevos planteos, incertidumbres y discusiones que se pueden producir al saltar de un trabajo con variable independiente discreta (como es el número de pasos en los problemas 1 y 2), a uno con variable continua, como es el tiempo en este problema 3.

Otra característica que resulta interesante es la necesidad que plantea el problema de producir una fórmula con un exponente fraccionario. Esto suscitó en el taller del equipo un debate en torno a la conveniencia o no de presentar un repaso de temas de potenciación antes de encarar este problema. Se acordó posponerlo hasta ver que las dificultades de los alumnos no les permitían avanzar.

Es posible que algunos alumnos no tengan mayores dificultades para responder las consignas **a**, **b** y **c** a partir de recursos similares a los siguientes: para resolver la consigna **a**, si en 10 días hay 180 piojos, en 20 días no habrá el doble, ya que los piojos se triplican cada 5 días; hay que calcular entonces el valor correspondiente a los 15 días, para conocer luego el valor a los 20 días. Del mismo modo podrán responder las

4 Este enunciado fue elaborado intencionalmente lindando con el "absurdo" en cuanto a la situación planteada (nadie pondría piojos en la cabeza de un niño), así como al modo de conteo (mediante un "sofisticado procedimiento computarizado"). Esta ironía permitió, como lo demuestran los registros de clase, una entrada mucho más amigable por parte de los alumnos al problema, generándose un clima más propicio para su resolución y el debate grupal que se genera. En este tipo de estudios, las cantidades de piojos se calcularían con márgenes de error, como intervalos, no como números naturales.
Por otro lado, este planteo resulta una buena oportunidad para discutir con los alumnos que el trabajo matemático implica analizar o estudiar las situaciones desde modelos que se ocupan de algunos aspectos del problema, en tanto que otros no se dejan "atrapar"; cuanto más se atrape de la realidad, mejor resulta el modelo.

siguientes dos consignas argumentando, por ejemplo, que para pasar de los días 10 a 15 se multiplica por 3, en tanto que para llegar del día 10 al 5 se divide por 3.

Otros alumnos podrán insistir en recurrir a la proporcionalidad: si en 10 días hay 180 piojos, en 20 días habrá 360. Es interesante que el docente, ante estos resultados, propicie un intercambio entre los alumnos, apoyando el análisis en el caso, por ejemplo, del valor a los 15 días: en 15 días habrá el triple, es decir, $180 \times 3 = 540$. Un argumento que puede colaborar es que si en 15 días hay 540, es difícil que a los 20 días haya menos: 360.

En cambio, es esperable que la consigna **d** de este problema provoque discusiones de diversa naturaleza, que podrían colaborar en la construcción de estrategias de trabajo y en sus respectivas validaciones. La primera interpretación que hacen los alumnos es que disponen de una forma para contar los piojos en los días 0, 5, 10, 15, 20, etcétera, sin reconocer que esta consigna también se puede aplicar a otras secuencias de días: 1, 6, 1, 16, 21, etcétera. Y así, a cualquier otra sucesión de naturales con resto k (siendo $k = 1, 2, 3$ o 4) en la división por 5.

Algunos alumnos objetarán que no se puede resolver porque no conocen ninguna información de la evolución biológica de los piojos dentro de un intervalo de 5 días de longitud. Luego, para estos alumnos, solo tiene sentido buscar la cantidad de piojos inicialmente y cuando pasen un número de días que resulte ser un múltiplo de 5 (es decir toman a la variable tiempo como discreta y múltiplo de 5). Será interesante que el docente pueda aceptar inicialmente esta objeción como correcta, y resaltar la validación que los alumnos elaboran.

Una formulación emparentada es la de proponer un modelo constante "a trozos". En este sentido, algunos alumnos pueden proponer, por ejemplo, que el número de piojos entre los días 5 y 9 es de 20, y el día 10 se transforma en 60. Los datos que aporta el problema habilitan esta interpretación. El docente podrá tomar esta producción como otra posible, analizando que cumple con lo propuesto por el problema.

Otros alumnos, aún sin poder enunciarlo, quizá acepten que la variable admita valores naturales. En consecuencia, intentarán recurrir a estrategias usadas para resolver los problemas anteriores. De esta manera, volverá a aparecer la cuestión del factor multiplicativo, pero también la dificultad de que ese factor multiplicativo cambia según se considere la longitud del "paso": para un "paso" de 5 días, el factor es 3, pero cuando se enfrenten al problema del "paso" de un día, no será sencillo establecer el factor. Es probable que, en este momento, aparezcan procedimientos vinculados a la repartición lineal. Así, si inicialmente había 20 piojos y al llegar al quinto día habrá 60 piojos, los alumnos reparten los 40 piojos de aumento proporcionalmente en 5 días, proponiendo un aumento lineal de 8 piojos por día, y consideren que este aumento es el que se preserva a lo largo de todo el proceso. Tal vez un buen recurso para que se percaten de su error sea poner en evidencia que si se sigue con esa velocidad de crecimiento, el décimo día no tendrá 180 piojos, sino solo 100.

El modelo lineal surge de formas diversas para explicar el número de piojos al primer día. En el siguiente ejemplo, un alumno utiliza la "regla de tres simple":

> Alumno 1: Para el primer día no me da… El primer día sería 12 (y tiene anotado lo siguiente:)
>
> 5 ………….. 60
>
> 1 ………….. 12
>
> Alumno 2: (Respondiendo al alumno 1.) No, la regla de tres no te sirve, no te va a dar, hay que ver en un día y no es así, no se triplica al quinto día, si hacés eso. Hay que hacer otra cosa. ¿No ves que si en el primer día hay 12, al quinto día no se te triplica, si hacés regla de tres? No te va a dar 60.

En este intercambio, podemos destacar el cuestionamiento que hace el alumno 2 del modelo lineal. Para este alumno, la regla de tres no puede utilizarse simplemente porque se contradice con los datos de que dispone. Una intervención docente permitiría precisar estos argumentos.

Otros alumnos podrán buscar la velocidad de cambio para cada intervalo de 5 días de duración. Así, entre el inicio y el quinto día la velocidad será de 8 piojos por día; entre el quinto y el décimo día será de 24 piojos/día; entre el décimo y el décimoquinto día, de 72 piojos/día, etc. Con este cálculo de las velocidades, los alumnos pueden proponer en cada tramo un modelo lineal.

Considerando que el día cero o día inicial el chico tiene 20 piojos, se elaboran las siguientes tablas; en cada una aparece la velocidad de crecimiento ya averiguada, pero en un modelo lineal. Esto significa que se registrará la siguiente evolución de piojos.

Días	Piojos
1	28
2	36
3	44
4	52
5	60

Días	Piojos
6	84
7	108
8	132
9	156
10	180

Días	Piojos
11	252
12	324
13	396
14	468
15	540

En tal sentido, es posible aceptar que este modelo funciona como descripción de los datos del problema: si me detengo en un día cualquiera, 5 días después tendré el triple de piojos de los que tenía aquel día. Por ejemplo, en el tercer día hay 44 piojos, en tanto que 5 días después (en el día octavo) hay 132 piojos, el triple.

Puede ocurrir que algunos alumnos realicen la búsqueda directa del nuevo factor multiplicativo que les permita pasar día por día y obtener en cada uno el número de piojos. Así, la tarea se sintetizará en encontrar un número *q* que, multiplicado 5 veces por sí mismo y por el número inicial de piojos, logre el mismo efecto que multiplicar a esa cantidad inicial de piojos una sola vez por 3 (factor $q = \sqrt[5]{3}$). Es difícil que este último procedimiento aparezca en clase. Sin embargo, es probable que se produzca en grupos de alumnos algunas discusiones similares, con otro vocabulario y otras escrituras. El docente podrá decidir si extiende al resto de la clase esas discusiones, o las deja circunscriptas en el grupo.

También es posible que algunos alumnos, en función del trabajo desarrollado en problemas anteriores, se arriesguen a encontrar directamente una fórmula algebraica. Pero el proceso de cambio en la cantidad de piojos, al no ser día por día, genera una nueva dificultad en la elaboración de esta expresión general, que podrá tener un formato similar al siguiente: cantidad de piojos × 3^n. Ahora bien, esta expresión no considera el hecho de que se triplican cada 5 días, y no cada día. Es decir, si se les propone ensayar con la fórmula para ver si funciona en los valores que ya se conocen, no se obtendrán los resultados esperados, habilitando a la búsqueda de una nueva expresión que sea pertinente: $20 \times 3^{n:5}$.

Por ejemplo:

Profesora: Pero vos te diste cuenta que vas multiplicando por potencias de 3. En 5 días, ¿qué exponente pusiste?
Alumno: ¿A los 5 días?... 1.
P.: ¿Y a los 10?
A.: 2.
P.: ¿Y a los 15 días?
A.: 3… ¡Ahí está! Si quisiéramos ver cuántos piojos hay el primer día, tendríamos que poner 20 × 3 ... Pero, ¿se puede poner $\frac{1}{5}$ en el exponente?

Es esta una buena oportunidad para profundizar el dominio de definición y explicitar algunas propiedades de la potenciación que permitirán a los alumnos avanzar con el problema.

Cabe notar que todas estas producciones, de naturaleza muy diversa, son resoluciones adecuadas al problema en función de los datos de los que se dispone y del estado de situación de los alumnos en relación con este conocimiento en proceso de construcción. Será parte de la gestión docente hacer convivir estas resoluciones.

Consigna optativa

Se propone a continuación un ítem que podría ser presentado posteriormente al trabajo realizado, si el docente lo considera pertinente, acompañado de un cuadro que favorece el trabajo de los alumnos en relación con el establecimiento de la variación que sufre el proceso:

e. ¿Cuánto varió la cantidad de piojos al pasar del inicio al día 5? ¿Y del día 5 al día 10? ¿Y del día 10 al 15? ¿Y del día 15 al 20?

t número de días	Número de piojos	Variación de piojos entre el día t y el día t + 5
0		
5		
10		
15		
20		

Problema 4: Luminosidad en la laguna

Una laguna contiene sedimentos uniformemente distribuidos que reducen la transmisión de la luz a través del agua. Dicha luminosidad se reduce en un 20% cada vez que se desciende 1 metro hacia el fondo de la laguna (es decir, cualquiera sea el nivel de profundidad en el que se encuentre el buzo, al descender un metro pierde el 20% de la luminosidad que tenía un metro arriba).
Un buzo está pronto a sumergirse en dicha laguna; si consideramos la intensidad de la luz (medida en unidades lumínicas) como de 100 unidades en la superficie:

a. Realizar una tabla que indique la luminosidad para cada uno de los primeros 10 metros.
b. ¿Se podrá decir qué intensidad de luz tendrá el buzo al bajar 0,5 m?

c. El buzo tiene instrumentos de medición que pueden detectar luz hasta una intensidad de 0,2 unidades lumínicas. ¿Podrá el buzo detectar luz, si desciende 20 m?
d. ¿Hasta qué profundidad podrá el buzo descender con su instrumental y aún detectar cierta luminosidad?

Comentarios sobre el problema 4

En este problema, por primera vez, el alumno se encuentra con una situación exponencial donde aparece el continuo, presente en los valores de **x**, que representan los metros.

Este problema comparte con el problema 2 que la magnitud "luminosidad de la laguna" (al igual que la magnitud "área de los cuadrados" de aquel problema) resulta decreciente. En este caso, se utiliza por primera vez un porcentaje como forma de describir el cambio. Se analizó en el taller del equipo el hecho frecuente de que los alumnos olvidan la forma de trabajar con porcentajes, y se discutió la posibilidad de realizar previamente un repaso del tema. Pero se hipotetizó que un trabajo del docente en el pizarrón podría condicionar la forma de abordar el problema por parte de los alumnos. Por lo tanto, se acordó que cada docente decidiera alguna intervención, en la medida en que detectara como obstáculo el dominio, por parte de sus alumnos, de los porcentajes, en los cálculos que necesitaban realizar.

Por otro lado, el modo en el que se presenta la información en el problema sobre la variación en términos del porcentaje favorece indagar sobre la variable en cuestión, "luminosidad", en términos del continuo (representado por la variable "profundidad", medida en metros).

La resolución de la consigna **a**, que involucra producir e interpretar una tabla, tiene sentido no solo para las medidas enteras sino para valores intermedios. Una vez más, es un buen momento para que los alumnos confronten el crecimiento proporcional con el exponencial. Es deseable entonces que aparezca esta discusión, ya sea sobre la producción de los alumnos o propuesta por el docente.

Es probable que algunos alumnos consideren que el 20% que disminuye equivale a 20 y configuren la tabla restando 20 en cada caso. Será necesario analizar en ese caso que la luminosidad disminuye de 100 a 80 (se reduce el 20%) en el primer metro, pero de 80 no disminuye a 60, ya que ese valor no corresponde al 80% de 80.

Por ejemplo:

Alumno: (Tiene escrito lo siguiente)

L	M
100	0
80	1
60	2
40	3
20	4
0	5
-20	6
-40	7
-60	8
-80	9
-100	10

Profesor: ¿Cómo hiciste?
A.: Disminuyó el 20%.
P.: ¿Siempre es el 20% en cada metro?
A.: Sí, el veinte por ciento menos.
P.: No me doy cuenta si es 20 o el 20%.
A.: Ah, no, yo reduje 20 cada metro, y hay que reducir 20% de lo reducido...

Será conveniente en estos casos discutir el modo a partir del cual se obtiene el 20%, explicitando que lo que queda de luz es el 80%. Será decisión del docente evidenciar la equivalencia entre las dos situaciones: restar el 20% de una cantidad o bien obtener el 80% que representa el remanente de dicha cantidad.

En la consigna **b** puede ocurrir que algunos alumnos contesten "El 10%", intentando atrapar el problema desde un modelo lineal y proporcional ("Si en un metro desciende el 20%, en medio metro desciende el 10%, la mitad"). En este caso se presentan diferentes opciones para analizar este resultado. Una posibilidad es proponerles a los alumnos incorporar el valor para 0,5 metros a la tabla ya construida, haciendo foco en los siguientes valores:

Metros	Luminosidad
0	100
0,5	90
1	80

Si bien la luminosidad disminuyó un 10% en el primer tramo, no se comporta igual en el segundo, ya que el 10% de 90 es 9, lo que contradice el valor de 80. De este modo se refuta la hipótesis "Si disminuye un 20% cada metro, entonces disminuye un 10% al bajar medio metro".

Otra posibilidad es aplicar el mismo modelo lineal propuesto por los alumnos, pero en situación inversa. De este modo, analizar la siguiente hipótesis: "Si para medio metro el porcentaje es la mitad, entonces para dos metros el porcentaje debería ser el doble". Una vez más, la tabla construida en la consigna **a** sirve para refutar esa hipótesis. En un metro se desciende a 80, pero en dos metros no se desciende a 60 (el 40% del valor inicial).

En la consigna **c** es posible que algunos alumnos intenten elaborar una fórmula para calcular la intensidad lumínica a los 20 metros. En este punto, el docente analizará, según las operaciones que los alumnos comiencen a realizar, si es necesario hacer una explicación conjunta sobre la equivalencia de operar calculando el 20% y luego restando esta cantidad de la original, a multiplicar por 0,8. Es decir, que reducir el 20% es lo mismo que quedarse con el 80% (como ya fue mencionado en la consigna **a)**. Visualizar el hecho de que de un metro a otro se llega por la operación de multiplicar la luminosidad actual por 0,8 es una condición necesaria para poder producir una fórmula. Esta advertencia surge en función de suponer que algunos alumnos puedan confundir la operación de disminuir el 20% con encontrar el 20%, y la fórmula que elaboren sea la siguiente: $100 \times 0{,}2^{m}$, en lugar de $100 \times 0{,}8^{m}$.

De todas maneras, la elaboración de la fórmula para las unidades enteras de metros en profundidad no garantiza una comprensión del proceso en este pasaje de valores discretos a valores continuos, como se muestra en el siguiente extracto de clase:

Alumno: (Tiene anotado en su carpeta lo siguiente)

$100 \times 0{,}8^{m} \longrightarrow$ cantidad de metros

luminosidad
la superficie

Para obtener el 80%
sacar el 20% (100% – 20%)

Profesora: ¿Usaste la fórmula para encontrar la luminosidad en medio metro? (Estaba anotado en su hoja que en medio metro había 90.)
A.: No, lo hice antes, a ojo.
El alumno se pone a probar con la fórmula y dice:
A.: no me da, da 89,44 y no 90.
P.: ¿Y cuál es el correcto: 90, o 89,44?
A.: ¡Claro! No es el 10%, no es lo mismo, yo hice el 10, pero no es la mitad. ¡Hay que hacer otra cosa!

Evidentemente, es tan fuerte en la imagen de los alumnos el modelo proporcional que disponer de una fórmula no constituye un recurso suficiente para “saltar” a otro modelo. Frente a esto, el docente podrá decidir revisar la consigna **b** a la luz de la fórmula producida.

Por otra parte, podría ocurrir que algunos alumnos no trabajen con el porcentaje que “queda” de luz, sino con la fracción que lo representa: $\frac{4}{5}$. En ese caso, será tarea del docente generar la discusión que lleve a identificar la equivalencia entre las fórmulas que produzcan los alumnos: $L = 100 \times (\frac{4}{5})^m$ y $L = 100 \times 0{,}8^m$.

En la consigna **d** se les pedirá a los alumnos que den una precisión en centímetros. Es importante advertir que este ítem no tiene como objetivo que los alumnos se involucren en la resolución de ecuaciones exponenciales. Se busca, en cambio, que a partir de esta consigna utilicen la fórmula para explorar valores hasta encontrar que el buzo perderá la posibilidad de medir con su instrumental, a los 28 metros. A partir de ahí, los alumnos seguirán explorando en centímetros, y para ello utilizarán exponentes decimales.

Consignas optativas

El docente podrá proponer las siguientes preguntas con la finalidad de que surja el recurso de la gráfica como herramienta de decisión:

e. ¿Alcanzará el buzo, en algún momento, una luminosidad de $100 \times 0{,}8^{1,5}$?

f. Si en un momento dado de su descenso, el instrumental capta una luminosidad de aproximadamente 71,55 unidades lumínicas, ¿a qué profundidad se encuentra el buzo? ¿Qué método te parece más apropiado para responder esta pregunta?

Problema 5: Los contratos

Patricia ha recibido dos propuestas de dos empresas interesadas en su perfil laboral. Una de las empresas le ofrece ocupar el cargo de gerente de proyectos especiales y le hace la siguiente oferta salarial: \$10.000 como sueldo inicial, y un aumento mensual de \$4.000. La otra empresa le ofrece ocupar el cargo de gerente de publicidad, con un sueldo inicial de \$10.000 y un aumento del 20% mensual.

a. ¿Qué oferta será más ventajosa?

b. ¿Cómo explicarías convincentemente por qué conviene aceptar una de las ofertas antes que la otra?

Comentarios sobre el problema 5

Una de las finalidades de este problema es la comparación entre una situación de crecimiento lineal con otra de crecimiento exponencial. Se busca que la presencia en simultáneo de ambos modelos en el mismo problema permita disociar uno de otro.

Otro propósito que tiene este problema está asociado a la representación gráfica de ambas situaciones como medio de comparación (aun cuando esto no está explicitado en el enunciado). La demanda de una explicación convincente podría favorecer una nueva forma de representación hasta ahora no utilizada para el modelo exponencial. El recurso gráfico permite que los alumnos identifiquen relaciones que podrían no ser percibidas a partir del uso de tablas o de las fórmulas.

Para resolver la consigna **a**, es probable que algunos alumnos se limiten a probar con dos o tres valores y encuentren la propuesta de crecimiento lineal más conveniente que la exponencial, ya que durante los primeros meses esta primera oferta supera a la segunda.

Por ejemplo:

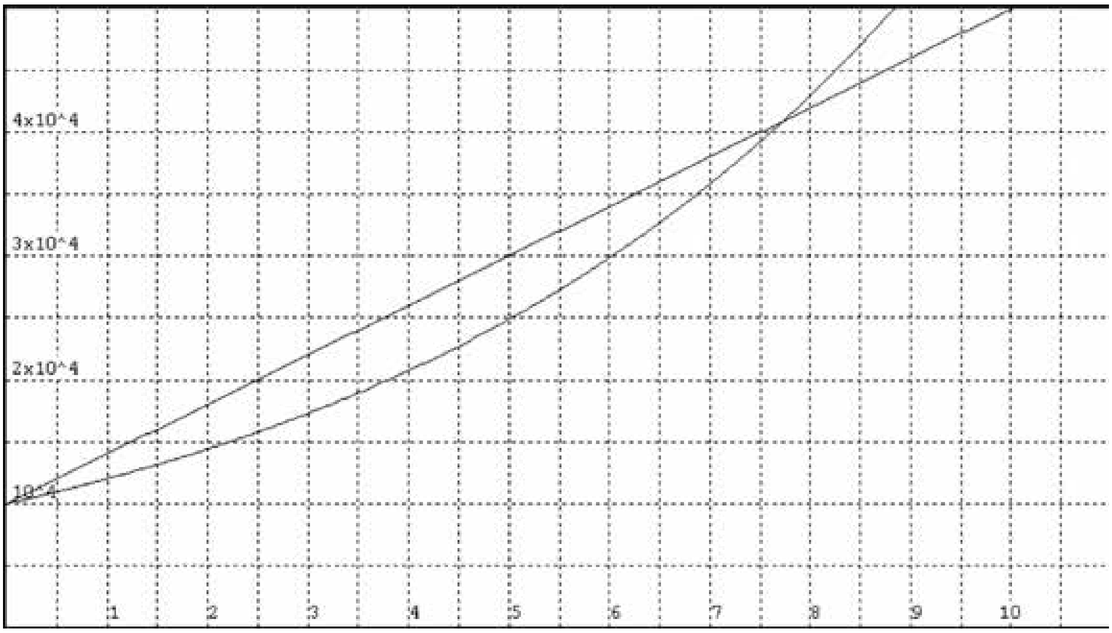
Alumno 1: El del 20%, si siempre aumenta un 20%, en algún momento supera al otro, que siempre aumenta lo mismo.
Alumno 2: No, conviene el de $4.000 por mes.
A1: Noooo… conviene el del 20%. A largo plazo le gana, es más grande, es más lo que te pagan.
A2: Pero el 20% de 10.000 es 2.000. Conviene el de 4.000, que es más.

Es decir, aquellos alumnos que se limitan a cotejar con algunos valores, pueden interpretar que la oferta de crecimiento lineal es más conveniente.

Otros alumnos podrán realizar un razonamiento similar al anterior pero recurriendo a la elaboración de dos tablas, una para cada propuesta, comparando en simultáneo la variación de cada una de ellas. Este recurso no siempre permite identificar cuál de las ofertas salariales es más conveniente. De hecho, al inicio, los salarios del modelo lineal superan a los del modelo exponencial. Los parámetros seleccionados para cada función buscaron provocar esta situación al inicio.

Puede ocurrir que las tablas confeccionadas tomen pocos valores y resulten insuficientes para analizar el cambio en los sueldos. Quedará en manos del docente confrontar distintas tablas realizadas, o bien pedir revisar la situación salarial al año, o a los dos años, para que los alumnos puedan contar con mayor información y así complementen sus tablas hasta que ellas permitan intuir el comportamiento global.

Es posible también que algunos alumnos intenten encontrar fórmulas para cada proceso, producto de los problemas resueltos con anterioridad. Será interesante que el docente colabore en este punto, generando la posibilidad de realizar una representación gráfica que los ayude a fundamentar la elección realizada, observando que a partir del octavo mes la función exponencial supera y se aleja de la lineal.



Así puede entenderse que la conveniencia de uno u otro puesto está condicionada al tiempo de permanencia en el trabajo. De este modo, la respuesta no es unívoca, y los alumnos tendrán que considerar el comportamiento de la evolución del salario en cada empleo para decidir bajo qué condiciones es conveniente una u otra opción. Esto disparará la búsqueda de herramientas y argumentos que, al mismo tiempo, les sirvan de apoyo para convencer a otro.

Es importante que los alumnos visualicen que el incremento de la función exponencial es multiplicativo, en tanto que el de la lineal es constante, y cómo esto se expresa en los parámetros correspondientes a cada fórmula: $y = 10.000 \times 1{,}2^x$ e $y = 4.000\ x + 10.000$.

Consignas optativas

Finalizado el problema, el docente podrá proponer nuevos ítems si lo considera pertinente:

c. Si la persona trabaja 3 meses, ¿cuál es la propuesta más conveniente?
d. ¿Y si firma el contrato por 3 años?

Problema 6: Las bacterias

En un laboratorio están experimentando con una población de bacterias. Han observado que, al reproducirse la masa de la población, crece siempre en forma pareja, de manera que en cada hora aumenta un 25%. Al comienzo de la observación, el cultivo de bacterias tiene una masa de 60 gramos.

a. ¿Cuál será la masa de las bacterias después de dos horas?

b. Expliquen cómo varía la evolución de la masa de bacterias a lo largo de las primeras 8 horas.

Comentarios sobre el problema 6

La intención de presentar este problema es que los alumnos reconozcan la función exponencial como modelo de crecimiento poblacional, descartando el modelo lineal para la obtención de los valores solicitados.

De todas maneras, es esperable que algunos alumnos, para resolver la consigna **a**, apelen a un procedimiento erróneo, tratando la situación desde un modelo lineal, sospechando que si en una hora aumenta un 25%, en dos horas aumentará el doble, es decir, el 50%. A partir de este error, probablemente propongan como respuesta que en 2 horas la cantidad de bacterias será de 90 gramos.

Otros alumnos en cambio, realizarán el cálculo del 25% de 60 empleando la regla de tres o multiplicando 60 por 0,25 y sumarán este resultado obtenido (ya sea por regla de tres o por producto) a 60; luego, hallarán el 25% de la masa obtenida (75 g después de una hora) y podrán sumarlo a 75, obteniendo una masa de 93,75 g transcurridas las dos horas. En este momento, tal vez sea conveniente una discusión colectiva mediada por el docente en la que se analice la posibilidad de expresar el porcentaje como producto, por ejemplo: $60 \times 1{,}25 = 75$ y $75 \times 1{,}25 = 93{,}75$, de la misma manera que ha sido considerado en problemas anteriores.

En esta misma línea de razonamiento, algunos alumnos podrían considerar el 25% como la cuarta parte o el 125% como $\frac{5}{4}$ del valor de la masa anterior, y en consecuencia, podrían proponer cálculos similares a los siguientes: $60 + 60 \times \frac{1}{4}$, o bien $60 \times \frac{5}{4}$, para obtener el resultado a la primera hora y $75 + 75 \times \frac{1}{4}$, o bien $75 \times \frac{5}{4}$, para la segunda hora

Sea de un modo u otro que los alumnos identifiquen que se trata de un 25% en "cada paso", será interesante comparar ambos procedimientos, el no lineal versus el lineal, estableciendo argumentos para determinar la validez de uno por sobre el otro. Por ejemplo, el docente podrá sugerir analizar la diferencia entre incrementar primero un 25% y luego, al resultado obtenido, incrementarlo nuevamente un 25%, e incrementar el 50%. Esto permitirá poner en evidencia que no se obtiene la misma cantidad.

La consigna **b** tiene como finalidad que los alumnos vuelvan sobre una característica fundamental de la función exponencial: "transcurrida una hora luego de una observación, la masa de la población tiene un crecimiento del 25% de la masa observada, cualquiera sea el momento del registro". Se espera poder organizar la información de tal manera que esta facilite la producción de la fórmula ($y = 60 \cdot 1{,}25^x$ u otra equivalente).

Consignas optativas

Estos ítems permitirían remitir al uso de la fórmula y a las ideas sobre el modelo que ya han sido puestas en juego en este problema y en los anteriores.

c. Si en un determinado momento la masa de la población de bacterias es 300 g. ¿Cuál es la masa de la población una hora después?
d. ¿Cuál será la masa de bacterias después de 30 horas de comenzada la observación?

Instancia de revisión de los 6 problemas
Primera parte

Estos seis problemas comparten, como ya se ha mencionado, la intención de poner en evidencia que el modelo lineal no es pertinente para estudiar el comportamiento de ciertos procesos que varían. Cada uno de ellos aporta algún aspecto en particular: crecimiento, decrecimiento, variables discretas, variables continuas, etcétera.

A partir de aquí, el docente propondrá a los alumnos una revisión de las situaciones desarrolladas para así poder identificar el modelo exponencial. Se trata de volver a cada uno de los problemas resueltos y encontrar (o recuperar) la fórmula que representa cada situación, analizando en las fórmulas el significado de cada uno de los parámetros que intervienen en función del contexto a partir del cual se elaboró cada fórmula e institucionalizando, en este momento, la función exponencial.

Comentarios sobre la primera parte de la instancia de revisión

La intención de esta primera parte de la instancia de revisión es volver a hacer foco en cada situación y en la fórmula que la modeliza. Será interesante que el docente, a partir de las producciones de los alumnos, pueda organizar todas las fórmulas en el pizarrón de manera tal que estén disponibles. Por ejemplo:

Profesora: Bueno, a ver, les voy a pedir ahora que busquen en sus carpetas los problemas que hicimos, los anteriores. Vamos a tratar de hacer una síntesis de todos los problemas. *(Comienza a insinuar que anota en el pizarrón la fórmula del problema del cuadrado que se va ampliando, escribiendo **y** = … y deja espacio, mientras la mayoría busca en sus carpetas los problemas.)*
Alumno: A por 2 a la *n*… (La profesora completa la fórmula en el pizarrón $y = A \cdot 2^n$.)
P: Bien, y en el problema 2, ¿cómo era la fórmula?... Era el del cuadrado que lo dividíamos en 4 y nos quedábamos con la parte de abajo a la derecha…
A *(varios)*: A por un cuarto a la *x (La profesora anota la fórmula en el pizarrón.)*
La docente sigue solicitando a los alumnos que expresen la fórmula en cada uno de los problemas, y los alumnos van diciendo las fórmulas respectivas. Finalmente, queda plasmado en el pizarrón lo siguiente:[5]

1) $y = A \cdot 2^n$

2) $y = A \cdot (\frac{1}{4})^x$

3) $y = 20 \cdot 3^{\frac{n}{5}}$

4) $y = 100 \cdot (0{,}8)^x$

5) $y = 10.000 \cdot (1{,}2)^x \quad y = 4.000 \cdot x + 10.000$

6) $y = 60 \cdot (1{,}25)^x$

A la luz de estas producciones, el docente podrá propiciar una discusión en torno a diferentes aspectos que se "atrapan" en las fórmulas, en función del problema del cual provienen:

- el significado de los parámetros que aparecen en cada una de ellas;
- el valor que puede asumir la variable en cada uno, incluyendo la continuidad o no de la misma;
- las similitudes y diferencias entre las fórmulas;

Por ejemplo, en una de las aulas, la profesora propuso lo siguiente:

5 La fórmula para el conteo de los piojos tendrá variaciones de acuerdo con las discusiones que se hayan dado en la puesta colectiva. Podría ocurrir que el acuerdo logrado en el aula fuera el de considerar como posible el conteo de piojos cada 5 días y en tal caso arribar a la fórmula $y = 20 \cdot 3^n$ donde **n** represente el período de 5 días. Por ejemplo, para 30 días el período sería n = 6, ya que 6 períodos de 5 días equivalen a 30 días.

Profesora: Bueno, vamos a hacer lo siguiente. En este cuadro que armé vamos a ir poniendo lo que significa cada letra de la fórmula de cada problema. *(Se establece que todas las fórmulas tienen el mismo aspecto:* $\boldsymbol{y = k \cdot a^x}$ *y los alumnos van proponiendo el significado de cada parámetro, de manera tal de ir completando la tabla.)*

PROBLEMA	Y	K	A	X
1	Área del cuadrado en el paso que quiera.		Cómo se pasa de uno a otro. Acá siempre es el doble.	
2				
3	Cantidad de piojos.	Piojos que se ponen en la cabeza del niño.		
4	Lo que le queda de luz a medida que baja.			Metros.
5				
6				

Segunda parte

En esta segunda parte se les podrá sugerir a los alumnos que grafiquen las respectivas fórmulas de los problemas 1 y 2 (considerando A = 1): $y = 2^n$ e $y = (\frac{1}{4})^n$.

Comentarios sobre la segunda parte de la instancia de revisión

Esta segunda instancia de revisión busca afianzar algunos aspectos del trabajo con estas funciones y empezar a instalar la idea de que se estudiará el comportamiento de este tipo de modelo.

Una discusión que es probable que surja se relaciona con la posibilidad o no de unir los puntos en el gráfico. La decisión de unirlos o no está ligada, por un lado, al conjunto de condiciones que se pueda imponer sobre el proceso que se estudia (en los problemas de los cuadrados la gráfica que queda al unir los puntos se aleja del problema que le dio origen). Por otro lado, deberá tenerse en cuenta si la representación gráfica aporta o no nueva información pertinente. Será interesante analizar con los alumnos aspectos relacionados con el dominio de definición de las variables que intervienen en relación con el problema que se estudia.

A la luz de la producción de los alumnos, se podrá poner en debate el modo en que gráficamente se representa el crecimiento o decrecimiento de cada situación y los motivos por los cuales esto ocurre en función de cada fórmula, es decir, el comportamiento del gráfico se relaciona con los valores que adquiere el parámetro *a*: 2 o $\frac{1}{4}$.

Por ejemplo, en un aula apareció el siguiente debate, una vez realizadas las gráficas:

> Profesora: Comparen las gráficas. ¿En qué se diferencian?
> Alumno 1: Una sube, la otra baja. Debe ser por el 2 y el $\frac{1}{4}$.
> Alumno 2: Es eso, porque yo había empezado a hacer 0,25 en vez de $\frac{1}{4}$ y me daba 0,0000… y cada vez era peor.

Los alumnos, muy probablemente, elaboren las gráficas apoyados en tablas de valores. A partir de ellas encontrarán evidencia sobre el crecimiento o decrecimiento de cada proceso. Será interesante que el docente proponga un debate que instale algunos argumentos que vayan más allá de los resultados de la tabla. Por ejemplo, para $\frac{1}{4}$, la fracción es menor que 1, y el denominador va creciendo con cada una de las sucesivas potencias y por lo tanto, los resultados serán cada vez más chicos.

Consigna optativa

Para continuar con la identificación de algunas primeras particularidades del modelo exponencial, el docente podrá ofrecer a sus alumnos diferentes gráficos como los siguientes (algunos que representen las situaciones estudiadas y otros que no) y solicitarles que intenten identificar qué gráfico corresponde a cada situación de las ya trabajadas:

Gráfico 1

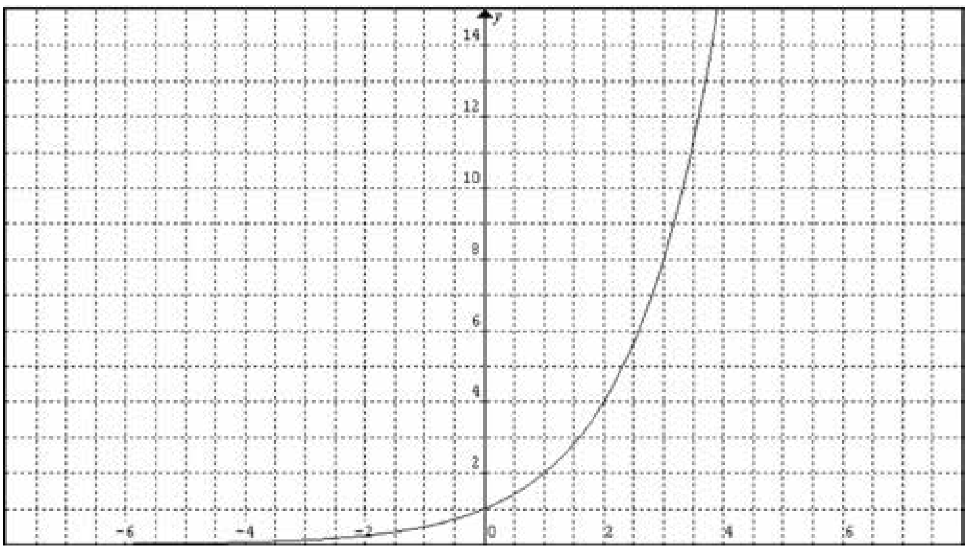


Gráfico 2

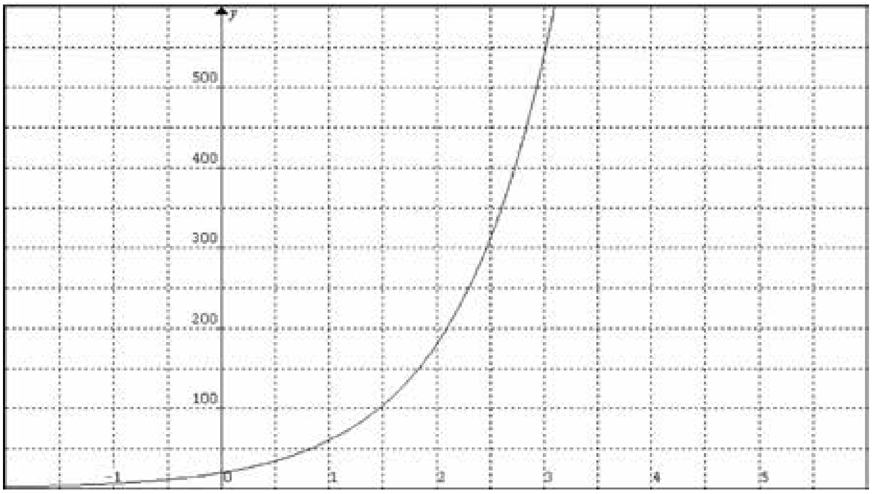


Gráfico 3

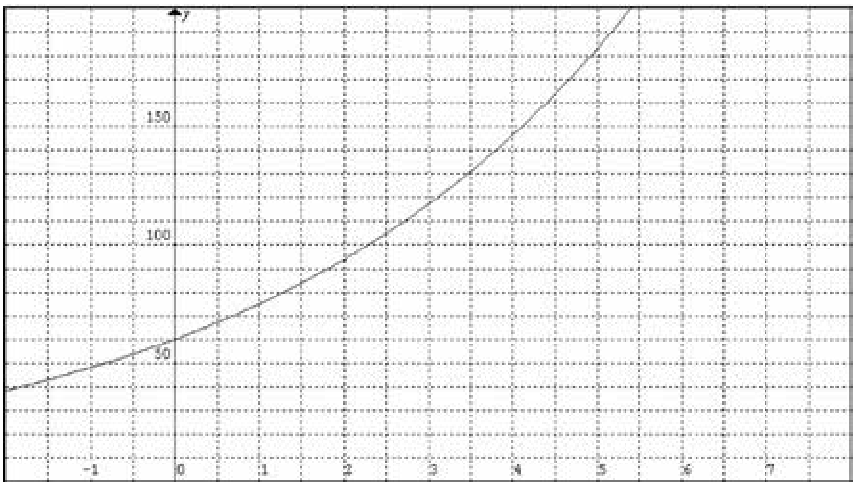


Gráfico 4

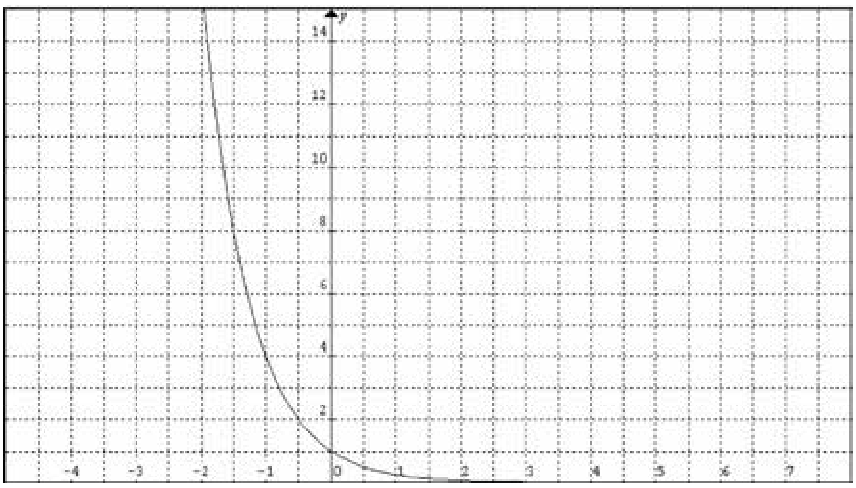


Gráfico 5

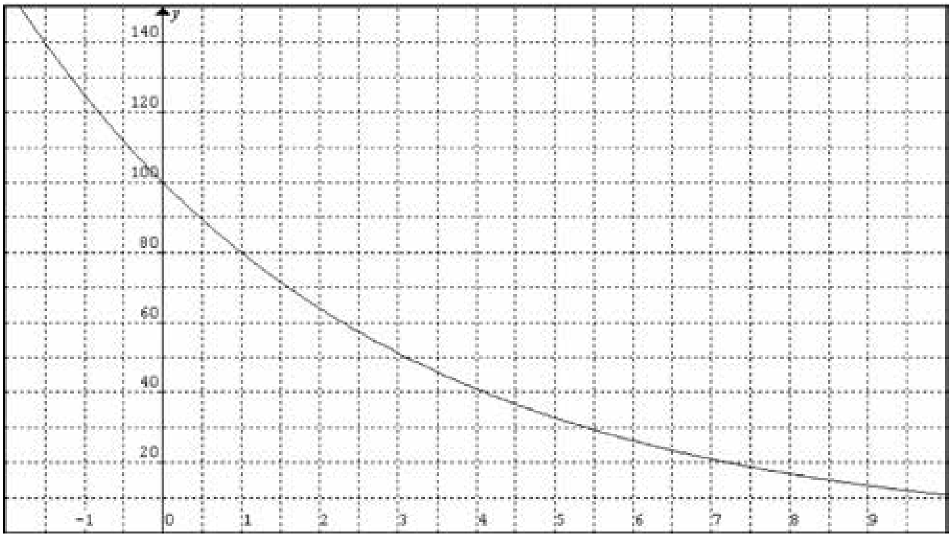
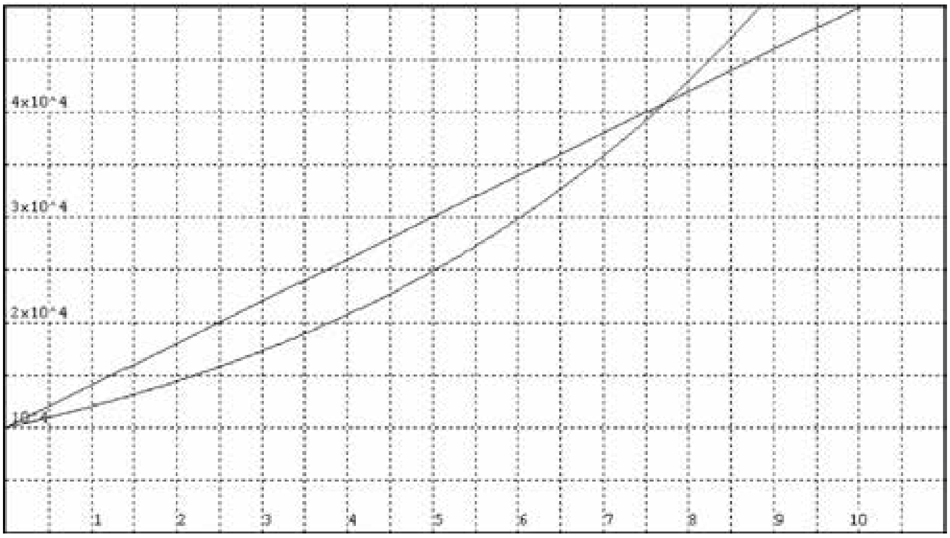


Gráfico 6



Se trata, en este caso, de que los alumnos comiencen a reconocer que este tipo de fórmulas genera gráficos en los que las líneas ya no son rectas y que tienen un "dibujo" (una gráfica) de cierta naturaleza: es una curva, crece o decrece, etcétera. A su vez, involucra identificar el dominio en el cual tiene sentido el gráfico en función del problema que "dice" representar.

Por otro lado, es posible gestionar un debate con los alumnos, a la luz de los gráficos, con el fin de analizar que a intervalos iguales la función aumenta (o disminuye) en la misma proporción.

Los problemas esbozados en este capítulo permitieron que los alumnos se aproximen a la modelización a través del estudio del comportamiento de procesos que varían de manera diferente a la lineal o a la proporcional. Por otro lado, la construcción de algunos aspectos de este nuevo modelo abonó a la elaboración de explicaciones de los resultados obtenidos y de las relaciones establecidas.

Finalmente, la comparación entre los diferentes problemas permitirá una transición entre estas situaciones más contextualizadas y las que se proponen en el capítulo siguiente, al interior del modelo, dentro de un contexto matemático.

Capítulo 2
Estudio de la función exponencial

En este capítulo se presenta una nueva colección de problemas elaborados por el equipo en los talleres desarrollados. Al igual que en los problemas del capítulo 1, esta secuencia también ha sido implementada en las aulas.

Se busca en este caso convocar a los alumnos a estudiar el comportamiento y algunas propiedades que caracterizan a la función exponencial. Se trata de situaciones que permiten reflexionar sobre sus gráficos y sobre las variaciones que estos pueden sufrir en función de los valores de los parámetros que conforman la fórmula. Se propone también analizar crecimientos, decrecimientos, asíntotas, ceros, etcétera. De esta forma, tal como lo anticipa el título del capítulo, resulta una oportunidad para estudiar "el interior" del modelo exponencial.

Cada problema aporta algún elemento particular en este proceso de estudio, que será considerado en el momento de realizar su análisis.

Una vez más, vale la pena advertir que esta colección no es la única posible, no es la que indefectiblemente se deberá desplegar para enseñar estos conocimientos: no hay un único recorrido. Esta secuencia es la que este equipo elaboró en sus encuentros de debate, la que pudo probar, y a partir de la cual se pudo recabar información sobre las posibilidades que brinda para el trabajo con los alumnos.

Dentro de este conjunto de problemas, los alumnos se encontrarán recurrentemente frente a la necesidad de analizar o establecer condiciones para la validez de algunas propiedades o para la verificación de algunas características en el modelo exponencial. Este trabajo sostiene el segundo propósito que se ha planteado en esta propuesta: enfrentar a los alumnos a la producción de argumentos, explicaciones y, finalmente, fundamentaciones.

Problema 1

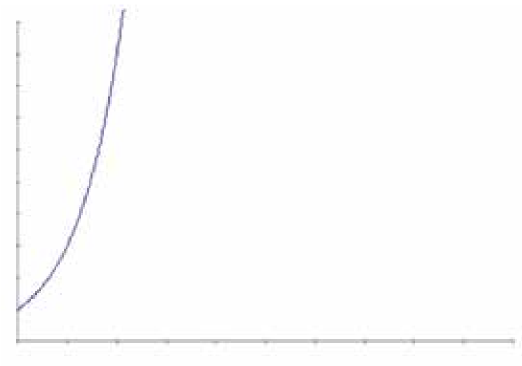
Graficar las funciones exponenciales $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ y $g(x) = 3^x$ y encontrar similitudes y diferencias entre los gráficos.

Comentarios sobre el problema 1

Este problema es el primero que se propone a los alumnos fuera de todo contexto. Es decir, es de neto corte matemático.

En función de las decisiones que tomó el docente al finalizar la secuencia del capítulo 1, es probable que los alumnos se hayan enfrentado ya con algunos gráficos exponenciales, o bien puede ocurrir que esta sea la primera oportunidad.[6]

En la resolución de este problema, la mayoría de los alumnos se apoyará probablemente en el uso de tablas de valores para elaborar las gráficas. A su vez, es esperable que no consideren –en un primer momento– asignarle valores negativos a la variable independiente, quizá por haber tratado con situaciones contextualizadas que no demandaban considerar esos valores. Por ejemplo, en un curso, una alumna elabora el siguiente gráfico para $g(x) = 3^x$:



Ante esta situación, la docente pregunta si el gráfico termina en el eje *y*. La alumna analiza su gráfico y sostiene que sí. La docente interroga entonces a la alumna: "¿No se le puede dar valores negativos al exponente?". Frente a este interrogante, la alumna asigna algunos valores negativos a la variable y continúa el trazado del gráfico.

Realizados los gráficos, un primer aspecto en común que encontrarán los alumnos es que ambas gráficas tienen imagen 1 para $x = 0$. Se instalará así que la ordenada al origen es 1 en ambas gráficas.

Otro aspecto que surge tiene que ver con el hecho de que las imágenes son siempre positivas, para cualquier valor de *x* que se considere. Esta afirmación propuesta por varios alumnos surge de la evidencia del dibujo, pero no es inmediato que puedan identificar las razones por las que estos gráficos no admiten valores negativos. El siguiente extracto de un diálogo entre alumnos permite identificar un conjunto de preguntas y reflexiones, incentivadas por el docente, con la intención de que los alumnos salten de lo puramente intuitivo hacia un terreno más razonado y argumentado:

6 Vale la pena recordar que dentro de las sugerencias de trabajo en el capítulo 1, en la instancia de revisión, se propone retornar a los problemas desde las fórmulas, representar gráficamente los problemas de los cuadrados y analizar gráficos en función de cada situación.

Docente: ¿No sigue la curva para los negativos? *(Señalando el eje y.)*
Alumno 1: Si ponés negativos, se da vuelta *(señalando la fracción* $\frac{1}{3}$ y sigue siendo positiva, no cruza…
Docente: Bueno, pongamos entonces –1 ; –2 ; …
Alumno 2: Pero siempre la *y* va a dar positivo.
Alumno 3: ¿Pero no cruza el eje después? *(Señalando el eje x.)*
Alumno 1: No, siempre queda positivo, porque ponés negativos y se te da vuelta, pero siempre queda positivo…
Alumno 3: Ah, claro, da vuelta la fracción y queda positivo, no se hace negativo. Hay asíntota…

El diálogo permite evidenciar una primera dificultad en este trabajo: diferenciar los valores negativos que puede tomar la variable independiente, frente a los valores negativos que no puede tomar la función. Mientras la docente interroga sobre el cambio de signo de la función un alumno se apoya en la variable –haciéndola recorrer los valores negativos–, y así permite que otros alumnos empiecen a considerar los valores de las imágenes. El intercambio que se da entre los alumnos muestra que han tomado la pregunta del docente y que pueden responder –ahora basándose en la operación y sus propiedades– que los resultados serán siempre positivos. A su vez, la exploración les permite ver la tendencia de la función y verificar la existencia de una asíntota.

Muy probablemente, los alumnos identifiquen como primera diferencia entre las dos funciones el hecho de que una de ellas es creciente y la otra, decreciente. Inclusive, es posible que algunos alumnos reconozcan que el "factor multiplicativo" (la base) que caracteriza al cambio exponencial condiciona el crecimiento o decrecimiento de la función. Se podrá analizar en este punto que la función $g(x) = 3^x$ crece, pues se multiplica por 3 en cada incremento de 1 de la variable independiente, en tanto que la otra decrece, pues se multiplica por $\frac{1}{3}$,en cada incremento de 1.

Otros alumnos trabajarán con la idea de gráficas simétricas. Ambas funciones toman las mismas imágenes, pero lo hacen para valores opuestos de *x*. No se trata, en este caso, de ahondar en la definición de simetría en términos geométricos, sino de recurrir a la simetría para caracterizar a los gráficos de estas dos funciones, tal como se ve en este diálogo:

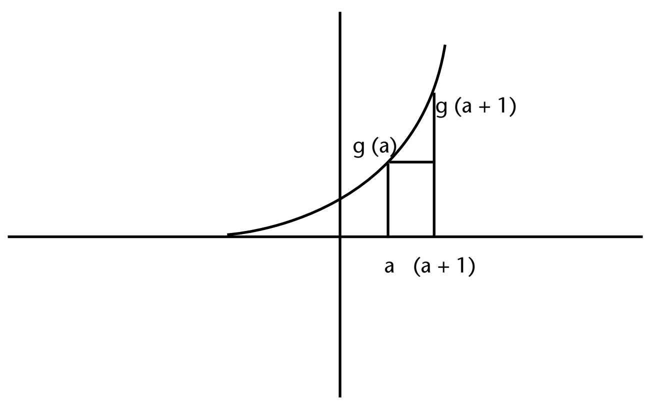
Alumno 1: 3 a la *x* es creciente, y la otra es decreciente.
Alumno 2: Son simétricas…
Profesora: ¿Qué entienden los demás, cuando B *[el alumno 2]* dice que son simétricas?
Alumno 3: Una hace así y la otra al otro lado. *(Realiza en el aire el recorrido de cada función con sus manos.)*

Profesora: Los demás, ¿qué entienden con la simetría?
Alumno 4: Son opuestas.
Profesora: No entiendo eso. Opuestas es que…? Si yo tomo el 1 acá, vos decís que la imagen cuánto vale?
Alumno 4: 3; entonces en la otra, si tomo –1, la imagen de la otra es 3.

Realizar los gráficos de ambas funciones posibilita también buscar imágenes de valores de x que probablemente no se hayan considerado en los problemas contextualizados, y abre la puerta para estudiar su dominio de definición (si bien es posible que, según las características del grupo de alumnos, el dominio de definición de la función haya sido objeto de trabajo en el problema donde se presentan todas las fórmulas y se examinan las características de cada una). Este análisis también puede dar lugar a revisar algunas propiedades de la potenciación según el exponente sea natural, entero, racio-nal o irracional. Las calculadoras científicas son, una vez más, de gran ayuda.

Consigna optativa

Al finalizar este problema, el docente puede proponer a sus alumnos un análisis más detallado a partir del gráfico de la función $g(x) = 2^x$, a partir del siguiente planteo: El docente dibuja la gráfi ca en el pizarrón, preferentemente sin escalas. Elige un punto a cualquiera sobre el eje x, luego el punto $a + 1$, construye los segmentos paralelos al eje y cuyos extremos están sobre la función por un lado y sobre el eje x por el otro, y luego traza el segmento horizontal que parte de $g(a)$ y corta al segmento de longitud $g(a + 1)$, obteniendo un dibujo como el siguiente:



A partir de este gráfico, el docente les informa a los alumnos que el segmento horizontal que se inicia en $g(a)$ parte en dos segmentos iguales al que va desde $a + 1$ hasta $g(a + 1)$, y pregunta: "¿Por qué la horizontal divide al segmento en dos segmentos iguales?".

Se trata de una oportunidad para analizar una nueva particularidad de la función exponencial, por ejemplo, a partir del trabajo con alguno de los problemas del capítulo 1 en donde los alumnos identificaron las "duplicaciones".

El docente podrá, a continuación, solicitar a los alumnos que estudien si ocurrirá lo mismo para la función $g(x) = 3^x$.

Problema 2

Se les presenta a los alumnos el siguiente cuadro para ser completado. En él se proponen cuatro funciones y, para cada una de ellas, algunos interrogantes. Esta organización en tabla está pensada para que los alumnos puedan ir comparando los resultados que van obteniendo en las cuatro funciones. La comparación permite poner de relieve algunas nuevas características de este tipo de funciones:

Preguntas acerca de cada función	$f(x) = 2^x$	$g(x) = 3^x$	$f(x) = (\frac{1}{2})^x$	$g(x) = (\frac{1}{3})^x$
¿Qué sucede con las imágenes de cada función cuando la *x* toma valores cada vez más grandes?				
¿Podés encontrar algún valor de *x* para que su imagen sea 0?				
¿Qué le pasaría a la imagen de cada función, si la multiplicamos por 2? Da tu respuesta en forma gráfica.				
¿Qué le pasaría a la imagen de cada función, si la multiplicamos por –1?				
¿Qué le pasaría a la imagen de cada función, si la multiplicamos por 0,5?				

Al multiplicar la función $y = a^x$ por un número real k distinto de cero se obtiene la función $y = k \cdot a^x$. ¿Mantiene la función $y = k \cdot a^x$ las mismas características? Detallá similitudes y diferencias, y buscá sus causas.	*Si $k = 1$*	*Si $k = 1$*	*Si $k = 1$*	*Si $k = 1$*
	Si $k < 0$	*Si $k < 0$*	*Si $k < 0$*	*Si $k < 0$*
	Si $k > 0$	*Si $k > 0$*	*Si $k > 0$*	*Si $k > 0$*

Comentarios sobre el problema 2

La primera pregunta que se presenta en el cuadro hace foco sobre las imágenes de la función exponencial $y = a^x$. Se busca que los alumnos indaguen, por un lado, acerca de los valores que la función puede alcanzar y aquellos que no. Por otro lado, se propone analizar qué tendencias tienen esas imágenes cuando x toma valores cada vez más grandes.

Es esperable que los alumnos, apoyados en el problema 1, puedan sostener que la función que crece, siempre crece y adquiere valores cada vez mayores, en tanto que la que decrece, siempre decrece, y admite valores cada vez más próximos al 0. Nuevamente podrá estudiarse la presencia de asíntotas a partir de la segunda pregunta del cuadro.

En las tres preguntas siguientes del cuadro se propone un nuevo aspecto sobre el comportamiento de estas funciones: las transformaciones que sufre el gráfico cuando se multiplica a sus imágenes por un número real k, distinto de 0.

Es muy probable que los alumnos, utilizando diferentes tablas de valores, puedan explorar las transformaciones propuestas, identificando la incidencia del parámetro k en las mismas. Es esperable que se reconozca inicialmente la manera en que este valor modifica la "ordenada al origen".

Algunos alumnos identifican también que este parámetro es el responsable de condicionar el signo de las imágenes, llegando a reconocer inclusive la velocidad del crecimiento. Por ejemplo, en una discusión con todo el grupo de alumnos, aparecen las siguientes ideas:

Alumno 1: Si k es mayor que 1, la función aumenta más rápido.
Docente: Muy bien. ¿Y si multiplicás por un valor de k menor que 0?
Alumnos: Es como un espejo, se da vuelta… Simétrico…
Alumno 2: Claro, cada imagen se da vuelta, pasa a ser negativa.
Docente: Muy bien. Y si se multiplica por 0,5, un número entre 0 y 1… ¿Qué pasa con la función? ¿Crece más rápido, o más despacio?
Alumno 3: Corta en 0,5, ahora, va creciendo más despacio. Cada imagen se achica a la mitad, ¿no?
Alumno 1: Te queda cortando por el número por el que lo multiplicás. *(Refiriéndose a la ordenada al origen.)*

Vale la pena destacar que a partir de la resolución de este problema se podría iniciar un estudio de las expresiones algebraicas que determinan las funciones, así como el uso de propiedades de la potencia que el docente podrá explicitar para que estén disponibles para los alumnos. En tal sentido, el docente puede plantear como pregunta a sus alumnos, por ejemplo: "¿Qué elemento de la expresión $y = 0{,}5 \cdot 2^x$ permite conjeturar que las imágenes de la función definida por esta expresión serán la mitad de las imágenes definidas por la función $f(x) = 2^x$?". Este análisis podrá ser un recurso que favorezca la elaboración de ciertas explicaciones de los resultados a los que se va arribando.

Finalmente, la exploración con los diferentes valores de k pretende dar herramientas para pensar una elaboración más general, en términos de la expresión $f(x) = k \cdot a^x$. Los alumnos utilizarán un lenguaje coloquial, y será una tarea de toda la clase reformular estas expresiones y arribar a formulaciones matemáticas que den cuenta de las transformaciones estudiadas. La puesta en común podrá ser un espacio para esta reformulación conjunta.

Problema 3

a. *Confeccionar una tabla de valores para los pares ordenados que resuelven la ecuación* $y = (-1)^x$.
b. *Ídem, para* $\mathbf{y} = (-2)^x$.
c. *¿Puede definirse una función* $f(x) = (-2)^x$*? ¿Por qué?*
d. *¿Qué condiciones debe cumplir a para definir una función* $f(x) = a^x$*?*
e. *Con las condiciones del ítem anterior, ¿qué condiciones debe cumplir* ***a*** *para que la función* $f(x) = a^x$ *sea…*
   i) … creciente?
   ii) … decreciente?
f. *¿Podés encontrar algún valor de* ***x*** *para que su imagen sea 0?*

Comentarios sobre el problema 3

Este problema tiene la intención de que los alumnos analicen las condiciones que permiten definir una función exponencial del tipo $f(x) = a^x$ en términos del parámetro *a*.

Las primeras tres consignas invitan a identificar la imposibilidad de que el parámetro *a* sea negativo, ya que hay valores reales de x que no tendrán imágenes. Así, por ejemplo, para $x = 0{,}5$ aparece $\sqrt{-1}$ o $\sqrt{-2}$, en ambas expresiones, valores que no admiten solución en el campo de números reales. Es posible que esta sea la primera ocasión para muchos alumnos de enfrentarse al cálculo de raíces cuadradas de números negativos. Por lo tanto, es esperable que se presente una cierta dificultad para los alumnos en cuanto a la operatoria. Por ejemplo, el siguiente debate se da al interior de un grupo de alumnos con la docente:

Docente: Fueron asignándole valores a x. Ah, bien. ¿Cualquier valor?
Alumno 1: Sí.
Docente: ¿Por ejemplo, qué valores?
Alumno 1: Distintos; estos *(Mostrando 0, 1, 2, …, todos números naturales.)*
Docente: ¿Y probaron con valores negativos?
Alumno 2: Sí.
Docente: ¿Y con alguna fracción?
(Los cuatro alumnos se quedan en silencio, mirándose entre ellos.)
Docente: Bueno, vean con algunas fracciones, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$.
Alumno 3: *(Usando la calculadora.)* Da $-\frac{1}{2}$.
Docente: Me decís que -1 a la $\frac{1}{2}$ da $-\frac{1}{2}$. Bueno, a ver, ¿cómo hiciste para elevar a la $-\frac{1}{2}$? ¿Pusiste “ $\frac{1}{2}$ ”, o “0,5”?
Alumno 1: ¡Da error!
Docente: ¿Seguro que da error?
Alumno 1: Sí, da error, no sale.
Docente: ¿Y por qué dará error? ¿De dónde vendrá el error?
Alumno 4: Ya está, da error… Sí, da error…
Alumno 2: No se puede elevar a un número decimal, no da…
Alumno 1: ¡Noooo!, ¿es la raíz cuadrada?... no existe, eso.
Alumno 3: No es función, no se puede graficar, pega muchos saltos…

El diálogo da cuenta del conjunto de interrogantes de los alumnos en referencia a este tema. De este modo, el trabajo con este problema habilita al docente a explicitar cuáles son las condiciones para la existencia de la operación, y establecer las condiciones de validez de su uso.

La consigna **d** propone que los alumnos extiendan el trabajo que hicieron sobre $y = (-1)^x$ e $y = (-2)^x$, estableciendo ahora las condiciones sobre el parámetro a. De esta manera, se está propiciando un trabajo de generalización.

Vale la pena destacar que no es tarea sencilla para los alumnos distinguir con claridad los cambios en el parámetro a (sobre el que se deben establecer las condiciones) de los valores posibles que admite la variable x. Es parte de la tarea docente colaborar en establecer las diferencias entre uno y otro. Finalmente, los alumnos podrán reconocer la necesidad de establecer condiciones sobre los posibles valores de a para definir la función exponencial $y = a^x$; $a > 0$ y $a \neq 1$ con dominio real.

Un párrafo aparte merece la construcción, por parte de los alumnos, de $f(x) = 1^x$, que tiene dominio real, que es continua, pero no mantiene las características de las funciones exponenciales que ellos trabajaron, ya que en un inicio no reconocen que a debe ser diferente de 1, pues en caso contrario la función es constante.

La consigna **e** retoma las condiciones establecidas y promueve el trabajo sobre la noción de que estas funciones son estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes. Es esperable que los alumnos puedan anclar este análisis al cambio en el parámetro a, pero esto no garantiza que puedan explicitar las condiciones sobre tal parámetro, como se observa en el siguiente extracto:

Alumno: *(Elaborando una conjetura sobre el valor de* ***a****.)* Tiene que ser una fracción y así… ¿decrece?
Docente: ¿Y si a es $\frac{6}{3}$?
Alumno: Ah… es 2 a la x, y… crece… Tiene que tener numerador 1. *(Cambió su conjetura.)*
Docente: ¿Y si a es $\frac{3}{4}$?
Alumno: No sé.
Docente: Bueno, fijate qué pasa.
Alumno: No, ¡tiene que ser mayor que 2, para que sea creciente!
Docente: ¿Y no puede ser 1,5?
Alumno: ¿?

La consigna **f** apunta a que los alumnos identifiquen que nunca se podrá lograr imagen nula, aunque las imágenes pueden acercarse a 0 tanto como se quiera. Su conjetura estará unida al estudio de sus gráficos, y es un momento propicio para recuperar propiedades relativas a la operatoria a propósito de la expresión $a^x = 0$.

Problema 4

Siendo $a > 0$ y $a \neq 1$, caracterizar el conjunto de positividad y negatividad de $f(x) = a^x$.

Comentarios sobre el problema 4

El objetivo de este problema es que los alumnos continúen con el estudio de la función exponencial y las condiciones que caracterizan a una familia cuya expresión viene dada por la siguiente fórmula: $f(x) = a^x$. En este caso se busca centrar la atención en la imágenes (todas ellas positivas).

Se espera que los alumnos apelen a diferentes ejemplos numéricos, modificando el valor que le asignan al parámetro a y conjeturen que todas ellas tienen imágenes positivas.

También resulta posible que, para algunos alumnos, las nociones de crecimiento y decrecimiento tratadas en el problema anterior les generen confusión en relación con las ideas de positividad y negatividad. Parte de la tarea docente será propiciar, a partir de las producciones de sus alumnos, una discusión acerca de las condiciones (de crecimiento y positividad) para salvar esta posible confusión.

Sea en un caso o en el otro, lo importante es que las intervenciones del docente se orienten a promover aspectos vinculados a las normas del trabajo matemático: no es suficiente con una buena colección de funciones para estar seguros de lo que se sospecha. Se deberá encontrar alguna explicación que supere lo que ofrece cada ejemplo y permita establecer los motivos por los cuáles el conjunto de positividad es el que afirman. Una posibilidad es que aparezcan explicaciones similares a las siguientes: si a es positivo, para cualquier valor que se le asigne a x, el resultado de a^x es un número positivo.

En el caso de que algunos alumnos no lograran elaborar una respuesta en términos de conjetura, el docente podrá sugerir la construcción de una función de la forma $f(x) = a^x$ que tenga alguna imagen negativa. La imposibilidad de tal tarea abre caminos interesantes en el proceso de análisis de algunas de las condiciones que caracterizan a este tipo de funciones.

Problema 5

a. ¿Qué modificarías en la función $f(x) = 3 \cdot 0{,}4^x$ para que…
   i) … sea creciente?
   *ii) … la nueva función tenga una gráfica que sea simétrica a la gráfica original con respecto al eje **y**?*
   iii) … su conjunto imagen sea $(-\infty; 0)$?
b. Si creés que hay distintos tipos de transformaciones sobre f(x) para lograr lo pedido en cada caso, explica cuáles son.

Comentarios sobre el problema 5

En la resolución del primer ítem de la consigna **a**, es de esperar que los alumnos comiencen su análisis a partir de un gráfico de la función y, constatando el decrecimiento de la función, identifiquen la conveniencia de modificar el valor de la constante $k = 3$ por un número negativo en particular, por ejemplo, -3. El docente, en este caso, podría instalar el interrogante de si solamente se transforma la función cambiando el valor de k por -3, o si habría algún otro posible valor para k. Se busca así que los alumnos puedan arribar a la conclusión de que, cualquier valor de k negativo provoca que la función sea creciente, siempre y cuando a no se modifique simultáneamente.

También es posible que algunos alumnos decidan cambiar la base a por un número mayor que 1, dejando fijo el valor de k. En este caso, nuevamente se logra el objetivo de transformar la función: pasa de ser decreciente a ser creciente. Una vez más, es posible que los alumnos imaginen que solo vale para un cierto valor de a. El docente podrá invitarlos a analizar si el valor de a podría ser cualquiera, de manera tal de concluir que si k queda fijo y a pasa a ser mayor que 1, la función dejará de ser decreciente y pasará a ser creciente.

Eventualmente, algunos alumnos pueden modificar simultáneamente ambos parámetros: a y k. Esta decisión no siempre provocará los resultados esperados. Será tarea del docente generar un espacio de debate que permita a estos alumnos reconocer que al cambiar ambos parámetros, podría modificarse "dos veces" el gráfico, volviendo a obtener una función decreciente.

Para la resolución del segundo ítem de la consigna **a** es probable que los alumnos vuelvan a ensayar a partir de transformar los valores de los parámetros. Pero, una vez más, no cualquier modificación produce los efectos deseados. Es decir, para lograr obtener un gráfico simétrico con respecto al eje y se requiere anticipar que, si se consideran dos pre-imágenes opuestas, sus imágenes coincidan.

Para avanzar en la resolución de este ítem es conveniente que el docente proponga a sus alumnos que vuelvan sobre los problemas 1 y 2. De todas maneras, no será suficiente con analizarlos, ya que la búsqueda del inverso multiplicativo de la base (determinante en la resolución de este ítem) resultará compleja para los alumnos. O sea, no será evidente identificar que 0,4 deberá modificarse por 2,5 para lograr un gráfico simétrico al de $f(x) = 3 \cdot 0{,}4^x$, ya que eso implica reconocer que $0{,}4 = \frac{4}{10}$ y, por lo tanto, su inverso multiplicativo será $\frac{10}{4} = 2{,}5$.

El propósito del último ítem de la consigna **a** es que los alumnos identifiquen que el cambio de la imagen de la función se produce cambiando valores de la constante (que en este caso es $k = 3$) por algún valor negativo. En este sentido, este ítem es un aporte para el trabajo más general sobre condiciones, al que se dedicarán en el próximo problema. No obstante, pueden aparecer todavía producciones de los alumnos que operen tanto sobre la constante como sobre la base. El docente podrá entonces interrogar sobre las condiciones mínimas que resuelven la situación.

La resolución de la consigna **b** podría favorecer el desarrollo de un análisis que considere, entre otros, los siguientes aspectos:

- la profundización acerca de las condiciones necesarias para el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial;
- un nuevo reconocimiento en cuanto al significado de la ordenada al origen en las funciones del tipo $f(x) = k \cdot a^x$;
- los conjuntos de positividad y negatividad de la función.

Problema 6

a. ¿Creés que alcanzará con determinar las condiciones sobre el parámetro a para decidir si $f(x) = k \cdot a^x$ *es creciente o decreciente?*
b. ¿Qué condiciones establecerías sobre **k** *y* **a** *para que la función* $f(x) = k \cdot a^x$ *sea creciente? ¿Y para que sea decreciente?*

Comentarios sobre el problema 6

Con este problema se espera que los alumnos puedan establecer, de manera fundamentada, las condiciones sobre k y sobre a para que la función sea creciente o decreciente. Se busca que aquellos aspectos que se estudiaron en el problema anterior adquieran ahora cierto nivel de generalidad. El planteo ha sido dividido en dos partes, de forma tal que los alumnos se percaten de la insuficiencia de condiciones sobre el parámetro a para definir el crecimiento o decrecimiento, antes de ponerlos en situación de buscar condiciones para ambos parámetros.

Es probable que algunos alumnos comiencen ensayando con diferentes valores para a –a partir del problema anterior–, o bien apelando a la definición misma de la función exponencial y las características que adquiere este parámetro: si $a > 1$, la función es creciente, y si $0 < a < 1$, la función decrece, sin advertir, en un comienzo, cómo podría afectar el parámetro *k*.

Otros alumnos, muy probablemente, intuyan que el crecimiento o decrecimiento de la función depende de ambos parámetros, y aunque ensayen modificando únicamente los valores de *a*, sospechen que si varía *k*, el gráfico podría cambiar, tal como se aprecia en este extracto de clase:

> Alumno 1: Mirá, no ves que acá ya dijimos que si *a* está entre 0 y 1, entonces decrece, y si *a* es mayor que 1, crece. *(Haciendo referencia a los gráficos de* 2^x *y* $(\frac{1}{2})^x$*).*
> *(El resto de los alumnos de este grupo asienten, salvo uno de ellos que contesta:)*
> Alumno 2: No…; pero si *k* es negativo, seguro que va para otro lado… *(Esboza un bosquejo de un gráfico exponencial, con k negativo y decreciente.)* Si *k* es negativo, entonces corta al eje *y* debajo de 0… *(Esta frase provoca en el resto de los alumnos un desconcierto general.)*
> Alumno 3: Viste, yo te dije que con *a* solo no alcanza: también vale *k*… Hay que usarlo…

De todas maneras, ya sea que los alumnos consideren o no el valor de *k* como capaz de incidir en el crecimiento o decrecimiento de la función, el trabajo con ejemplos particulares podría generar ciertas tensiones entre lo que ocurre en ciertos casos y lo que ocurrirá siempre. Con esto se pretende mostrar que el pasaje de tratar con ejemplos a establecer condiciones generales forma parte de los debates que debe propiciar el docente.

Los ejemplos particulares les permiten a los alumnos configurarse una imagen próxima a lo que ocurre, pero la búsqueda de condiciones supone recorrer muchos ejemplos particulares, que de todos modos no darán certeza, tal como se observa en el siguiente extracto de clase que se desarrolla durante un debate al interior de un grupo:

> Alumna: No, pará, vas a estar toda la vida poniendo números. ¿Cuántas funciones vas a hacer? No podés seguir con cada caso, te pide si es *a* o también si es *k*. ¿Qué, vas a probar para doscientos números *k* y otros mil números *a*?
> Alumno: Dejame ver que pasa, pruebo con algunas y vemos si va para abajo o sube…
> Alumna: Pero te vas a pasar toda la vida. Fijate, si *a* es mayor que 1, crece y si *k* es mayor que 0 va a seguir para arriba…

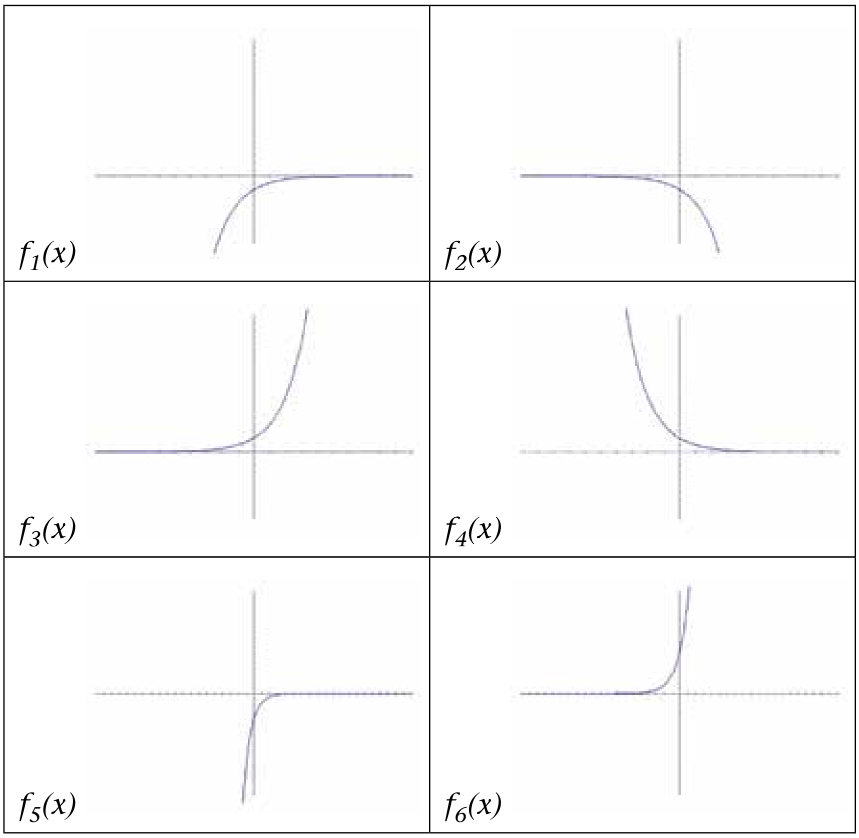
Alumno: Dejame ver, quiero probar… (*Escribe:* $y = 3 \cdot 2^x$; $y = (-3) \cdot 2^x$ *y las grafica.*) Sí, depende también de *k*, porque acá crece, y acá decrece. *(Sentencia:)* Si *a* está entre 0 y 1 y *k* es negativo, decrece; y si no, es al revés.

Es interesante analizar con los alumnos qué tipo de información se recaba a partir de las funciones que se usaron como ejemplos para enfrentar este problema y poner en debate si, apelando únicamente a esas funciones, es posible estar seguros que ocurrirá siempre lo mismo.

La evolución del trabajo de los alumnos desde las explicaciones a partir de ejemplos hacia las argumentaciones –apoyadas en propiedades de las operaciones y los parámetros involucrados– es parte de la intención de toda esta propuesta, como ya ha sido mencionado. La actividad de la "búsqueda de condiciones" que sostengan la validez de una relación aporta también en este sentido.

Problema 7

Las funciones graficadas tienen fórmulas del tipo $f(x) = k \cdot a^x$. Indicar cuáles de ellas corresponden a las condiciones detalladas de ***a*** *y* ***k****, en cada caso.*



Condiciones de a y k	Funciones
$0 < a < 1$ y $k < 0$	....
$0 < a < 1$ y $k > 0$	....
$a > 1$ y $k > 0$	....
$a > 1$ y $k < 0$	....

Comentarios sobre el problema 7

Este problema permite a los alumnos profundizar el estudio acerca de las modificaciones que puede sufrir un gráfico a partir de los cambios de las condiciones de la base *a* y de la constante *k*, que forman parte de la fórmula.

Los alumnos se ven enfrentados nuevamente a la dificultad de considerar en simultáneo dos parámetros. No es tarea sencilla la que se les solicita, ya que cada parámetro afecta el comportamiento del gráfico de la función, y considerar ambos al mismo tiempo podría modificar las anticipaciones que los alumnos realizan sobre uno solo de ellos.

Por ejemplo, algunos alumnos identifican en un primer momento la incidencia del parámetro *a* sobre el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = a^x$, y luego pueden analizar cómo incide el valor de *k* en cada uno de los gráficos. Otros podrán iniciar el trabajo decidiendo que el signo de *k* distingue funciones positivas de negativas, y completar este análisis con el crecimiento y/o decrecimiento de cada función a partir de condiciones sobre la base *a*.

Por el formato que tiene el problema, es esperable que los alumnos apelen a las actividades anteriores para dar cuenta de las relaciones entre los valores de *a* y de *k* y su crecimiento y/o decrecimiento. También puede ocurrir que algunos alumnos utilicen ejemplos, asignando valores particulares a *a* y a *k*, y a partir de los resultados que van obteniendo, establezcan qué gráfico corresponde a cada condición. En este caso, sería conveniente que el docente sugiera a los alumnos revisar los dos problemas anteriores en los cuales las condiciones sobre los parámetros ya se pusieron en juego y aportan información en el recorrido hacia la generalización.

Problema 8

¿Será cierto que los gráficos de las funciones $f(x) = 2^{x+1}$ y $g(x) = 2 \cdot 2^x$ son iguales? Explicá las razones que justifican tu respuesta.

Comentarios sobre el problema 8

Este problema tiene como propósito que los alumnos analicen ciertas propiedades de la potenciación a partir de un soporte gráfico e, inversamente, anticipen relaciones entre gráficos a partir de propiedades de la potencia.

Un aspecto central en este problema es el hecho de reconocer que aquellas funciones definidas por fórmulas equivalentes tendrán gráficos coincidentes.

Sin embargo, es esperable que al intentar resolver este problema los alumnos no reconozcan, al inicio, la equivalencia algebraica de las fórmulas. De allí que la elaboración de los gráficos permitiría habilitar un interrogante: ¿por qué los gráficos coinciden?

Podría también suceder que los alumnos no grafiquen y concluyan que los gráficos serán iguales comparando los resultados obtenidos a partir de la confección de tablas de valores para cada función. En tal caso, será interesante que el docente pueda promover un análisis de la coincidencia de los gráficos más allá de la tabla de valores. De hecho, apelar a una de las tablas permitiría también discutir las propiedades de la potencia. Por ejemplo:

x	2^{x+1}	$2 \cdot 2^x$
0	2	2
1	4	4
2	8	8
–2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Analizar con los alumnos el modo en que se relacionan los cálculos que se hacen en cada caso habilita a establecer que, de una u otra forma, se eleva el número 2 a una cierta potencia y se vuelve a multiplicar por 2, es decir, aumenta en una unidad la potencia original. Se trata de ayudar a los alumnos a identificar o recuperar la propiedad de producto de potencias de igual base.

Consigna optativa

Una vez finalizado este problema, el docente podrá proponer a los alumnos la siguiente actividad, que tiene una finalidad similar a la del problema, pero poniendo el acento en otras propiedades:

Decidan si los gráficos de cada par de funciones coinciden o no. En el caso de que sean coincidentes, expliquen por qué:

a. $f(x) = 2^{-x}$ *y* $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

b. $f(x) = 2^{2x}$ *y* $g(x) = 4^x$

c. $f(x) = 2^{x^2}$ *y* $g(x) = (2^x)^2$

Problema 9

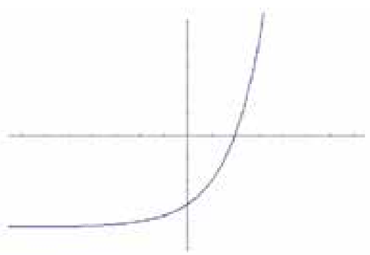
a. ¿Podés encontrar algún valor de **x** *tal que* $f(x) = 2^x - 4$ *tenga imagen nula?*
b. ¿Existe algún valor de **x** *tal que* $f(x) = 3$*? ¿Por qué?*
c. ¿Existe algún valor de **x** *tal que f(x) sea negativa? ¿Por qué?*
d. ¿Podés hallar algún valor del dominio de la función tal que $f(x) = -3,5$*? ¿Y para* $f(x) = -3,9375$*?*
e. Ídem, para $f(x) = -5$.

Comentarios sobre el problema 9

Este problema es una buena oportunidad para poner en interacción el trabajo gráfico con el trabajo algebraico.

A esta altura de la secuencia es esperable que algunos alumnos, para resolver realicen, para cumplir la consigna **a**, el gráfico de la función, ayudados por una tabla de valores, y reconozcan que existe un valor para x que verifica lo siguiente: $2^x - 4 = 0$. La confección misma de la tabla podría habilitar a su reconocimiento: $x = 2$.

x	$2^x - 4$
0	–3
1	–2
2	0



Es decir, no se espera que los alumnos, en un inicio, enfrenten el problema con recursos vinculados a las ecuaciones exponenciales. Se trata de propiciar el establecimiento de relaciones entre gráficos, tablas y fórmulas como medio de trabajo.

La gráfica de la función $f(x) = 2^x$ también puede ser un recurso para "atacar" el problema, pues los alumnos pueden intentar determinar para qué valor de x esta nueva función vale 4, ya que, al restarle 4, se obtiene 0.

Ambas estrategias de resolución habilitan al docente a establecer una relación entre una ecuación algebraica y un gráfico asociado. Esto es: buscar los valores de x que hacen nula a la función $f(x) = 2^x - 4$, equivale a determinar las soluciones de $2^x - 4 = 0$. Y esta última expresión es equivalente a establecer en qué valores la función 2^x vale 4.

Por otro lado, el uso de uno u otro gráfico permitiría a los alumnos identificar que hay una única solución.

En la resolución de la consigna **b**, aquellos alumnos que recurrieron al gráfico podrán reconocer que existe algún valor para x de manera tal que $f(x) = 3$, aunque no sea posible identificarlos. Es posible que algunas explicaciones sobre la existencia de solución se apoyen en la noción de imagen de la función, o simplemente en lo visual, señalando en el gráfico la existencia de un valor del dominio con imagen 3.

Otros alumnos podrán suponer que la existencia de tal valor se sostiene a partir de la resolución de la ecuación $2^x - 4 = 3$ (o de algún procedimiento que permita encontrar el valor de x que cumple con lo pedido). En este punto, es posible que algunos alumnos apelen al pasaje de términos a partir de sus conocimientos sobre la resolución de ecuaciones de otra naturaleza, para reconocer la equivalencia de esa ecuación con esta otra: $2^x = 7$.

La imposibilidad de encontrar una solución de la ecuación –con los recursos de que disponen los alumnos a esta altura de la escolaridad– habilita al docente a sugerir aproximaciones. De esta manera, se espera que puedan ensayar con valores entre 2 y 3, por ejemplo 2,5, y se vayan aproximando por tanteo al resultado, aunque sin encontrarlo. Es una buena oportunidad para volver a leer el enunciado del problema, que indaga sobre la existencia y no sobre la determinación del valor. De todas maneras, el trabajo de aproximación podría permitir a los alumnos conjeturar la presencia de tal solución, aunque no sea posible encontrarla con los recursos disponibles. El soporte gráfico podrá colaborar en la certidumbre de su existencia.

Para resolver la consigna **c** es probable que los alumnos ensayen con valores a derecha e izquierda del cero de la función. La consigna **a** servirá como referente, ya que la tabla o el gráfico habilitan a reconocer aquellos valores en los cuales la función es negativa.

Para resolver la consigna **d** es esperable que algunos alumnos recurran una vez más al gráfico o a la tabla de valores. De todas maneras, no siempre dicho gráfico o la tabla incluirán el valor –1 para x. El docente podrá sugerir a sus alumnos ampliar la tabla de valores, extender el gráfico, o continuar ensayando con el recurso de la calculadora o "a ojo", a partir de las herramientas ya disponibles, hasta establecer la solución.

Otros alumnos quizá recurran a la expresión algebraica: $2^x - 4 = -3,5$ y de allí concluyan que $2^x = 0,5$. No será sencillo que identifiquen en esta expresión, en un inicio, el valor que deberá adquirir la variable x. Tal vez sea necesario que el docente favorezca el uso de relaciones entre expresiones decimales y expresiones fraccionarias.

Aquellos alumnos que pudieran trabajar con la función $f(x) = 2^x$ seguramente realicen un trabajo similar: $f(-1) = \frac{1}{2} = 0,5$ y ese valor, al restarle 4, da –3,5.

Pero cuando se trate de enfrentarse a la búsqueda de un valor que verifique $f(x) = -3,9375$ será conveniente usar como recurso el gráfico y/o también aproximarse a través de ensayos con valores. Se trata en este caso de apelar a la noción de asíntota.

La resolución de la consigna **e** implica apoyarse en la consigna anterior, reconociendo que la asíntota en $y = -4$, junto con el hecho de que la función es creciente, aseguran que la función no podrá tomar valores menores al valor $y = -4$. De allí se podrá concluir que $f(x) = -5$ no se verifica para ningún valor de x.

Otros alumnos intentarán resolver la ecuación $2^x - 4 = -5$, o su equivalente $2^x = -1$, y llegarán a la conclusión de que esta última ecuación no tiene solución, ya que se ha visto que la función $g(x) = 2^x$ tiene siempre imágenes positivas y, por lo tanto, no hay valor de x que satisfaga $g(x) = -1$.

Es posible que algunos alumnos utilicen como recurso de solución los desplazamientos. Es decir, grafiquen $f(x) = 2^x$ y sostengan que el gráfico de $f(x) = 2^x - 4$ es igual, pero "4 unidades hacia abajo". Con este recurso, es esperable que reconozcan la asíntota en -4 y traten el problema desde esta representación.

La presencia en clase de distintos caminos de solución puede dar lugar a un debate en el que el docente plantee un nuevo desafío: establecer relaciones entre la resolución algebraica y la resolución gráfica.

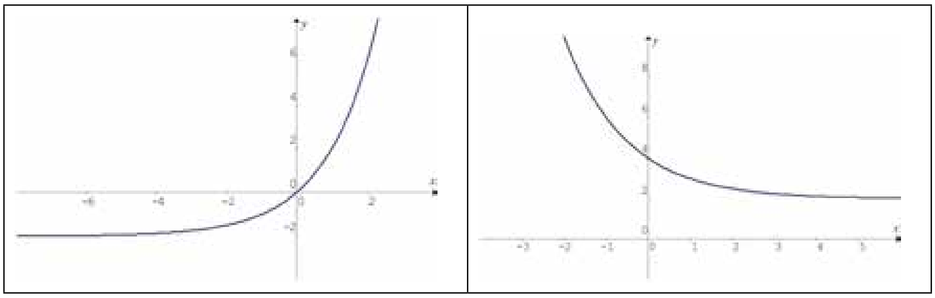
Consigna optativa

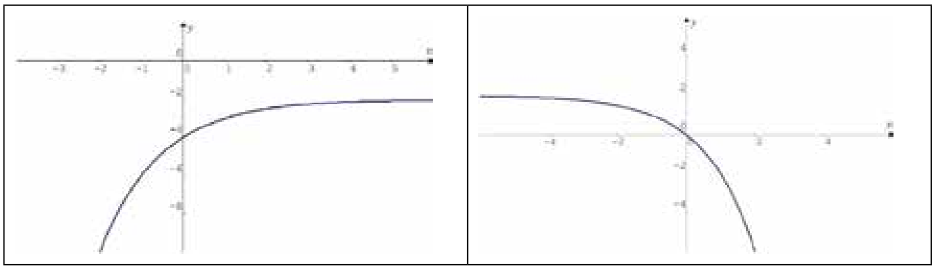
A continuación, el docente podrá avanzar en el estudio de este tipo de funciones a partir de un enunciado como el siguiente:

*f. ¿Cuáles son todos los valores posibles que puede tomar la variable **x** para que la función* $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 4$ *proporcione imágenes negativas?*

Problema 10

Las siguientes funciones son del tipo: $\boldsymbol{y = k \cdot a^x + b}$. *Para cada una de ellas, analizá el signo de **k** y **b** y, además, indicá si* $\boldsymbol{a} \in (1; +\infty)$ *o si* $\boldsymbol{a} \in (0; 1)$.





Comentarios sobre el problema 10

En el problema 9 ya se analizó la potencia del trabajo en términos de relaciones entre gráficos, tablas y expresiones algebraicas. Este problema nuevamente pone en relación estos recursos, pero incorpora una nueva dificultad: un posible desplazamiento. Pasar de considerar la función $f(x) = k \cdot a^x$ y sus condiciones a tratar con la fórmula $f(x) = k \cdot a^x + b$ supone recuperar ciertas relaciones ya establecidas así como modificar otras, en particular la idea de ordenada al origen.

Es probable que algunos alumnos vuelvan a enfrentar este problema asignando valores numéricos a los parámetros *k*, *b* y *a*, dado que hasta ahora han graficado solamente funciones del tipo $f(x) = k \cdot a^x$, sin sumar o restar una constante. Por lo tanto, es esperable que traten con casos particulares que permitan asignar cada gráfico a una posible condición. Se espera que algunos alumnos sostengan que, por ejemplo, el primer gráfico responde a la condición $a > 1$, ya que es creciente, sin establecer condiciones sobre *k* y *b*. Una vez más, es tarea del docente interrogar sobre el conjunto de condiciones y la simultaneidad de las mismas para *a, k* y *b*. En este punto, el docente podrá sugerir que los valores que los alumnos consideren –a modo de ejemplos– vayan cambiando con alguna sistematicidad, es decir, que no se asignen valores de manera azarosa, ya que se trata de reconocer ciertas regularidades que es esperable que aparezcan.

La suma de una constante a la función podría producir una ruptura sobre una anticipación que en un primer momento establecen algunos alumnos: el valor de *k* es la ordenada al origen siempre, tal como lo muestra el siguiente extracto de la discusión de un grupo de alumnos en un aula:

(Se ven varias hojas con gráficos producto del ensayo con diversos valores de b. Los alumnos comentan:)
A1: Como se suma *b*, puede subir el gráfico y ahora cruza el 0. *(Señala un gráfico con imagen negativa.)*
A2: No, no puede cruzar este *(Señala el eje x.)*
A3: Sí, *b* te da un aumento sobre el eje *y*, lo sube a todo y ahí puede cruzar.

A2: *(Mira los gráficos en su carpeta y los otros de la hoja de la mesa que hicieron en el grupo.)* Ahh, claro, sube o baja con *b*, así se va para arriba o para abajo… pero… no es *k*, donde cruza al eje *y*?

Pareciera ser que considerar a *k* como ordenada al origen en las funciones del tipo $f(x) = k \cdot a^x$ podría ser un obstáculo para pensar los corrimientos en relación con las funciones que tienen como expresión a $f(x) = k \cdot a^x + b$. Será necesario buscar nuevas informaciones que portan los parámetros y que surgen a partir de sumar o restar una constante.

No se trata de que los alumnos identifiquen un único valor para cada parámetro, se busca profundizar el estudio de las condiciones de los parámetros que provocan ciertas modificaciones en los gráficos. Se aspira a que los alumnos elaboren una síntesis de condiciones de crecimiento –reconociendo que esto se debe a los parámetros *k* y *a*– y condiciones de desplazamiento –reconociendo que esto depende exclusivamente del parámetro b– para las funciones del tipo $f(x) = k \cdot a^x + b$.

Consigna optativa

Al finalizar el trabajo con el problema, el docente podrá ofrecer a sus alumnos la siguiente actividad, con la finalidad de profundizar el estudio acerca de las condiciones sobre los parámetros:

¿Será cierto que la raíz de $f(x) = k \cdot a^x + b$ *depende de* ***a*** *y de* ***b****?*

A MODO DE CIERRE

El trabajo presentado ofrece un conjunto de posibles modos de elaborar junto con los alumnos aspectos del modelo exponencial en diferentes escenarios o contextos: el gráfico, el algebraico, el aritmético y el funcional.

Cada uno de ellos aporta información, desde su propia perspectiva, sobre el comportamiento exponencial.

El juego de ensamble y relaciones entre distintos contextos amplía y profundiza la mirada sobre el modelo y da nuevas alternativas a los alumnos para su comprensión y/o tratamiento.

En esta propuesta se han reunido dos cuestiones del quehacer matemático: una de ellas ha sido la problematización del modelo exponencial; la otra ha sido la formulación de hipótesis, conjeturas, anticipaciones, justificaciones y validaciones por parte de los alumnos.

Capítulo 3
El docente, los alumnos y la emergencia de la fundamentación

En esta sección, se abordará un problema de la enseñanza de la matemática que es transversal al aprendizaje de contenidos y que en este texto se trabajará a propósito del tratamiento de la función exponencial. Se trata de la producción en el aula de explicaciones matemáticas que serán designadas con el término de *fundamentaciones*. El énfasis estará puesto en mostrar la gestión docente de una clase donde se trabaja para la emergencia de este tipo de producciones por parte de los alumnos.

La producción de conocimiento matemático en el aula puede formar parte de una propuesta de enseñanza a lo largo del desarrollo de todo el currículum matemático. La elaboración de preguntas, conjeturas, hipótesis, pruebas, contraejemplos, dominios de validez de expresiones o de afirmaciones es una actividad que no tiene por qué quedar encerrada en la enseñanza de la geometría en el Nivel Secundario (como a veces sucede en el imaginario).

La secuencia diseñada (presentada en los capítulos I y II) apunta a que las características del modelo exponencial se estudien, analicen y discutan durante la producción de afirmaciones, conjeturas, hipótesis provisorias, ejemplos y contraejemplos. Se marca de este modo una situación de clase donde la producción de conocimiento matemático es la actividad central de los alumnos y está "custodiada" por el profesor. De este modo, la gestión docente de estas clases ha tenido un doble objetivo: trabajar enseñando la función exponencial y poner especial énfasis en la producción por parte de los alumnos de estas explicaciones matemáticas, las fundamentaciones. Este proyecto de enseñanza de la función exponencial y también de las formas del razonamiento matemático se sustenta en una concepción de enseñanza y aprendizaje que entiende que el modelo exponencial y sus características serán construidos por los alumnos para poder resolver los problemas-situaciones que les fueron planteados.[7]

Si bien no es el propósito de este texto abordar la discusión y descripción en profundidad del significado del objeto "fundamentación" –ya que no resulta necesario para desarrollar la complejidad del trabajo docente en la producción de explicaciones matemáticas por parte de sus alumnos–, es imprescindible ofrecer una conceptualización de ese objeto, para poder imaginar su posible despliegue en la clase. La fundamentación es considerada como una forma particular de explicación para el ámbito de la matemática.

7 Esta concepción se fundamenta en la Teoría de Situaciones Didácticas. En ella, la enseñanza se concibe como la devolución al alumno de una situación a-didáctica, y el aprendizaje, como la adaptación del alumno y sus conocimientos para tal situación.

Fundamentar es proponer, a raíz de una cuestión dada, una **explicación** basada sobre los conocimientos matemáticos del sujeto que la formula, pensada para que sea **aceptada** por una cierta comunidad en un **momento** dado y **portadora de reglas** del trabajo de producción matemático.

En el transcurso de las fundamentaciones producidas por los alumnos y por los docentes, se delinearán estos conceptos.

Como ya fue mencionado, este proyecto comenzó con una modalidad de trabajo de taller, en cuyo marco docentes y coordinadores discutieron la producción de un conjunto de problemas que permitieran abordar esta cuestión. La viabilidad de cada problema se jugaría en cada curso, con cada docente y grupo de alumnos. Es claro que en cada aula se constituye una comunidad de producción matemática de características especiales, atendiendo no solo al tipo de estudio de los alumnos (por sus orientaciones elegidas), sino también a su trayectoria. Cada docente debería buscar el horizonte de trabajo. El análisis de las respuestas posibles de los alumnos durante el taller tuvo, en principio, como eje de discusión "qué entendemos por fundamentar", cómo presentar esta actividad, cómo señalar que una fundamentación está incompleta o que ya ha sido alcanzada, cómo conformar una comunidad de trabajo que vigile la producción de razonamientos que atiendan a estas reglas.

Los enunciados de los problemas del capítulo 1 muestran (como ya fue explicitado), a partir de distintos tipos de datos, un cambio en las variables mencionadas y, en cada uno de ellos, las consignas elaboradas tienen la intención de que los alumnos exploren las situaciones, y formulen (ya sea como conjetura, hipótesis o como afirmación) un modelo de evolución de estas magnitudes. Se busca que el modelo exponencial surja como la mejor respuesta a estos problemas frente a otros modelos (como el modelo lineal y las relaciones de proporcionalidad) que probablemente los alumnos utilicen y se manifiesten como insuficientes para dar cuenta de la evolución de las magnitudes que se les presentan.

Estos primeros problemas conducen a los alumnos, en forma similar, a un trabajo de:

- exploración con ejemplos y situaciones particulares,
- formulación de conjeturas que los alumnos discutirán en trabajos grupales,
- elaboración de enunciados y su fundamentación.

A continuación, se hará un recorrido por algunos de los problemas trabajados con los alumnos en el orden en el que fueron realizados y se considerará, en cada uno de ellos, aquellas fases de trabajo que resultan más elocuentes para identificar las posibilidades de esta propuesta.

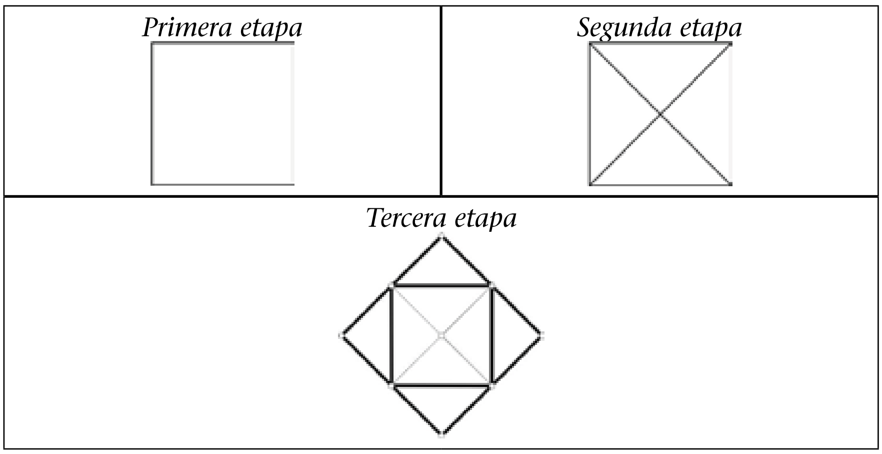
Escena Nº 1: El primer problema de los cuadrados y la construcción del nuevo polígono; diálogo entre docente y comunidad-clase

En el primer problema "de los cuadrados", se decidió una primera fase del trabajo en la que cada docente realizara frente a sus alumnos en el pizarrón la construcción de la nueva figura y los convocara a discutir y decidir qué tipo de figura era la construida. Se pretendía propiciar, de este modo, la aparición de propiedades de la figura que luego pudieran ser reutilizadas por los alumnos para formular la medida del área de las figuras resultantes en los respectivos pasos. De este modo, en esta fase, los docentes realizaron frente a sus alumnos en el pizarrón la construcción del nuevo polígono y elaboraron junto a ellos una fundamentación que les permitió justificar que la nueva figura era, efectivamente, un cuadrado. Las ideas que surgieron fueron propuestas por los alumnos, y los docentes reunieron las explicaciones dándoles la coherencia necesaria para que fueran justificaciones válidas.

En su mayoría, los argumentos emergentes resultaron de la constatación de rectas paralelas a las diagonales y, por ende, perpendiculares entre sí. Luego también se observó que cada uno de los cuatro triángulos del cuadrado original tenían un triángulo reflejado en la nueva figura. Estas observaciones fueron reutilizadas por los alumnos en la fase siguiente.

El siguiente diálogo permite analizar las interacciones entre alumnos y docente y sus aspectos destacados en la producción de fundamentaciones. Cada intervención aparece numerada, para facilitar las referencias posteriores.

1. Docente: A ver, necesito que me ayuden. Cuidado Agustín, que el otro día me salvaste. En este cuadrado *(que acaba de dibujar)* marco las diagonales; mi construcción es así: yo voy a tomar una paralela a esta diagonal que pase por los vértices que no están en esa diagonal, ¿ven? Ahí. Lo mismo con la otra. Me tienen que ayudar a decidir qué es esta figura. *(La profesora realiza este dibujo en tres etapas.)*



2. A_0: Es un cuadrado.
3. A_1: Es un rombo.
4. A_2: Es un cuadrado, pero con otra posición.
5. Docente: pero a ver, ¿es un cuadrado? ¿Por qué es un cuadrado?
6. A_0: Es un cuadrado dado vuelta. Todos los lados son iguales.
7. Docente: ¿Y cómo saben que todos los lados son iguales?
8. A_3: Porque las diagonales son iguales.
9. Docente: ¿Qué diagonales?
10. A_3: Si trazás las diagonales de la nueva figura, van a pasar por el mismo centro.
11. Docente: Ah. Ella dice que si trazo las diagonales de la nueva figura van a pasar por el mismo punto que las diagonales del cuadrado original. Y vos, ¿como sabés eso?
12. A_3: Eh... no sé. (*Risas*.)
13. Docente: Bueno, esperen, vamos a reconstruir, vamos a escucharnos. Ustedes dicen que esa nueva figura es un cuadrado, y entonces Agustín dice que es porque tienen los lados iguales.

Inicialmente, los alumnos afirman que la figura es un cuadrado, apoyados en la percepción, en lo que ellos "ven". El pasaje de aquello que se ve a aquello que se puede validar, justificar, se propicia por las preguntas de la profesora, quien no solo pide ampliaciones para aceptar las afirmaciones de sus alumnos, sino que les devuelve la responsabilidad de una explicación convincente. En este sentido, se observa que cuando el alumno A3 (en la intervención 8) habla de diagonales, la docente le pide que aclare a qué diagonales se refiere. Resulta interesante observar que el alumno estaba haciendo un comentario sobre diagonales que, justamente, no estaban en el dibujo. Sin este pedido de aclaración, se podría haber interpretado que las diagonales eran las dibujadas.

Los alumnos convocados a la producción de ideas van ofreciendo evidencia de lo que ven y de lo que pueden deducir o conformar a partir de su observación y de los datos o premisas iniciales. La profesora, frente al pizarrón, realiza una tarea de mediación, va reproduciendo las explicaciones de los alumnos que intervienen con un propósito central para este trabajo: que la producción de cada participante de la comunidad-clase sea tenida en cuenta por el resto. De este modo, la profesora contribuye a una construcción –la de una **comunidad de producción**– que no es inmediata, y que debe ser sostenida en el tiempo por el docente.

En el seno de esta comunidad-clase se irán delineando las características de la producción de razonamientos matemáticos a partir de un modo de trabajo que, si bien no es exclusivamente oral, en esta propuesta se produce muchas veces desde la oralidad. Continuando con la escena, puede verse, seguidamente, cómo la profesora realiza una nueva reconstrucción del comentario de una alumna, pero ahora con otra intención.

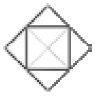
(Interviene una alumna, Noelia, proponiendo que los lados del cuadrado original sean considerados como las hipotenusas respectivas de los nuevos triángulos.)
14. Docente: Ella dice que los lados del cuadrado original van a ser hipotenusa de esos nuevos triángulos, que son rectángulos. Ella afirma que estos triángulos son rectángulos, y que esta es la hipotenusa. Y en el caso en que esa sea la hipotenusa y que esos triángulos sean rectángulos, ¿qué me ayuda a ver?
15. Alumna (Noelia): Que los lados son iguales.
16. Docente: Es decir que si dos triángulos rectángulos tienen la misma hipotenusa, ¿son iguales?
17. Noelia: No... Entonces no es un cuadrado.
18. Alumna (Marianela): Es un cuadrado, profe, ¡el lado del cuadrado que se formó tiene el mismo largo que las diagonales del cuadrado original!
19. Docente: ¡Momento, que acá hay otra cosa! Marianela dice que ella apoya la decisión de Agustín en esto. Ella dice que este lado de acá es igual a la diagonal del cuadrado original, que está acá, y que este otro lado es igual a la otra diagonal. ¿Entonces? ¿Cómo seguimos ahora?

Se destacan dos intervenciones (14 y 19) de la profesora, en las que invita a los alumnos a continuar desarrollando una idea formulada a partir de un supuesto.

En el primer caso, el supuesto ha sido propuesto por una alumna que "ha visto" en la nueva figura cuatro triángulos rectángulos con la misma hipotenusa.[8] La docente toma este supuesto de la alumna, se lo devuelve a toda la clase y entra en un juego hipotético, preguntando qué es lo que este supuesto le permite deducir. Para ello, en primer lugar, señala cuáles fueron las dos afirmaciones de la alumna, arma con ella una sentencia y luego marca con el condicional la calidad de hipótesis de esas afirmaciones. Esta operación está dirigida tanto hacia la alumna como hacia la comunidad-clase.

En el segundo caso, toma la observación de otra alumna, quien "ha visto"[9] que los lados del nuevo polígono tienen la misma longitud que las diagonales del cuadrado inicial y, por lo tanto, son iguales. No se concluye directamente de la construcción

8 Los triángulos que menciona la alumna se señalan en negrita en el siguiente gráfico:



Las hipotenusas de los cuatro triángulos son los lados del cuadrado original, en tanto que sus catetos están formados por parte de los lados del nuevo cuadrilátero.

9 Cabe destacar que la afirmación de la alumna Marianela se apoya en lo visual.

realizada que los lados del nuevo polígono tengan la misma longitud que las diagonales, ya que se realizó una construcción de traslado de paralelas. Sin embargo, la profesora omite momentáneamente esta situación, mantiene el supuesto, y pide a los alumnos que continúen con el desarrollo de la idea a partir de este supuesto (luego retomará el pedido de justificación de dicha hipótesis; esto muestra, además, que este trabajo no tiene un recorrido lineal).

20. Marianela: Las diagonales del cuadrado son iguales; entonces, los lados nuevos son iguales.
21. A_1: Y tienen ángulos rectos.
22. Docente: ¿Y como sabemos que tienen ángulos rectos? A ver, reconstruyamos esta variación. Ella dice que este lado es igual a esta diagonal. Ustedes, ¿están de acuerdo con esto? ¿Por qué son iguales?
23. A_1: Porque son paralelas.
24. Docente: ¿Eso alcanza?
25. A_1: No, pero esas también son paralelas.
26. Docente: Ah, entonces hay una "faja" de paralelas acá y otra faja acá. ¿Y qué forma esta figura?
27. A_1: Un rectángulo.
28. Docente: Bueno.
29. A_2: O un cuadrado.
30. Docente: Si yo tengo una faja de paralelas acá y otra acá, ¿siempre se forma un rectángulo? Organicémonos, porque estamos dando distintas variaciones y son todas buenas.
31. A_2: Porque son perpendiculares.
32. Docente: Ah, y… ¿cómo saben que son perpendiculares?
(Hay una enorme participación de la clase, muchos alumnos hablan juntos. La docente no toma ninguna de las respuestas superpuestas de los alumnos.)
33. Docente: Yo les pregunté si esta figura era un cuadrado. Ella dice: "Este lado es igual a este", yo estoy tratando de ver por qué son iguales. Yanina me dijo que son iguales porque acá hay dos fajas de paralelas. Yo les pregunto ahora: si no tuvieran esto así, si no vieran esta figura y yo les digo: "Si tengo dos fajas de paralelas, ¿qué figura forma?"… Es un cuadrilátero, pero, ¿qué cuadrilátero?

En esta parte del diálogo, es la propia docente quien propone, tomando una observación de un alumno, suponer que se tiene un cuadrilátero formado por pares de lados paralelos, e impulsa a sus alumnos, a partir de ese supuesto, a decidir qué se podría decir acerca del cuadrilátero así formado.

En esta primera escena, se resaltan algunas intervenciones del docente, que podrían estar señalando:

- una forma de trabajo (que constituye el corazón del trabajo matemático) donde la hipotetización de una idea permite avanzar sobre el conocimiento potencial de la figura;
- la existencia y disponibilidad de una estructura supuesto-deducción que están utilizando los alumnos, aunque tal vez no conscientemente, en sus argumentos.

En estas intervenciones, el docente está comunicando "en acto" una forma que puede asumir la fundamentación y también una función posible: la de contribuir a la producción de "ideas-sostén del trabajo".

Los supuestos son provisorios, y utilizados tanto por la docente como por los alumnos para continuar la construcción de una fundamentación que permita validar que la figura construida es, efectivamente, un cuadrado. En el proceso, los alumnos van construyendo un conjunto de explicaciones locales que motorizan sus propias ideas. Hay una retroalimentación entre la observación de la figura construida en el pizarrón, la explicitación de los observables y la construcción de explicaciones, lo que promueve nuevas observaciones e ideas. La docente va sosteniendo todo el proceso con preguntas que apuntan a buscar la explicitación de las afirmaciones de los alumnos y con comentarios que clarifican dichas intervenciones y le devuelven a la comunidad-clase las afirmaciones expresadas por algunos alumnos. El intercambio que se da en la clase aparece moderado por el docente, pero en ese intercambio él se ha corrido de lugar. Los alumnos no dialogan con el profesor, sino que él provoca un diálogo entre los estudiantes, devolviendo a la comunidad-clase cada una de las intervenciones de sus integrantes.

Los alumnos están activamente involucrados (esto último puede no inferirse de la transcripción, pero se evidencia en los tonos de las voces y la dinámica que tiene la clase observada y registrada en audio). Hay, en definitiva, un énfasis puesto en la producción de argumentos que se ubica por encima de la producción de enunciados verdaderos. La escena sigue, hasta su conclusión.

34. Alumna (Yanina): Un cuadrado.
35. A_2: Un rectángulo.
36. Alumno (Bruno): Un cuadrilátero cualquiera, si son perpendiculares exactas, va a dar un rectángulo.
37. Docente: Sí, eso es verdad. Bruno está diciendo que si estas diagonales son perpendiculares, entonces acá también se van a cortar perpendicularmente, y va a ser un rectángulo. Y, ¿qué pasa con los lados opuestos del rectángulo?
38. A_2: Van a ser iguales.
39. Docente: Listo. ¿Y los otros lados? ¿Cómo llegamos a que estos lados son iguales?

40. Marianela: Y además, porque los trasladamos en forma paralela.
41. Docente: Bueno, retomemos. Hemos visto que los lados son iguales, pero esto no nos alcanzaba, teníamos que ver que los ángulos son rectos para concluir que se trata de un cuadrado. ¿Por qué vimos que los ángulos son rectos?
42. A_4: Porque trasladamos las diagonales que eran perpendiculares.
43. Docente: Ahora tenemos todo. Bueno, acá nos dividimos y van a trabajar en grupos de tres o cuatro. Ármenlos.

Durante el intercambio, han surgido varias intervenciones de los alumnos –no todas directamente útiles– para la producción de las razones por las que el polígono resulta un cuadrado. La profesora dio oportunidad para que todas afloraran y se desarrollaran, sin sancionar su pertinencia; por el contrario, fue convocando a que los alumnos continuaran con sus exposiciones hasta que surgiera del mismo grupo alguna explicación superadora de la que se analizaba.

A lo largo de toda la escena, hubo algunas intervenciones del docente, suscintas, mediante preguntas cortas que vienen precedidas, en algunos casos, de una reconstrucción del discurso de los alumnos; se ve en todas ellas una demanda del docente por ahondar en explicaciones-fundamentaciones que les permitan a los alumnos sostener el valor de verdad de las afi rmaciones que están realizando ("¿Por qué es un cuadrado?", "¿Y cómo saben que todos los lados son iguales?", "Y vos ¿cómo sabés eso?", "¿Y cómo saben que tienen ángulos rectos?", "A ver, reconstruyamos esta variación. Ella dice que este lado es igual a esta diagonal; ¿por qué son iguales?").

De esta forma, el docente señala que aquello que están *observando* en el pizarrón y afirmando: que los lados son iguales, que las nuevas diagonales son perpendiculares (independientemente de que estén o no dibujadas), que los ángulos son rectos, debe ser *fundamentado* a partir de las características de la propia construcción o mediante propiedades conocidas por los alumnos. Lo visual no alcanza. Los impulsa así a pasar de la observación a la fundamentación. No se trata de relatar lo que se ve, sino de construir un repertorio de ideas organizadas en cadenas deductivas.

Los alumnos, por su parte, aceptan el desafío que sostiene el docente sobre la necesidad de justificar sus afirmaciones más allá de que la imagen del pizarrón los avale; esto indica que en este grupo de alumnos algunas cuestiones referidas a las características de la producción de explicaciones matemáticas ya están instaladas. No obstante, sus primeras afirmaciones se apoyan en lo que están viendo (por ejemplo, A_3, en la intervención 8, entiende que "diagonales iguales" es una condición necesaria para que el cuadrilátero sea un cuadrado, aun cuando no justifica por qué son iguales). Es la docente quien acepta o no las relaciones que se presentan. En este sentido, la necesidad de una fundamentación está comandada por la docente, al menos en esta etapa inicial.

Una vez finalizada esta primera fase colectiva de trabajo, los alumnos pasaron a discutir en grupos las consignas entregadas. Sus producciones se retomarían en una tercera y última fase colectiva de debate.

Todos los problemas se trabajaron con una modalidad de entrega de consignas y trabajo grupal como primera fase (o segunda fase, en este único caso del primer problema de los cuadrados, en el que la fase 1 fue dada por la discusión recién analizada) y con una fase posterior de puesta en común y debate colectivo. La oralidad[10] fue concebida como la primera forma de trabajo, y esto es usual en una clase de matemática (y también en otras). La participación activa de los alumnos los involucra de un modo distinto en la producción de conocimiento. Ahora bien, en un escenario en el que los alumnos están elaborando sus ideas en forma oral, sus producciones se confrontan con las de otros alumnos y también dialogan con la propuesta-producción del docente. En tal caso, reciben observaciones de los docentes (y compañeros) sobre sus propias producciones y estas retroacciones pueden ser rechazadas o cuestionadas o simplemente no deseadas por los alumnos, en la medida en que ellas dan cuenta frente a toda la "comunidad-aula" de su posición frente a un problema y desentrañan su forma de razonar. El trabajo grupal previo a la oralidad de la puesta en común ofrece a los alumnos mayor confianza en sus producciones, pues ellas han sido ya presentados a otros alumnos (los de su grupo) analizadas, refutadas o avaladas en un proceso de debate al interior de los grupos.

Escena Nº 2: Diálogo docente-grupo de alumnas; el problema de los piojos

La fase grupal dio lugar a otras dinámicas en la producción de explicaciones, y se mostrarán ahora algunas discusiones entre alumnos y el rol del docente en ellas. Se observará que el docente se posiciona desde las producciones de sus alumnos y cuestiona la posibilidad (o no) de resolver un problema (o responder a una consigna) a partir de lo que ha planteado un alumno.

Esta cuestión es absolutamente central en referencia a la producción de fundamentaciones y al involucramiento de los alumnos en un trabajo intelectual. La producción de argumentos, explicaciones, demostraciones, validaciones, no es algoritmizable, y los recorridos no son únicos. Se parte de la idea siguiente: para que un alumno pueda ser productor, se requiere un docente que pueda pensar junto con él.

Como se verá en la siguiente escena, la intervención del docente durante la fase de trabajo grupal tiene también como objetivo la confrontación con grupos de alumnos que se vieran frenados en su trabajo por una duda-contradicción u otra situación. El docente invita al debate en el grupo como un medio de elaborar entre todos las ideas gestadas por algún integrante.

10 La oralidad es una cuestión central para la propuesta de la fundamentación, pues esta se gesta en el trabajo oral. Sin embargo, la oralidad se contrapone con el dispositivo escolar, en la medida en que es una actividad donde el control que puede ejercer el docente sobre las producciones de los alumnos se atenúa o, incluso, se diluye.

1. A_1: Bueno, y para ver la cantidad de días, dividí diez por cinco y me da dos. Hago tres al cuadrado igual a nueve, luego hago ciento ochenta dividido nueve y me da la cantidad de piojos: veinte.
2. Docente: ¿De qué día?
3. A_1: Del primero. Le pusieron veinte piojos al nene.
4. A_2: Para mí está mal.
5. Docente: Contales lo que me contaste a mi primero. Vos me dijiste que inicialmente vos pensaste que tenía un piojo.
6. A_1: Yo dije, bueno, no sabía cuántos había, entonces dije, uno al menos tiene que haber, entonces a los cinco días hay tres y a los diez días hay nueve. Llegué así: con un piojo me da nueve, con dos me da dieciocho, y seguí, me di cuenta que iba a tardar mucho en llegar a ciento ochenta.
7. Docente: ¿Se entiende lo que ella dice? Ella dice así: suponé que pongo un piojo, a los cinco días tengo el triple, a los diez el triple de nuevo. Entonces multiplico por nueve. Si agrego otro piojo arranco con dos, y multiplico por nueve. Cada piojo que agrego me da nueve piojos, a los diez días. Entonces vio que si dividía a ciento ochenta por nueve tendría los piojos iniciales. Ahora, estos veinte piojos es lo que hay inicialmente. ¿Y cómo hacés para ver los piojos a los veinte días?
8. A_1: Para los veinte días hice veinte por tres a la cuarta (*anota "20 x* 3^4*"*). Para saber el cuatro hice veinte dividido cinco. Porque para averiguar el dos había hecho diez dividido cinco. *(Anota: "10 : 5".)* Creo que hay un poco de concordancia.
9. Docente: ¿Se entiende lo que está haciendo?
10. A_2: Me perdí con el tres a la cuarta.
11. Docente: Eso, te pregunta. *(Le traslada a la alumna A1 la pregunta de su compañera.)*
12. A_1: El cuatro es por veinte dividido cinco. *(Anota: "20 : 5".)* Es como que lo dividí por la cantidad de días.
13. Docente: Esta operación de tomar el triple, ¿cada cuanto tiempo la hacés?
14. A_1: Cada cinco días.
15. Docente: Ella dice que cuando pasa el primer ciclo de cinco días, multiplica por tres; quiere contar la cantidad de ciclos que necesita para triplicar.
16. A_1: Por eso hice veinte dividido cinco y me dio cuatro, y había hecho diez dividido cinco y había tenido dos.
17. Docente: ¿Se entiende?
18. A_2: No.
19. Docente: ¿Hay cuatro ciclos en veinte días?

20. A_2: No, hay dos ciclos.
21. Docente: Dos ciclos, ¿de cuántos días?
22. A_2: De diez.
23. Docente: ¿Y de cinco días?
24. A_2: Hay cuatro.
25. Docente: Por eso ella puso acá que triplica, triplica, triplica en cuatro ciclos. Cuantos ciclos pasaron en cinco días. Por eso, ¿qué cuenta hago?
26. A_1: Tres a la uno (3^1), porque hay un solo ciclo.
27. Docente: Aja. Y si fuera *(en alusión a la pregunta)*, ¿cuántos piojos habría, pasados treinta días?
28. A_2: Veinte por tres a la sexta (20×3^6).
29. Docente: Fíjense que ella se propuso contar los piojos iniciales, para hacer sus cuentas.

La docente interviene en este grupo de cuatro alumnas que están en la fase de trabajo grupal, pidiéndole a una de ellas que le explique al resto como había revertido el proceso para pensar los piojos colocados en la cabeza del niño. La alumna ensaya una explicación de lo que pensó, y luego de que la docente observa que quedan alumnos sin comprender, *reconstruye* la elaboración de la alumna. Si bien agrega la expresión "se triplica" (que la alumna nunca pronuncia), se ajusta a los pasos que la alumna ha dado, destacando que la alumna comenzó explorando con un valor de un piojo, y que esto de todos modos le permitió ver el efecto de la multiplicación por tres. La alumna fue desde el inicio hacia adelante en el tiempo, y la docente se mantuvo en esta propuesta.[11]

La función de esta reconstrucción es que el grupo se apoye en este desarrollo, eventualmente lo cuestione y continúe a partir de él en alguna dirección. La docente está interesada en hacer circular la exploración hipotética: "Si fuera uno…". Resulta interesante también la expresión de la alumna: "Creo que hay concordancia", que da cuenta de una búsqueda de control, por parte de la alumna, de la consistencia de su razonamiento.

En este diálogo grupal es claro que la reconstrucción docente no tiene como fin que el alumno sea escuchado por toda la clase, ya que los compañeros que pueden oírla[12] son pocos y están cerca; no obstante, que puedan oírla no significa que puedan comprenderla, y la docente vuelve a reconstruir la explicación de la alumna para que, en términos de Balacheff, los alumnos "comprometan sus concepciones". Al mismo

11 Al mismo tiempo, otros grupos de alumnos estaban razonando con la inversión, esto es, si al avanzar 5 días se triplica, entonces al retroceder el mismo lapso de tiempo el número de piojos será un tercio (o bien se divide por 3). No ocurrió esto en este grupo, y la docente no lo trajo a colación. A esto se hace referencia cuando se hace mención a la tarea de reconstruir la producción de cada alumno.
12 Frecuentemente, en una clase la intervención de un alumno no es escuchada por sus compañeros; en las escenas que muestran diálogos con toda la clase se ve a los docentes reconstruir las explicaciones de los alumnos, para que pueden ser oídas por todos.

tiempo, la docente contribuye a cohesionar a los integrantes del grupo. La utilización de una producción de otro requiere la comprensión. Sin embargo, la comprensión no garantiza el uso de las ideas del otro, y esto implica el reconocimiento del otro en tanto productor intelectual, proceso que no se realiza de un día para otro.

Es importante, además, notar que la intención del docente se centra en el análisis y la comprensión del razonamiento producido por el alumno, privilegiando este trabajo al de corroborar una respuesta correcta.

Escena Nº 3: Segundo problema de los cuadrados; docente y grupo de alumnos

En sintonía con las anticipaciones formuladas por los docentes del proyecto, se observó que la oralidad resulta para algunos alumnos un medio de trabajo difícil de afrontar. En la escena que se muestra a continuación, se observará cómo un alumno es invitado por la docente para que pueda comunicar a sus compañeros su razonamiento en el segundo problema de los cuadrados.

En dicho problema, la utilización de fracciones resulta un recurso de escritura indispensable para que los alumnos puedan elaborar la sucesión de áreas y observar la evolución de las mismas y su comportamiento exponencial.

Por su parte, el uso de la calculadora propicia el trabajo con decimales, y esto derivó en algunos problemas para algunos grupos de alumnos que las utilizaban como soporte de trabajo. El siguiente diálogo ilustra ambos aspectos mencionados.

1. A_3: ¿Habrá algún paso en el que el área dé uno sobre sesenta ($\frac{1}{60}$)? *(Leyendo parte del enunciado del problema.)*
2. A_2: ¿Por qué uno sobre sesenta?
3. A_3: Claro, porque acá les da “uno sobre”, y a nosotros nada. Por eso digo que tenemos que trabajar con fracciones.
4. A_1: ¿Un cuarto, cuánto te da?
5. A_3: Cero coma veinticinco (0,25). A ver si lo pasamos a fracción.
6. A_2: Bueno, pasalo a fracciones entonces.
7. A_1: ¿A ver eso de uno sobre sesenta? ¿Un cuadrado de área uno sobre sesenta? Y sí, alguna vez lo vas a hacer sesenta veces.
8. A_2: Tenés que partir esos cuadrados sesenta veces. Te queda una milésima.

Los alumnos advirtieron la conveniencia del uso de fracciones a partir de la lectura de esta consigna. La misma había sido pensada para poner en evidencia la construcción de las áreas, y de algún modo esto estaba ocurriendo, aunque con otro matiz. Los alumnos corrigieron su escritura y elaboraron al mismo tiempo una hipótesis provisoria sobre la forma de llegar a un área de $\frac{1}{60}$ (realizar 60 pasos).

Es necesario destacar que estos intercambios "viven" en el aula en la etapa de producción de relaciones que emergen de esta exploración. Son expresiones que muchas veces desaparecen en instantes, sin mayor trascendencia. Son, a su vez, la muestra de la actividad exploratoria de los alumnos, quienes se encargarán de ajustarlas o rechazarlas.

Uno de los integrantes de este grupo había notado que los lados se iban reduciendo a la mitad en cada paso, y tenía en su carpeta una escritura fraccionaria de esta situación. El docente interviene en el grupo, para colaborar en la producción.

9. A_2: Suty, hacé uno sobre sesenta ($\frac{1}{60}$).
10. A_1 (Suty): Cero coma cero, cero, uno, seis (0,016) periódico en seis.
11. Docente: Él tenía una idea que por ahí les sirve. *(Les habla a todos los integrantes sobre una producción del alumno Suty. Los alumnos siguen trabajando y el alumno le explica al docente.)*
12. Suty: Para que no haga el quilombo de los decimales, lo hacemos con fracción. Cero coma cinco (0,5) es un medio ($\frac{1}{2}$), cero coma veinticinco (0,25) es un cuarto ($\frac{1}{4}$), y se va repitiendo.
13. A_3: ¿Cero coma ciento veinticinco (0,125) es un octavo ($\frac{1}{8}$)? Pasá a fracción. ¿Y cero coma seis (0,6)?
14. Docente: ¿Qué estabas haciendo vos entre un paso y otro? Vos lo habías dicho. *(El docente insiste.)*
15. Suty: ¿Qué dije?
16. Docente: Vos antes habías dicho que en cada paso los lados se dividían por dos, y así tenías uno, un medio, un cuarto, ¿y después?
17. Suty: Un octavo, y después no me acuerdo cuál le sigue, por eso le pedí la calculadora.

La primera intervención del docente (1) intentaba ayudar a comunicar a todo el grupo la idea de un alumno, Suty, que ya había observado que los lados se iban reduciendo a la mitad y que, a su vez, tenía una producción en fracciones (fue él quien advirtió al resto sobre la necesidad de trabajar con fracciones); idea que, sin embargo, no ponía a discusión. Luego, el grupo avanzó con la propuesta de Suty de todos modos, al apoyarse en la regularidad de los lados (al ser esta $\frac{1}{2}$), no mostraba directamente la medida de las áreas sucesivas. Quedaba pues construir esta fórmula. Al mismo tiempo, sus compañeros estaban encontrando la otra regularidad de las áreas, al convertir los decimales a fracción.

Puede notarse entonces que la intervención docente facilita la comunicación de argumentos a los alumnos y que, en este proceso de intercambios, se encuentra también con las resistencias y conflictos propios de intentar comunicar una explicación. Esta cuestión confirma, a su vez, el aspecto social de la producción de razonamientos en matemática.

Escena Nº 4: Un problema abierto y el efecto de la incertidumbre (i); diálogo entre alumnos

Como ya fue mencionado en el capítulo 1, el problema de los piojos da lugar a diferentes respuestas, ya que el enunciado no explicita por completo la forma de reproducción de los piojos.

Estas diferentes respuestas convivirán en el aula y se harán públicas una vez que se realice la puesta en común, y en muchos casos, la convivencia dependerá tanto del aporte del docente como de los debates generados entre los alumnos. Sin embargo, durante la fase de trabajo en grupos y la exploración de este problema, lo que prima es una incertidumbre, en los alumnos, sobre qué posición tomar. En este sentido, Balacheff[13] sostiene que la falta de certidumbre moviliza los procesos de validación de los alumnos. La próxima escena, que desarrolla un diálogo entre alumnos, da cuenta de ese momento.

En este curso, además de preguntar por los piojos al día 1, se les preguntaba por los piojos en el séptimo día. El alumno A1 había contestado en su carpeta, en forma individual, que no se podía saber el número de piojos en el 7º día. La alumna A_2, Lorena, quería realizar un promedio utilizando los datos de los días 5 y 10, teniendo en cuenta, seguramente, que 7 era "casi" la mitad del recorrido. Confrontan sus respuestas, pues están en un mismo grupo, y se da el siguiente diálogo entre ellos:

A_1: A los 7 días no sabés, porque no sabés cómo evoluciona.
A_2: Pero podés aproximar.
A_1: Eso que querés hacer no es una aproximación, es un promedio.
A_2: Hacer un promedio también es hacer una aproximación.
A_1: ¡Hacelo, Lorena! ¡Que te molesta que yo no lo haga!
A_2: Pero la profe me dijo que podía aproximar.
A_1: Pero aproximar no es lo mismo que tomar un promedio, nena.

13 Balacheff, N. *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, página 14. Colombia, Una empresa docente, 2000.

La confrontación se apoya en las distintas creencias de los alumnos. En tanto A_1 está convencido de que faltan datos para dar respuesta y que es aceptable no darla, A_2 opera bajo la creencia de que, en su rol de alumna, se espera de ella una respuesta para cada pregunta –como parte del contrato didáctico–, y rechaza así la explicación de su compañero. A la incertidumbre que promueve el problema se une la posible falta de hábito de trabajar con problemas de múltiples respuestas o sin respuesta. Durante la puesta en común, estas posiciones emergieron, se analizaron y se consensuaron.

Escena Nº 5: Un problema abierto y el efecto de la incertidumbre (ii); diálogo docente-grupo de alumnos

Otra cuestión que se plantea en el problema de los piojos –y luego también en el problema de la laguna– es la posibilidad de confrontar la producción de fórmulas, cuando surgen, con las respuestas elaboradas para responder acerca de la cantidad de piojos al primer día. Esta confrontación permite preguntar: ¿cuál es el dominio de validez de las fórmulas?; ¿qué es lo que impone el contexto? Se analizará esta situación en un diálogo entre un docente y un grupo de alumnos.

1. Docente: Entonces, me parece que ustedes pueden dar una fórmula que diga los piojos a los *n* días.
2. A_2: Veinte por tres a la n sobre cinco ($20 \times 3^{\frac{n}{5}}$).
3. Docente: ¡Claro! Ahora digo, pensemos un poquito. Eso funciona… ¿para cualquier número de días?
4. A_2: Sí.
5. Docente: Ajá, funciona para cinco, diez, etcétera. ¿Y si yo pongo?... a ver, qué contestaron en el punto *d*.
6. A_3: En el primer día, no sabemos.
7. Docente: ¿Por qué? No me queda clara la explicación. *(Dice esto mientras lee su carpeta.)*

La docente sabía que este grupo disponía de herramientas conceptuales para producir una fórmula, y quería plantear una confrontación entre el recurso de la fórmula y el razonamiento que los alumnos hubieran utilizado para dar respuesta a la pregunta por los piojos en el primer día, ya fuera este el modelo lineal o algún otro.

8. Marianela: Es que en el primer día no sabemos exactamente lo que pasó; en el primer día podría ser cualquier cosa, sabemos lo que pasa cuando hacemos cada cinco días.
9. Docente: Ustedes dicen que no queda clara la evolución de los piojos, bien, pero esa fórmula nos habilita para hacerlo en el día uno. Es decir, esa fórmula, cuando la usan para un múltiplo

de cinco, encaja bien con los datos que usaron, pero también se podría usar en otros números que no son múltiplos de cinco. *(La docente anima a los alumnos a utilizar la fórmula más allá de los datos del problema.)*
10. Marianela: Pero, ¡tendríamos medio piojo, por ahí!

Evidentemente, la fórmula que produce este grupo está validada por el contexto, y condicionada, también. En la medida en que, por ejemplo, el resultado de la fórmula no sea un número natural, esto inhabilita el uso de la fórmula para el grupo de alumnos, pues no resulta un valor adecuado para el problema. La profesora continúa discutiendo sobre el aumento de piojos día por día y el hecho, como dice el ejercicio, de que sea "parejo", hasta que el A3 sentencia que los datos disponibles no son suficientes.

11. Docente: Y ustedes dicen que esa variación les permite ver que lo que se agrega cada día es parejo. Eso, ¿qué quiere decir?
12. Marianela: Que siempre se agrega lo mismo, el primer día dos, el segundo también, etcétera.
13. Docente: A ver eso, veámoslo con los números que tenemos En el día cero había veinte piojos, a los cinco días hay sesenta; hubo una variación de cuarenta piojos en cinco días.
14. A3: Ocho piojos por día.
15. Docente: Del día cinco al diez hay ciento veinte nuevos; entonces, hay un cambio parejo de...
16. Marianela: Veinticuatro piojos.
17. A3: Si reemplazás esa fórmula con uno, te da veinticuatro.
18. Docente: ¿A ver?
19. Marianela: Te da veinticuatro coma nueve, casi veinticinco.
20. Docente: La fórmula en el medio no nos está dando lo mismo.
21. A3: Yo no sé sacar lo que pasa en el medio.
22. Docente: Parece que tenemos una idea intuitiva de lo que pasa adentro, y esta fórmula no nos dice lo mismo.
23. Marianela: Es más exacto. *(En referencia a la fórmula: está diciendo que la fórmula aporta un número exacto.)*
24. A3: Para mí eso está mal, no es que siempre suman ocho.

Marianela va fluctuando en su apreciación sobre la fórmula. Al comienzo la descarta, porque no da un número natural, pero en el diálogo opina que la fórmula es más exacta. En cambio, el A3 se mantiene ligado a los datos que aporta el contexto y realiza la siguiente afirmación:

25. A_3: Para mí, nunca se va a saber cuántos piojos va a haber con exactitud. Porque los piojos ponen distinta cantidad de huevos.

Evidentemente, este grupo de alumnos estaba en condiciones de producir la fórmula. Sin embargo, el valor de verdad asignado a la fórmula por los alumnos se confrontaba permanentemente con el contexto del problema. Para estos alumnos, la fórmula podía o no ser una representación "fiel" de la situación, podía resultar válida, correcta para algunos datos, y no para otros. No se había realizado aún ningún comentario sobre el campo de validez de la fórmula. Esta discusión se daría al realizar la puesta en común, y sería comandada por el docente.

Mientras tanto, en otro grupo de otro curso, se le asigna a la fórmula la explicación de todo el proceso.

Escena Nº 6: Un problema abierto y el efecto de la incertidumbre (III); diálogo docente-grupo de alumnos

1. Juan: Tenemos que encontrar la fórmula para ver lo que pasa en el primer día. A ver, tenemos que veinte por tres a la ene (20×3^n) sirve, pero cada cinco días.
2. A_2: ¿Y si graficamos?
3. Juan: Es exponencial.
4. Docente: ¿Por qué decís que es exponencial? ¿Ustedes también piensan que es exponencial?
5. Juan: El problema es que se triplica para cada cinco días.
6. Docente: Si te dijeran que se triplica cada día, ¿entonces no tendrías problemas?
7. Juan: No, seguro sería exponencial. Día uno: veinte por tres (20×3), día dos: veinte por tres por tres ($20 \times 3 \times 3$)…; y así seguís. x es cantidad de días, y es cantidad de piojos. Al día cero, ahí ya hay un tema. Si llamamos n a la cantidad de días y n es el exponente… hacemos "veinte por algo a la n", hay que hallar el *algo*. Cuando n es cero, queda uno, y nos da veinte. ¿Está bien?
8. Docente: Están cerca. Y en cinco días, ¿qué exponente necesitan?
9. Juan: Cinco, si n es la cantidad de días.

Los alumnos anticipan un proceso exponencial del que todavía no se habló en clase –seguramente trabajado en otro contexto– y en función de ese conocimiento condicionan la posibilidad de responder el número de piojos al primer día a la producción de una fórmula como recurso. La docente les sugiere el uso de una tabla para pensar dicha fórmula, que se reproduce a continuación.

Días	Piojos
0	20
5	$20 \cdot 3$
10	$20 \cdot 3^2$
15	$20 \cdot 3^3$

10. Docente: Pero vos te diste cuenta que vas multiplicando por potencias de tres. En cinco días, ¿qué exponente pusiste?
11. Juan: ¿A los cinco días?... Uno.
12. Docente: ¿A los diez?
13. Juan: Dos.
14. Docente. ¿Y en quince?
15. Juan: Tres. ¡Ahí está!, si quisiéramos ver cuántos piojos hay el primer día, tendríamos que poner veinte por tres a la uno sobre cinco ($20 \times 3^{\frac{1}{5}}$). ¿Se puede poner uno sobre cinco ($\frac{1}{5}$) en el exponente?

El alumno encontró una regularidad incipiente, que le permitió elaborar la expresión $20 \times 3^{\frac{1}{5}}$ para determinar los piojos del primer día. Esa expresión le parece apropiada, esto es, tiene un sentido: el de preservar la regularidad que ha observado. Sin embargo, no sabe cómo operar con una fracción en el exponente. De esta forma, su relación con el contexto es muy diferente a la del grupo de la escena anterior. Luego de que el docente le explicó al equipo el concepto de exponente fraccionario, los alumnos siguieron trabajando en la búsqueda de la fórmula de los piojos para un día *n* genérico. Sin embargo, no encontraron la expresión que buscaban, ya que, en sus palabras: "Tenemos los días, pero eso no es lo que va en el exponente". El paso al día genérico requiere mayor elaboración que la de simplemente conocer algunos valores.

Para cuando comenzó la segunda parte de la secuencia con los problemas en contexto matemático, los alumnos ya se habían apropiado de la forma de trabajo presentada. No obstante, el interés vivenciado en la resolución de los problemas de la primera parte (esbozados en el capítulo 1) disminuyó momentáneamente al comenzar con la resolución de los problemas de la segunda parte (esbozados en el capítulo 2). En casi todos los grupos, una vez que los alumnos se enfrentaron a algunos ejercicios y hallaron elementos nuevos para debatir, discrepar y consensuar, el entusiasmo volvió.

Vale la pena destacar que en los problemas de la segunda parte se repite la modalidad de trabajo de exploración, elaboración de conjeturas, búsqueda de ejemplos y resoluciones en pequeños grupos. Las intervenciones del docente en cada uno de los grupos tiene los mismos propósitos: asegurar el trabajo grupal, esclarecer posiciones de los alumnos o los conceptos-ideas que se están debatiendo, reconstruir alguna intervención que no está clara en el grupo y que de ese modo no se puede reutilizar o, también, favorecer el control del grupo sobre sus afirmaciones.

Para dar cuenta de esta etapa del trabajo, se mostrarán aquí algunos momentos de puestas en común que permitirán observar el juego posible a desplegar por parte del docente y su lugar de mediador junto a toda la comunidad clase.

En cada puesta en común, se verá cómo los docentes comienzan tomando de los portavoces de los grupos las resoluciones de los problemas o las ideas analizadas para luego refl exionar sobre dichas producciones. En algunos casos, el docente levantará nuevas preguntas. En otros, permitirá la confrontación de posiciones distintas de los alumnos. Eventualmente, podrá incluso indagar sobre la génesis de la producción ya lograda por los alumnos.

Algunas de estas escenas tienen mayor duración que las ya presentadas. Se ha preferido utilizar menos escenas, pero conservar su estado original, pues ellas dan cuenta de la intensa actividad de producción que puede ocurrir en la clase de matemática.

Escena Nº 7: Producciones destacadas a la luz de la comparación de funciones exponenciales; diálogo entre alumnos

Este diálogo entre dos alumnas ocurre en la fase de trabajo grupal durante la resolución del problema Nº 2 de la segunda parte (la grilla de funciones). Las alumnas están investigando qué modificación tienen las gráficas cuando se multiplica la fórmula original por k = 1.

1. A_1: Aunque lo multipliques todo por uno, siempre te va a dar un resultado nominal. O sea, vos cualquier número que lo eleves...
2. A_2: Eso es igual a uno.
3. A_1: Ah, es verdad, es verdad. Bueno, si *k* es igual a uno te está diciendo que vos acá… o sea al multiplicarlo por un número la función te queda *k* por a elevado a algo. Y que vos, ese *k* igual a uno, es lo mismo que sacarle el uno, porque todo multiplicado por uno te da el mismo número. O sea, si vos hacés dos elevado a la décima por uno, te va a dar lo mismo.
4. A_2: Dos a la décima.
5. A_1: O sea, no modifica… El “por uno” no modifica.
6. A_2: Pero A a la equis, estamos tomando… ¿o estamos tomando el original del dos a la equis, o el que…?

7. Docente: Cada uno hace referencia al que está ubicado al inicio. *(Explica así que tienen que comparar cada ejemplo $k \cdot 2^x$, $k \cdot 3^x$, etcétera, con los originales respectivos, es decir con 2^x, 3^x, etcétera).*
8. A_1: Un medio, elevado al cuadrado, te da un cuarto. Si vos hacés un medio al cuadrado por uno, te da un cuarto. O sea, todo, multiplicado por uno, te da el mismo resultado.

La explicación de la alumna A_1 es una fundamentación, en tanto utiliza como recurso una generalización; al mismo tiempo, el lenguaje es familiar, carece de la precisión del lenguaje formal, pero tiene intención de generar comprensión, al decir "Y que vos, ese *k* igual a uno, es lo mismo que sacarle el uno, porque todo multiplicado por uno te da el mismo número"... Es importante, además, notar que todo este comentario es oral, no va acompañado de escritura.

Pero su compañera A_2 no queda del todo convencida, y entonces A_1 recurre a los ejemplos. Llega a la conclusión por medio de la toma de valores: fue tomando ejemplos hasta convencer a su compañera. Este trabajo es provisorio, e imprescindible. El docente, luego, pedirá formulaciones y explicaciones genéricas que den cuenta de las fundamentaciones elaboradas pero, en primera instancia, este diálogo muestra las exploraciones que los alumnos necesitan realizar para comprender los problemas. Una vez lograda la comprensión, se podrá trabajar en las fundamentaciones.

Escena Nº 8: Un problema de condiciones; diálogo entre docente y alumnos

Como ya se ha mencionado, las intervenciones docentes tienen como propósito habilitar a los alumnos a tomar el control de sus producciones. En la próxima escena se verá una intervención docente realizada en esta dirección. Los alumnos están resolviendo el problema de determinar condiciones sobre los parámetros *k* y *a,* para que la función exponencial $k \cdot a^x$ sea creciente, y luego condiciones para que sea decreciente.

Marianela: Este cuadro que hicimos no sé si está bien. *(Mirando al docente.)*
Docente: ¿Y de qué habla el cuadro?
Marianela: Hicimos…, tomamos los… o sea, tomamos los valores… O sea, los signos que pueden tomar *k* y la *a* y la equis, par o impar, para que nos dé creciente o decreciente. Y dijimos, si *k* es positiva, y *a* es positiva, y la equis cualquier número… par o impar, va a ser creciente.

En esta afirmación pueden analizarse dos cuestiones. Los alumnos están considerando la variable x como un parámetro, poniendo en evidencia que todavía no está clara la familia de funciones con la que están trabajando. También hay otro aspecto interesante en la afirmación: pareciera ser que, para los alumnos, los números reales se pueden clasificar en pares e impares.

El docente remitirá a los alumnos hacia un problema anterior, donde se había analizado el crecimiento y decrecimiento, para llevarlos a la confrontación de esta afirmación nueva del grupo con otras anteriores. Si bien no se identifica la participación de cada uno, cabe mencionar que los alumnos intervinientes son tres.

Docente: En la grilla del problema 2 ustedes estaban mirando la función k por a a la equis $(k \cdot a^x)$, en cada caso. Cada vez que tienen una función, cada vez que eligen un valor de k y un valor de a, esa función está habilitada para tomar cualquier valor de equis porque es una función cuyo dominio son los reales.
A: Sí.
Docente: Ok. Cuando ustedes piensan en un número real, cualquiera, ¿pueden decir si es par o impar? Por ejemplo…
A: ¿Un número real, si es par o impar?
Docente: Claro. Es un análisis que han hecho acá.
A: Ah, pero si tomamos…
Docente: ¿Pueden decir, por ejemplo, si toman tres medios, si es par o impar?
A: Eso es lo que iba a decir, si tomamos un decimal...
Docente: ¿Pueden decir que raíz de dos ($\sqrt{2}$) es par o impar? ¿Pueden decir que pi (π) es par o impar? ¿A qué le llaman par?… ¿Cuándo deciden que un número es par o…?
A: Estamos hablando de nat… estamos hablando de los… enteros.
Docente: De los enteros. Eso es una… una clasificación para el conjunto de los números enteros. Cuando uno se escapa de ahí, no puede distinguir los números pares o impares. O sea, dentro de los números reales hay números pares, hay números impares… los números que se escriben dos por algo más uno. Y después hay un montón de otros números, ¿no? Y el *algo* es un número entero también. Yo hago dos por un número entero más uno, también. No puedo cambiar por: dos por raíz de dos mas uno, eso no es impar. Dos por raíz de dos no es par. No sé, ¿entienden lo que digo?
A: Sí, sí.
A: Porque habíamos visto que, además de determinar k…
A: Además de determinar a, depende de que k que sea creciente o decreciente.

Docente: ¡Ah!, pero, ¿también les parece que depende de equis?
A: Sí.
Docente: ¿Sí?
A: Y, porque si vos tenés a con un número negativo…
Docente: Miren los ejemplos con los que estuvieron trabajando acá. Trabajaron dos a la equis, tres a la equis, un medio a la equis, un tercio a la equis, ustedes decidieron que estas funciones eran… crecientes, estas dos, y decrecientes, estas dos. ¿Necesitaban tomar algunos valores de equis? ¿Les cambiaba con las equis, la situación?
A: No porque ya era decreciente.
A: O creciente.
Docente: Estaban con esa función, y después miraban la gráfica y decían: "yo me muevo, pero la función hace esto; entonces es creciente"; "Me muevo: hace esto; entonces, es decreciente".
A: Claro.
Docente: Por ahí, repensar esto les va a servir para ver qué papel tiene x en esto.
A: Claro.

La intervención del docente no pasa por sancionar si la respuesta es correcta o incorrecta. Los alumnos pidieron opinión al docente sobre lo que habían hecho y el docente, antes que sancionar, volvió a mostrarles cómo ellos mismos, en otras condiciones, habían decidido qué funciones eran crecientes, y cuáles, decrecientes. Así, pone a consideración de los alumnos otro momento en el que utilizaron otro criterio para analizar el crecimiento o el decrecimiento. Confrontar (tal vez muy silenciosamente) otros criterios es una forma de reflexionar sobre sus procedimientos. El contrato didáctico hace que los alumnos estén esperando del docente una sanción sobre su trabajo. El docente, en cambio, les está dando una herramienta para que ellos tengan el control sobre sus procedimientos. De esta forma, también se sostiene un trabajo de fundamentación, en la medida en que esta posibilidad de controlar sus propias producciones los habilita para considerarlas con mayor grado de dominio y certeza (en cuanto a su validez o no).

Escena Nº 9: Puesta en común; comunidad-clase

La próxima y última escena es una larga puesta en común sobre los problemas 6, 7 y 10 de la segunda parte. Esta puesta en común se llevó a cabo durante 80 minutos, es decir que el docente destinó un módulo completo a la reflexión sobre las producciones de los grupos en referencia a estos problemas.

El docente convoca a los alumnos a discutir los problemas y a participar en un debate ("Vamos a debatir utilizando sus ideas") a partir de los resultados alcanzados en cada grupo.

Docente: una de las primeras cosas que nos preguntábamos es si la condición de que la función sea creciente depende solo de *a*.
Bruno: No, depende de *k* también.
Docente: ¿Solo de *k*?
A: No. *(Responden varios alumnos.)*
Docente: Muy bien, me gustaría que me contaran qué es lo que debatieron, para ver qué dependía de ambos, socialicemos...
Bruno: Hacíamos como la regla de los signos, cuando *k* negativa y *a* negativa... menor que uno...
A: Yo lo tengo anotado.
Docente: Bueno, dictame. *(La profesora escribe en el pizarrón.)*
A: Si *a* es mayor a uno y *k* positivo, es creciente; si *a* es mayor a uno y *k* negativo, decreciente. Si *a* está entre cero y uno y *k* negativo, es creciente; si *a* está entre cero y uno y *k* es positivo, es decreciente.
Docente: ¿Todos los grupos anotaron lo mismo?
Todos: Sí.
Docente: O sea están de acuerdo con la síntesis que hizo él; para arribar a esta síntesis me gustaría saber cómo llegaron hasta acá, los orígenes. ¿Qué parámetro decidieron empezar primero? Ese grupo, ¿empezó por *a*?
A: Usamos el cuadro. *(Los alumnos hacen referencia al cuadro comparativo de las funciones del problema 2.)*
A2: Porque te daban un mismo *a* y te cambiaban los valores de *k*.
Docente: Tomaban *k* diferentes. Estaban juntos dos a la equis y tres a la equis. Y después venía un medio y un tercio a la equis; entonces ustedes dicen que partían de que *a* era dos o tres o un tercio o un medio, y, ¿cuánto valía *k*, ahí?
A: Uno.
Docente: *k*, de repente, valía dos, menos uno, cero coma cinco, e iban investigando qué pasaba, y a partir de esas observaciones fueron sintetizando esto. ¿Los demás?...
A: También.
Docente: Ahora, ustedes se están basando en cuatro funciones específicas y en las transformaciones de esas cuatro funciones específicas; estuvieron trabajando con esas cuatro funciones primitivas y fueron tomando valores para *k*. ¿Qué les permite decir que si cambian va a seguir ocurriendo? ¿Si toman otro valor cualquiera para *a*? Aparentemente, extrapolaron y concluyeron eso; si yo tomara otra función cualquiera, ¿cómo sé que va a cumplir esto o lo otro? ¿Se entiende? Yo digo que lo que ustedes sintetizaron salió de cuatro ejemplos: ¿qué les permite decir algo genérico?

La docente ha convocado a exponer formas de razonar el problema y estrategias utilizadas. Hace visible el trabajo de algunos alumnos, al utilizar el cuadro del problema 2 como referencia con casos particulares. Sugiere también que hay más de una forma de pensar condiciones para que las funciones sean crecientes o decrecientes.

Pone en evidencia que las respuestas de los alumnos se basan en casos particulares, situación que ya conocía y había detectado en el trabajo en grupos. En función de esto, plantea la incertidumbre ("¿Cómo sé que se va a cumplir esto o lo otro?"), buscando la emergencia de un razonamiento genérico, una fundamentación, a partir de estos casos particulares. También advierte a los alumnos que el trabajo realizado ha sido de carácter inductivo, utilizando un lenguaje familiar ("Ustedes han sintetizado a partir de cuatro ejemplos", "Aparentemente extrapolaron y concluyeron"). Señala así que fundamentar las afirmaciones realizadas les dará certeza sobre la validez de las mismas: fundamentar les permite anticipar con certeza. Este planteo tiene eco en los alumnos.

A: Probamos.
A: Profe, no sé si está bien esto, pero yo digo, yo tenía anotado que cuando a es mayor a uno es creciente, entonces ahora es como la regla de los signos más por más o más por menos.
Docente: Bueno ahí hay una validación genérica. Vos partías de *a* a la equis y habíamos discutido que esta función es creciente si *a* es mayor a uno, entonces ahora vos decís que a partir de esto vos te preguntás como va a ser *k* por *a* a la equis.
A: Creciente.
Docente: ¿Qué tipo de número va a ser *a* a la *x* para cualquier valor de *x*?
A: Positivo.
Docente: Entonces ahora aparece *k*. Como este es positivo, si *k* es positivo te da positivo, pero, ¿positivo creciente? Si *k* es negativo queda negativo, ¿creciente?
A: No, decreciente.
Docente: Es decreciente, ¿por qué?
A: Porque se da vuelta.
Docente: Es verdad, gráficamente se da vuelta, ¿todos de acuerdo?
A (*varios*): Sí.
Docente: Si *a* es mayor que uno es positivo, y ustedes dicen que si multiplico por un positivo sigue creciente, pero si multiplican por *k* negativo dicen que se queda decreciente, Yanina dijo que porque se da vuelta la imagen.

En este extracto del diálogo aparecen muchos de los elementos mencionados a lo largo de todo este trabajo. El docente toma las producciones de los alumnos. Las reconstruye si es necesario, asegurando que toda la clase la oiga y comprenda. En este caso, marca además la forma en la que fueron pensados los problemas y no solo los resultados que alcanzaron. Hay una doble reconstrucción. Marca el papel de productor de los alumnos ("Vos partías de", "Vos decís que"). Esa producción se pone a juicio de la comunidad aula. El docente se preserva de emitir opinión al respecto. Eventualmente (aunque éste no es el ejemplo) puede utilizar la producción para seguir deduciendo otras conclusiones a partir de esa premisa y pide el consenso de la comunidad aula. El docente se convierte en el portavoz pero se preserva del acto de sanción. Solo así, devolviendo el problema a toda la clase, habrá un intercambio real entre los integrantes. Sin duda, el docente hará maniobras frente a algunas intervenciones, pero eso ocurrirá únicamente como forma de preservar esta tarea de fundamentar.

Para realizar sus producciones, los alumnos se apoyaron en el conocimiento que ya se había aceptado sobre las características de la función a^x. El docente lo señala ("Y habíamos discutido que esta función a^x es creciente si a es mayor a uno y entonces ahora vos decís..."), mostrando en acto que el conocimiento disponible no es únicamente el que el docente puede transmitir, sino el que los alumnos pueden construir.

El docente podría continuar desplegando las razones por las cuales la función $k \cdot a^x$ es creciente cuando la base es mayor a uno y el parámetro k es positivo. Señala que puede haber una confusión entre positivo y creciente, pero decide pasar en limpio lo que hasta el momento se ha dicho y continuar.

Considera entonces el caso de base menor a uno, de forma similar, y pide la conformidad del grupo.

Docente: ¿Todos están de acuerdo?
Yanina: Yo no sé si estoy de acuerdo con eso de que se van a volver *todas* positivas o negativas.
Docente: Ah, pará, está muy buena la pregunta, ella no está segura de si el signo de las imágenes va a depender o no de k. *(Acá hay una reelaboración por parte de la docente de lo que la alumna ha dicho que sirve para aclarar.)* A ver, ¿qué le contestan a ella? Ella dice así: ¿es verdad que para saber el signo de las imágenes yo tengo que saber y averiguar el signo de k? Esa es la duda de ella.
Marianela: Sí, porque k es la ordenada al origen, y si k es la ordenada al origen y es negativa, las imágenes tienen que ser negativas, porque...
Yanina: Es exponencial.
Docente: Estamos trabajando exponenciales. Yo creo que la pregunta que vos estás diciendo tiene que ver con lo que dice David... de qué va a depender que cambie de positivo a negativo…
A: El signo de k me dice el signo de las imágenes.

Docente: A ver, en conjetura: ¿qué es lo que pueden decir? El signo de *k*, ¿es el signo de las imágenes?
Marianela: Porque las exponenciales, o tienen imágenes positivas o tienen imágenes negativas.
Docente: ¿Está bien lo que dice Marianela? Que las imágenes o son todas positivas o son todas negativas.
A: Sí, porque la asíntota horizontal está en cero.
Docente: O sea que con solo mirar la gráfica acá, ya sabemos.
Bruno: Ya con *k* te da la ordenada al origen, que es un punto, y con eso ya sabés.
A: Es como hicimos el problema siete.
Docente: Ah, está dando una estrategia, él; bueno, miremos el problema siete, ahí poníamos en juego lo que ya habíamos descubierto antes. Recordemos el enunciado. Teníamos los gráficos y teníamos que decidir a qué valores de *k* y de *a* corresponden. Hago algunos dibujos aproximados.

Se ha logrado en el diálogo una impronta de debate. Hay una alumna que no está segura sobre una afirmación. Se le hace una pregunta a todo el grupo. Se realiza una conjetura. Algunos integrantes de la clase contestan. Obviamente, siempre le contestan a la docente. Hasta acá, toda la puesta en común sigue teniendo el ritual correspondiente a una clase: un docente en el pizarrón y un grupo de alumnos dirigiendo la mirada al docente. No hay un diálogo específico entre alumnos. Pero la docente va moderando esas intervenciones, y si bien organiza dando la palabra o repitiendo algunas expresiones que no pueden ser oídas por todos, toda su intervención está "guionada" por el aporte de los alumnos. La docente evita hacerles llegar su propia "opinión".

La docente reconstruye con el aporte de los alumnos el problema 7 en pizarrón. Pero para realizar esta reconstrucción vuelve a requerir –como se puede ver en el próximo extracto del diálogo– que los alumnos expliciten las estrategias utilizadas, a saber: ir de las condiciones a las gráficas, o ir desde las gráficas a las condiciones. Compartir las estrategias de análisis es, por un lado, una forma de comunicar a los alumnos que existe toda una variedad de alternativas para desarrollar un problema; y al mismo tiempo, es una forma de validar la estrategia para el grupo que la comunica frente a la comunidad-aula.

Docente: Este grupo dice que primero fue a mirar qué valor podía tomar en cada gráfico... *k* negativo en g); y en h), *k* negativo. *(Va enumerando. Pregunta al resto:)* ¿En qué se fijó este grupo para saber el signo de *k*? ¿En qué se basó este grupo para decidir? *(Les pregunta a los demás cómo ve la decisión del grupo, intenta que el resto de la clase dé indicios sobre la comprensión.)*

A: En la imagen.
Docente: ¿En qué, de la imagen?
A: Si es positivo o negativo.
A (Federico): En la ordenada.
Docente: Federico dice que en la ordenada al origen; las chicas dicen que si las imágenes eran positivas, entonces *k* era positivo... y que si las imágenes eran negativas…
A: Es más o menos lo mismo.
Docente: Claro, ¿el grupo de allá?
A: Nosotras miramos las condiciones primero, y ahí fuimos viendo, como ya teníamos las condiciones de cuándo eran crecientes o decrecientes, buscamos cuáles eran crecientes y luego miramos las condiciones de la guía.
Docente: Ajá, esa era la técnica de ustedes. ¿Se entiende? Fueron a su cuadro síntesis, y luego ubicaron. Ah, me dicen *k* negativo y A mayor a uno, y eran así. *(Señala el dibujo respectivo en el pizarrón.)* ¿Y ustedes?
A: Más o menos lo que hicieron ellas, nos fijamos primero si era decreciente o creciente...
Docente: Entonces, no es más o menos lo mismo. *(Risas.)*
A: Ah, ¿no?
Docente: ¡No! *(Risas.)* Ellos miraron signos, y ustedes, si eran crecientes o decrecientes. Vamos de vuelta, recapitulemos, para no confundir. El grupo de ustedes miró primero el signo de *k*, y el signo lo miraron con las imágenes. ¿Y luego?
A: Nos fijamos en *a*, y como la primera era creciente, entonces *a* tiene que estar entre cero y uno.
Docente: Listo. ¿Algún grupo quiere contarnos si lo hizo de otra manera?
Marianela: Nosotros nos equivocamos.
Docente: ¿Y cómo fue la equivocación?
Marianela: Al principio, nos fijamos solamente en *a*.
Docente: Y entonces, la equivocación, ¿cuál era? ¿Todos los crecientes se los asignaban a a mayor a uno y los decrecientes con a menor a uno? ¿Y cómo se dieron cuenta? ¿Lo escucharon de otros chicos...?
Marianela: En realidad, cuando fuimos a ver cómo nos había dado en el problema dos, nos dimos cuenta, y cuando vimos la reglita...
(Sigue la puesta en común.)

En esta situación de puesta en común, ya todos tienen el ejercicio resuelto y, sin embargo, el clima de silencio en el que se está trabajando muestra que este momento también despierta un marcado interés en los alumnos. Se observa un importante espacio de reflexión generado sobre las prácticas. La puesta en común va mucho más allá de compartir la forma de resolución de un ejercicio, pues tiene también como objetivo compartir las formas de resolución de los problemas, las estrategias elaboradas. Esto hace que nuevas preguntas se levanten sobre lo ya realizado:

a) cómo fue el desarrollo hasta llegar a la solución;
b) sobre qué idea iniciaron la búsqueda de la solución;
c) si hubo equivocaciones, y en tal caso, cómo se dieron cuenta (porque escucharon a otros, porque discutieron entre ellos, porque alguno disentía y no llegaban a un acuerdo, etcétera);
d) en qué otros ejercicios se apoyaron para pensar el que ejercicio en discusión;
e) en qué se diferencia o se parece la pregunta de un problema con la de otro problema que puede, eventualmente, servir de soporte.

Una condición necesaria para realizar esta puesta en común es que el docente haya tomado contacto con los grupos durante su fase de trabajo grupal. Este conocimiento es el que le permite gestionar luego la puesta en común.

Docente: Bueno, vayamos al último problema, el diez. El ejercicio dice: "Las siguientes funciones son del tipo *k* por *a* a la equis más *b*. Para cada una de ellas, analizá el signo de *k* y *b* y decí si *a* es mayor a uno o está entre cero y uno". Acá tengo marcadas algunas cosas. ¿Es una función exponencial, esa?
Marianela: No. *(Con seguridad.)*
Docente: ¿Por qué?
Bruno: Porque corta al eje *x*.
Docente: ¿Eso ya me da para decir que no es exponencial?
Marianela: No hay asíntota en cero. *(Confirmando su posición anterior.)*
Docente: No hay asíntota en cero... *(Hace una pausa, seguramente esperando que otros alumnos participen, y así poder saber donde están posicionados los demás alumnos.)*
Docente: Esa tiene asíntota en dos. ¿Todos los grupos miraron las asíntotas?
Alumnos *(todos)*: Sí.
Docente: ¿Y donde están? ¿En dos y menos dos? ¿En menos dos y dos? Muy bien, empecemos preguntando. El grupo de allá atrás, ¿nos podrían decir, por ejemplo en la primera, cómo determinaron el signo de *k* y de *b* y de *a*? ¿Qué tomaron primero?
A: Lo primero que más o menos planteamos es que se suma o se resta, y con eso vemos la asíntota.
Docente: Lo primero que se fijaron es en *b*, y que eso está ligado a la suma o a la resta y, con eso, a la asíntota. ¿Quién está de acuerdo con eso?

Marianela: A mí me dio de casualidad.
Docente: ¿De casualidad qué, te dio?
Rocío: Es casualidad que la asíntota sea dos y que *b* todo dé dos.
Docente: ¡Ah! Ellas dicen que *k* igual a menos dos, y que este menos dos no está ligado a la asíntota. Y que si, en cambio, ponen *k* por *a* a la equis más dos, este dos no está ligado a la asíntota... este tampoco...
Noelia: Sí está ligado.
Docente: ¿Por qué, Noelia?
Noelia: No, porque es un corrimiento, porque cuando vos tenías *k* por *a* a la equis eso tenía asíntota en cero, ahora estás sumando o restando, según cuanto le sumes y cuanto le restes te queda la asíntota.
Docente: ¿Están de acuerdo con lo que ella está diciendo? Dice que hay un corrimiento de las imágenes.
A: Aparte, habíamos visto traslados.
Guillermo: O sea, era una función exponencial, y con el menos dos se corrió.
Docente: Guillermo dice que originalmente era exponencial, y que a todas las imágenes les bajaron dos. ¿De acuerdo?
Alumnos: Sí.

La docente pregunta a la clase si la familia nueva de funciones que se está considerando es una familia de exponenciales. Cabe aclarar que en el trabajo que se realizó al comienzo de este grupo de problemas, la familia de funciones exponenciales fue caracterizada por la fórmula $f(x) = k \cdot a^x$. Se estudiaron características de esta familia de funciones. Se acordó que el eje x era una asíntota horizontal. Los alumnos utilizan este recurso para concluir que este nuevo grupo no pertenece al conjunto de funciones exponenciales y no se apoyan en la escritura de esta nueva familia. A su vez, este grupo de alumnos ha trabajado con otras funciones el concepto de *corrimiento* (horizontal y vertical). Los alumnos podrían haber dicho que esta familia representa corrimientos verticales de la familia exponencial. También la docente podría aprovechar los comentarios de Noelia (que reconoce que la asíntota se corrió en una magnitud anunciada por *b*) o de Guillermo (que recuerda haber visto traslados) para sentenciar que este nuevo grupo engrosará el grupo de exponenciales, pues representa corrimientos de la familia vista originalmente.

Quedará a cargo del docente ampliar el grupo original de funciones exponenciales a esta nueva familia que considere también los corrimientos. Provisoriamente, esta familia de funciones ha quedado afuera de la familia exponencial, y es decisión del docente mantener o no esta posición de la comunidad-aula durante la discusión de este problema, dado que desde esa posición han analizado estos gráficos.

Docente: Chicas, volvamos al grupo. Una vez que definieron el signo de *b*, ojo que no les pedían el número sino el signo, y acá es positivo, y acá es negativo. *(Lo va escribiendo en el pizarrón, donde tiene hechos los dibujos de cada función.)* ¿Y ahora? Chicas, ¿cómo siguen?

A: Que como es creciente, *a* es mayor a uno.

Bruno: *(Con énfasis.)* No tiene nada que ver.

Docente: Ajá, bueno, "No tiene nada que ver"… se pelean entre ustedes dos. Allá, Aylén dijo que *a* es mayor a uno, porque es creciente.

Bruno: No tiene nada que ver.

Docente: Bueno, pero si vos le decís que no tiene nada que ver, le tenés que justificar por qué no tiene nada que ver...

Bruno: Porque es lo que dijimos en el problema siete.

(Se genera un alboroto, y todos hablan al mismo tiempo; en esta situación se presentan todos los elementos de un debate.)

Marianela: Estamos usando las condiciones de las exponenciales.

A: Sabemos que *k* es positiva y crece.

Bruno: No tiene nada que ver, puede ser creciente con *a* entre cero y uno y *k* negativa; entonces, no tiene nada que ver.

Docente: Vamos a ir por la contra. Vos decís que puede ser creciente con *a* entre cero y uno...

Bruno: Y puede ser decreciente con *a* mayor a uno.

Docente: Bueno, pará, pero si es creciente con *a* entre cero y uno, entonces *k* es negativa. Entonces, ¿qué tipo de imágenes tiene? Absolutamente todas... serían negativas.

Bruno: Sí.

Docente: Si a las imágenes negativas encima les resto dos, ¿cómo quedan?

Bruno: Negativas, más. Pero yo no estoy discutiendo que en ese caso particular...

Docente: Pero yo estoy discutiendo este caso.

Bruno: Lo que yo estoy diciendo es que ella dice "La función es creciente, entonces *a* es mayor a uno", y yo digo que eso no alcanza. Podría ser creciente y *a* menor a uno.

Docente: ¡Ah! Lo que vos estás reclamando es que ella dé otro parámetro; que tiene que dar otro parámetro al mismo tiempo, que estos parámetros están enganchados.

A: Primero, tenés que imaginarte cómo era la función exponencial básica, y después tenés que restar o sumar *b*.

Marianela: Ver el corrimiento.

Docente: Perfecto, una vez que tenés… ¿Qué es *k*, y qué es *a*?

A: *k* es dos, es la ordenada al origen.

Docente: No importa el nombre, pero, ¿cómo es?
A: Positiva, y la función es creciente; entonces, *a* es mayor a uno.
Docente: Bueno, ella tiró el valor de *a* mayor a uno. Lo que ella tiró es: *a* es mayor a uno, porque es creciente. Lo que dicen los chicos es que eso no alcanza. No podés asegurar que *a* es mayor a uno solo porque la función es creciente. Aunque me parece que ella dijo eso, pero miró otra cosa. No creo que ella haya dicho eso, por como trabajaron en el grupo.
Yanina: Lo dijo.
Docente: Bueno, y dicho está. *(Risas.)* Bueno, vamos acá, a ver el grupo de las chicas; *k* y *a*, en ese caso...
A: O sea, *b*, profe, no sirve para nada, para molestar, solo. *(Risas.)* Porque en realidad viene a ser lo mismo. *(En referencia al mismo caso de antes.)*
Docente: Bueno, o sea, ¿qué pongo acá?
A: *a* va a estar entre cero y uno, y *k* positivo.
Docente: ¿Está todo el mundo de acuerdo?
Bruno y otros alumnos: ¡Sí!

Finalmente, surgió una auténtica confrontación entre los alumnos. No fue necesario que la docente señalara, como en otras ocasiones, la contraposición de argumentos. El propio alumno cuestionó la organización deductiva de otra alumna que fundamentaba los valores de los parámetros.

Resulta interesante destacar que para que surja un intercambio de este tipo los alumnos deben necesariamente estar muy atentos a las producciones de sus compañeros. El docente se reserva entonces el rol de apoyar solidariamente a alguno o a ambos de los alumnos que debaten (como efectivamente lo hace en este caso).

El diálogo continúa. La docente volverá a retomar esto último que ha surgido sobre el nombre de “ordenada al origen” que se le había dado al parámetro *k*, y que en esta familia ya no lo representa. Momentáneamente, lo ha dejado pasar, para no frenar el debate que era más interesante.

En todo momento han estado presentes las reconstrucciones de las producciones de los alumnos y los mismos alumnos en su rol de productores de conocimiento.

A MODO DE CIERRE

En este documento se ha presentado "un recorrido posible" para el estudio de la función exponencial. En ese sentido, el trabajo desarrollado en las aulas pone de manifiesto cómo, a partir de la resolución de problemas en ciertos contextos que invitan a considerar la variación exponencial, se realiza una primera aproximación exploratoria de este tipo de procesos que permite arribar a la noción de función exponencial. Al continuar con el desarrollo de la propuesta, se observa cómo los diferentes grupos de alumnos avanzan, identificando nuevas características de este modelo a partir de situaciones que demandan tratar con diferentes tipos de registros: tablas, gráficos y fórmulas.

La secuencia incluye también el desafío de involucrar a los alumnos en la búsqueda o establecimiento de condiciones sobre las variables, para que las funciones exponenciales verifiquen ciertas propiedades o cumplan con ciertos requisitos.

En todo este recorrido se ha puesto especial atención no solo en los modos en que los alumnos desarrollan, analizan e identifican contenidos relacionados con la función exponencial, sino que se pueden reconocer diferentes instancias (debates en pequeños grupos, debates entre toda la comunidad-clase, intervenciones docentes, etcétera) destinadas específicamente a que los alumnos se involucren en la elaboración de fundamentaciones que les permitan acercarse a comprender más cabalmente el modo en que la matemática establece sus verdades. Este hecho "vive" a lo largo de toda la secuencia.

En efecto, no son los problemas en sí mismos los que provocan la aparición y el progreso de este tipo de trabajo. Las actividades que se proponen a los alumnos permiten hacer aparecer en el aula una variedad de relaciones, procedimientos y notaciones. Y es a partir de ello que los profesores intervienen, promoviendo el debate, la circulación y el avance en los conocimientos de los alumnos. Se ha tratado en este documento de dar cuenta de ambas cuestiones: la fertilidad de los problemas y la gestión de la clase por parte de los docentes.

La producción que aquí se comparte ha sido posible gracias al trabajo colectivo realizado por un equipo de profesores en los talleres donde se elaboraron y analizaron los problemas. Es una aspiración que este material promueva también este tipo de interacciones al interior de cada escuela, para que, además de su "uso", también abra a reflexiones conjuntas en torno al aprendizaje y a la enseñanza de este y otros conceptos. Es reconocida la potencia de este tipo de interacciones para enriquecer nuevos usos que, a su vez, habilitarán nuevas reflexiones.

Bibliografía

Alagia, H.; Bressan, A.; y Sadovsky, P. *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

Balacheff, N. "Procesos de prueba y situaciones de validación", en *Educational Studies in Mathematics* nº 18, pp. 147-176, 1987.

— "Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate", en *Preuve: International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof.*, 1999. Disponible en www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html.

— *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Colombia, Una Empresa Docente, 2000.

Boero, P. "Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education", en *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*, 1999. Disponible en www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html.

Brousseau, G. "Theory of Didactical Situations in Mathematics". Londres, Kluwer Academic Publishers, 1997.

— "Educación y didáctica de las matemáticas", en revista *Educación Matemática* nº 12, pp. 5-39. México, 2000.

— "Introducción al estudio de la enseñanza del razonamiento y de la prueba: las paradojas", 2004. Disponible en www.lettredelapreuve.it/Newsletter/04Ete/04EteThemeES.html.

— *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2007.

Hanna, G. "The Ongoing Value of Proof", en *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vigésima Conferencia. Puig, L. y Gutiérrez, A. (eds.). Valencia, 1996.

Itzcovich, H. *Iniciación al estudio didáctico de la geometría*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

Kilpatrick, J., Schlesinger, B. y Silver, E. *Thinking through Mathematics. Fostering Inquiry and Communication in Mathematics Classrooms*. Nueva York, College Entrance Examination Board, 1995.

Lakatos, I. *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid, Alianza Universidad, 1976.

Panizza, M. *Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

Parra, C. y Saiz, I. (comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós Educador, 1994.

Polya, G. *How to solve it*. Nueva Jersey, Princeton University Press, 1945.

Sadovsky, P. *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

Segal, S; Giuliani, D. *Modelización matemática en el aula*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2008.

Sessa, C. *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2005.

Tall, D. "Cognitive development, representations and proof". Paper presentado en la conferencia sobre *Justifying and Proving in School Mathematics*. Institute of Education, pp. 27-38. Londres, diciembre de 1995.

Thurston, William P. "On Proof And Progress in Mathematics", en *Bulletin of the American Mathematical Society* 30, pp. 161-177, 1994.

Documentos curriculares

Contenidos para el Nivel Medio: Matemática. Dirección de Currícula y Enseñanza. Di-rección General de Planeamiento Educativo. Ministerio de Educación. G. C. B. A., 2009. Disponible en estatico buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/programa_matematica.pdf

Matemática: Números Racionales. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. Dirección de Currícula y Enseñanza. Dirección General de Planeamiento Educativo. Ministerio de Educación. G.C.B.A., 2006. Disponible en estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/ curricula/pdf/media/matematica_aportesmedia.pdf

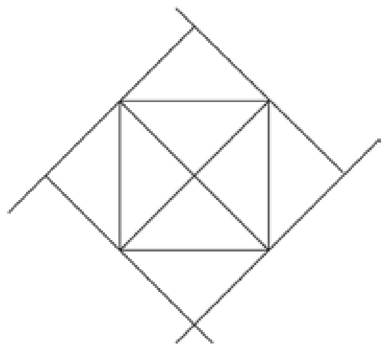
Matemática: Geometría. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. Dirección de Currícula y Enseñanza. Dirección General de Planeamiento Educativo. Ministerio de Educación. G.C.B.A., 2007. Disponible en estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/ curricula/media/matematica/geometria_media.pdf

Anexo fotocopiable

Problemas capítulo 1

Problema 1: Comparar áreas de cuadrados

A partir de un cuadrado realizaremos una nueva construcción: se trazan las diagonales y por cada vértice se dibuja una paralela a cada diagonal. A esta construcción que da origen a otra figura la denominaremos *paso 1*.



a. *Compará el área del cuadrado obtenido en el paso 1 con el área del cuadrado original.*

b. *Si se repite el paso 1 varias veces (generando, a partir del paso 1, un paso 2, luego un paso 3, etcétera), ¿podrías indicar cómo serán las áreas de los cuadrados que se van obteniendo, respecto del cuadrado original?*

c. *Si llamamos A al área del cuadrado original, determiná qué área tendrá el cuadrado que se genere en el paso 17.*

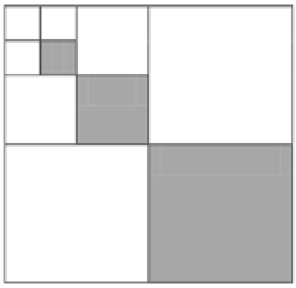
d. *¿Se podría dar una expresión generalizada del área del cuadrado obtenido en el paso **n**? (también en este caso el cuadrado original tiene área A).*

Consigna optativa

e. *Indicar en qué porcentaje aumentó el área en cada paso.*

Problema 2: Los cuadrados sombreados

Observá la siguiente figura.



A un cuadrado –el más grande, que llamaremos inicial– *cuya área es 1, se le trazaron las medianas y se sombreó, de los 4 cuadrados menores resultantes, el cuadrado inferior derecho. En este caso llamaremos* paso 1 *al trazado de las medianas y al sombreado del cuadrado inferior derecho. Al cuadrado que queda determinado en la parte superior izquierda se le trazan sus medianas y se sombrea de los 4 cuadrados menores que quedan dentro de él, el inferior derecho (paso 2). Y así se continúa.*

a. ¿Cuál es el área del cuadrado que queda sombreado en el paso 1, en el paso 2 y en el paso 4?
b. ¿Habrá algún paso en el que se sombree un cuadrado de área $\frac{1}{60}$*?*
c. Si sabemos que el área que quedó sombreada en el séptimo paso es $\frac{1}{6384}$*, ¿cuál será el área sombreada en el cuadrado que se obtenga en el siguiente paso? ¿Y en el anterior?*
d. ¿Habrá una expresión general que me permita conocer el área de los sucesivos cuadraditos sombreados, según la cantidad de pasos que se hicieron?
e. ¿Podrías contestar la pregunta anterior, si el área del cuadrado original fuera A en lugar de 1?

Consigna optativa

f. Si el trabajo realizado sobre el cuadrado de área 1 fuera hecho sobre otro cuadrado de área 1.024, ¿podrías contestar las preguntas ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** *y* ***e***, *a partir de tus respuestas anteriores?*
g. Sobre un cuadrado, de área desconocida, se tuvieron que realizar 10 pasos para llegar a un cuadrado sombreado de área 1. ¿Te alcanza este dato para conocer el área del cuadrado inicial?
h. ¿Es posible inventar un valor A para el área del cuadrado original, de manera que en alguno de los pasos se obtenga un cuadradito cuya área sea $\frac{1}{60}$*? ¿Cuánto tendría que valer A, y cuál sería el paso?*

Problema 3: Los piojos

En la cabeza de un niño se coloca un número determinado de piojos a las 10 de la mañana del día lunes 5 de agosto, y se observa la evolución de la población de piojos mediante un sofisticado procedimiento computarizado (es decir, los piojos se pueden contar con precisión en cada momento).

Transcurridos 10 días el niño convive con 180 piojos en su cabeza. Si se sabe que una población cualquiera de piojos tarda 5 días en triplicarse…

a. ¿Cuántos piojos habrá, transcurridos 20 días?
b. ¿Cuántos piojos había el 10 de agosto?
c. ¿Cuántos piojos se pusieron en la cabeza?
d. ¿Cuántos piojos había el 6 de agosto?

Consigna optativa

e. ¿Cuánto varió la cantidad de piojos al pasar del inicio al día 5? ¿Y del día 5 al día 10? ¿Y del día 10 al 15? ¿Y del día 15 al 20?

t número de días	Número de piojos	Variación de piojos entre el día t y el día t + 5
0		
5		
10		
15		
20		

Problema 4: Luminosidad en la laguna

Una laguna contiene sedimentos uniformemente distribuidos que reducen la transmisión de la luz a través del agua. Dicha luminosidad se reduce en un 20% cada vez que se desciende 1 metro hacia el fondo de la laguna (es decir, cualquiera sea el nivel de profundidad en el que se encuentre el buzo, al descender un metro pierde el 20% de la luminosidad que tenía un metro arriba).

Un buzo está pronto a sumergirse en dicha laguna; si consideramos la intensidad de la luz (medida en unidades lumínicas) como de 100 unidades en la superficie:

a. *Realizar una tabla que indique la luminosidad para cada uno de los primeros 10 metros.*
b. *¿Se podrá decir qué intensidad de luz tendrá el buzo al bajar 0,5 m?*
c. *El buzo tiene instrumentos de medición que pueden detectar luz hasta una intensidad de 0,2 unidades lumínicas. ¿Podrá el buzo detectar luz, si desciende 20 m?*
d. *¿Hasta qué profundidad podrá el buzo descender con su instrumental y aún detectar cierta luminosidad?*

Consignas optativas

e. *¿Alcanzará el buzo, en algún momento, una luminosidad de* $100 \times 0{,}8^{1,5}$*?*
f. *Si en un momento dado de su descenso, el instrumental capta una luminosidad de aproximadamente 71,55 unidades lumínicas, ¿a qué profundidad se encuentra el buzo? ¿Qué método te parece más apropiado para responder esta pregunta?*

Problema 5: Los contratos

Patricia ha recibido dos propuestas de dos empresas interesadas en su perfil laboral. Una de las empresas le ofrece ocupar el cargo de gerente de proyectos especiales y le hace la siguiente oferta salarial: $10.000 como sueldo inicial, y un aumento mensual de $4.000. La otra empresa le ofrece ocupar el cargo de gerente de publicidad, con un sueldo inicial de $10.000 y un aumento del 20% mensual.

a. ¿Qué oferta será más ventajosa?
b. ¿Cómo explicarías convincentemente por qué conviene aceptar una de las ofertas antes que la otra?

Consignas optativas

c. Si la persona trabaja 3 meses, ¿cuál es la propuesta más conveniente?
d. ¿Y si firma el contrato por 3 años?

Problema 6: Las bacterias

En un laboratorio están experimentando con una población de bacterias. Han observado que, al reproducirse la masa de la población, crece siempre en forma pareja, de manera que en cada hora aumenta un 25%. Al comienzo de la observación, el cultivo de bacterias tiene una masa de 60 gramos.

a. ¿Cuál será la masa de las bacterias después de dos horas?
b. Expliquen cómo varía la evolución de la masa de bacterias a lo largo de las primeras 8 horas.

Consignas optativas

c. Si en un determinado momento la masa de la población de bacterias es 300 g. ¿Cuál es la masa de la población una hora después?
d. ¿Cuál será la masa de bacterias después de 30 horas de comenzada la observación?

Instancia de revisión de los 6 problemas

Primera parte:

PROBLEMAS	Y	K	A	X
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Segunda parte:

Graficar las respectivas fórmulas de los problemas 1 y 2 (considerando A = 1): $y = 2^n$ e $y = (\frac{1}{60})^n$.

Consigna optativa

Identificar qué gráfico corresponde a cada una de las situaciones ya trabajadas.

Gráfico 1

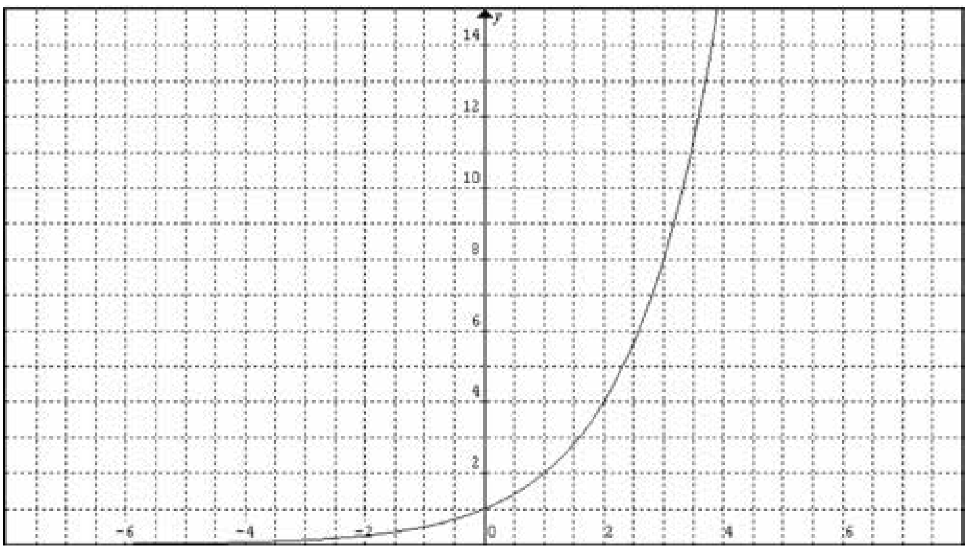


Gráfico 2

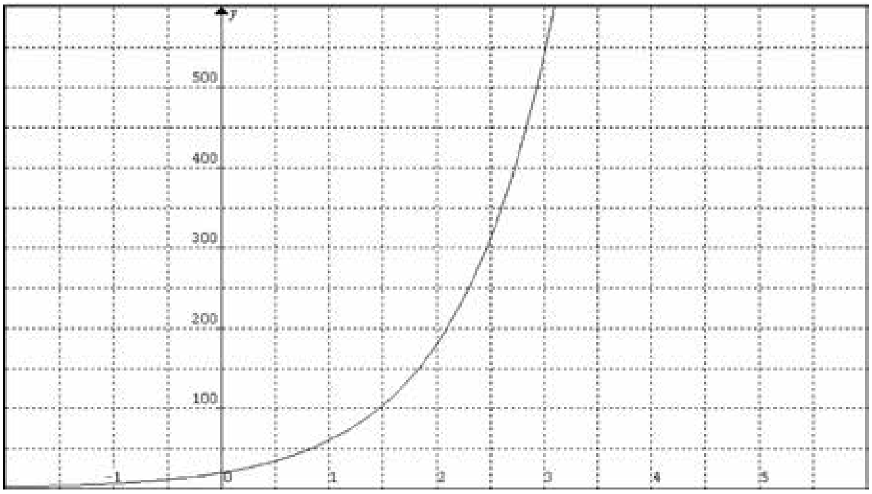


Gráfico 3

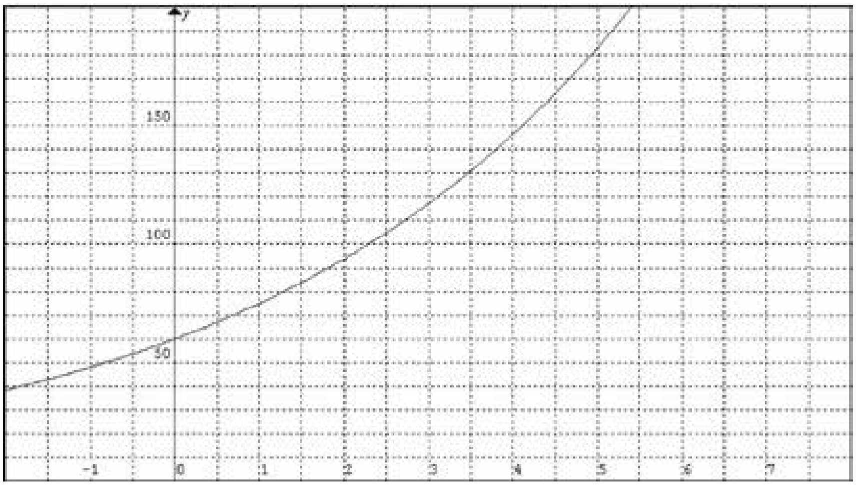


Gráfico 4

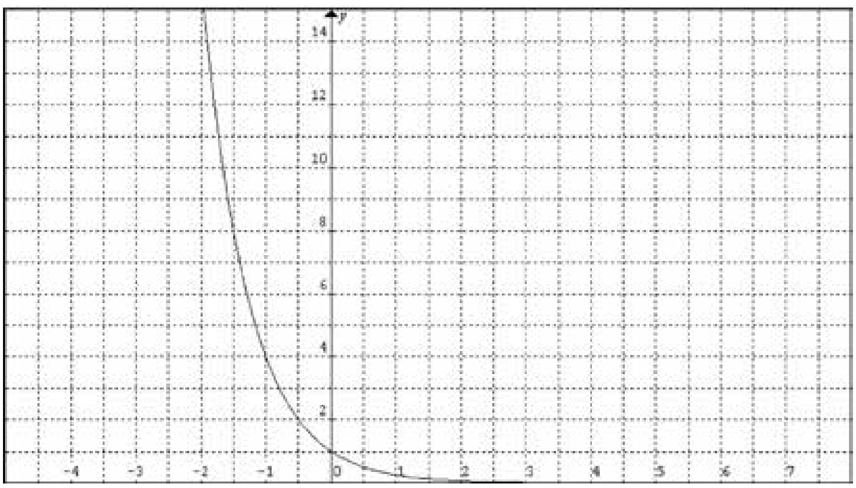


Gráfico 5

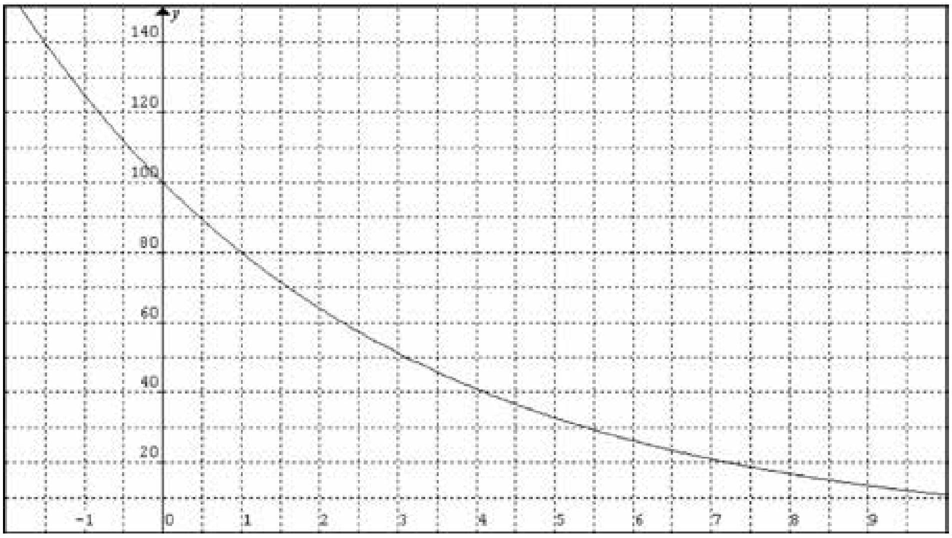
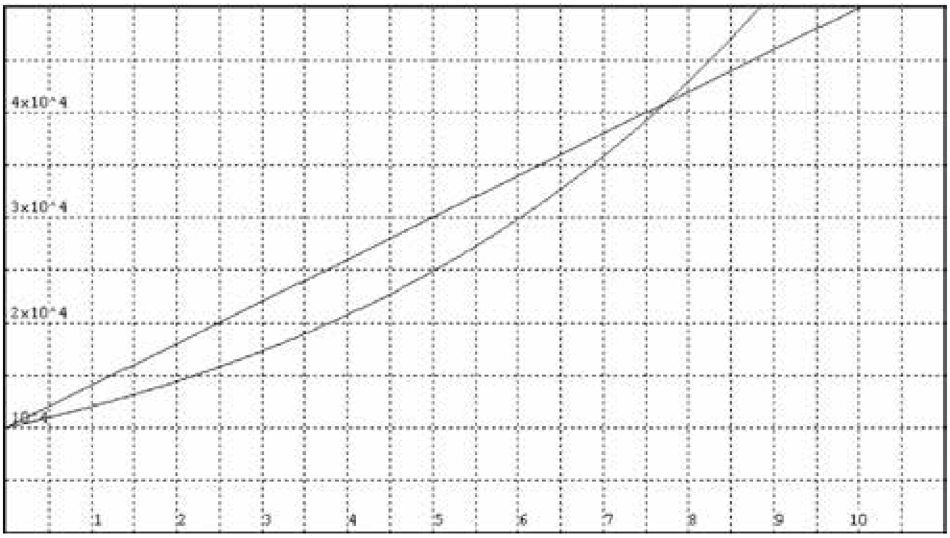
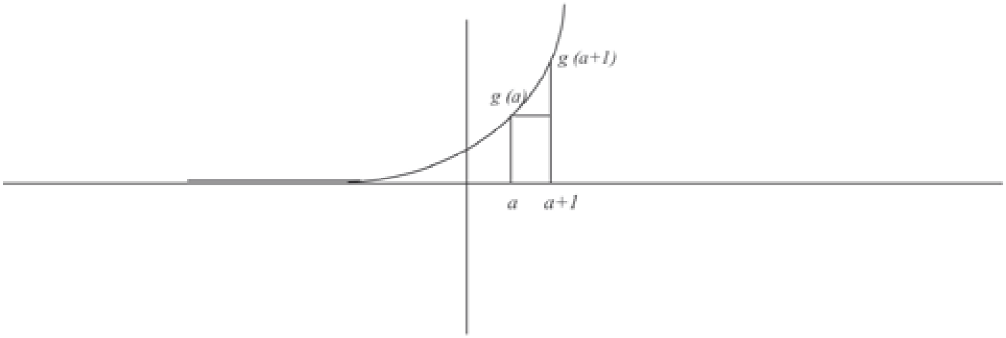


Gráfico 6



Problema 1

Graficar las funciones exponenciales $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ *y* $g(x) = 3^x$
y y encontrar similitudes y diferencias entre los gráficos.



Consigna optativa

¿Por qué la horizontal divide al segmento en dos segmentos iguales?
Ídem, para $g(x) = 3^x$.

Problema 2

Se les presenta a los alumnos el siguiente cuadro para ser completado. En el mismo se proponen cuatro funciones y, para cada una de ellas, algunos interrogantes. Esta organización en tabla está pensada para que los alumnos puedan ir comparando los resultados que van obteniendo en las cuatro funciones. La comparación permite poner de relieve algunas nuevas características de este tipo de funciones:

Preguntas acerca de cada función	$f(x) = 2^x$	$g(x) = 3^x$	$f(x) = (\frac{1}{2})^x$	$g(x) = (\frac{1}{3})^x$
¿Qué sucede con las imágenes de cada función cuando la *x* toma valores cada vez más grandes?				
¿Podés encontrar algún valor de *x* para que su imagen sea 0?				
¿Qué le pasaría a la imagen de cada función, si la multiplicamos por 2? Da tu respuesta en forma gráfica.				
¿Qué le pasaría a la imagen de cada función, si la multiplicamos por –1?				
¿Qué le pasaría a la imagen de cada función, si la multiplicamos por 0,5?				
Al multiplicar la función $y = a^x$ por un número real k distinto de cero se obtiene la función $y = k \cdot a^x$. ¿Mantiene la función $y = k \cdot a^x$ las mismas características? Detallá similitudes y diferencias, y buscá sus causas.	*Si k = 1*	*Si k = 1*	*Si k = 1*	*Si k = 1*
	Si k < 0	*Si k < 0*	*Si k < 0*	*Si k < 0*
	Si k > 0	*Si k > 0*	*Si k > 0*	*Si k > 0*

Problema 3

a. *Confeccionar una tabla de valores para los pares ordenados que resuelven la ecuación* $y = (-1)^x$.
b. *Ídem, para* $\boldsymbol{y} = (-2)^x$.
c. *¿Puede definirse una función* $f(x) = (-2)^x$*? ¿Por qué?*
d. *¿Qué condiciones debe cumplir a para definir una función* $f(x) = a^x$*?*
e. *Con las condiciones del ítem anterior, ¿qué condiciones debe cumplir **a** para que la función* $f(x) = a^x$ *sea…*
   i) *… creciente?*
   ii) *… decreciente?*
f. *¿Podés encontrar algún valor de **x** para que su imagen sea 0?*

Problema 4

Siendo $a > 0$ *y* $a \neq 1$*, caracterizar el conjunto de positividad y negatividad de* $f(x) = a^x$.

Problema 5

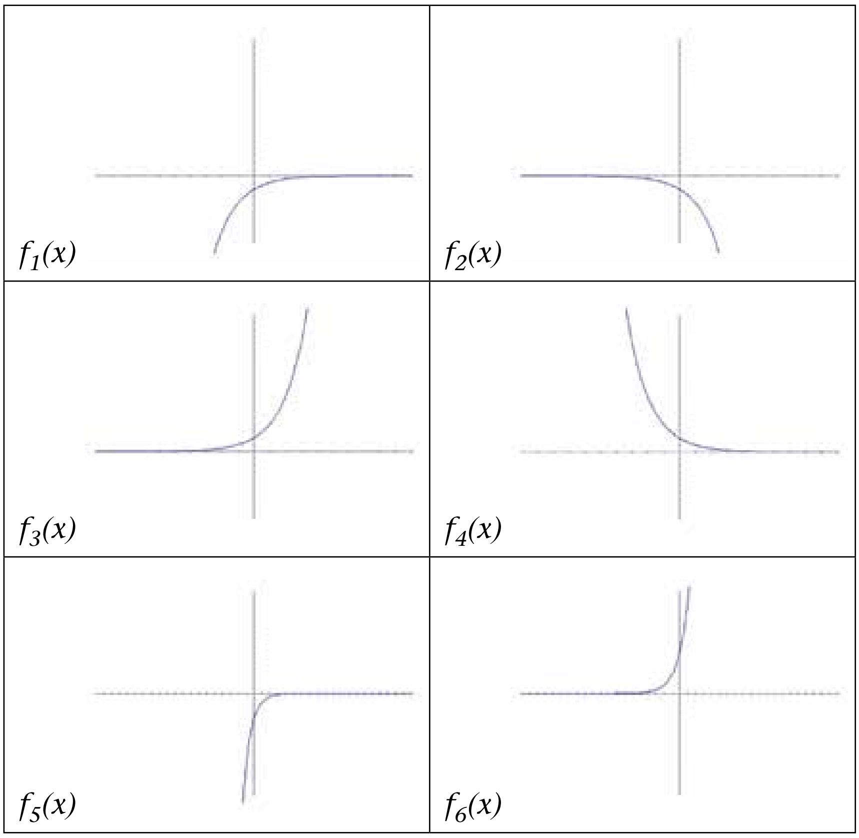
a. *¿Qué modificarías en la función* $f(x) = 3 \cdot 0{,}4^x$ *para que…*
i) … sea creciente?
*ii) … la nueva función tenga una gráfica que sea simétrica a la gráfica original con respecto al eje **y**?*
iii) … su conjunto imagen sea $(-\infty; 0)$*?*
b. *Si creés que hay distintos tipos de transformaciones sobre f(x) para lograr lo pedido en cada caso, explica cuáles son.*

Problema 6

a. *¿Creés que alcanzará con determinar las condiciones sobre el parámetro **a** para decidir si* $f(x) = k \cdot a^x$ *es creciente o decreciente?*
b. *¿Qué condiciones establecerías sobre **k** y **a** para que la función* $f(x) = k \cdot a^x$ *sea creciente? ¿Y para que sea decreciente?*

Problema 7

Las funciones graficadas tienen fórmulas del tipo $f(x) = k \cdot a^x$.
Indicar cuáles de ellas corresponden a las condiciones detalladas de ***a*** *y* ***k****, en cada caso.*



Condiciones de a y k	Funciones
$0 < a < 1$ y $k < 0$	....
$0 < a < 1$ y $k > 0$	....
$a > 1$ y $k > 0$	....
$a > 1$ y $k < 0$	....

Problema 8

¿Será cierto que los gráficos de las funciones $f(x) = 2^{x+1}$ *y* $g(x) = 2 \cdot 2^{x}$ *son iguales? Explicá las razones que justifican tu respuesta.*

Consigna optativa

Decidan si los gráficos de cada par de funciones coinciden o no. En el caso de que sean coincidentes, expliquen por qué:

a. $f(x) = 2^{-x}$ *y* $f(x) = (\frac{1}{2})^{x}$

b. $f(x) = 2^{2x}$ *y* $g(x) = 4^{x}$

c. $f(x) = 2^{x^2}$ *y* $g(x) = (2^{x})^{2}$

Problema 9

a. *¿Podés encontrar algún valor de* **x** *tal que* $f(x) = 2^{x} - 4$ *tenga imagen nula?*
b. *¿Existe algún valor de* **x** *tal que* $f(x) = 3$*? ¿Por qué?*
c. *¿Existe algún valor de* **x** *tal que* $f(x)$ *sea negativa? ¿Por qué?*
d. *¿Podés hallar algún valor del dominio de la función tal que* $f(x) = -3{,}5$*? ¿Y para* $f(x) = -3{,}9375$*?*
e. *Ídem, para* $f(x) = -5$.

Consigna optativa

f. *¿Cuáles son todos los valores posibles que puede tomar la variable x para que la función* $f(x) = (\frac{1}{4})^{x} - 4$ *proporcione imágenes negativas?*

Problema 10

Las siguientes funciones son del tipo: $\boldsymbol{y = k \cdot a^x + b}$. *Para cada una de ellas, analizá el signo de* $\boldsymbol{k}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *y, además, indicá si* $\boldsymbol{a} \in (1\ ;\ +\infty)$ *o si* $a \in (0\ ;\ 1)$.