REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

GUÍA DE AUTOAPRENDIZAJE

Matemática

NOVENO GRADO

TELEBÁSICA

2021

FASE DE VALIDACIÓN

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Escuela: ______________________________

Nombre: ______________________________

MEDIDAS DE PREVENCIÓN COVID 19


Higiene de mano


Evitar el saludo

Disponer de gel alcoholado


Cubrir la nariz y boca


Desinfectar las superficies


Lavar los alimentos


Tomar líquido


Suplir los sanitarios

Autoridades

S. E. Maruja Gorday de Villalobos
Ministra de Educación

S. E. Zonia Gallardo de Smith
Viceministra Académica

S. E. José Pío Castillero
Viceministro Administrativo

S. E. Ricardo Sánchez
Viceministro de Infraestructura

Guillermo Alegría
Director General de Educación

Lizgay R. Girón G.
Directora Nacional de Educación Básica General

Equipo coordinador del Ministerio de Educación

Lizgay R. Girón G.
Directora Nacional de Educación Básica General

Raquel Rodríguez
Asesora del Despacho para el Plan de
Emergencia Nacional

Corrección y Estilo
Mariela Mendoza de Quezada

Coordinación de Diseño y Diagramación
Aracelly Agudo (Dirección Nacional de Currículo y
Tecnología Educativa)

Diseño de Portada
Aracelly Agudo
Foto: Autoridad de Turismo de Panamá (ATP)

Diagramación
Mónica Ortega (U.P.), Ruth Lanuza (U.P.),
Ildeana Vega (U.P.), Jaqueline Trejos (U.P.) ,
Diana Tobar (U. P.) y Aracelly Agudo

Ilustraciones
Aracelly Agudo, Vecteezy y Pixabay

Mensaje para los estudiantes

Queridos estudiantes:

Ante un nuevo año lectivo lleno de desafíos y nuevas exigencias y expectativas, queremos saludarlos, muy afectuosamente y desearles un feliz y exitoso retorno a clases. Que este inicio esté lleno de alegrías, positivismo y, sobre todo, salud.

Estamos seguros de que entienden cuánto les extrañaron sus docentes ante la inesperada noticia de suspensión de clases en donde las escuelas quedaron vacías, pero sus hogares se convirtieron en los nuevos escenarios educativos, en aulas de clases acogedoras, con el privilegio de acercar la escuela y la familia, y fue así como terminamos el año con aprendizaje y ricas experiencias a la distancia.

El 2020 fue diferente, se vivieron meses difíciles, lejos físicamente de sus maestros, pero muy cercanos con el acceso a la enseñanza en línea, la distancia fue una prioridad de la mayoría. Este año escolar, que inicia el primero de marzo, continuamos con este reto de asumirlo a distancia, pero fortalecidos con lo que era casi imposible la comunicación entre docente, estudiante y familia. El Ministerio de Educación reconoce como prioridad el resguardo a la salud y la vida para todos.

Ante este escenario, les brindaremos alternativas de continuidad educativa a distancia mediante el acceso a plataformas educativas, mi portal educativo, radio, televisión, con el proyecto: Conéctate con la Estrella" y materiales de apoyo, digitales e impresos, como los cuadernos de trabajo para que el estudiante pueda aprender en un clima pedagógico favorable con entornos seguros y condiciones básicas para la educación.

Estos materiales tienen como finalidad facilitarle la educación a distancia o semipresencial con actividades en casa para cada grado. encaminadas a desarrollar habilidades y competencias articuladas hacia el logro del plan de acción desde cada centro educativo, contemplando los aspectos fundamentales del currículo priorizado.

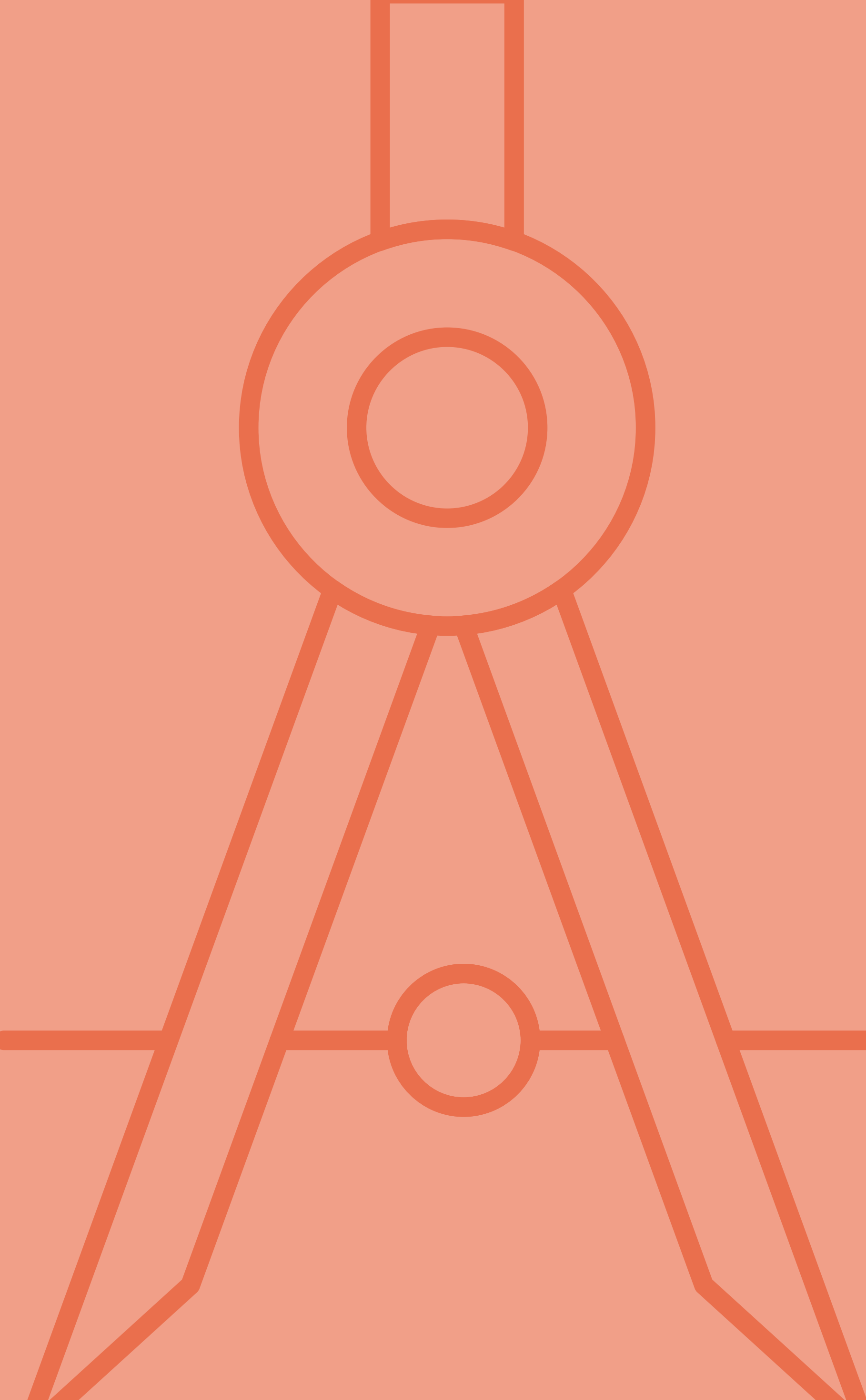
Queridos estudiantes, para que pronto podamos tener un regreso escalonado, progresivo y seguro a las aulas es importante crear espacios para educarnos en las habilidades emocionales y que sigan los protocolos de bioseguridad: lavado constante de manos, uso de la mascarilla, gel alcoholado, distanciamiento social; entre otros.
Pronto volveremos a encontrarnos.

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

CONTENIDO

CONTENIDO



Matemática

Coordinadores en la elaboración de guías Región de Coclé

Revisión y edición final
Profa. Blanca R. Aguilar C.
Profa. Nitzia Quiróz
Profa. Melva R. Mora T.
Prof. Fernando Soto Gil

Especialistas de la asignatura
Coordinación
Profa. Nitzia Quiróz

Colaboradores:
Prof. José A. Miranda
Prof. Cesar Gordón

HORARIO DE CLASES

HORA	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
8:00 - 10:00	MATEMÁTICA	ESPAÑOL	HISTORIA	MATEMÁTICA	ESPAÑOL
10:00 - 10:30	R E C E S O				
10:30 - 12:30	CÍVICA	GEOGRAFÍA	FÍSICA	QUÍMICA	HISTORIA

Tema 1

Factorización

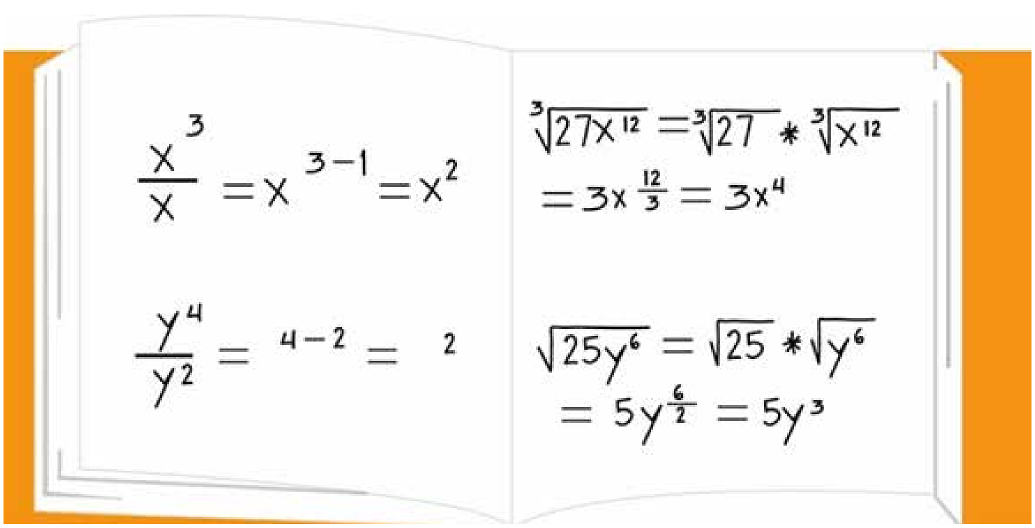
- **Concepto**
- **Casos**
- **Factor común monomio, polinomio, por agrupación de término**

Indicadores de logros:

- Identifica correctamente los casos de factorización, sus reglas y procedimientos.
- Resuelve con disposición los casos de factorización.

A. Recuerda:

La potenciación y radicación de expresiones algebraicas.



B. Para empezar:

El mínimo común múltiplo (m.c.m) de dos o más números es el múltiplo más pequeño que esos números tienen en común y el máximo común divisor (M.C.D.) de dos o más números es el número más grande por el que se pueden dividir dichos números.

Así el m.c.m. de 6 y 15 es 30, porque los múltiplos de 6 son 6; 12; 18; 24; 30 ⋯ y de 15 son 15; 30; 45 ⋯ Entonces 30 es el múltiplo más pequeño de ambos números, o sea el m.c.m.

Mientras que el M.C.D. de 12 y 18 es 6, porque al 12 lo divide el 2; 3; 4; 6 y 12. En tanto al 18 lo divide el 2; 3; 6; 9 y 18. Tanto al 12 como al 18 lo dividen el 2; 3 y 6. Siendo el 6 el máximo común divisor.

C. Considera lo siguiente:

Factorización: es una técnica que consiste en la descomposición de una expresión matemática en forma de multiplicación. Existen distintos métodos de factorización dependiendo de los objetos matemáticos estudiados, el objetivo es simplificar la expresión o reescribirla en términos de bloques fundamentales que reciben el nombre de factores o cantidades que se multiplican.

Casos de factorización: Los casos de factorización que estudiaremos serán; Factor común monomio, factor común polinomio y factor común por agrupación de términos.

FACTOR COMÚN MONOMIO
Se presenta cuando todos los términos de una expresión algebraica contienen un monomio como factor común.

Ejemplo No. 1:

Polinomio: 3x + 12

<table>
<tr><td rowspan="2">1. Se calcula el factor común de los términos del binomio.</td><td>a) El Máximo Común Divisor (MCD) de los coeficientes numéricos.</td><td>MCD (3,12) =3</td><td rowspan="2">El factor común es 3</td></tr>
<tr><td>b) La variable que está en todos los términos.</td><td>No se repite ninguna variable</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Se divide cada término del binomio entre el factor común</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = x$</td><td colspan="2">$\frac{\cancel{12}}{\cancel{3}} = 4$</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Se escribe la multiplicación del factor común y la suma de los resultados de las divisiones del paso 2.</td></tr>
<tr><td colspan="4">3 (x + 4)</td></tr>
</table>

Ejemplo No. 2:

Polinomio: $10a^3-15a^2b+20a^4c$

<table>
<tr><td rowspan="2">1. Se calcula el factor común de los términos del polinomio.</td><td>a) El Máximo Común Divisor (MCD) de los coeficientes numéricos.</td><td>MCD (10, 15, 20) =5</td><td rowspan="2">El factor común es $5a^2$</td></tr>
<tr><td>b)La variable que está en todos los términos, con el menor exponente que aparece.</td><td>La a está en todos los términos. Su menor exponente es 2.
Factor común de las letras es a^2.</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Se divide cada término del polinomio entre el factor común.</td></tr>
<tr><td>$\frac{10a^3}{5a^2} = 2a$</td><td colspan="2">$\frac{\cancel{15a^2}b}{\cancel{5a^2}} = 3b$</td><td>$\frac{20a^4c}{5a^2} = 4a^2c$</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Se escribe la multiplicación del factor común y la suma de los resultados de las divisiones del paso 2.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$5a^2\ (2a-3b+4a^2c)$</td></tr>
</table>

FACTOR COMÚN POLINOMIO

El factor común es un polinomio de dos o más términos dentro de un paréntesis.

Ejemplo:

Polinomio: $x(a+1)-t(a+1)+5(a+1)$

<table>
<tr><td colspan="3">1. Se identifica el factor común polinomio.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Se divide cada término del binomio entre el factor común.</td></tr>
<tr><td>$\frac{x\ \cancel{(a+1)}}{\cancel{(a+1)}} = x$</td><td>$\frac{t\ \cancel{(a+1)}}{\cancel{(a+1)}} = t$</td><td>$\frac{5\ \cancel{(a+1)}}{\cancel{(a+1)}} = 5$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Se escribe la multiplicación del factor común y la suma de los resultados de las divisiones del paso 2.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(a+1)\ (x-t+5)$</td></tr>
</table>

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS
Se aplica cuando no todos los términos de un polinomio tienen factor común. Consiste en agrupar los términos que sí tengan factor común.

Ejemplo:

Polinomio: 2xy+xz-6y-3z

1. Se agrupan los términos del polinomio que tengan factor común.	
2xy+xz-6y-3z (2xy-6y)+(xz-3z)	
2. Se factoriza, por el método de factor común cada paréntesis.	
2xy-6y 2y(x-3)	xz-3z z(x-3)
1. Se factoriza nuevamente por el método de factor común polinomio.	
2y(x-3)+z(x-3) (x-3)(2y+z)	

D. Manos a la obra.

Actividad

Nombre: ________________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

1) Mencione los casos de factorización estudiados:

a) ____

b) ____

c) ____

2) Completa la siguiente tabla utilizando el procedimiento de factor común monomio:

a) $6xy+4x$

MCD de los coeficientes numéricos	Variable común

Factorización completa del polinomio

b) $4xyz+10xy-8xz$

MCD de los coeficientes numéricos	Variable común

Factorización completa del polinomio

c) $25x^5y^4-35x^2y^3-10x^3y^3$

MCD de los coeficientes numéricos	Variable común

Factorización completa del polinomio

3) Completa la siguiente tabla utilizando el procedimiento de factor común polinomio.

a) $2x(x+1)+2y(x+1)$	
Factor común	Factorización completa del polinomio
b) $6x^2\ (1+y)-12x^3\ (1+y)$	
Factor común	Factorización completa del polinomio
c) $9y(5+4x)^2+18y^3\ (5+4x)^3$	
Factor común	Factorización completa del polinomio

4) Completa la siguiente tabla utilizando el procedimiento de factor común por agrupación de términos.

a) $abc-bc+amn-mn$	
Agrupación de términos	Factorización completa del polinomio
b) $4ab+5-b-20a$	
Agrupación de términos	Factorización completa del polinomio
c) $15a+5-9ab^2-3b^2$	
Agrupación de términos	Factorización completa del polinomio

E. Lo que aprendí

Taller No. 1

Nombre: ________________________________ **Grado:** _________ **Fecha:** _______

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

1. Identifica y factoriza cada polinomio por el método de factor común monomio y polinomio.	
a) $3m+6=$	Factor común: ________________________
b) $14m^2n+7mn-21m^3n=$	Factor común: ________________________
c) $m^4n^2p^3-m^3n^3p^5-m^6n^4p^4=$	Factor común: ________________________
d) $(a+b)+3x(a+b)=$	Factor común: ________________________

e) $a(2x+1)+2(2x+1)-b(2x+1)=$ Factor común: ______________________
f) $5x(3+6y)-10x(3+6y)=$ Factor común: ______________________

Taller No. 2

Nombre: ______________________________ **Grado:** ________ **Fecha:** _______

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

1. Factoriza cada polinomio por el método de agrupación de términos.
a) $3x^2+9ax^2-x-3a=$
b) $3y^3+6y+2+y^2=$
c) $4a^3x+3bm-4a^2b-3amx=$
d) $2a^2x+15by-5a^2y-6bx=$

F. Evaluación.

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Factor común: monomio y polinomio

Fecha: ________________ Puntaje total: 35 puntos

Actividad: Taller No. 1

Criterio	Puntaje				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Identifica el caso de factorización a utilizar en cada problema.					
3. Calcula el factor común monomio de los diferentes términos de la expresión algebraica.					
4. Realiza la división de los términos entre el factor común monomio.					
5. Calcula el factor común polinomio de los diferentes términos de la expresión algebraica .					
6. Realiza la división de los términos entre el factor común polinomio.					
7. Expresa correctamente los resultados.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Factor común: por agrupación de términos

Fecha: ____________________ Puntaje total: 25 puntos

Actividad: Taller No. 2

Criterio	**Puntaje**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Agrupa en paréntesis los términos que tengan algún factor en común.					
3. Calcula el factor en común monomio en cada paréntesis y realiza la división de los términos entre el factor común.					
4. Extrae el factor común polinomio de la nueva expresión y realiza la división de los términos entre el factor común.					
5. Expresa correctamente los resultados.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 2

Factorización

Trinomio
- **Cuadrado perfecto**
- **De la forma $x^2+bx+c=0$**

Indicadores de logros:

- Identifica correctamente los casos de factorización, sus reglas y procedimientos.
- Resuelve con disposición los casos de factorización.

A. Recuerda:

La radicación de expresiones algebraicas.

1. $\sqrt{9b^2} = \sqrt{9} * \sqrt{b^2} = 3b^{\frac{2}{2}} = 3b$

2. $\sqrt{225x^4} = \sqrt{225} * \sqrt{x^4} = 15x^{\frac{4}{2}} = 15x^2$

B. Para empezar:

Resuelve las siguientes multiplicaciones de monomios:

1. $(3x^2)(4y^2)=$

2. $(5a^2)(4a^3b)=$

C. Considera lo siguiente

Lee y analiza contenido que se te presentará a continuación

Casos de factorización: Los casos de factorización que estudiaremos serán; Trinomio cuadrado perfecto y de la forma $x^2 + bx + c = 0$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO
Es el trinomio donde los términos están organizados en forma ascendente o descendente. Tanto el primero como el tercer término deben ser positivos. Así mismo, esos dos términos deben ser cuadrados perfectos (es decir, deben tener raíz cuadrada exacta).

Pasos	Ejemplos	
Polinomio	$\mathbf{25 + 9y^2 + 30y}$	$\mathbf{-24ab^2 + 4a^2 + 36b^4}$
1. Se ordenan los términos del trinomio en forma descendente respecto a una variable	$9y^2 + 30y + 25$	$4a^2 - 24ab^2 + 36b^4$
2. Se verifica que el trinomio sea cuadrado perfecto, es decir, que cumpla lo siguiente:		
a) El primer y tercer término tienen raíz cuadrada exacta.	$\sqrt{9y^2} = 30y$ $\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{4a^2} = 2a$ $\sqrt{36b^4} = 6b^2$
b) El segundo término es igual a dos veces el producto de las raíces obtenidas.	$2(3y)(5) = 30y$	$2(2a)(6b^2) = 24ab^2$
3. Se escribe el cuadrado de la suma o diferencia de las raíces del primer y tercer término.	$9y^2 + 30y + 25 =$ $(3y + 5)^2$	$4a^2 - 24ab^2 + 36b^4$ $(2a - 6b^2)^2$

TRINOMIO DE LA FORMA $X^2+BX+C=0$
El trinomio debe estar organizado en forma descendente. El coeficiente del primer término debe ser uno (1). El grado (exponente) del primer término debe ser el doble del grado (exponente) del segundo término.

Ejemplo No. 1:

Pasos	x^2-2x-15
Se extrae la raíz del primer término	$\sqrt{(x^2)}=x$
Se abren dos paréntesis y se coloca en cada uno de ellos la raíz obtenida del primer término del trinomio.	(x) (x)
En el primer paréntesis, se escribe el signo del segundo término del trinomio.	(x -) (x +)
En el segundo, se escribe el signo que resulta de multiplicar los signos del segundo y del tercer término del trinomio.	
Si los dos signos escritos en el paso anterior son: **Iguales:** se buscan dos números cuyo producto sea igual al tercer término y su suma sea el segundo. **Diferentes:** se buscan dos números cuyo producto sea el tercer término y su resta sea igual al segundo término. El número mayor se escribe en el primer paréntesis y el menor en el segundo.	5*3=15 -5+3=-2 La factorización de x^2-2x-15 es (x-5)(x+3)

D. Manos a la obra

Actividad

Nombre: ________________________________ **Grado:** ____ **Fecha:** _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada la siguiente actividad.

I. Identifica si los siguientes ejercicios son trinomios cuadrados perfectos o trinomio de la forma $x^2+bx+c=0$. Coloca un gancho en una de las dos opciones dependiendo.

Ejercicio	Trinomio cuadrado perfecto	Trinomio de la forma $x^2 + bx + c = 0$
a. $16m^2+40m+25=$		
b. $x^2-5x+4=$		
c. $x^2-6xy+9y^2=$		
d. $x^2+6x+8=$		
e. $100+120y^3+36y^6=$		
f. $y^2-7y-8=$		

E. Lo que aprendí

Taller No. 1

Nombre: ________________________________ **Grado:** ____ **Fecha:** _______

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Utilizando el contenido estudiado, factorice las siguientes expresiones algebraicas. Utilizando el procedimiento para trinomio cuadrado perfecto.

a. $49s^2-14s+1=$

b. $n^2-8n+16=$

c. $m^2-24mn+144n^2=$

d. $9b^2-30a^2 b+25a^4=$

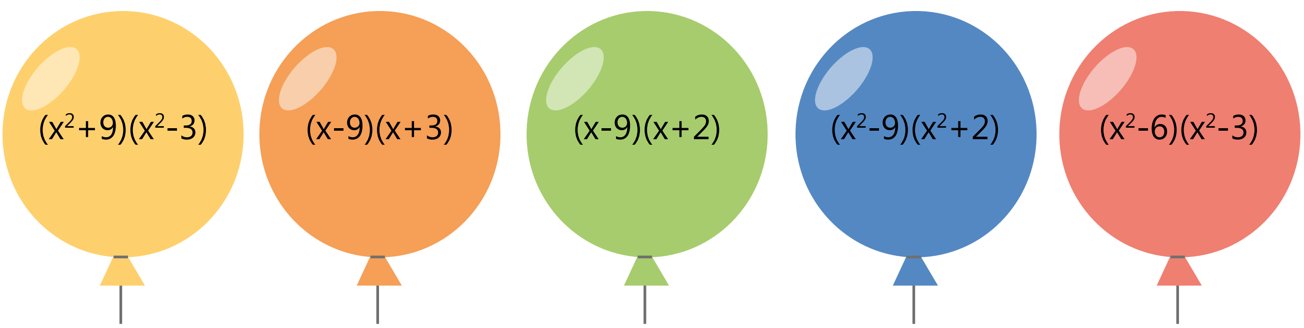
Taller No. 2

Nombre: ________________________________ **Grado:** ____ **Fecha:** _______

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Utilizando el contenido estudiado, factorice las siguientes expresiones algebraicas. Utilizando el procedimiento para trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

a. $x^2-7x-18=$	b. $x^2-6x-27=$	c. $x^4-9x^2+18=$
Globo:_______________	Globo:_______________	Globo:_______________



F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Trinomio cuadrado perfecto

Fecha: ________________ Puntaje total: 20 puntos

Actividad: Taller No. 1

Criterio	**Puntaje**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Calcula la raíz cuadrada del primer y tercer término.					
3. Comprueba que el segundo término se obtiene al multiplicar dos veces la raíz cuadrada del primer término, por la raíz cuadrada del tercer término.					
4. Eleva el primer y tercer término todo al cuadrado.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Trinomio de la forma x^2+bx+c

Fecha: ______________________ Puntaje total: 25 puntos

Actividad: Taller No. 2

Criterio	**Puntaje**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Extrae la raíz del primer término y coloca la raíz cuadrada como primer término de cada paréntesis.					
3. Identifica los signos de cada paréntesis.					
4. Calcula dos números que multiplicados se obtenga el tercer término y sumado o restado el segundo término.					
5. Identificación de los globos posterior a la factorización completa.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 3

Factorización

Trinomio

- De la forma $ax^2+bx+c=0$

Indicadores de logro:

- Resuelve con disposición los casos de factorización.

A. Recuerda

Las multiplicaciones de monomios.

$(-4a^2)(5b^2)=-20a^2b^2$	$(-2x^2)(-16x^3y)=32x^5y$

B. Para empezar

Factorice las siguientes expresiones algebraicas

a. $p^2-3p-4=$	b. $x^2+14x+49=$

C. Considera lo siguiente

TRINOMIO DE LA FORMA ax^2+bx+c
Un trinomio de la forma ax^2+bx+c con $a\neq 0$ y $a\neq 1$ es un trinomio que tiene una única variable, es de grado dos.

Ejemplo:

Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Pasos.	$5x + 6x^2 - 4$
Si es necesario, se ordena el trinomio en forma descendente.	$6x^2 + 5x - 4$
Se buscan dos factores del primer y tercer tèrmino, tales que, la suma de los productos cruzados sea igual al segundo termino del trinomio.	$6x^2 + 5x - 4$ factores de $6x^2$ $\begin{Bmatrix} 3x & 4 \\ 2x & -1 \end{Bmatrix}$ factores de -4 $(3x)(-1)+(2x)(4)=-3x+8x=5x$ Producto cruzado Segundo término
Se escribe la factorización del trinomio con los cuatro términos encontrados en el paso anterior, como se muestra a la derecha.	$6x^2 + 5x - 4$ $3x \quad 4$ $2x \quad -1$ La factorización de $6x^2 + 5x -4$ es $(3x + 4)(2x -1)$ Se coloca el 3x y 2x como primer término en ambos paréntesis.

D. Manos a la obra

Actividad

Nombre: ________________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada la siguiente actividad.

I. Identifique en la columna de la derecha la respuesta que hace correcta la factorización del ejercicio de la columna de la izquierda y coloque la letra que acompaña a la expresión algebraica.

N. $3m^2+11m+6$		$(3y+8)(3y-1)$
0. $4a^2+6a-10$		$(2a+3)(3a-2)$
M. $9y^2+21y-8$		$(m+3)(3m+2)$
A. $6a^2+5a-6$		$(2a+5)(2a-2)$

Cálculos:

N. $3m^2+11m+6$
O. $4a^2+6a-10$
M. $9y^2+21y-8$
A. $6a^2+5a-6$

E. Lo que aprendí

Taller

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Utilizando el contenido estudiado, factorice las siguientes expresiones algebraicas.

a) $13y^2-7y-6=$
b) $36x^4-18x^2-18=$
c) $4x^2-2x-20=$
d) $3m^2+8m+5=$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Fecha: ____________ Puntaje total: 30 puntos

Actividad: Taller

Criterio	Puntaje				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Descompone los factores del primer y tercer término con su respectivo signo.					
3. Realiza el producto cruzado.					
4. Realiza la adición o sustracción de los productos cruzados para obtener el segundo término.					
5. Coloca los factores en su lugar respectivo en los paréntesis.					
6. Expresa correctamente los resultados					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 4

Factorización

- Diferencia de cuadrados perfecto
- Suma o diferencia de cubos

Indicadores de logro:

- Identifica correctamente los casos de factorización, sus reglas y procedimientos.
- Resuelve con disposición los casos de factorización.

A. Recuerda.

La potenciación de expresiones algebraicas
Existe una propiedad que nos dice que $(2x^3)^2=2^2 * x^{3x2}=4x^6$
Cuando la x no tiene exponente el exponente es 1 y se multiplicaría el exponente fuera del paréntesis por 1.
$(3x)^3=3^3x^{1x3}=9x^3$

B. Para empezar:

Repasemos

La radicación de expresiones algebraicas.

La propiedad de las raíces $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

Cuando $\sqrt{\square}$ no tiene indica el índice es 2.

$\sqrt{x^6}=x^{\frac{6}{2}}=x^3$ $\qquad \frac{6}{2}$ $\qquad 6 \div 2=3$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

C. Considera lo siguiente

Lee y analiza contenido que se te presentara a continuación.

Los casos de factorización que estudiaremos en este tema serán; diferencia de cuadrados perfectos y la suma o diferencia de cubos perfectos.

DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS
La diferencia de cuadrados perfectos es el binomio formado por dos términos al que siempre se le pueden obtener raíces cuadradas exactas y la operación entre los términos debe ser sustracción. La diferencia de cuadrados perfectos es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.

Ejemplo de la diferencia de cuadrados perfectos es:

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

Observamos que en x^2-y^2 los dos términos poseen raíces cuadradas exactas; la raíz de x^2 es x ; la raíz de y^2 es y; entre x^2; y^2 el signo en medio es -, si el signo en medio de los dos términos fuera + ya no sería una diferencia de cuadrados perfectos.

Estudiemos tres casos donde no se cumple con la diferencia de cuadrados perfectos.

1) x^2+y^2 los dos términos tienen raíces cuadradas exactas pero la operación en medio de los dos términos es +, por lo tanto no es una diferencia de cuadrados perfectos.

2) x^2-15 observamos que x^2 tiene raíz cuadrada exacta y es x, la operación en medio de los dos términos es - pero el segundo término es 15 no tiene raíz cuadrada exacta, por consiguiente tampoco es una diferencia de cuadrados perfectos.

3) x^5-49 el primer término x^5 no tiene raíz cuadrada exacta, si aplicamos las propiedades de las raíces que dice lo siguiente $\sqrt{x^5}=x^{\frac{5}{2}}$ =al realizar la división de $\frac{5}{2}$ no es exacta por lo tanto x^5 no tiene raíz exacta y por consiguiente este ejemplo no puede ser una diferencia de cuadrados perfectos.

Estudiemos los siguientes ejemplos paso a paso para comprender mejor el tema.

Ejemplo N° 1
x^2-9

Pasos	x^2-9
Se extrae la raíz cuadrada de ambos términos.	$\sqrt{x^2}=x$ $\sqrt{9}=3$
Se colocan dos paréntesis.	( ) ( )
Se colocan las raíces cuadradas obtenidas.	(x 3) (x 3)
En el primer paréntesis en medio de los dos términos se coloca el signo + y en el segundo se coloca e el signo -.	(x+ 3) (x- 3)

Ejemplo N° 2
$4x^6-16y^4$

Pasos	$4x^6-16y^4$
Se extrae la raíz cuadrada de ambos términos.	$\sqrt{4x^6} = 2x^3$ $\sqrt{16y^4} = 4y^2$
Se colocan dos paréntesis.	( ) ( )
Se colocan las raíces cuadradas obtenidas.	$(2x^3 \quad 4^2)(2x^3 \quad 4y^2)$
En el primer paréntesis en medio de los dos términos se coloca el signo + y en el segundo se coloca e el signo -.	$(2x^3+ 4y^2)(2x^3- 4y^2)$

SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

Se aplica solamente en binomios, donde el primer término es positivo (el segundo término puede ser positivo o negativo). Se reconoce porque los coeficientes de los términos son números cubos perfectos (es decir números que tienen raíz cúbica exacta, como 1, 8, 27, 64 etc.) y los exponentes de las letras son múltiplos de tres (3, 6, 9, etc.).

Ejemplo:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Estudiemos paso a paso los siguientes ejemplos:

Pasos	**Ejemplo N° 1** $27x^3+125$
Se observa que el primer y segundo término son cubos perfectos, quiere decir que tienen raíces cúbicas.	$\sqrt[3]{27x^3} = 3x$ $\sqrt[3]{125}=5$
Ahora colocamos dos paréntesis en el primero colocamos las raíces cúbicas de los dos términos como en este caso se trata de una suma de cubos el primer paréntesis llevar signo +. Cuando el signo en la operación es negativa el signo del primer paréntesis debe ser negativo.	$(3x + 5)(\quad)$
En el segundo paréntesis colocaremos El cuadrado de la raíz cúbica del primer término.	$(3x)^2=9x^2$
Menos la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del segundo término.	$-(3x)(5)=-15x$
Más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo término.	$(5)^2=25$
Se coloca el primer paréntesis que está en el paso 2 y en el segundo paréntesis se colocan lo calculado en los tres últimos pasos.	$(3x+5)(9x^2-15x+25)$

Pasos	**Ejemplo N° 2** $8x^6 - 216y^9$
Se observa que el primer y segundo término son cubos perfectos quiere decir que tienen raíces cúbicas.	$\sqrt[3]{8x^6} = 2x^2$ $\sqrt[3]{216y^9}=6y^3$
Ahora colocamos dos paréntesis en el primero colocamos las raíces cúbicas de los dos términos, como este caso se trata de una diferencia de cubos el primer paréntesis debe llevar el signo - en el medio.	$(2x^2 - 6y^3)(\quad)$
En el segundo paréntesis colocaremos El cuadrado de la raíz cúbica del primer término	$(2x^2)^2 = 4x^4$

Más la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del segundo término primer paréntesis debe ser negativo.	$+ (2x^2)(6y^3) = 12x^2 y^3$
Más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo término.	$(6y^3)^2 = 36y^6$
Se coloca el primer paréntesis que está en el paso 2 y en el segundo paréntesis se colocan lo calculado en los tres últimos pasos.	$(2x^2-6y^3)(4x^4+12x^2y^3+36y^6)$

D. Manos a la obra

Actividad

Nombre: ______________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

1) Identifique cuál de las siguientes expresiones algebraicas cumple con la diferencia de cuadrados perfectos. Coloque en el recuadro de la derecha si cumple con la regla o no cumple con la regla.

Ejercicio	Cumple con la regla	No cumple con la regla
a) $x^2 - 20$		
b) $y^4 - 25$		
c) $4x^2 + 81$		
d) $y^9 - 16$		

2) Identifique los diferentes casos de factorización, que se aplicarían en las expresiones algebraicas en el cuadro.

Ejercicio	**Nombre de la factorización**
1) $x^2 - 9$	
2) $x^3 + 27$	
3) $x^6 - y^4$	

E. Lo que aprendí

Taller

Nombre: ________________________________ Grado: _______ Fecha: ____________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Utilizando el contenido estudiado, factorice las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x^6 - 81 =$

b) $4x^4 - 16y^2 =$

c) $100 - 25m^4 =$

d) $8x^{12} - y^3 =$

e) $27x^{15} - 216y^{12} =$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Diferencia de cuadrados perfecto – Suma o diferencia de cubos

Fecha: Puntaje total: 30 puntos

Actividad: Taller

Criterio	Puntaje				
	1	2	3	4	5
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Extrae la raíz cuadrada de los términos.					
3. Coloca la multiplicación de la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia de dichas raíces.					
4. Extrae la raíz cúbica de los términos.					
5. Eleva al cuadrado el primer y segundo término y realiza la multiplicación del primero por el segundo término.					
6. Expresa correctamente los resultados.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 5

Factorización

- Cuadrinomio cubo perfecto

Indicadores de logro:

- Identifica correctamente los casos de factorización, sus reglas y procedimientos.
- Resuelve con disposición los casos de factorización.

A. Recuerda

Ley de los signos para la adición y sustracción:

Ley	Descripción	Ejemplo
Signos iguales se suman y el resultado mantiene el mismo signo que se repite.	+ y+ - y-	+5+6=+11 - 9-1=-10
Signos distintos se restan y se coloca el signo que posee el número mayor.	+ y- - y+	+3-8=-5 - 9+12=+3

Ley de los signos para la multiplicación y división

Ley	Descripción	Ejemplo
Signos iguales el resultado siempre será positivo.	+ *+ =+ - *-=+ + ÷+ =+ - ÷-=+	+5*+2=+10 - 3*-2=+6 +14÷+2=+7 - 21÷-7=+3
Signos distintos el resultado será negativo.	+ * - =- - * + =- + ÷- =- - ÷+=-	+8 * -3=-24 - 9 * +6=-54 +30÷-10=-3 - 35÷+5=-7

B. Para empezar

Repasemos:

1. La propiedad de las potencias.

$(2x^3)^2 = 2^2 * x^{3x2} = 4x^6$

$(5x)^2 = 5^2 * x^{1x2} = 25x^2$

Cuando la letra no tiene exponente el exponente es 1

2. La propiedad de las raíces $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Cuando $\sqrt{\square}$ no tiene indica el índice es 2

Ejemplos:

$\sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3$	$\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^2$	$\sqrt[3]{x^9} = x^{\frac{9}{3}} = x^3$
$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{9}{3}$
$6 \div 2 = 3$	$6 \div 3 = 2$	$9 \div 3 = 3$
$\frac{6}{0}$	$\frac{6}{0}$	$\frac{6}{0}$

C. Consideremos lo siguiente: lee y analiza el contenido que se te presentara a continuación.

CUADRINOMIO CUBO PERFECTO

Es cuando un polinomio está formado por cuatro términos, se identifica cuando él último y el primer término son cubos perfectos, el segundo término es tres veces el cuadrado del primer cubo perfecto por el segundo cubo perfecto, y el tercer término es tres veces el primer cubo perfecto por el cuadrado del segundo cubo perfecto.

Ejemplos:

$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$$

$\sqrt{27x^3} = 3x$

$\sqrt[3]{-1} = -1$

$3(3x)^2(-1)$

$-3(9x^2)$

$-27x^2$

$3(3x)(-1)^2$

$9x(1)$

$9x$

El cuadrinomio se factoriza de la siguiente forma, el cubo del primer término y el cubo del cuarto término todo al cubo. $(3x-1)^3$
Para comprobar si es un cuadrinomio cubo perfecto se debe corroborar lo siguiente.

Pasos	**Ejemplo N° 1** $8x^3+36x^2+54x+27$
Se debe comprobar que el primer y cuarto término sean cubos perfectos.	$8x^3$ ------- $\sqrt[3]{8x^3}=2x$ 27 -------- $\sqrt[3]{27}=3$
El segundo término debe ser 3 veces el cuadrado de la raíz cúbica del primer término, por la raíz cúbica del cuarto término.	$3(2x)^2(3)=9(4x^2)$ $=36x^2$
El tercer término debe ser 3 veces la raíz cubica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto término.	$3(2x)(3)^2=6x(9)$ $=54x$
Si se cumplen todos los pasos anteriores entonces es un cuadrinomio cubo perfecto y se expresa en un paréntesis las raíces cúbicas del primer y cuarto término todo al cubo. Si no cumple con estos pasos entonces no es cuadrinomio cubo perfecto.	$(2x+3)^3$

Pasos	**Ejemplo N°2** $216x^6+216x^4y+72x^2\ y^2+8y^3$
Se debe comprobar que el primer y cuarto término sean cubos perfectos.	$126x^6$ ------- $\sqrt[3]{126x^6}=6x^2$ $8y^3$ -------- $\sqrt[3]{8y^3}=2y$
El segundo término debe ser 3 veces el cuadrado de la raíz cúbica del primer término, por la raíz cúbica del cuarto término.	$3(6x^2)^2(2y)=6y(36x^4)$ $=216x^4y$
El tercer término debe ser 3 veces la raíz cubica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto término.	$3(6x^2)(2y)^2=18x^2(4y^2)$ $=72x^2y^2$
Si se cumplen todos los pasos anteriores entonces es un cuadrinomio cubo perfecto y se expresa en un paréntesis las raíces cúbicas del primer y cuarto término todo al cubo. Si no cumple con estos pasos entonces no es cuadrinomio cubo perfecto. Si todos los términos del cuadrinomio son positivos, el signo que separa los dos términos en la expresión factorizada es positivo y para que ese signo sea negativo el segundo y el cuarto término del cuadrinomio deben ser negativo.	$(6x^2+2y)^3$

D. Manos a la obra

Actividad

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

1) Enuncie la regla para factorizar el cuadrinomio cubo perfecto:

____

____

____

2) Identifique cuáles de los siguientes ejercicios son cuadrinomios cubos perfectos y cuales no los son. Coloque en el recuadro de la derecha la selección correcta.

Ejercicio	Cumple con la regla	No cumple con la regla
a) $x^3-12x^2+48x-64$		
b) $2x^{18}-15x^{12}+75x^6+125$		
c) $125x^9-525x^6+735x^3-343$		

E. Lo que aprendimos: aplica lo aprendido en el siguiente taller.

Taller

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Aplique la regla del cuadrinomio cubo perfecto. Debe realizar los procedimientos de comprobación del primero, segundo, tercer y cuarto término.

a) $y^3+21y^2+147y+343=$

b) $125x^9+450x^6+540x^3+216=$

c) $x^{27}-6x^{18}y^{3}+12x^{9}y^{6}-8y^{9}=$

d) $27x^{3}-108x^{2}+144x-64=$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Cuadrinomio cubo perfecto

Fecha: _____________

Actividad: Taller

Puntaje total: 25 puntos

Criterio	Puntaje				
	1	2	3	4	5
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Comprueba que el primer y cuarto término son cubos perfectos.					
3. Verifica que el segundo término es tres veces el cuadrado de la raíz cúbica del primer término, por la raíz cúbica del cuarto término.					
4. Demuestra que el tercer término es tres veces la raíz cubica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto término.					
5. Expresa correctamente los resultados.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 6

Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (mcm) Concepto

Indicador de logros:

- Determina el MCD y el mcm de expresiones algebraicas.

A. Recuerda

Como calcular el MCD de los números.

En el cálculo del MCM solo se usan los números primos siguientes: 2 – 3 – 5 – 7.	
Calcular Máximo Común Divisor (MCD) de 84 – 42 Se coloca los números de la siguiente forma	**84 42 |**
Se observa si ambos son pares, en este caso 84 y 42 son números pares, se debe dividir ambos entre el mismo número, como ambos son pares se dividirá entre 2. Se divide 84 ÷ 2 = 42 42 ÷ 2= 21	**84 42 | 2** **42 21 |**
Observamos que ahora los números son 42 y 21, 42 es un número par, pero 21 no lo es, por lo tanto, no se pueden dividir ambos entre 2. Analicemos si ambos se pueden dividir entre3, sumemos los dígitos de 21 que son 1 y 2, 1+2=3, 3 es divisible entre 3, 42 sus dígitos son 4 y 2 sumándolos 4+2=6, 6 es divisible entre 3, por lo tanto, dividimos entre 3. 42 ÷ 3= 14 21 ÷ 3= 7	**84 42 | 2** **42 21 | 3** **14 7 |**
Analicemos si 14 y 7 son divisibles entre5, el criterio de divisibilidad nos dice que solo serán divisibles entre 5 los números cuyo último dígito sea 0 – 5. 14 su último dígito es 4 y 7 su único digito es 7, como no terminan en 5 o 0 no se pueden dividir entre 5. Estudiemos si son divisibles entre 7, dividiendo entre 7 si el resultado de la división es exacto entonces dividimos ambos entre 7. 14 ÷ 7= 2 7 ÷ 7=1	**84 42 | 2** **42 21 | 3** **14 7 | 7** **2 1 |**
Ahora los números son 2 y 1, no existe ningún número que divida a 2 y a 1 al mismo tiempo por lo tanto se llegaría hasta aquí y ahora se multiplicarían los números de la tercera columna.	**2x3x7** **2x3=6** **6x7=42**
El MCD de 84 y 42 es	**42**

B. Para empezar

Repasemos cómo calcular el m.c.m. de los números.

Calcular el m.c.m. de 30 – 45	**30 45 |**
Se observa si en los números alguno es par. Si hay un número par se empieza dividiendo el número que lo permite entre 2. Se divide 30 ÷ 2 =15 y 45 permanece igual porque 2 no divide en cantidad exacta a 45.	**30 45 | 2** **15 45 |**
Observamos que ahora los números son 15 y 45 ninguno de ellos es par por lo tanto no se pueden dividir entre 2. Se analiza si son divisibles entre 3. Para ello sumamos los dígitos de cada número, ejemplo 15 sus dígitos son 1 Y 5, los sumamos 1+5=6, 6 es divisible entre 3. Ahora hagámoslo con 45 sus dígitos son 4 y 5 los sumamos 4+5=9, nueve es divisible entre 3, por lo tanto, podemos dividir 15 y 45 entre 3, Dividimos 15 ÷ 3=5 45 ÷3=15	**30 45 | 2** **15 45 | 3** **3 15 |**
Ahora los números son 3 y 15 y ya sabemos que 3 es divisible entre 3 y en el paso anterior comprobamos que 15 es divisible entre 3, por lo tanto, seguimos dividiendo entre 3. Dividimos 3 ÷ 3= 1 15 ÷ 3= 5	**30 45 | 2** **15 45 | 3** **3 15 | 3** **1 5 |**
Observamos que ya obteneos el número 1 en una de las columnas, quiere decir que ya ese número no lo dividiremos más, ya quedará así, el número 5 ya no es divisible entre 3, entonces analizaremos si es divisible entre 5 y vemos que si, por lo tanto, dividiremos entre 5.	**30 45 | 2** **15 45 | 3** **3 15 | 3** **1 5 | 5** **1 1 |**
Hemos llegado al número 1 en ambas columnas por lo tanto hemos terminado los factores o números en la tercera columna. Que luego procedemos a multiplicar para determinar el mcm.	**2 x 3 x 3 x 5** **2 x 3= 6** **6 x 3=18** **18 x 5 =90**
El mcm de 15 y 45 es	**90**

C. Considera lo siguiente

Recuerda que una expresión algebraica es aquella que están formadas por términos ($4x^2$) el cual tiene los siguientes elementos.

Coeficiente: Es el factor numérico (4)
Variable: Es la parte literal (x)
Exponente: es el exponente de la variable (2)

Cuando no se escribe el coeficiente se entiende que este es 1. Ejemplo $x^2 = 1x^2$
Por otro lado, ten presente que las expresiones algebraicas pueden ser monomios (un solo términos) y polinomios (Consta de más de un término).

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE EXPESIONES ALGEBRAICAS
El Máximo Común Divisor (MCD) de dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica de mayor coeficiente numérico y de mayor grado que está contenida exactamente en cada una de ellas.
Ejemplo: Calcular el MCD de los siguientes términos 10a2 b 20a3

Ejemplo:
Calcular el MCD de los siguientes términos $10\ a^2b \quad 20a^3$

Calculamos el MCD de los números 10 – 20	$\begin{array}{cc\|c} \mathbf{10} & \mathbf{20} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{5} \end{array}$
Realizar la multiplicación de la tercera columna El MCD de 10 – 20 es 10	**2 X 5 = 10**
Calculemos el MCD de las letras $a^2\ b \quad a^3$	$\mathbf{a^2\ b \quad a^3}$
El MCD de las letras son las letras que se repiten en ambos factores con el exponente menor En este caso la letra que se repite en ambos términos es a y la que tiene el menor exponente es a^2	$\mathbf{a^2}$
El MCD de los dos términos unidos el MDC de los números y las letras será	$\mathbf{10\ a^2}$

REGLA PARA EL MCD DE MONOMIOS
Se halla el MCD de los coeficientes y a continuación de éste se escriben las letras comunes, dando a cada letra el menor exponente que tenga en las expresiones dadas.

Ejemplo:
Calcular el MCD de los siguientes términos $8a^3n^2 \qquad 24an^3 \qquad 40a^3n^4p$

Calculamos el MCD de los números 8 – 24 – 40	**8 24 40 | 2** **4 12 20 | 2** **2 6 10 | 2** **1 3 5**
Realizar la multiplicación de la tercera columna El MCD de 8 – 24 – 40 es 8	**2 x 2 x 2** **2 x 2= 4** **4 x 2= 8**
Calculemos el MCD de las letras en cada término.	$a^3 \; n^2 \quad an^3 \quad a^3 n^4 p$
El MCD de las letras son las letras que se repiten en cada término con el exponente menor. En este caso la letra que se repite cada término son la "a" y la "n"; y las de menor exponente son "a" y la "n^2".	a^2
El MCD de los dos términos unidos el MDC de los números y las letras será	**8** an^2

REGLA PARA EL MCD DE POLINOMIOS:
Al hallar el MCD de dos o más polinomios puede ocurrir que los polinomios no puedan factorarse fácilmente o que su descomposición no sea sencilla. En el primer caso se halla el MCD por descomposición de factores de los polinomios dados; en el segundo caso se halla el MCD por divisiones sucesivas.

Descomposición de factores:
Se descomponen los polinomios dados en sus factores primos. El MCD es el producto de los factores comunes con su menor exponente.

Ejemplo:
Calcular el MCD de $4a^2 + 4ab$ y $2a^4 - 2a^2 b^2$

Factorando estas expresiones	
$4a^2 + 4ab$	**$2a^4 - 2a^2 b^2$**
1. Aplicamos el caso de factorización factor común monomio $4a\ (a + b)$	2. Aplicamos el caso de factorización factor común monomio $2a^2\ (a^2 - b^2)$
3. Convertimos a 4 como **2^2**, ya que **2^2**= 4 **$2^2\,a(a + b)$**	4. Aplicamos el caso de factorización diferencia de cuadrados perfectos en $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$ $2a^2\ (a + b)\ (a - b)$
5. Observamos que en ambos polinomios los números en común con el menos exponente es 2	6. En ambos polinomios factorados en el paso 2 y 3 las letras en común son (a) con el menos exponente que es 1 entonces sería (a) y el paréntesis (a + b) está presente en ambos polinomios factorados.
Por lo tanto, el MCD de **$4a^2 + 4ab$ y $2a^2 - 2a^2 b^2$ es $2a(a+b)$**	

MÍNIMO COMÚN MULTIPLO

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas. Así, el m. c. m. de $4a$ y $6a^2$ es $12a^2$; el m.c.m.de $2x^2$,$6x^3$ y $9x^4$ es $18x^4$.

REGLA PARA EL mcm DE MONOMIOS

Se halla el mcm de los coeficientes y a continuación de éste se escriben todas las letras distintas, sean o no comunes, dando a cada letra el mayor exponente que tenga en las expresiones dadas.

Ejemplo:
Calcular el mcm de $8ab^2c$ y $12a^3b^2$

Calculamos el mcm de los números 8 – 12	**8 12 | 2** **4 6 | 2** **2 3 | 2** **1 3 | 3** **1 1**
Realizar la multiplicación de la tercera columna El mcm de 8 – 12 = 24	**2 x 2 x 2 x 3** **2 x 2= 4** **4 x 2= 8** **8 x 3 = 24**
Calculemos el mcm de las letras El mcm de las letras son todas las letras distintas, sean o no comunes, dando a cada letra el mayor exponente	$ab^2 c$ $a^3 b^2$ a^3 b^2 c
El mcm de los dos términos unidos el mcm de los números y las letras es	$24a^3 b^2 c$

REGLA PARA EL MCM DE MONOMIOS Y POLINOMIOS
Se descomponen las expresiones dadas en sus factores primos el m. c. m. es el producto de los factores primos, comunes y no comunes, con su mayor exponente.

Ejemplo:
Calcular el m. c. m. de $6xy$, $3x^2 - 3x$

Factorando estas expresiones	
6xy	$3x^2 - 3x$
1. El término 6xy permanece igual porque como es un monomio no se puede descomponer en otra expresión.	2. Aplicamos el caso de factorización factor común monomio 3x(x-1)
3. Calcular el mcm de los coeficientes 6 – 3 6 3 | 2 3 3 | 3 1 1 Multiplicamos 2 x 3= 6 El mcm de 6 – 3 es 6	4. El mcm de las letras todas las letras distintas, sean o no comunes, dando a cada letra el mayor exponente, se incluyen los paréntesis con el mayor exponente =xy(x-1)
5. Unimos el mcm de los coeficientes calculado en el paso 2 y el mcm de las letras calculadas en el paso 3.	6. El mcm de 6xy, 3x2 - 3x es 6xy(x-1)

REGLA PARA EL M.C.M. DE POLINOMIOS

Es la misma regla del caso anterior.
Ejemplo: Calcular el m. c. m. de $4ax^2 - 8axy + 4ay^2$, $6b^2x - 6b^2y$.

Factorando estas expresiones	
$4ax^2 - 8axy + 4ay^2$	$6b^2x - 6b^2y$
1. Aplicamos el caso de factorización factor común monomio $4a(x^2 - 2xy + y^2)$	2. Aplicamos el caso de factorización factor común monomio $6b^2(x - y)$
3. Aplicamos el caso de factorización trinomio cuadrado perfecto a $(x^2 - 2xy + y^2) = (x - y)^2$ Entonces $4a(x^2 - 2xy + y^2) = 4a(x - y)^2$	4. Calcular el mcm de los coeficientes 4-6 $\begin{array}{cc\|c} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$ Multiplicamos 2 x 2 x 3 2 x 2 = 4 4 x 3 = 12 El mcm de 4 – 6 es 12
5. El mcm de las letras todas las letras distintas, sean o no comunes, dando a cada letra el mayor exponente, se incluyen los paréntesis con el mayor exponente se incluyen los paréntesis con el mayor exponente $=ab^2(x - y)^2$	6. Unimos el mcm de los coeficientes calculado en el paso 4 y el mcm de las letras calculadas en el paso 5. $=12ab^2(x - y)^2$
El mcm de $4ax^2 - 8axy + 4ay^2$, $6b^2x - 6b^2y$ es $12ab^2(x - y)^2$	

D. Manos a la obra

Actividad

Nombre: ________________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

A. Utilizando el contenido estudiado en este tema calcula los MCD de los siguientes monomios y polinomios

I. Calcular el M.C.D.

1) $12x^2yz^3$ $18xy^2z$ $24x^3yz^2$

2) $42a^2x^6y^4$ $70mx^4y^7$ $98x^5y^6$

3) $12a^2 b^3$ $4a^3 b^2 - 8a^2 b^3$

4) $5a^2 - 15$ $a^4 - 3a^2 =$

II. Calcular el mcm

1) $4\ x^3\ a^2\ y^5\ z^7$ $6\ x^6\ a^5\ y^2$

2) $9x^2\ y$ $6xy^4$ $12x^5\ y^4$

3) $2ax$ $4x - 8$

4) $2a^2+2ab$ $4a^2-4ab$

E. Lo que aprendí

Nombre: ___________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

A. Utilizando el contenido estudiado en este tema calcula los MCD Y mcm de los siguientes monomios y polinomios.

I. Calcular el M.C.D. Taller

1) $a^2 x$ $ax^2=$

2) $15a^2 b^3 c$ $24ab^2 x$ $36b^4 x$

3) $16x^3 y$ $4x+20xy$

4) $5xy^2$ $10x^2 y+5x^3 y$

5) $x^2 - 4$ $x^3 - 8=$

II. Calcular el mcm de

1) $6mn^2$ $9m^2n^3$ $12m^3n$

2) $60x^3 y^4$ $40 xy^3 z^3$ $30 x^4 y^2 z^5$

3) $21a^2 b$ $3a^3+6a^2 b^3$

4) $12m^2 n^2$ $6m^3 n^2-12m^2 n^3$

5) $3x^3+15x^2$ $\qquad$ ax^2+5ax

F. Evaluación.

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

Fecha: _______________

Actividad: Taller

Puntaje total: 45 puntos

Criterio	Puntaje				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Aplica los casos de factorización al calcular el MCD en los polinomios.					
3. Calcula el MCD de los monomios.					
4. Calcula el MCD de monomio y polinomio.					
5. Calcula el MCD de los polinomios.					
6. Aplica los casos de factorización al calcular el mcm en los polinomios.					
7. Calcula el mcm de los monomios.					
8. Calcula el mcm de monomio y polinomio.					
9. Calcula el mcm de los polinomios.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 7

Fracciones algebraicas
- Concepto
- Tipos: racionales, irracionales, equivalentes, homogéneas, heterogéneas
- Simplificación

Indicadores de logros:

• Identifica con seguridad fracciones algebraicas.
• Clasifica las fracciones algebraicas como racionales e irracionales, equivalentes, homogéneas y heterogéneas

A. Recuerda

Simplificación de números enteros.

1) $\frac{\cancel{24}}{\cancel{12}} = 2$ **2)** $\frac{\cancel{56}}{\cancel{14}} = 4$

B. Para empezar

Factoriza cada polinomio por el método de factor común.

1) $3m+6=$

2) $14m^2n+7mn=$

C. Considera lo siguiente

Concepto
Una facción algebraica se define como el cociente de dos expresiones algebraicas.

Clasificación de las fracciones algebraicas

1) **Fracción racional:** Si $\frac{P\,(x)}{Q\,(x)}$ es una fracción algebraica,

donde P(x) y Q(x) son polinomios, con $Q(x) \neq 0$, la fracción algebraica es racional.

Ejemplo:

$\frac{2x-9}{4x+5}$ ➤ **Es racional porque su numerador y denominador son polinomios.**

2) **Fracción irracional:** Si el numerador, el denominador o ambos NO son polinomios, entonces la fracción es irracional.

Ejemplo:
Encerrar la fracción algebraica que es racional.

$\frac{\sqrt{x}-6}{5x-8}$ ➤ **Es irracional porque** $\sqrt{x}-6$ **NO es un polinomio.**

3) **Fracciones algebraicas equivalentes**
Al multiplicar o dividir el numerador y denominador de una fracción algebraica por una misma expresión algebraica distinta de cero, se puede obtener una fracción algebraica equivalente a la fracción dada.

Si las fracciones $\frac{P\,(x)}{Q\,(x)}$ y $\frac{R\,(x)}{T\,(x)}$ son equivalentes, entonces se cumple que $\frac{P\,(x)}{Q\,(x)} = \frac{R\,(x)}{T\,(x)}$;

es decir, $P(x)*T(x)=Q(x)*R(x)$

Ejemplo:

Multiplicamos en diagonales y verificamos que los resultados sean iguales.

$\frac{x^2-4}{x^3-8}$ y $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$
$(x^2-4)\,(x^2+2x+4)=(x^3-8)(x+2)$ $x^4+2x^3\ +4x^2-4x^2-8x-16=x^4+2x^3-8x-16$ $x^4+2x^3-8x-16=x^4+2x^3-8x-16$
Entonces $\frac{x^2-4}{x^3-8}$ y $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$ sí son equivalentes

4) Fracciones homogéneas: son aquellos donde los denominadores son polinomios idénticos.

Ejemplo:

$$\frac{2x-1}{x+1} \qquad \frac{x-1}{x+1} \qquad \frac{2x^2}{x+1}$$

5) Fracciones heterogéneas: son aquellas donde los denominadores son polinomios diferentes.

$$\frac{3x^4}{x+3} \qquad \frac{x^3+x^2}{x^3+1} \qquad \frac{x^2+4}{2x+5}$$

Simplificación de fraccione algebraicas
La simplificación de fracciones algebraicas es un proceso mediante el cual se obtiene una fracción que es equivalente a una fracción dada.

Para simplificar una fracción algebraica se hace lo siguiente:

1. Si es necesario, se factorizan el numerador y el denominador de la fracción

2. Se cancelan los factores que tienen en común el numerador y el denominador.

$$\frac{a^2 - a - 20}{a^2 - 7a + 10} = \frac{\cancel{(a-5)}(a+4)}{\cancel{(a-5)}(a-2)} = \frac{(a+4)}{(a-2)}$$

Fracción algebraica original

Fracción algebraica simplificada

Actividad

Nombre: ______________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada la siguiente actividad.

I. En el siguiente cuadro, clasifica las siguientes expresiones marcando con un ganchito en el cuadrante que corresponde.

Expresión algebraica	Clasificación de la fracción Algebraica		
	Homogénea	Heterogénea	Equivalentes
$3a^3bx$; $\frac{8x^2-3}{x}$			
$\frac{h^6-9}{\mathrm{h}}$; $\frac{2h^3-18h}{2h^2}$			
$\frac{3x^6+2}{x^4-7\mathrm{x}}$; $\frac{4x^7+2}{x^5-7x^2-9}$			
$\frac{9x}{x^4+5}$; $\frac{-5}{x^4+5}$			

Taller

Nombre: ________________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Simplificar o reducir a su más simple expresión:

1) $\frac{(2ax+4bx)}{(3ay+6by)} =$

2) $\frac{(x^2-2x-3)}{(x-3)} =$

3) $\frac{(x^2-4)}{(5ax-10a)} =$

4) $\frac{(3x^2-4x-15)}{(x^2-5x+6)} =$

5) $\frac{(x^3-6x^2)}{(x^2-12x+36)} =$

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Fracciones algebraicas

Fecha: Puntaje total: 25 puntos

Actividad: Taller

Criterio	Puntaje				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Realiza la factorización en el numerador.					
3. Efectúa la factorización en el denominador.					
4. Realiza la simplificación de coeficientes, variables y paréntesis.					
1. Presenta la fracción algebraica simplificada.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 8

Operaciones básicas con expresiones algebraicas
Adición y sustracción

Indicadores de logros:
- Identifica con seguridad las operaciones básicas y sus signos operacionales.
- Adiciona y sustrae con seguridad fracciones algebraicas.

A. Recuerda

El procedimiento de suma de fracciones.

$$\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{14-12}{21}=\frac{2}{21} \qquad \frac{8}{5}+\frac{7}{10}=\frac{16+7}{10}=\frac{23}{10}$$

B. Para empezar

Repasemos como se calcula el mcm de estas dos expresiones algebraicas:
m^2-2m-8 m^2-m-12

C. Considera lo siguiente

Para sumar dos o más fracciones algebraicas homogéneas, se suman los numeradores y se conserva el denominador.

$$\frac{2x}{x+1}+\frac{5x}{x+1}=\frac{2x+5x}{x+1}=\frac{7x}{x+1}$$

Ejemplo:
Al sumar o restar fracciones algebraicas heterogéneas, se siguen los siguientes pasos:

$$\frac{x+3}{x^2-x-12}+\frac{x-12}{x^2-16}$$

$$\frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x^2-x-12}}+\frac{\boldsymbol{x-12}}{\boldsymbol{x^2-16}}$$	
Se factorizan los numeradores y denominadores. Si es posible, se puede simplificar las fracciones.	$\frac{\cancel{x+3}}{(x-4)\cancel{(x+3)}}+\frac{x-12}{(x+4)(x-4)}$ $=\frac{1}{(x-4)}+\frac{x-12}{(x+4)(x-4)}$
Se determina el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores. Este será el nuevo denominador.	$(x+4)(x-4)$
Se divide el mcm calculado entre el denominador de cada fracción	$\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}}=(x+4)$ $\frac{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-4)}}=1$
Se multiplica el resultado de la simplificación del paso anterior por el numerador de cada fracción	$\frac{(x+4)(1)+(1)(x+12)}{(x+4)(x-4)}$
Realizar los productos	$\frac{x+4+x-12}{(x+4)(x-4)}$
Realizar las adiciones o sustracciones de los términos semejantes	$\frac{2x-8}{(x+4)(x-4)}$
Factorizar el numerador o denominador y simplificar	$\frac{2\cancel{(x-4)}}{(x+4)\cancel{(x-4)}}$
Expresar el resultado	$\frac{2}{(x+4)}$

Actividad

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada la siguiente actividad.

I. Completa los espacios de las siguientes operaciones de fracciones algebraicas.

1) $\frac{x^2}{(x-1)} - \frac{2x-1}{x-1} = \frac{\qquad}{x-1} = \frac{x^2-2x+1}{\qquad}$

2) $\frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{8} = \frac{(\quad)(x-3)}{8} - \frac{(x-2)}{8} = \frac{2x-6}{\qquad} - \frac{(x-2)}{8}$

$= \frac{2x-6-x+2}{8} = \frac{\qquad}{8}$

E. Lo que aprendí

Taller

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Realiza las siguientes adiciones y sustracciones de fracciones algebraicas.

a) $\frac{x+2}{2x}+\frac{x^2+2}{6x^2}=$

b) $\frac{1-k}{k^2-2k}-\frac{k}{8-4k}=$

c) $\frac{2}{5a-3}+\frac{1-85a}{25a^2-9}=$

d) $\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x-3}=$

e) $$\frac{3m+1}{m^2+2m-3}-\frac{m-11}{m^2+2m-3}+\frac{1}{m-1}=$$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Operaciones básicas con expresiones algebraicas – adición y sustracción

Fecha: Puntaje total: 50 puntos

Actividad: Taller

Criterio	Puntaje				
	1	2	3	4	5
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Realiza la factorización en el numerador.					
3. Efectúa la factorización en el denominador.					
4. Realiza la simplificación de coeficientes, variables y paréntesis.					
5. Presenta la fracción algebraica simplificada.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 9

Operaciones básicas con expresiones algebraicas
Multiplicación y división

Indicadores de logro:
- Identifica con seguridad las operaciones básicas y sus signos operacionales.
- Multiplique y divide con seguridad fracciones algebraicas.

A. Recuerda

Multiplicación y división de fracciones

1. $\frac{2}{5} * \frac{15}{14} = \frac{1}{1} * \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$

2. $\frac{8}{5} \div \frac{7}{10} = \frac{8}{5} * \frac{10}{7} = \frac{8}{1} * \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$

B. Para empezar

Factorice los siguientes polinomios:

1. m^2-36=

2. x^2-7x+12=

C. Considera lo siguiente

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para realizar multiplicación de dos o más fracciones algebraicas, se pueden dar los pasos:

Ejemplo:

$\frac{x^2-4}{5x-10} * \frac{x^2+6x-9}{x^2+2x}$	
Si es posible, se factorizan los numeradores y los denominadores de todas las fracciones.	$\frac{(x+2)(x-2)}{5(x-2)} * \frac{(x-3)^2}{x(x+2)}$
Se indica, en una sola fracción, el producto de los numeradores y el de los denominadores y se simplifican	$\frac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}(x-3)^2}{5x\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}}$
Se expresa el resultado	$\frac{(x-3)^2}{5x}$

DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para dividir dos fracciones, se pueden dar los pasos que se detallan a continuación:

$\frac{a^2-81}{2a^2+10a} \div \frac{a^2-11a+18}{a+5}$	
En la división la primera fracción se escribe igual se convierte el signo de entre (÷) a por (*) y se invierte el orden de la segunda fracción lo que está en el numerador pasa al denominador y lo que está en el denominador pasa al numerador.	$\frac{a^2-81}{2a^2+10a} * \frac{a+5}{a^2-11a+18}$
Si es posible, se factorizan los numeradores y los denominadores de todas las fracciones.	$\frac{(a+9)(a-9)}{2a(a+5)} * \frac{a+5}{(a-9)(a-2)}$
Se indica, en una sola fracción, el producto de los numeradores y el de los denominadores y se simplifica	$\frac{(a+9)\cancel{(a-9)}\cancel{(a+5)}}{2a\cancel{(a+5)}\cancel{(a-9)}(a-2)}$
Se expresan los resultados	$\frac{(a+9)}{2a(a-2)}$

D. Manos a la obra

Actividad

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades

I. Efectúa las siguientes multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 25} \times \dfrac{x^2 + 5x}{2x^2 - x} =$

b) $\dfrac{y^2 - y - 2}{y^2 - 2y} \div \dfrac{y + 1}{(y - 2)^2} =$

c) $\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 25} \div \dfrac{x^2 + 5x^2}{2x^2 - x} =$

E. Lo que aprendí

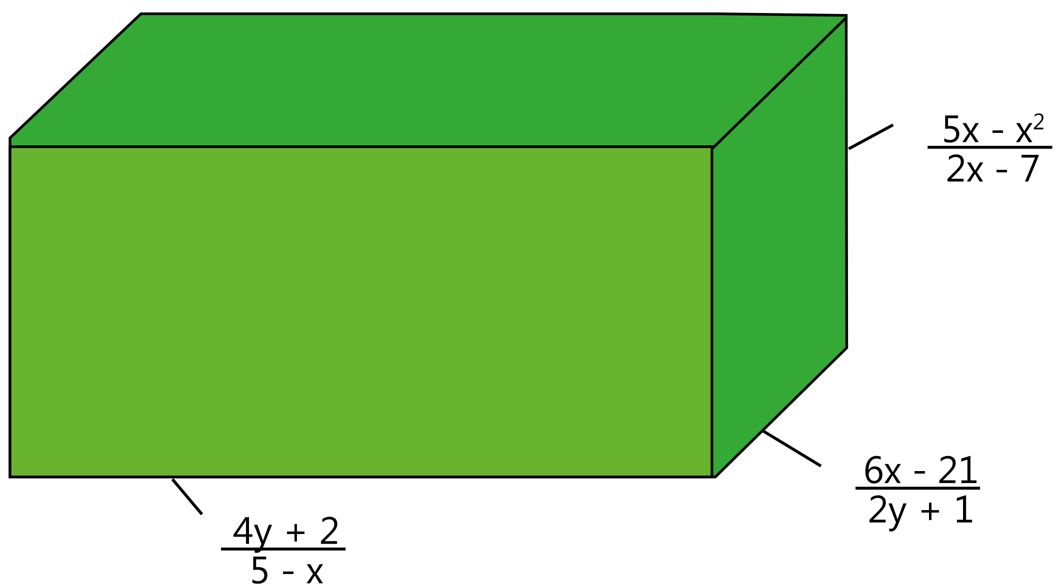
Taller

Nombre: ______________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

"Para calcular el volumen de un prisma se multiplica el largo por el ancho por el alto".

I. Determina el volumen del siguiente prisma:



v=______________

Observación:
El volumen de un cubo es igual al cubo de la longitud de su arista (se denomina arista a la longitud de uno de los lados de las caras) .

V= L * L * L

V= lado * lado * lado

II. Realiza la multiplicación y división de las siguientes expresiones algebraicas

a) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 9} \div \dfrac{x^2 + 7x - 8}{x^2 + 8x + 7} =$

b) $\dfrac{x - 2}{3x^2 - 9} \times \dfrac{x^2 - 6x + 9}{2x - 4} =$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Operaciones básicas con expresiones algebraicas – multiplicación y división

Fecha: Puntaje total: 45 puntos

Actividad: Taller

Criterio	**Puntaje**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada.					
2. Identificación de la fórmula de volumen.					
3. Factorización de cada fracción para calcular el volumen.					
4. Simplificación de los términos del producto para calcular el volumen.					
5. Realiza el procedimiento de cambio de operación de división a multiplicación e invierte la segunda fracción.					
6. Realiza las factorizaciones en el numerador y denominador.					
7. Expresa los productos del numerador y denominador.					
8. Efectúa la simplificación.					
9. Presenta los resultados.					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 10

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Método de solución

Gráfico

Indicadores de logros:

- Elabora con claridad los métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resuelve sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando el método gráfico .

A. Recuerda

Calcular el valor de (y) si x=2
y=x-3

Sutituimos x en y=x-3 y tenemos que
y=2-3, luego restamos
y=-1

B. Para empezar

Repasemos lo siguiente

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad del tipo

ax +by = c donde a,b,c $\in$ R (Números reales) y a y b son diferentes de cero.
Ejemplos de ecuaciones lineales con dos incógnitas
La ecuación lineal 2x +4y =20

La ecuación lineal 3x - y =-15

C. Considera lo siguiente

Analiza el siguiente contenido

SISTEMAS DE ECUACIONES
Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que poseen incógnitas. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave.
Las ecuaciones lineales con dos incógnitas tienen un número variado de soluciones de la forma (x,y) y su gráfica está determinada por una recta.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas x y y , también llamado ecuaciones simultáneas de dos por dos es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} son coeficientes reales y b_1, b_2 son términos independientes. En cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

Resolver un sistema de este tipo es encontrar los pares de números x y y que satisfacen ambas ecuaciones, si existen. Gráficamente, una solución del sistema es un punto común a ambas rectas P(x,y).

MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS

Existen cinco métodos para resolver sistemas de ecuaciones: Igualación, Reducción, Sustitución, Determinantes y el Gráfico.
En este tema estudiaremos el método gráfico

MÉTODO GRÁFICO

Como mencionamos al inicio, cada ecuación lineal de un sistema representa una recta. Esto implica que la representación de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en un par de rectas y recuérdese que:

- Si se cortan, el sistema es compatible determinado y las coordenadas del punto donde se interceptan son la solución del sistema. Tienen solución única.
- Si las rectas son coincidentes (son la misma recta), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y sus soluciones son todos los puntos de la recta.
- Si las rectas son paralelas, el sistema es incompatible (no tiene solución).

Para fines de graficación conviene despejar de ambas ecuaciones la variable y . Se puede elaborar una tabla de valores o se ubican los puntos en que cruzan a los ejes coordenados para cada recta, se trazan y se analiza su comportamiento.

Estudiemos el caso donde las rectas se cortan, el sistema de ecuaciones tiene solución única.

Ejemplo :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Despejar la y en ambas ecuaciones

$2x - y = 0$
$y = 0 + 2x$
$y = 2x$

$x + y = 3$
$y = 3 - x$

Darle valores a x para calcular el valor de y

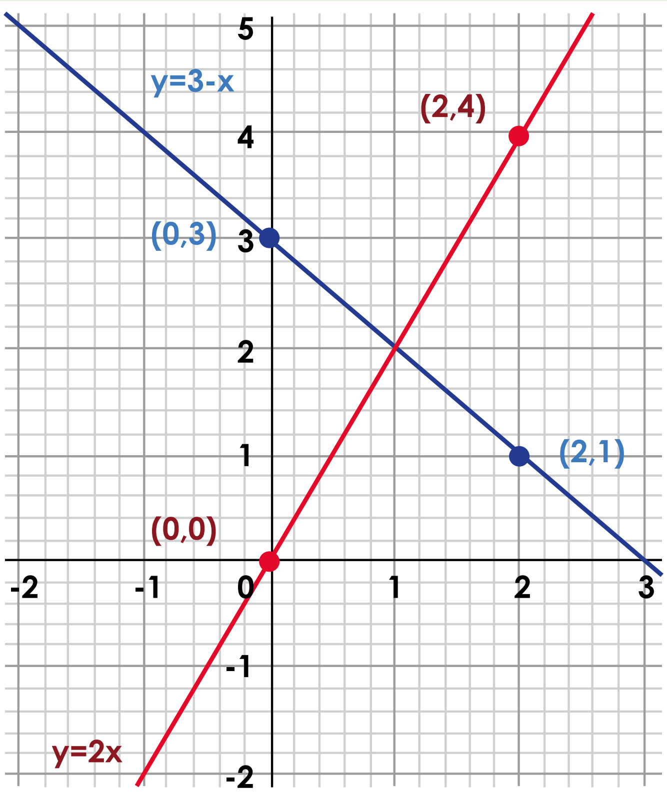
x	y	Punto en (x,y)
0	0	(0,0)
2	4	(2,4)

Cálculos
$y = 2x = 2(0) = 0$
$y = 2x = 2(2) = 4$

x	y	Punto en (x,y)
0	3	(0,3)
2	1	(2,1)

Cálculos
$y = 3 - x = 3 - 0 = 0$
$y = 3 - x = 3 - 2 = 1$

Representemos los valores de (x,y) en la gráfica



Observamos que se cortan en el punto (1,2), quiere decir que el valor de
$x = 1$
$y = 2$

Este sistema tiene una única solución

Estudiemos el caso donde las rectas son coincidentes (son la misma recta), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Ejemplo: **1.** $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$

Despejar la y en ambas ecuaciones

$\boldsymbol{y = 2x + 1}$

$-4x + 2y = 2$
$2y = 2 + 4x$
$y = \dfrac{2 + 4x}{2}$

Darle valores a x para calcular el valor de y

x	y	Punto en (x, y)
0	1	(0,1)
1	3	(1,3)

Cálculos

$\boldsymbol{y = 2x + 1 = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1}$

$\boldsymbol{y = 2x + 1 = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3}$

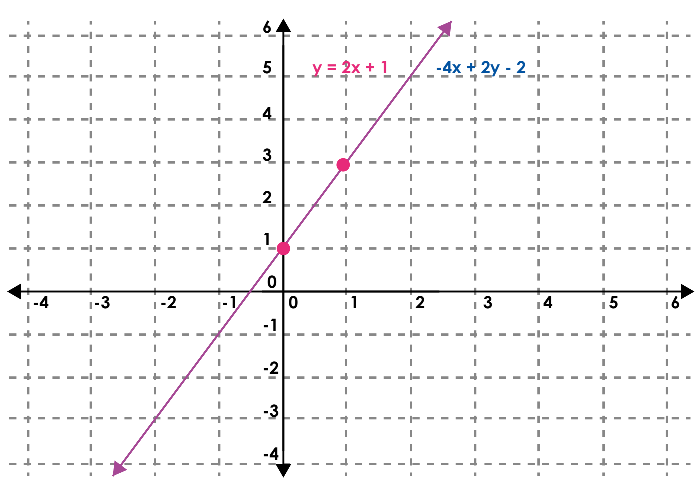
x	y	Punto en (x, y)
0	1	(0,1)
1	3	(1,3)

Cálculos

$y = \dfrac{2 + 4x}{2} = \dfrac{2 + 4(0)}{2} = \dfrac{2 + 0}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$y = \dfrac{2 + 4x}{2} = \dfrac{2 + 4(1)}{2} = \dfrac{2 + 4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

Representemos los valores de (x, y) en la gráfica



Observamos que las coordenadas en ambas ecuaciones son las mismos por lo tanto es una misma recta y el sistema tendría infinitas soluciones.

Estudiemos el caso donde las rectas son paralelas, el sistema es incompatible (no tiene solución)

Ejemplo;

$$\mathbf{1.}\ \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

1. Despejar la y en ambas ecuaciones

$y = 2x + 2$	$y = 2x + 1$

Darle valores a x para calcular el valor de y

x	y	Punto en (x, y)
1	4	(1,4)
-1	0	(-1,0)

x	y	Punto en (x, y)
1	3	(1,3)
-1	-1	(-1, -1)

Cálculos

$y = 2x + 2 = 2(1) + 2 = 2 + 2 = 4$

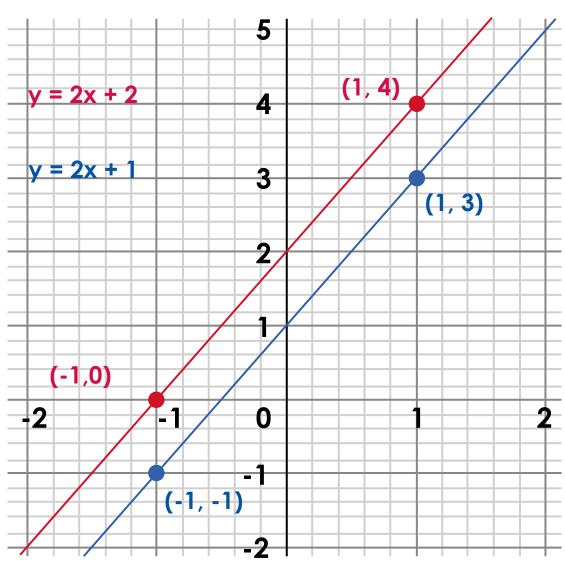
$y = 2x + 2 = 2(-1) + 2 = -2 + 2 = 0$

Cálculos

$y = 2x + 1 = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$

$y = 2x + 1 = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

Representemos los valores de (x, y) en la gráfica



Observamos que las rectas son paralelas, por lo tanto, el sistema es incompatible no tiene solución.

D. Manos a la obra

Aplica lo aprendido en la siguiente actividad

Actividad

Nombre: ______________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada la siguiente actividad.

I. Verifica las soluciones para x y y de los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método grafico.

1. $\begin{cases} 6x - 4y = 8 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$

Despejar la y en ambas ecuaciones

Darle valores a x para calcular el valor de y

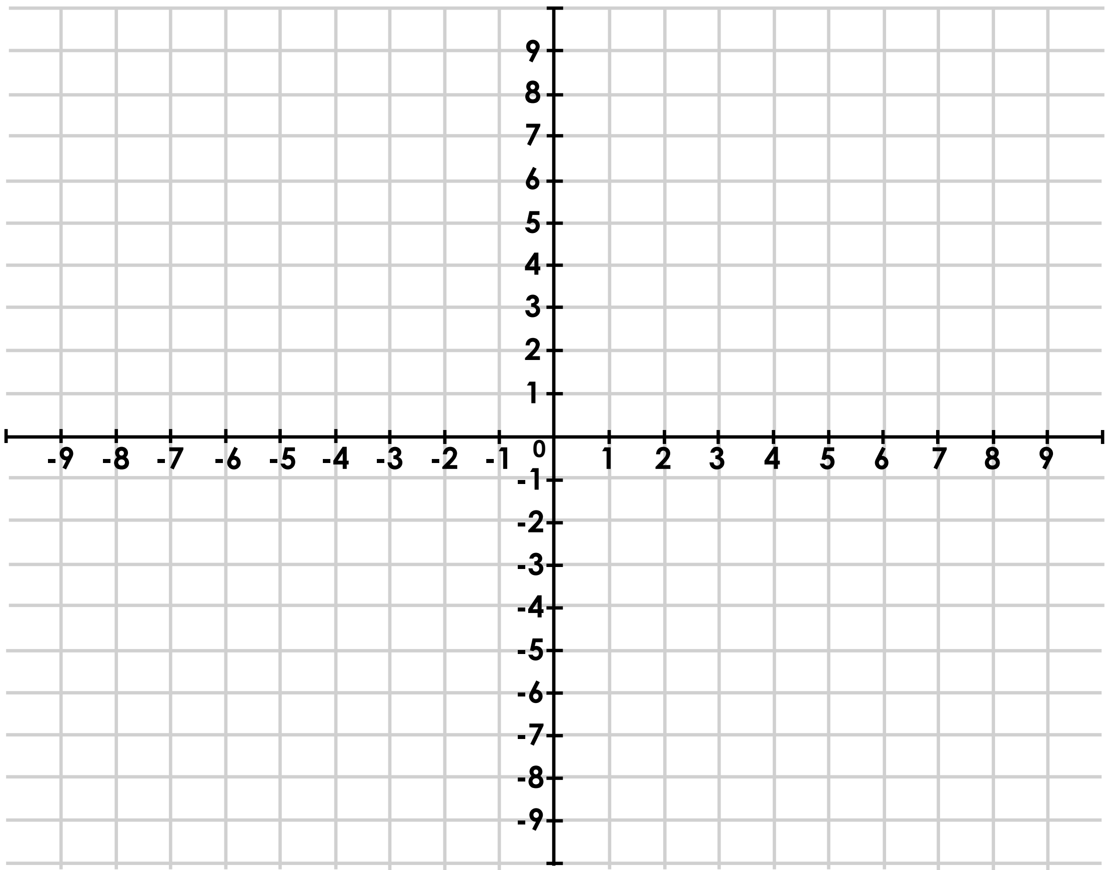
x	y	Punto en (x, y)

x	y	Punto en (x, y)

Cálculos

Cálculos

Representemos los valores de (x,y) en la gráfica.



E. Lo que aprendí

Taller

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Verifica las soluciones para x y y de los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método grafico e indique si tiene solución, si sus soluciones son infinitas o no tiene solución en base a la gráfica. Coloca la respuesta en la línea.

1) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Solución del sistema: ________________________________

Despejar la y en ambas ecuaciones

Darle valores a x para calcular el valor de y

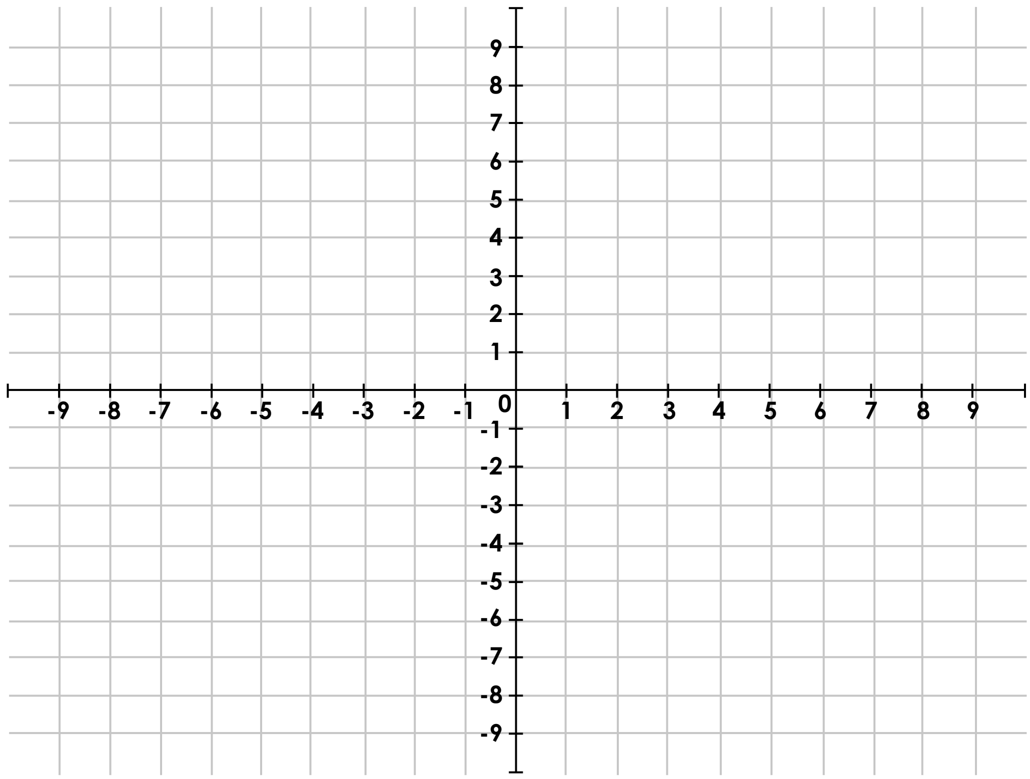
X	Y	Punto en (x, y)

X	Y	Punto en (x, y)

Cálculos

Cálculos

Representemos los valores de (x,y) en la gráfica



2) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = -2 \end{cases}$

Solución del sistema: ________________________________

Despejar la y en ambas ecuaciones

Darle valores a x para calcular el valor de y

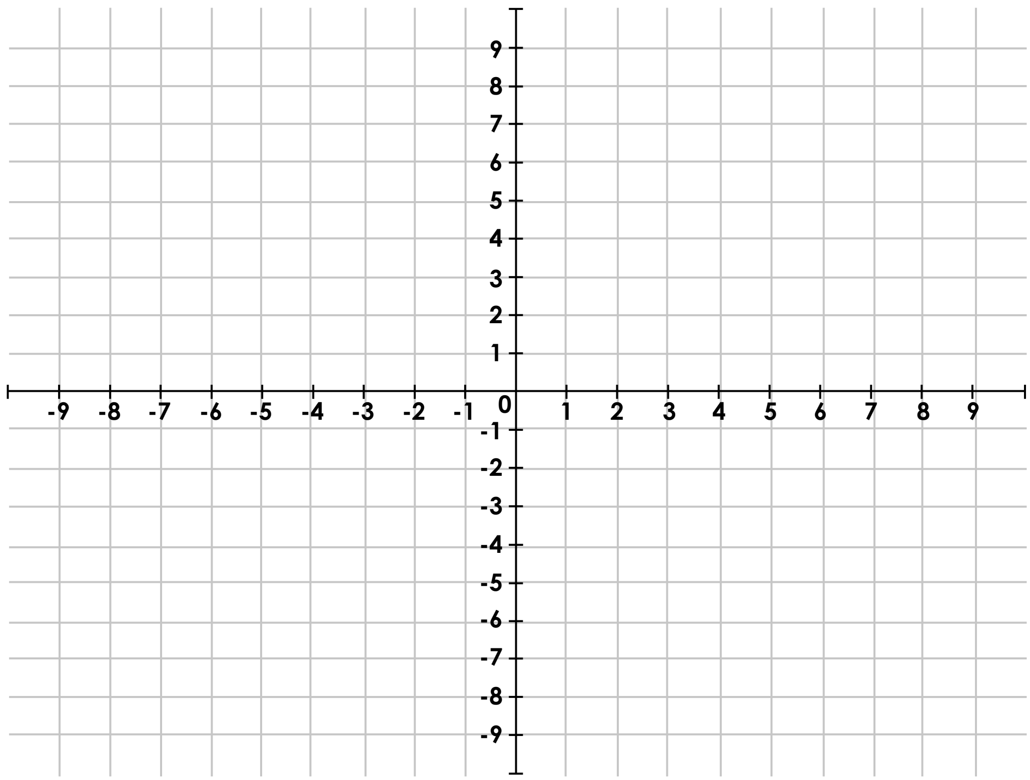
X	Y	Punto en (x, y)

Cálculos

X	Y	Punto en (x, y)

Cálculos

Representemos los valores de (x,y) en la gráfica



F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Método gráfico

Fecha: Puntaje total: 45 puntos

Actividad: Taller

Criterio	Puntaje				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada					
2. Despeja el valor de y ambas ecuaciones					
3. Asigna valores a x para obtener el valor de y y los reemplaza en la ecuación					
4. Realiza los productos, adiciones, sustracciones y divisiones en las ecuaciones					
5. Presenta las coordenadas (x,y)					
6. Representa las coordenadas (x,y) en la gráfica					
7. Dibuja la recta correspondiente a cada ecuación e indica los valores soluciones del sistema de ecuaciones					
8. Responde correctamente si el sistema tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.					
9. Presenta la gráfica del sistema de ecuaciones					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 11

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

» Método algebraico Sustitución

Indicadores de logros:

- Elabora con claridad los métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resuelve sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando el método algebraico de sustitución

A. Recuerda

Como despejar la variable x o y en una ecuación

Sea $2x + 3y = 5$

$$2x = 5 - 3y$$

$$x = \frac{5-3y}{2}$$

$$3y = 5 - 2x$$

$$y = \frac{5-2y}{3}$$

A. Para empezar

Repasemos como sustituir el valor de x o y en una ecuación

Repasemos como sustituir el valor de x o y en una ecuación

$$y = x^2 - 4$$

$$y = (2)^2 - 4$$

$$y = 4 - 4$$

$$y = 0$$

Calcular el valor de (x) si y=-1
Reemplazamos el 2 en el lugar de la x

$$x = y^3 - 5$$

$$y = (-1)^3 - 5$$

$$y = -1 - 5$$

$$y = -6$$

C. Considera lo siguiente

Analiza el siguiente contenido

- Si las dos rectas que se interceptan en un punto, entonces es la solución del sistema. En este caso el sistema es compatible determinado.
- Si las dos rectas coinciden en todos sus puntos, tiene infinitas soluciones. Entonces el sistema es compatible indeterminado.
- Si las dos rectas son paralelas, no tienen ningún punto común. Entonces el sistema es incompatible y no tiene solución.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

En el método de sustitución debes efectuar los siguientes pasos:

- Despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones.
- Sustituye la expresión despejada en la otra ecuación.
- Resuelve la ecuación lineal, generalmente fraccionaria.
- Sustituye este valor en la expresión y despeja a fin de obtener el valor de la otra.
- Realiza la comprobación

Pasos	**Ejemplo** $\begin{cases} \mathbf{9x + 7y = -17} \\ \mathbf{4x + 2y = -12} \end{cases}$
De la primera ecuación despejamos a (x)	$x = \dfrac{-17 - 7y}{9}$
Sustituimos el valor de x despejado en la segunda ecuación:	$4\left(\dfrac{-17 - 7y}{9}\right) + 2y = -12$
Multiplicamos por 9 toda la expresión para eliminar el denominador	$9\left[4\left(\dfrac{-17 - 7y}{9}\right) + 2y = -12\right]$
Multiplicando cada término por 9	$\cancel{9}\left[4\left(\dfrac{-17-7y}{\cancel{9}}\right)\right] + (9)2y = -12(9)$
Eliminando el 9 que estaba en el numerador y denominador del paréntesis cuadrado	$4(-17 - 7y) + (9)2y = -12(9)$

Pasos	
Realizar las multiplicaciones termino a término.	$-68 - 28y + 18y = -108$
Colocar todos los términos con la variable y del lado izquierdo de la igualdad y los números solos del lado derecho de la igualdad.	$-28y + 18y = -108 + 68$
Realizar las adiciones y sustracciones de los términos semejantes.	$-10y = -40$
Despejando el valor de y	$y = \frac{-40}{-10}$
Realizar la división del numerador entre el denominador -40 ÷ -10 = 4	$y = 4$
Sustituir en la ecuación despejada	$x = \frac{-7y - 17}{9}$
Luego sustituimos y=4 en la ecuación	$x = \frac{-7(4) - 17}{9}$
Realizar la multiplicación en el numerador	$x = \frac{-28 - 17}{9}$
Realizar la adición o sustracción en el numerador	$x = -\frac{45}{9}$
Dividir el numerador entre el denominador	$x = -5$
Las soluciones para el sistema de ecuaciones serían	$x = -5$ $\qquad y = 4$

Comprobemos que estas soluciones son las correctas reemplazando los valores obtenidos para (x) y (y) en el sistema de ecuaciones

Pasos	**Ejemplo**
	$\begin{cases} \mathbf{9x + 7y = -17} \\ \mathbf{4x + 2y = -12} \end{cases}$
Reemplazar el valor de $\boldsymbol{x = -5}$ y $\boldsymbol{y = 4}$ en el sistema de ecuaciones	$\begin{cases} 9(-5) + 7(4) = -17 \\ 4(-5) + 2(4) = -12 \end{cases}$
Realizar las multiplicaciones en las ecuaciones	$-45 + 28 = -17$ $-20 + 8 = -12$
Resolver las adiciones y sustracciones	$-17 = -17$ $-12 = -12$
Se cumple con las igualdades por lo tanto las soluciones de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son correctas	

Observa el siguiente ejemplo:

Pasos	**Ejemplo**
De la primera ecuación despejamos a $(\boldsymbol{x})$	$\begin{cases} \mathbf{-2x + 3y = 9} \\ \mathbf{7x - 9y = -31} \end{cases}$ $x = \dfrac{9-3y}{-2}$
Sustituimos el valor de $\boldsymbol{x}$ despejado en la segunda ecuación:	$7\left(\dfrac{9-3y}{-2}\right) - 9\text{y} = -31$
Multiplicamos por $-\mathbf{2}$ toda la expresión	$-2\left[7\left(\dfrac{9-3y}{-2}\right) - 9\text{y}\,(-2) = -31(-2)\right]$
Multiplicando cada término por -2	$-\cancel{2}\left[7\left(\frac{3y-9}{-\cancel{2}}\right)\right] - 9\text{y}(-2) = -31(-2)$
Eliminando el -2 que estaba en el numerador y denominador del paréntesis cuadrado	$7(9-3y) - (-2)(9y) = -31(-2)$

Realizar las multiplicaciones	$63 - 21y + 18y = 62$
Colocar todos los términos con la variable $\boldsymbol{y}$ del lado izquierdo de la igualdad y los números solos del lado derecho de la igualdad	$-21y + 18y = 62 - 63$
Realizar las adiciones y sustracciones de los términos semejantes	$-3y = -1$
Despejando el valor de $\boldsymbol{y}$ Sustituir en la ecuación despejada	$y = \frac{-1}{-3}$ $y = \frac{1}{3}$ $x = \frac{3y - 9}{2}$
Luego sustituimos $y = \frac{1}{3}$ en la ecuación	$x = \frac{\cancel{3}\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) - 9}{2}$
Realizar la multiplicación en el numerador	$x = \frac{1 - 9}{2}$
Realizar la adición o sustracción en el numerador	$x = -\frac{8}{2}$
Dividir el numerador entre el denominador	$x = -4$
Las soluciones para el sistema de ecuaciones serían	$x = -4$ $\quad$ $y = \frac{1}{3}$

Comprobemos que estas soluciones son las correctas reemplazando los valores obtenidos para (x) y (y) en el sistema de ecuaciones.

Pasos	Ejemplo
	$\begin{cases} -2x + 3y = 9 \\ 7x - 9y = -31 \end{cases}$
Reemplazar el valor de $x = -4$ y $y = \frac{1}{3}$ en el sistema de ecuaciones	$\begin{cases} -2(-4) + \cancel{3}\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) = 9 \\ 7(-4) - 9\left(\frac{1}{3}\right) = -31 \end{cases}$
Dividir $9 \div 3 = 3$	$\begin{cases} 8 + 1 = 9 \\ -28 - \frac{9}{3} = -31 \end{cases}$
Realizar las multiplicaciones en las ecuaciones	$8 + 1 = 9$ $-28 - 3 = -31$
Resolver las adiciones y sustracciones	$9 = 9$ $-31 = -31$
Se cumple con las igualdades por lo tanto las soluciones de x y y son correctas	

D. Manos a la obra

Ahora pondrás en práctica lo aprendido

Actividad

Nombre: ______________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada la siguiente actividad.

I. Compruebe que los valores dados son las soluciones correctas para el siguiente sistema de ecuaciones e indique con una X si los valores dados no cumplen con la igualdad.

Observación: solo debe reemplazar los valores en las ecuaciones para comprobarla igualdad.

1. $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $x = 7$ $y = 5$ sí cumplen __________ no cumplen __________

2. $\begin{cases} -3x + 2y = -9 \\ 4x - 5y = 26 \end{cases}$ $x = 17$ $y = 6$ si cumplen __________ no cumplen __________

E. Lo que aprendí

Taller

Nombre: ___________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Resuelva los siguientes problemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución.

1. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 7x - y = -16 \end{cases}$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Método gráfico

Fecha: Puntaje total: 50 puntos

Actividad: Taller

Criterio	Puntaje				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada					
2. Despeja el valor de x y lo reemplaza en la otra ecuación.					
3. Realiza la multiplicación para eliminar el denominador					
4. Realiza las multiplicaciones término a término					
5. Coloca los términos con la variable y del lado izquierdo de la igualdad y los números del lado derecho de la igualdad					
6. Realizar las adiciones y sustracciones de los términos semejantes					
7. Despeja la variable y, realiza la división					
8. Sustituye el valor de y en la ecuación y realiza la multiplicación					
9. Efectúa las adiciones y divisiones					
10. Presenta los resultados					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 12

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

» Método de solución Igualación

Indicadores de logros:

- Elabora con claridad los métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resuelve sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, utilizando el método algebraico de sustitución

A. Recuerda

La adición y sustracción de términos semejantes.

$6y-2y=4y$

$3x^2+2x^2=5x^2$

$3y^3 z-y^3 z=2y^3 z$

B. Para empezar

Repasemos como sustituir el valor de x o y en una ecuación

Calcular el valor de (y) si x=0
Reemplazamos el 2 en el lugar de la x

$y=x-1$

$y=0-1$

$y=-1$

Calcular el valor de (x) si y=-2
Reemplazamos el 2 en el lugar de la x

$x=y+2$

$y=-2+2$

$y=0$

C. Considera lo siguiente

Analiza el siguiente contenido

SISTEMAS DE ECUACIONES
Un sistema de ecuaciones algebraicas es un conjunto de ecuaciones que conforman un problema matemático que consiste en encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas operaciones.

En este tema estudiaremos el método de solución:
• Igualación.

MÉTODO DE IGUALACIÓN
El método de igualación consiste en realizar los siguientes pasos:

Pasos	Ejemplo
	$\begin{cases} \mathbf{4x - 2y = 10} \\ \mathbf{3x + 5y = 14} \end{cases}$
Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones 1 y 2	$4x - 2y = 10$ (1) $4x = 10 + 2y$ $x = \frac{10 + 2y}{4}$ $3x + 5y = 14$ (2) $3x = 14 - 5y$ $x = \frac{14 - 5y}{3}$
Igualar las expresiones despejadas	$\frac{10 + 2y}{4} = \frac{14 - 5y}{3}$
Realizar la multiplicación en cruz de ambas fracciones	$\frac{10 + 2y}{4} = \frac{14 - 5y}{3}$ $(10 + 2y)(3) = (4)(14 - 5y)$

Realizar la multiplicación de los paréntesis de ambos lados de la igualdad	$(10+2y)(3)=(4)(14-5y)$ $30+6y \quad = \quad 56-20y$
Colocar los términos con la letra $(\boldsymbol{y})$ del lado izquierdo de la igualdad (para realizar esto se debe pasar los términos al otro lado de la igualdad, con la operación contraria, si está sumando debe pasar restando y si está restando debe pasar sumando) y los números del lado derecho de la igualdad Sumar o restan los términos semejantes en ambos lados de la igualdad	$30+6y \quad = \quad 56-20y$ $6y+20y \quad = \quad 56-30$ $26y \quad = \quad 26$
Despejar el coeficiente que acompaña la $(\boldsymbol{y})$, al lado derecho de la igualdad, con la operación contraria a la multiplicación que sería la división	$y=\frac{26}{26}$
Realizar la división del numerador entre el denominador 26 ÷ 26 = 1 Sustituyendo el valor de $(\boldsymbol{y})$ que se calculó en el paso anterior, en la primera ecuación despejada, se obtiene el valor de $(\boldsymbol{x})$ Realizando la multiplicación de $\mathbf{2} * \mathbf{1} = \mathbf{2}$	$y=1$ $x=\frac{10+2y}{4}$ $x=\frac{10+2(1)}{4}$ $x=\frac{10+2}{4}$
Realizando la suma en el numerador	$x=\frac{12}{4}$
Dividir el numerador entre el denominador	$x=3$
Las soluciones para el sistema de ecuaciones serían	$x=3 \qquad y=1$

Comprobemos que estas soluciones son las correctas reemplazando los valores obtenidos para (x) y (y) en el sistema de ecuaciones.

Pasos	Ejemplo
	$\begin{cases} \mathbf{4x - 2y = 10} \\ \mathbf{3x + 5y = 14} \end{cases}$
Reemplazar el valor de $\boldsymbol{x = 3}$ y $\boldsymbol{y = 1}$ en el sistema de ecuaciones	$4(3) - 2(1) = 10$ $3(3) + 5(1) = 14$
Realizar las multiplicaciones en las ecuaciones	$12 - 2 = 10$ $9 + 5 = 14$
Resolver las adiciones y sustracciones	$10 = 10$ $14 = 14$
Se cumple con las igualdades por lo tanto las soluciones de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son correctas	

D. Manos a la obra

Utiliza tu ingenio y todo lo aprendido en la siguiente actividad

Actividad
Nombre: ___________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

I. Calcular las soluciones de (x) y (y) que resuelven los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando el método de igualación.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 5y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

E. Lo que aprendí

Después de estudiar el método de igualación estás listo para resolver el siguiente taller

Taller

Nombre: ______________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método algebraico de igualación

1) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 9x - 3y = 18 \\ 2x + 8y = -48 \end{cases}$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Igualación

Fecha: Puntaje total: 40 puntos

Actividad: Taller

Criterio	**Puntaje**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada					
2. Despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones e iguala las ecuaciones despejadas					
3. Realiza la multiplicación en cruz de ambas fracciones y la multiplicación de los paréntesis de ambos lados de la igualdad					
4. Agrupa los términos semejantes en ambos lados de la igualdad y realiza la adición y sustracción de los términos semejantes					
5. Despeja la incógnita y realiza la división					
6. Sustituye la incógnita calculada en una de las ecuaciones y realiza las multiplicaciones					
7. Resuelve las adiciones o sustracciones y realiza la división					
8. Expresa correctamente los resultados					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 13

Métodos de solución

» Reducción

Indicadores de logros:

- Resuelve sistemas de ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de reducción.

A. Recuerda

La adición y sustracción de términos semejantes.
Dos términos son semejantes cuando su parte literal es igual en ambos términos. Si los términos son semejantes se pueden sumar o restar.

Ejemplo 1:

$3x+6x = 9x$ Las letras, ambas son x y al no tener exponente visible se entiende que su exponente es 1 en ambas. Por lo tanto, se suman porque ambas poseen signo positivo.

Ejemplo 2:

$7y^2-9y^2 = -2x$ Las letras ambas son y, el exponente es 2. Por lo tanto, se restan en este caso porque el 7 posee signo positivo y el 6 signo negativo.

B. Para empezar

Hagamos un repaso

Recordemos que son los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que poseen incógnitas. Una ecuación lineal con dos incógnitas $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ es una expresión de la forma $ax + by = c$ donde $a, b, c \in \mathbf{R}$ y a y b son diferentes de cero.

C. Considera lo siguiente

Lee y analiza el siguiente contenido

En este tema estudiaremos el método de solución:
• Reducción

MÉTODO DE REDUCCIÓN
El método de reducción consiste en transformar el sistema dado en uno equivalente. En esencia consiste primero en ver si alguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, si no es así se trata de transformar para que así lo sea. Luego, restando o sumando miembro a miembro las ecuaciones, se obtiene una ecuación con una incógnita menos, esto quiere decir que se redujo el número de incógnitas, de allí el nombre de reducción o eliminación.

Estudiemos paso a paso el siguiente ejemplo

Observación: nombraremos (E1) como la ecuación 1 y (E2) la ecuación 2.

Pasos	Ejemplo
	$\begin{cases} \mathbf{2x+3y=19} & \mathbf{(E1)} \\ \mathbf{4x+y=23} & \mathbf{(E2)} \end{cases}$
Preparamos ambas ecuaciones, multiplicando por un número, para que los términos de una de las letras tenga el mismo coeficiente, pero con el signo contrario. En este ejemplo multiplicaremos la ecuación (1) por el número $\mathbf{-2}$. La ecuación (2) permanece igual	$2x+3y=19$ $\quad$ **(E1)*(−2)** $4x+y=23$ $\quad$ **(E2)** $(2x+3y=19)(\mathbf{-2})$ $-4x-6y=-38$
La ecuación que se obtuvo en el paso anterior al multiplicar la ecuación (1) por $(\mathbf{-2})$, pasara a ser la nueva ecuación (1) en el sistema de ecuaciones.	$-4x-6y=-38$ $\quad$ **(E1)** $4x+y=23$ $\quad$ **(E2)**
Realicemos la adición o sustracción de cada columna con los términos iguales. Observamos que $-\mathbf{4x}$ y $\mathbf{4x}$ se cancelan porque son términos iguales pero con signo contrario. El $-\mathbf{6y}$ y $+\mathbf{y}$ se restan los coeficiente y se obtiene $-\mathbf{5y}$. Los términos independientes $\mathbf{-38}$ y $\mathbf{23}$ se restan y se obtiene $-\mathbf{15}$	$\cancel{-4x}-6y=-38$ $\quad$ **(E1)** $\cancel{4x}+y=23$ $\quad$ **(E2)** $-5y=-15$

Dividir el numerador entre el denominador para obtener el valor de $\boldsymbol{y}$.	$\frac{-15}{-5}$ $\quad -15 \div -5 = 3$ $\frac{-15}{00}$ $y = 3$
El valor de ($\boldsymbol{y}$) calculado en el paso anterior se lleva a cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y se reemplaza el valor de (3) en el lugar de la letra ($\boldsymbol{y}$)para obtener la otra incógnita ($\boldsymbol{x}$)	$2x + 3y = 19$ **(E1)** $2x + 3(3) = 19$
Realizar la multiplicación de $\mathbf{3(3) = 9}$, colocar el resultado en el lugar correspondiente.	$2x + 9 = 19$
Ahora en el lugar donde estaba ($\boldsymbol{y}$) está el número (9) este al quedar sin la letra ($\boldsymbol{y}$) se pasaría para el lado derecho del igual con la operación contraria a la adición que es la sustracción. Sumar o restar los números del lado derecho de la igualdad. En este caso se restaría porque poseen signos diferentes y el resultado se coloca en el lado derecho de la igualdad.	$2x = 19 - 9$ $19 - 9 = 10$ $2x = 10$
Despejar la variable ($\boldsymbol{x}$) pasando el coeficiente que acompaña la ($\boldsymbol{x}$) al lado derecho de la igualdad con la operación contraria a la multiplicación que sería la división. Observación: Utilizar el procedimiento que se explicó en el paso 5.	$x = \frac{10}{2}$

Realizar la división del numerador entre el denominador	$\frac{10}{2}$ $10 \div 2 = 5$ $\frac{10}{00}$ $x = 5$
Las soluciones para el sistema de ecuaciones serían	$x = 5$ $y = 3$

Comprobemos que estas soluciones son las correctas reemplazando los valores obtenidos para (x) y (y) en el sistema de ecuaciones

Pasos	Ejemplo
	$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 19} & \mathbf{(E1)} \\ \mathbf{4x + y = 23} & \mathbf{(E2)} \end{cases}$
Reemplazar el valor de $\boldsymbol{x = 5}$; $\boldsymbol{y = 3}$ en el sistema de ecuaciones, en los respectivos lugares de $(\boldsymbol{x})$; $(\boldsymbol{y})$	$2(5) + 3(3) = 19$ $4(5) + 3 = 23$
Realizar las multiplicaciones en el lado izquierdo de la igualdad. Y colocar los resultados en los respectivos lugares de la igualdad.	$2(5) = 10$ $3(3) = 9$ $4(5) = 20$ $10 + 9 = 19$ $20 + 3 = 23$
Resolver las adiciones y sustracciones en el lado izquierdo de la igualdad. Colocar los resultados en el lado izquierdo de la igualdad. Observamos que ambos lados de la igualdad son iguales por lo tanto se comprueba que los resultados de $\boldsymbol{x = 5}$ y $\boldsymbol{y = 3}$ son los correctos para este sistema de ecuaciones.	$10 + 9 = 19$ $20 + 3 = 23$ $19 = 19$ $23 = 23$

Pasos	Ejemplo
	$\begin{cases} \boldsymbol{-2x - y = 3} & \textbf{(E1)} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 7} & \textbf{(E2)} \end{cases}$
Observamos que el primer término en ambas ecuaciones es iguales y con el signo contrario, que es lo que se necesita para eliminarlos, por lo tanto no se necesita realizar ninguna multiplicación en las ecuaciones.	$-2x - y = 3$ **(E1)** $2x + 3y = 7$ **(E2)**
Realicemos la adición o sustracción de cada columna con los términos iguales. Observamos que $\boldsymbol{-2x}$ y $\boldsymbol{2x}$ se cancelan porque son términos iguales pero con signo contrario. El $\boldsymbol{-y}$ y $\boldsymbol{+3y}$ se restan los coeficiente y se obtiene $\boldsymbol{+2y}$. Los términos independientes $\mathbf{3}$ y $\mathbf{7}$ se suman y se obtiene $\mathbf{10}$	$\cancel{-2x} - y = 3$ **(E1)** $\cancel{2x} + 3y = 7$ **(E2)** $2y = 10$
Se eliminan los primeros términos de ambas expresiones quedando solo una incógnita ($\boldsymbol{y}$)	$2y = 10$
Despejar la incógnita ($\boldsymbol{y}$). Se despeja pasando el coeficiente que acompaña a ($\boldsymbol{y}$) que en este caso es ($\mathbf{2}$), al lado derecho del igual pero con la operación contraria, como él ($\mathbf{2}$), está al lado de la ($\boldsymbol{y}$) se dice que se están multiplicando y pasaría al otro lado del igual dividiendo, por ello se coloca debajo del $\mathbf{10}$.	$y = \frac{10}{2}$
Dividir el numerador entre el denominador	$\frac{10}{2}$ $\quad 10 \div 2 = 5$ $\frac{10}{00}$ $y = 5$

El valor de ($\boldsymbol{y}$) calculado en el paso anterior se lleva a cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y se reemplaza el valor que en este caso es (5) en el lugar de la letra ($\boldsymbol{y}$) para obtener la otra incógnita ($\boldsymbol{x}$)	$-2x - y = 3$ **(E1)** $-2x - (5) = 3$
Se extrae el número dentro del paréntesis	$-2x - 5 = 3$
Ahora en el lugar donde estaba ($\boldsymbol{y}$) está el número (5) este al quedar sin la letra ($\boldsymbol{y}$) se pasaría para el lado derecho del igual con la operación contraria a la sustracción que es la adición.	$-2x = 3 + 5$
Sumar o restar los números del lado derecho de la igualdad. En este caso se sumarían, porque poseen signos iguales y el resultado se coloca en el lado derecho de la igualdad.	$3 + 5 = 8$ $-2x = 8$
Despejar la variable ($\boldsymbol{x}$) pasando el coeficiente que acompaña la ($\boldsymbol{x}$) al lado derecho de la igualdad con la operación contraria a la multiplicación que sería la división. Observación: Utilizar el procedimiento que se explicó en el paso 4.	$x = \frac{8}{-2}$
Realizar la división del numerador entre el denominador	$\frac{8}{-2}$ $8 \div -2 = -4$ $\frac{8}{0}$ $x = -4$
Las soluciones para el sistema de ecuaciones serían	$x = -4$ $y = 5$

Comprobemos que estas soluciones son las correctas reemplazando los valores obtenidos para (x) y (y) en el sistema de ecuaciones

Pasos	Ejemplo 2
	$\begin{cases} -2x - y = 3 & (E1) \\ 2x + 3y = 7 & (E2) \end{cases}$
Reemplazar el valor de $x = -4$; $y = 5$ en el sistema de ecuaciones, en los respectivos lugares de (x) ; (y)	$-2(-4) - (5) = 3$ $2(-4) + 3(5) = 7$
Realizar las multiplicaciones en el lado izquierdo de la igualdad. Y colocar los resultados en los respectivos lugares de la igualdad.	$-2(-4) = 8$ $2(-4) = -8$ $3(5) = 15$ $8 - 5 = 3$ $-8 + 15 = 7$
Resolver las adiciones y sustracciones en el lado izquierdo de la igualdad. Colocar los resultados en el lado izquierdo de la igualdad. Observamos que ambos lados de la igualdad son iguales por lo tanto se comprueba que los resultados de $x = -4$ y $y = 5$ son los correctos para este sistema de ecuaciones.	$8 - 5 = 3$ $-8 + 15 = 7$ $3 = 3$ $7 = 7$

D. Manos a la obra

Vamos a poner en práctica lo aprendido

Actividad

Nombre: _______________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

1. En que consiste el método de reducción.

a) ____

____

2. Indique la operación contrarias a las que se presentan en el siguiente listado

a) Multiplicación ___________________________

b) Sustracción ______________________________

c) Adición ______________________________

3. Demuestre que los valores de x=2 ; y=1 resuelven el siguiente sistema de ecuaciones

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

E. Lo que aprendí

Aplica todo lo aprendido en el siguiente taller

Taller

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Calcular las soluciones de (x) y (y) que resuelven los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando el método de reducción.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 2y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Método de reducción

Fecha: Puntaje total: 35 puntos

Actividad: Taller

Criterio	Puntaje				
	1	2	3	4	5
1. Realiza los cálculos de forma ordenada					
2. Iguala el coeficiente del primer término de ambas ecuaciones pero con signo contrario					
3. Realiza la adición y sustracción de los términos semejantes					
4. Despeja la incógnita y realiza la división					
5. Sustituye la incógnita calculada en una de las ecuaciones y realiza las multiplicaciones					
6. Resuelve las adiciones o sustracciones y realiza la división					
7. Expresa correctamente los resultados de los valores de x ; y					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 14

Métodos de solución

» Determinante

Indicador de logros:

- Resuelve sistemas de ecuaciones con dos incógnitas utilizando el método de determinante.

A. Recuerda

Una ecuación es una expresión de la forma ax +by = c donde a,b,c∈R y a y b son diferentes de cero.

Ahora observamos la ecuación ax +by = c las letras a, b, c representan números; a es el coeficiente (número) que acompaña a la (x), b es el coeficiente (número) que acompaña a la (y), c es el término independiente o número que no posee literal.

Ejemplo:

La ecuación 3x-2y = 4 en donde a= 3 b=-2 c=4

Esto lo necesitaras para reemplazar los valores en la matriz para calcular el valor de x y de y.

B. Para empezar

Hagamos una pequeña prueba

Observa el siguiente ejemplo

Si a=-2 b= -1 c=4 como se escribiría la ecuación -2 x __-__ y = 4

Si a=6 b= +3 c=-6 como se escribiría la ecuación 6 x __-__ + 3 y = -6

Después de observar los ejemplos arriba resueltos completa las ecuaciones en base a los valores de a, b, c que se te presentan.

Si a=4 b= 7 c=-2 como se escribiría la ecuación ___ x ___ y = ___

Si a=-3 b= -6 c=1 como se escribiría la ecuación ___ x ___ y = ___

C. Considera lo siguiente

Lee y analiza el siguiente contenido

MÉTODO DE DETERMINANTE

Si se tiene el sistema de ecuaciones simultáneas lineales con dos incógnitas de la forma:

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}$$
$$c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}$$

Se representa matricialmente:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix}$$

Donde $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$ son las incógnitas y $a, b, c, d, e, f, \in \mathbf{R}$ (números reales) entonces, la solución (x, y) que satisface simultáneamente cada una de las ecuaciones puede encontrarse por medio del método algebraico por determinantes, de la forma siguiente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{e} & b \\ \boldsymbol{f} & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\boldsymbol{e}d - b\boldsymbol{f}}{ad - bc} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \boldsymbol{e} \\ c & \boldsymbol{f} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a\boldsymbol{f} - \boldsymbol{e}c}{ad - bc}$$

Estudiemos el siguiente ejemplo paso a paso

Observación: nombraremos como (E1) como la ecuación 1 y (E2) como la ecuación 2.

Pasos	**Ejemplo**
	$\begin{cases} \mathbf{3x + y = 9} & \mathbf{(E1)} \\ \mathbf{2x + 3y = 13} & \mathbf{(E2)} \end{cases}$
Se expresa el sistema de ecuaciones de forma matricial. Observa que el **3** ocupa el lugar de **a**, el **1** ocupa el lugar de **b**, el **9** ocupa el lugar de **e**. en la segunda ecuación el **2** ocupa el lugar de **c**, el **3** ocupa el lugar de **d**, el **13** ocupa el lugar de **f**.	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix}$
Fórmula para calcular el valor de $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$ por el método algebraico de determinante	$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$

Se reemplaza los valores de a, b, c, d, e, f en matriz como se explicó en el paso anterior, para calcular $\boldsymbol{x}$ En el numerador se escribirá en la primera columna los valores del lado derecho de la igualdad (los términos después del igual que no poseen letras; 9 y 13), en la segunda columna se colocarán los coeficientes que acompañan a la letra $\boldsymbol{y}$ (los valores de b=1 y d=3) En el denominador en la primera columna se colocarán los coeficientes que acompañan a la letra $\boldsymbol{x}$ (a=3, c=2) en la segunda columna se colocaran los coeficientes que acompañan a la letra $\boldsymbol{y}$ (b=1 y d=3)	$x = \frac{\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}$
Se reemplaza los valores de a, b, c, d, e, f en matriz como se explicó en el paso anterior, para calcular $\boldsymbol{y}$ En el numerador se escribirá en la primera columna los coeficientes que acompañan a la letra $\boldsymbol{x}$ (a=3, c=2) En la segunda columna se colocarán los valores del lado derecho de la igualdad (los términos después del igual que no poseen letras; 9 y 13). En el denominador en la primera columna se colocarán columna los coeficientes que acompañan a la letra $\boldsymbol{x}$ (a=3, c=2), en la segunda columna se colocaran los coeficientes que acompañan a la letra $\boldsymbol{y}$ (b=1 y d=3)	$y = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}$

Se realiza el procedimiento de multiplicar en cruz. En el numerador y denominador se expresan las multiplicaciones y se coloca el signo de sustracción en medio de las multiplicaciones.	$x = \frac{\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{9 * 3 - 1 * 13}{3 * 3 - 1 * 2}$ $y = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{3 * 13 - 2 * 9}{3 * 3 - 1 * 2}$	
Se realizan losproductos	$9 * 3 = 27$ $1 * 13 = 13$ $3 * 3 = 9$ $1 * 2 = 2$	$3 * 13 = 39$ $2 * 9 = 18$ $3 * 3 = 9$ $1 * 2 = 2$
Se colocan los resultados de los productos en su respectivo lugar	$x = \frac{27 - 13}{9 - 2}$	$y = \frac{39 - 18}{9 - 2}$
Realizar las sustracciones en el numerador y denominador	$27 - 13 = 14$ $9 - 2 = 7$ $x = \frac{14}{7}$	$39 - 18 = 21$ $9 - 2 = 7$ $y = \frac{21}{7}$
Dividir el numerador entre el denominador Las soluciones para el sistema de ecuaciones serían	$\frac{14}{7}$ $14 \div 7 = 2$ $\frac{14}{00}$	$\frac{21}{7}$ $21 \div 7 = 3$ $\frac{21}{00}$

1) Las soluciones para el sistema de ecuaciones serían	$x = 2$	$y = 3$

Comprobemos que estas soluciones son las correctas reemplazando los valores obtenidos para (x) y (y) en el sistema de ecuaciones

Pasos	Ejemplo
	$\begin{cases} \mathbf{3x + y = 9} & \mathbf{(E1)} \\ \mathbf{2x + 3y = 13} & \mathbf{(E2)} \end{cases}$
Reemplazar el valor de $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{y = 3}$ en el sistema de ecuaciones	$3(2) + 3 = 9$ $2(2) + 3(3) = 13$
Realizar las multiplicaciones en el lado izquierdo de la igualdad y colocar los resultados en los respectivos lugares de la igualdad.	$3(2) = 6$ $\quad 2(2) = 4$ $3(3) = 9$ $6 + 3 = 9$ $4 + 9 = 13$
Resolver las adiciones y sustracciones en el lado izquierdo de la igualdad. Colocar los resultados en el lado izquierdo de la igualdad. Observamos que ambos lados de la igualdad son iguales por lo tanto se comprueba que los resultados de $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{y = 3}$ son los correctos para este sistema de ecuaciones.	$6 + 3 = 9$ $4 + 9 = 13$ $9 = 9$ $13 = 13$

D. Manos a la obra

Repasemos todo lo aprendido

Actividad

Nombre: ______________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

1. Representa matricialmente el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x+y=9 \\ 2x-4y=-5) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{vmatrix}$$

2. Despeje el valor de x ; y en la siguiente ecuación.

a. 5x-2y=4

5x=4+ ______ $\rightarrow$ $x = \dfrac{4 + \_\_\_\_}{\_\_\_\_}$

b. -2y=4- ______ $\rightarrow$ $y = \dfrac{4 - \_\_\_\_}{\_\_\_\_}$

E. Lo que aprendimos

Utiliza todo lo aprendido en el tema para resolver el siguiente taller

Taller

Nombre: ___________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

1) Calcular las soluciones de (x) y (y) que resuelven los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando el método de determinante

a) $3x + 2y = 7$

$4x - 3y = -2$

b) $3x - y = 1$

$x + 4y = 9$

Demuestre que los valores de x=2 ; y=1 resuelven el siguiente sistema de ecuaciones. Utiliza el método de comprobación presentado en el contenido.

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Método determinante

Fecha: Puntaje total: 40 puntos

Actividad: Taller

Criterio	**Puntaje**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Realiza los cálculos de forma ordenada					
2. Expresa el sistema de ecuaciones de forma matricial					
3. Expresa los productos obtenidos en la multiplicación cruzada de los elementos de las matrices					
4. Realiza las adiciones y sustracciones en el numerador y denominador					
5. Realiza la división de las fracciones					
6. Reemplaza correctamente los valores de x ; y dados en el sistema de ecuaciones					
7. Realiza las multiplicaciones de los productos y la adición o sustracción de los productos resultantes					
8. Expresa correctamente los resultados del punto 1 y 2					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 15

Cuerpos Geométricos

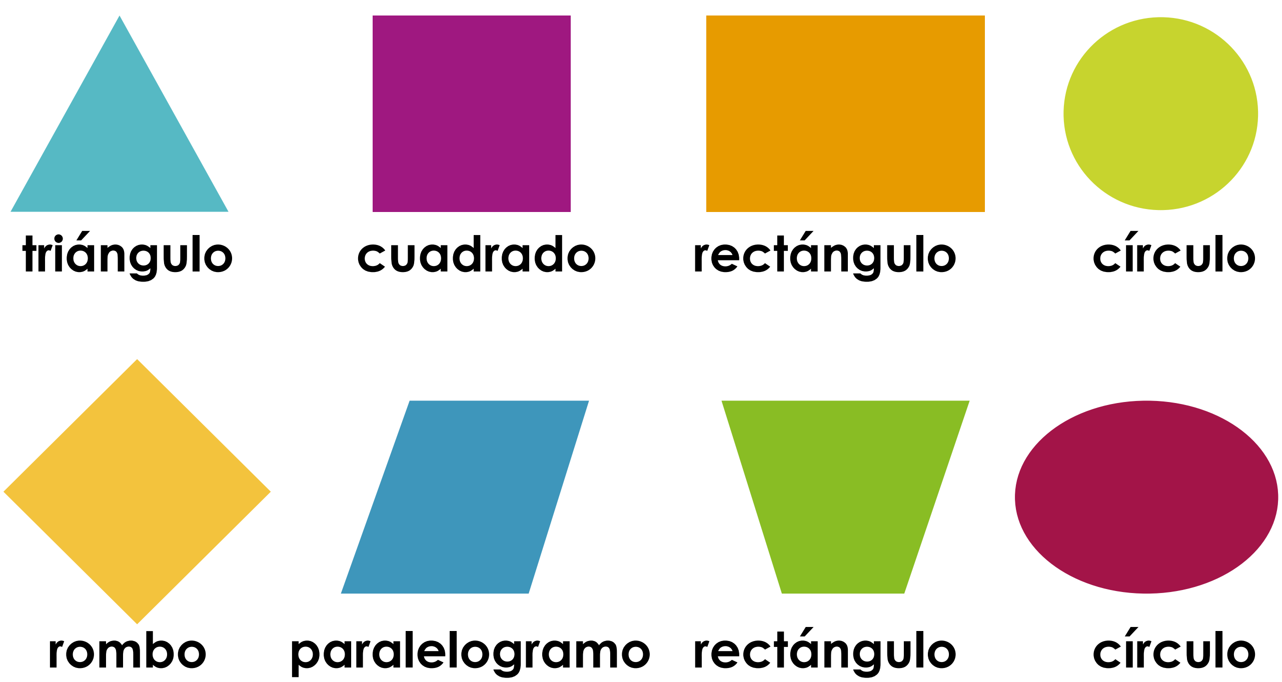
- › Los Sólidos
  - » Cilindro Recto
  - » Esfera
  - » Cono Recto

Indicadores de logros:

- Caracteriza según los elementos los cuerpos geométricos.
- Calcula por medio de la fórmula el volumen de los cuerpos geométricos.
- Resuelve con confianza problemas de volumen de cuerpos geométricos.

A. Recuerda

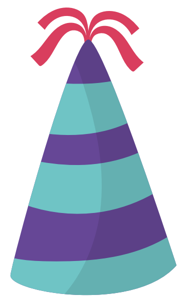
Las figuras geométricas: son la materia de trabajo de la geometría. Son representaciones gráficas de las formas presentes en un plano y que se unen por segmentos entre puntos. Observa en la siguiente imagen diferentes figuras geométricas estudiadas en niveles anteriores. De estas figuras se formarán los cuerpos geométricos que estudiaremos en este tema.

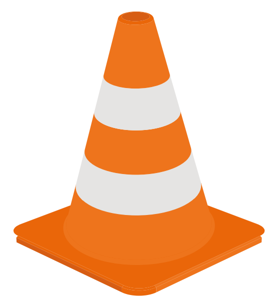


B. Para empezar

Observa los siguientes objetos de la vida cotidiana presente en las siguientes imágenes.

Al terminar de estudiar este tema, espero puedas identificar a que cuerpo geométrico se parece.

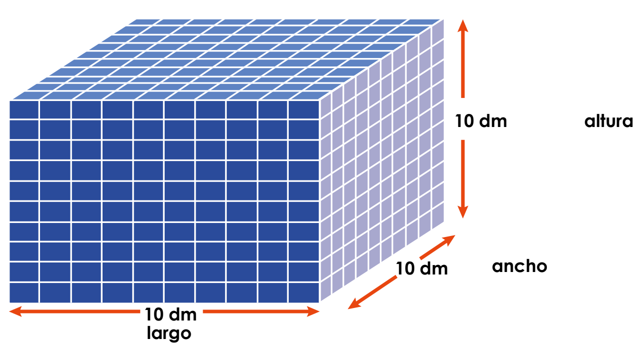




C. Consideremos lo siguiente

Lee y analiza el siguiente contenido

CUERPOS GEOMÉTRICOS
Un Sólido o cuerpo geométrico es una figura geométrica de tres dimensiones (largo, ancho y alto), que ocupa un lugar en el espacio y en consecuencia tiene un **volumen**.



Los cuerpos geométricos se clasifican en dos categorías:

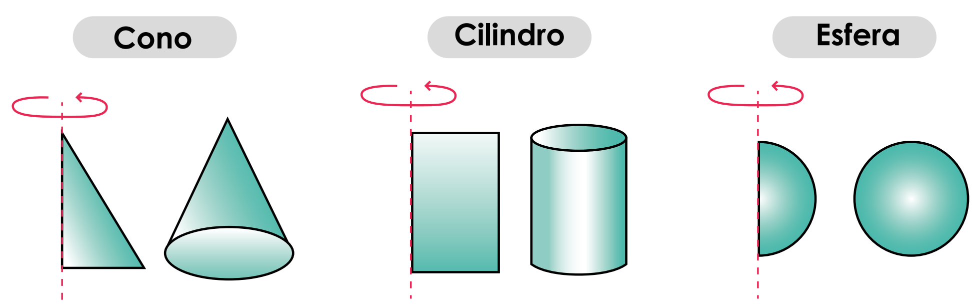
1. Poliedros
2. Cuerpos redondos

En este tema estudiaremos los cuerpos redondos.

LOS CUERPOS REDONDOS: son cuerpos geométricos compuestos total o parcialmente por figuras geométricas curvas. Una lata de refresco, un gorro de cumpleaños, un balón de futbol son cuerpos geométricos que parte de su superficie, o toda ella, es curva. Si observas algunos objetos de tu entorno, puedes ver que muchos de ellos tienen forma de cuerpos geométricos, por lo tanto, los cuerpos geométricos están en presentes en nuestra vida cotidiana.

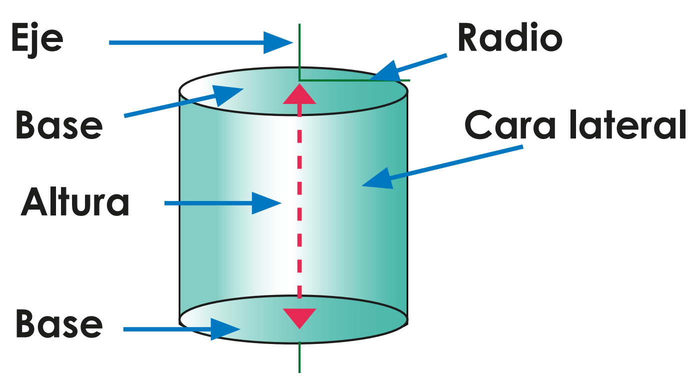
Los cuerpos redondos como el cilindro, cono recto y la esfera también se les llama cuerpos de revolución porque se originan al girar una figura plana alrededor de un eje de revolución. Al girar un triángulo rectángulo en un eje de revolución de origina el cono recto, al girar el rectángulo se origina el cilindro y al girar un semicírculo se origina la esfera, como puedes observar en la figura a continuación presentada.

CREANDO CUERPOS DE REVOLUCIÓN

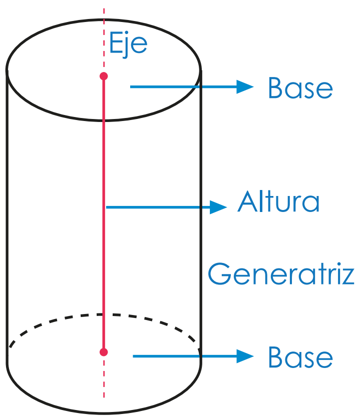


El cilindro, el cono recto y la esfera son cuerpos redondos, estudiaremos sus características y las fórmulas para calcular el volumen de estos cuerpos.

1) CILINDRO: es un cuerpo geométrico formado por dos círculos que son sus extremos y son caras paralelas e iguales que reciben el nombre de base del cilindro y una superficie lateral curva que es un rectángulo. (360 °).



Características
El cilindro posee los siguientes elementos



- **Caras:** posee tres caras, dos de ellas son los círculos planos llamados bases, y la otra es una superficie curva.
- **Aristas:** tiene dos aristas que coinciden con el borde de las caras planas.
- **Vértices:** no posee vértices.
- **Eje:** lado fijo alrededor del cual gira el rectángulo.
- **Bases:** son los círculos que están en los extremos del cilindro y ambos son paralelos.
- **Generatriz:** lado opuesto al eje, es el lado que genera el cilindro.
- **Altura:** es el eje del cilindro y es la longitud que va desde una base a la otra base del cilindro.

Volumen
El volumen del cilindro es igual al área de la base por su altura.

Fórmula

$V = \pi * r^2 * h$

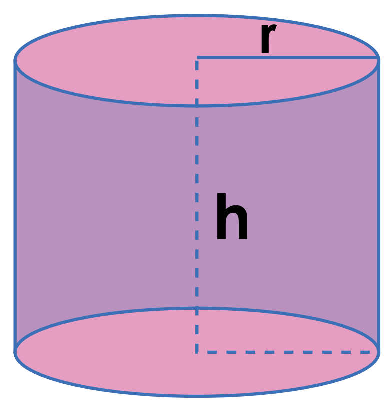
En donde:

V: es el volumen

π: es un valor fijo que es 3, 14

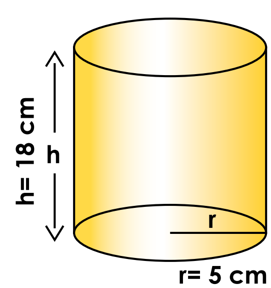
r: es el radio

h: es la altura



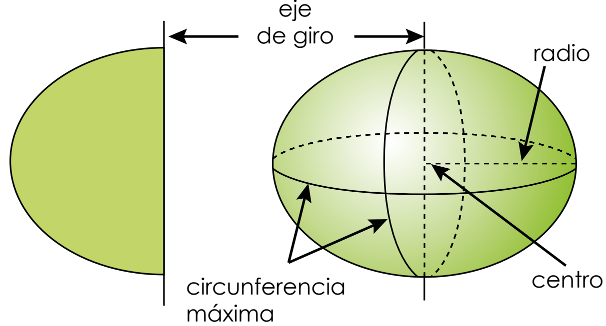
Estudiemos paso a paso el siguiente ejemplo:

Calcular el volumen de un cilindro de 18 cm de altura y 5 cm de radio de la base.

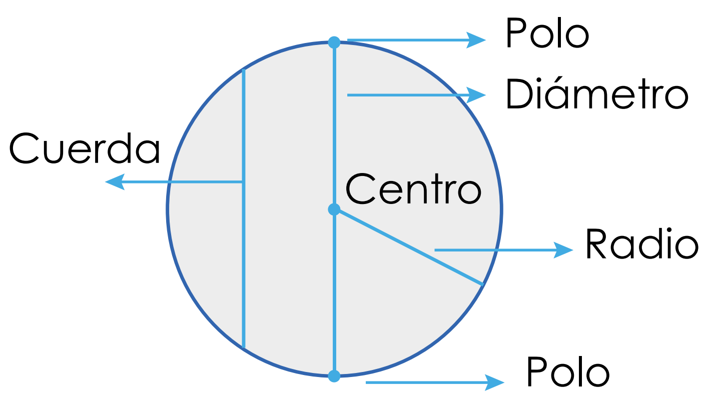


Pasos	
Colocar la fórmula	$V = \pi * r^2 * h$
Reemplazar el valor de $\boldsymbol{\pi = 3,14}$ $\boldsymbol{h = 18\ cm}$ y $\boldsymbol{r = 5\ cm}$	$V = (3{,}14) * (5cm)^2 * (18\ cm)$
Elevar el $(\mathbf{5}\ \boldsymbol{cm})^2 = \mathbf{25}\ \boldsymbol{cm^2}$ y colocar el resultado en el lugar correspondiente	$V = (3{,}14) * (25cm^2) * (18\ cm)$
Realizar las multiplicaciones de los dos primeros paréntesis en el numerador y se colocan los resultados en el lugar correspondiente	3,14 X 25 1 5 7 0 6 2 8 7 8 ,5 0 $V = 78{,}5\ cm^2 * (18\ cm)$
Realizar las multiplicaciones de los términos faltantes y se coloca el resultado ene le numerador	78,5 X 18 6 2 8 0 7 8 5 1 4 1 3 0 $V = 1\ 413\ cm^3$

2) ESFERA: cuerpo geométrico originado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su eje.



Características
La esfera posee los siguientes elementos



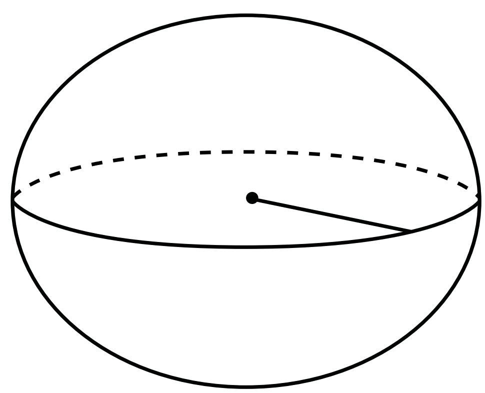
- **Centro:** punto interior que equidista de cualquier punto de la esfera.
- **Radio:** distancia del centro a cualquier punto de la esfera.
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la superficie de la esfera.
- **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro.
- **Polos:** son los puntos del eje de giro que quedan sobre la superficie esférica.

Volumen
El volumen de una esfera en cuatro tercios por el valor de pi por el radio de la esfera.

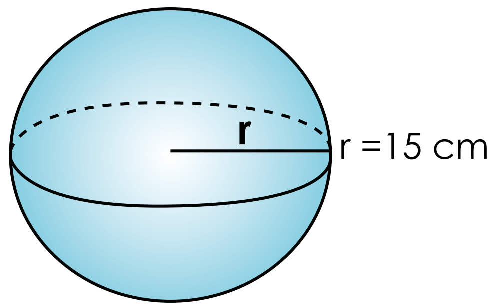
Fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi * r^3$$

En donde:
V: es el volumen
π: es un valor fijo que es 3, 14
r: es el radio



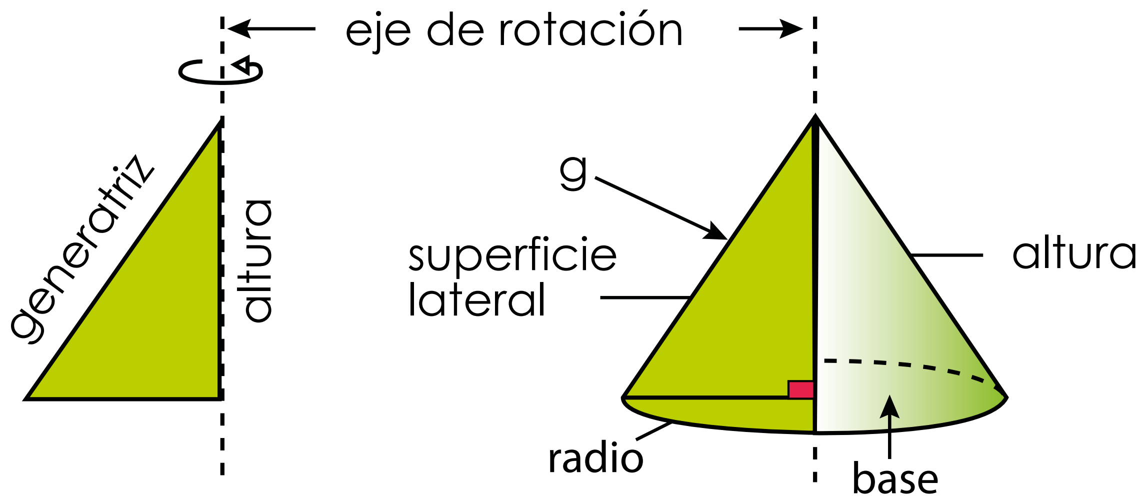
Estudiemos el siguiente ejemplo
Calcular el volumen de una esfera de 15 cm de radio



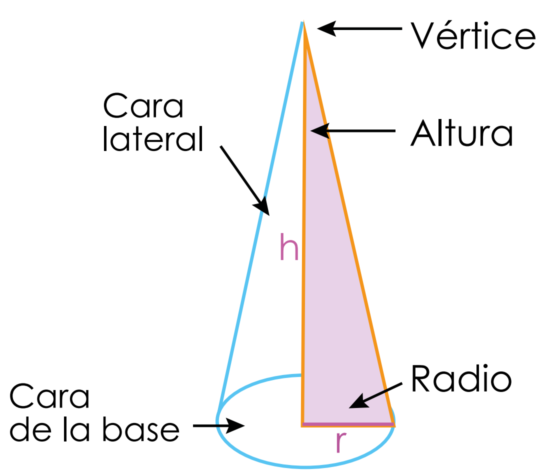
Pasos	
Colocar la fórmula	$V = \frac{4}{3}\pi * r^3$
Reemplazar el valor de $\boldsymbol{\pi = 3,14}$ $\boldsymbol{r = 15\ cm}$	$V = \frac{4}{3}(3{,}14) * (15\ cm)^3$
Elevar el $\boldsymbol{(15\ cm)^3 = 3375\ cm^3}$ y colocar la respuesta en el lugar correspondiente	15 X 15 75 15 225 225 X 15 1125 225 3375
	$V = \frac{4}{3}(3{,}14) * (3\,375\ cm^3)$
Multiplicar los valores dentro de los dos paréntesis y colocarlo al lado de la fracción	3,14 X 3375 1570 2198 942 942 10597,5

Realizar las multiplicaciones del numerador 4 por el cálculo realizado en el paso anterior y colocar el resultado en el numerador.	$V = \frac{4}{3}\ 10\,597{,}5\ cm^3$ 10 597,5 X 4 4 2 3 9 0 , 0
	$V = \frac{42\,390\ cm^3}{3}$
Dividir el numerador entre el denominador	$42\,390 \div 3 = 14\,130$ 3 12 12 003 3 0 9 9 0 0 0 0 $V = 14\,130\ \ cm^3$

3) CONO: cuerpo geométrico formado por dos superficies: una plana y una circular que es la base y otra curva llamada superficie lateral que es un triángulo rectángulo. Sólido de revolución generado por el giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, al círculo conformado por el otro cateto se le denomina base y al punto donde confluyen las generatrices se le llama vértice.



Características
Los elementos del cono son los siguientes



- **Caras:** tiene dos caras, una es un círculo plano que es la base, y la otra es la superficie curva alrededor.
- **Aristas:** tiene una arista que coincide con el borde de la cara plana.
- **Vértice:** tiene un vértice en la parte de superior.
- **Radio:** el radio del cono es el radio de la base que es un círculo.
- **Eje:** recta imaginaria sobre la que está el cateto en el que gira el triángulo rectángulo para formar el cono.
- **Altura:** es la longitud del cateto sobre el que gira el triángulo rectángulo, que va desde la base circular hasta el vértice.

Volumen
El volumen del cono es igual a un tercio del área de la base por la altura.

Fórmula $V = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$

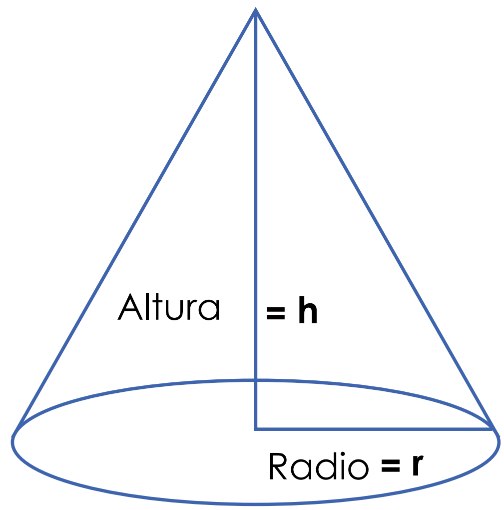
En donde:

V: es el volumen

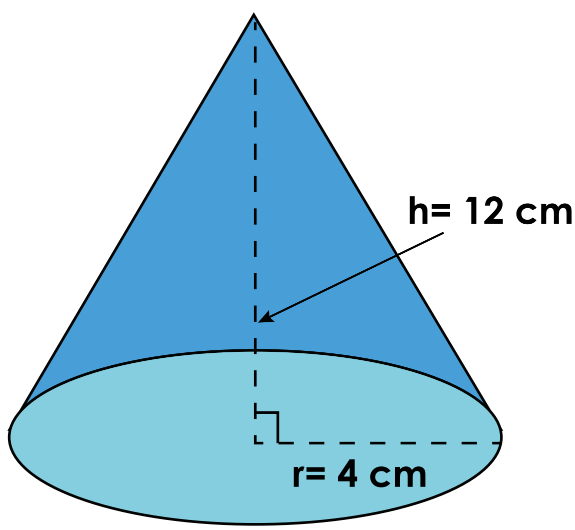
π: es un valor fijo que es 3, 14

r: es el radio

h: es la altura



Analicemos el siguiente ejemplo
Calcular el volumen de un cono de 12 cm de altura y 4 cm de radio



Pasos	
Colocar la fórmula	$V = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$
Reemplazar el valor de $\boldsymbol{\pi = 3,14}$ $\boldsymbol{h = 12\ cm}$ y $\boldsymbol{r = 4\ cm}$	$V = \frac{(3{,}14) * (4\ cm)^2 * (12\ cm)}{3}$
Elevar el $\boldsymbol{(4\ cm)^2 = 16cm^2}$ y colocar el resultado en la fórmula	$V = \frac{(3{,}14) * (16cm^2) * (12\ cm)}{3}$
Realizar las multiplicaciones de los dos primeros paréntesis en el numerador y colocar el resultado en el lugar correspondiente	$(3{,}14) * (16cm^2) = 50{,}24\ cm^2$ 3,14 X 16 1 8 8 4 3 1 4 5 0 , 2 4 $V = \frac{50{,}24\ cm^2 * (12\ cm)}{3}$
Realizar las multiplicaciones de los términos faltantes y colocar el resultado en el numerador	$50{,}24\ cm^2 * (12\ cm) = 602{,}88cm^2$ 50,24 X 12 1 0 0 4 8 5 0 2 4 6 0 2 , 8 8 $V = \frac{602{,}88cm^2}{3}$
Dividir el numerador entre el denominador	$\frac{602{,}88cm^2}{3}$

$$60288 \div 300 = 200{,}9$$

$$\underline{600}$$

$$002880$$

$$\underline{2700}$$

$$0180$$

$$V = 200{,}9\,cm^3$$

D. Manos a la obra

Pongamos a prueba todo lo aprendido y realiza la siguiente actividad

Actividad

Nombre: ________________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

I. Responda correctamente las siguientes preguntas

1) De la clasificación de cuerpos geométricos cuales se estudiaron en este tema

   a) ______________________

2) Al girar un rectángulo en un eje de revolución se forma

   a) _______________________

3) Cuál es el elemento en común en las fórmulas para calcular el volumen del cilindro, esfera y cono

   a) ________________________

II. Coloque un dibujo o figura de un objeto con forma de cuerpos geométricos que observas en tu entorno

Cilindro	Esfera	Cono recto

E. Lo que aprendimos

Taller

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Aplica todo lo aprendido en esta guía para resolver los siguientes problemas:

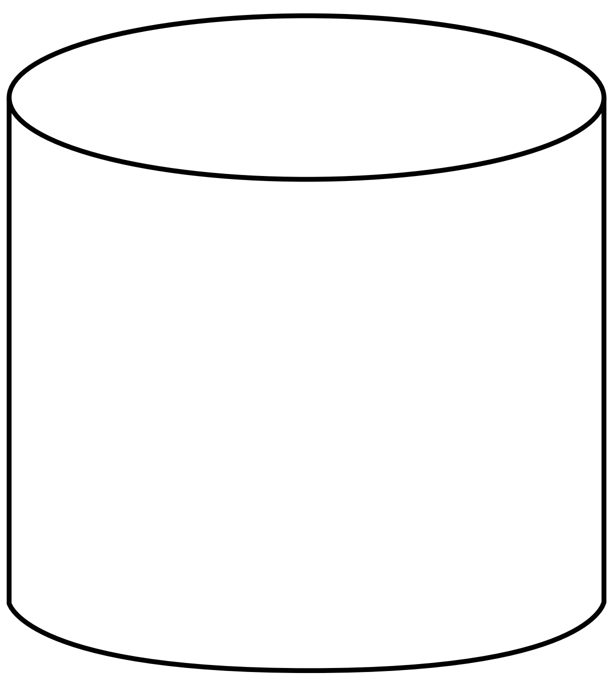
a) Una lata de aceite tiene un radio de 10 cm y una altura de 40 cm. Determina su volumen.

b) Calcula el volumen de un balón de fútbol de 5 pulgadas de radio.

c) Calcula el volumen de un cono de altura de 12 cm y el radio de la base es de 3 cm.

d) Calcula el volumen de un cilindro de altura de 15 cm y su radio es de 8 cm.

II. En el siguiente dibujo de forma cilíndrica, dibuja e identifica los elementos del cilindro.



F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Cuerpos Geométricos

Fecha: Puntaje total: 40 puntos

Actividad: Taller

Criterio	Puntaje				
	1	2	3	4	5
1. Realiza los cálculos de forma ordenada					
2. Presenta los datos del problema y la fórmula para resolverlo					
3. Reemplaza los datos en la fórmula					
4. Realiza las potencias del valor del radio					
5. Realiza las multiplicaciones					
6. Efectúa las divisiones					
7. Expresa correctamente los resultados					
8. Dibuja e identifica los elementos del cilindro					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 16

Cuerpos Geométricos

> Los Sólidos

» Prisma

» Pirámide

Indicadores de logros:

- Caracteriza según los elementos los cuerpos geométricos
- Calcula por medio de la fórmula el volumen de los cuerpos geométricos
- Resuelve con confianza problemas de volumen de cuerpos geométricos

A. Recuerda

- Un cuerpo geométrico es un elemento que dispone de tres dimensiones (alto, ancho y largo).
- El cilindro es aquel que se genera haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.
- El cono se genera haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.
- La esfera se puede generar haciendo que un semicírculo gire alrededor de su diámetro.

B. Para empezar

Hagamos un repaso

Identifica el cuerpo geométrico que se representa en las siguientes imágenes.

C. Considera lo siguiente

Lee y analiza el siguiente contenido
Los cuerpos geométricos se clasifican en dos categorías:

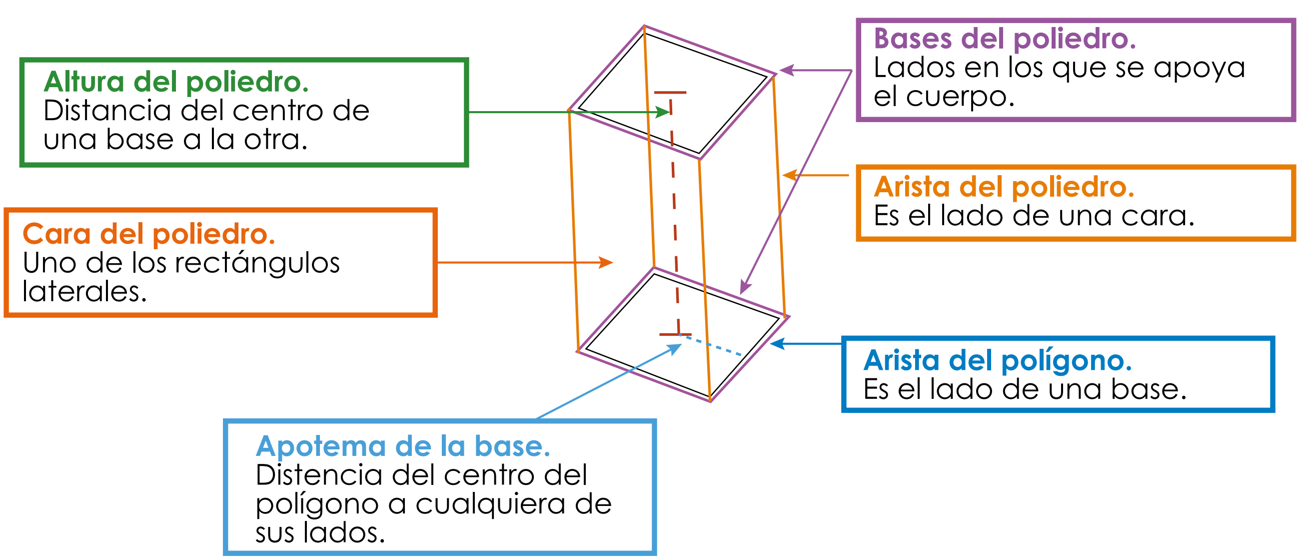
1. Poliedros
2. Cuerpos redondos

En el tema anterior estudiamos los cuerpos geométricos y su clasificación en cuerpos redondos, en este tema trabajaremos la clasificación de poliedros.

LOS POLIEDROS: es una porción del espacio limitado por polígonos, son cuerpos planos, geométricos cuyas caras son figuras geométricas planas. Entre los más conocidos están el prisma y la pirámide.
En este tema estudiaremos el prisma y la pirámide.

1) PRISMA
Un prisma es un cuerpo geométrico (un poliedro) que tiene dos bases iguales y paralelas entre sí, llamadas BASES (que pueden ser cualquier polígono) y un número de caras laterales igual al número de lados del polígono de sus bases, y que son siempre PARALELOGRAMOS (cuadrados, rectángulos, rombos o romboides). Aun cuando no sea regular, al prisma se le nombra en función de los polígonos de la base.

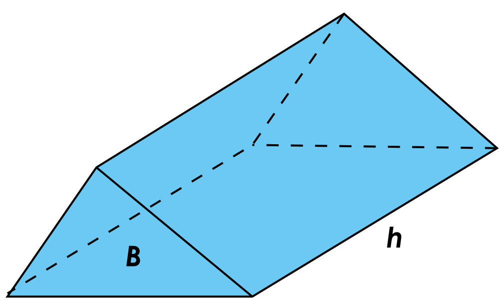
Elementos del prisma

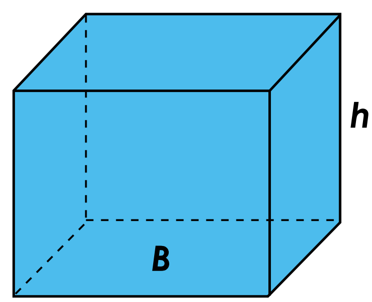


Características

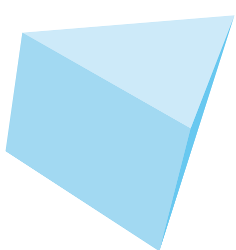
- Su número de caras se obtiene sumándole ‘2’ al número de lados del polígono de su base.
- Su número de vértices se calcula multiplicando por ‘2’ el número de lados del polígono de la base.
- Su número de aristas se calcula multiplicando por ‘3’ el número de lados del polígono de la base.
- Los polígonos que forman sus bases se llaman directrices.
- Sus caras laterales solo pueden ser cuadrados, rectángulos, rombos o romboides (paralelogramos).
- Los prismas rectos tienen cuadrados o rectángulos en sus caras laterales, y los oblicuos, cualquier paralelogramo.
- Existen infinitas posibilidades de tipos de prismas (y de sus variantes): distintas bases, distinta altura.

Los tipos de prismas más conocidos son los siguientes:

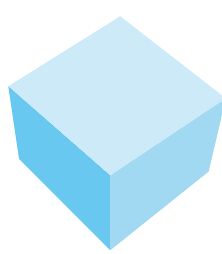




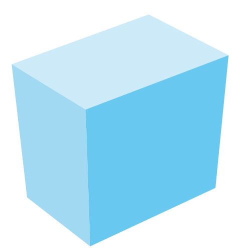
Otros ejemplos de prismas son los siguientes:



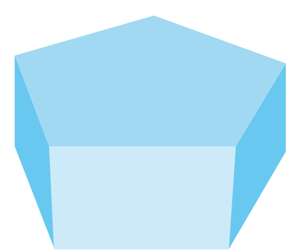
PRISMA TRIANGULAR
La base es un triángulo (3 lados)



HEXAEDRO REGULAR O CUBO
Es un prisma donde todas sus caras son cuadrados iguales.



PRISMA RECTANGULAR
La base es un cuadrado (4 lados)



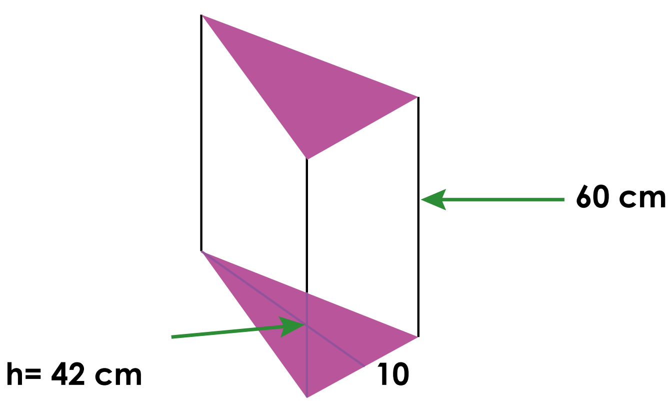
PRISMA PENTAGONAL
La base es un pentágono (5 lados)

Observa los siguientes objetos de nuestro entorno, tienen forma de prisma de allí que la geometría está presente en nuestra vida cotidiana

Volumen
Para calcular el volumen total de un prisma siempre es necesario conocer tres medidas:
• El área de una base.
• El perímetro de la base
• La altura del prisma

Fórmula
La fórmula general para calcular el volumen de cualquier prisma son las siguientes:
$Volumen\ (V) = área\ de\ la\ base\ (A_b) * altura\ (h)$
$\boldsymbol{V = A_b * h}$
Donde V= volumen del prisma
A_b= área de la base del prisma
h = longitud de la altura del prisma

Observación
➢ Para calcular el área de la base si es un prisma rectangular es $A = lxl$
➢ Para calcular el área de la base si es un prisma triangular es $A = \frac{bxh}{2}$



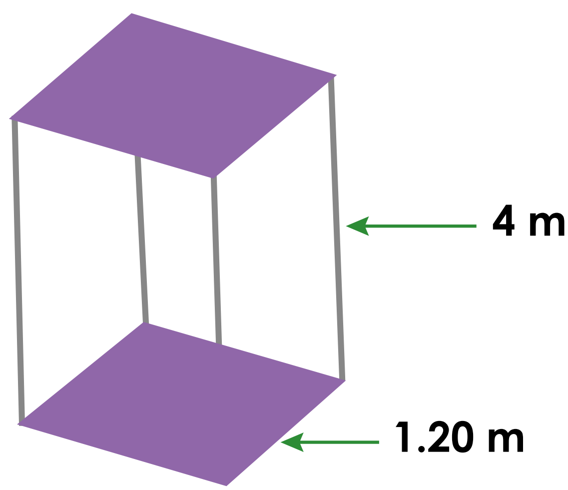
Estudiemos paso a paso los siguientes ejemplos

Ejemplo
Hallar el volumen de un prisma triangular cuya base mide 10 cm y altura del triángulo 42 cm; la altura del prisma es de 60 cm.

Pasos	
Colocar la fórmula	$V = a_b * h$
Como es un prisma triangular el área de la base se calculará utilizando la ´fórmula de área del triángulo. Reemplazando los valores dados en la fórmula	$A_b = \frac{bxh}{2}$ $A_b = \frac{10cm\ x\ 42cm}{2}$
Realizar la multiplicación de los factores en el numerador	10 X 42 ——— 2 0 4 0 ——— 4 2 0 $A_b = \frac{420cm^2}{2}$
Realizar la división del numerador entre el denominador para obtener el área de la base del triángulo.	$420 \div 2 = 210$ 4 ——— 02 2 ——— 00 0 ——— 0 $A_b = \ 210\ cm^2$
Se coloca el resultado calculado en el paso anterior en la fórmula de volumen de un prisma	$V = 210\ cm^2 * 60\ cm$

Realizar la multiplicación de los factores para obtener el volumen del prisma.	210 X 60 0 0 0 1 2 6 0 1 2 6 0 0 $V = 12\,600\ cm^3$

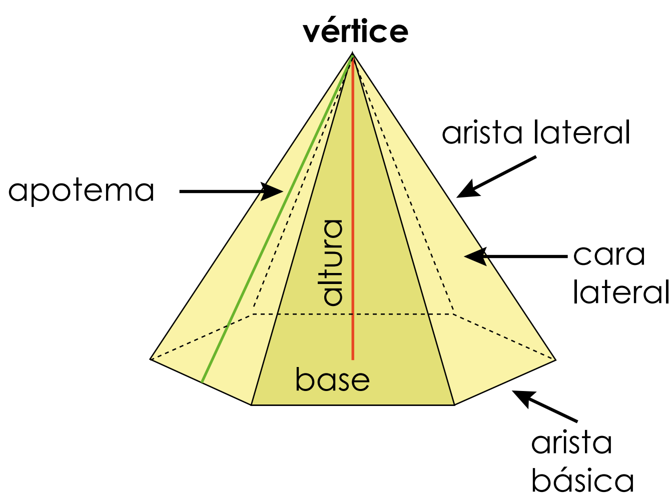
Ejemplo
Hallar el volumen de un prisma cuadrangular regular cuyo lado de la base mide 1.20 m y la altura de del prisma es de 4 m.



Pasos	
Colocar la fórmula	$V = a_b * h$
Como es un prisma rectangular el área de la base se calculará utilizando la ´fórmula de área del rectángulo. Reemplazando los valores dados en la fórmula	$A_b = \ lxh$ $A_b = \ 1{,}20m * 1{,}20m$

Realizar la multiplicación de los factores	1,20 X 1,20 000 240 120 1,4400 $A_b = 1{,}44m^2$
Se coloca el resultado calculado en el paso anterior en la fórmula de volumen de un prisma	$V = 1{,}44m^2 * 4m$
Realizar la multiplicación de los factores para obtener el volumen del prisma.	1,4400 X 4 5,7600 $V = 5{,}76\, m^3$

h= 12 cm



2) PIRÁMIDES

Una pirámide es un cuerpo geométrico (y un poliedro) que tiene una base (que puede ser cualquier polígono) y un número de caras laterales (igual al número de lados del polígono de su base). Las pirámides acaban en un vértice llamado cúspide (o ápice).

Características

- Su número de caras y de vértices se obtiene sumándole '1' al número de lados del polígono de su base.
- Su número de aristas se calcula multiplicando por '2' el número de lados del polígono de la base.
- La base de los triángulos que conforman sus caras laterales es cada uno de los lados del polígono de su base.
- Todos los triángulos de sus caras laterales se unen en la cúspide o ápice.
- Existen infinitas posibilidades de tipos de pirámides (y de sus variantes).
- La altura de la pirámide es la distancia del vértice a la base. Cuando la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de la base, nos encontramos ante una pirámide regular.

PIRÁMIDES SEGÚN EL POLÍGONO DE LA BASE. Todas las expuestas son regulares, convexas y rectas.

PIRÁMIDE TRIANGULAR
Su base está formada por un triangulo

PIRÁMIDE CUADRANGULAR
Su base es un cuadrado. Por tanto, es regular, y además, recta y convexa.

Objetos de la vida cotidiana con forma de pirámide

Volumen
Este equivale a la tercera parte de la multiplicación del área de su base por la altura.

Para calcular el volumen total de un prisma siempre es necesario conocer tres medidas:
- El área de una base.
- El perímetro de la base
- La altura de la pirámide

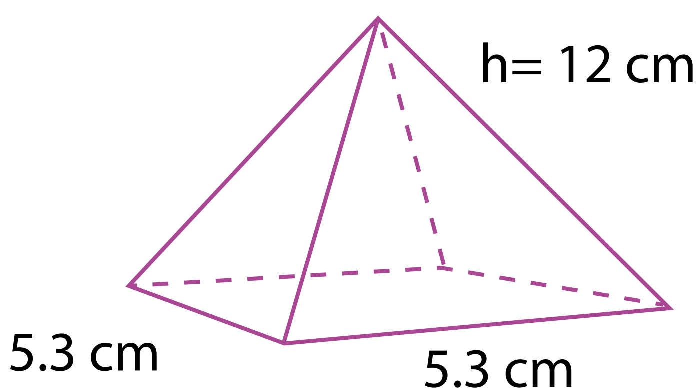
Fórmula

$$V = \frac{A_b * h}{3}$$

Donde V= volumen de la pirámide
A_b =área de la base de la pirámide
h =longitud de la altura de la pirámide

Observación
- Para calcular el área de la base si es una pirámide rectangular es A=lxl
- Para calcular el área de la base si es una pirámide triangular es A= bxh/2

Ejemplo
Determina el volumen de una pirámide con base cuadrangular si cada lado mide 5.3 cm y la altura de la pirámide es de 12 cm.



Pasos	
Colocar la fórmula	$V = \frac{A_b * h}{3}$
Como es una pirámide cuadrangular el área de la base se calculará utilizando la ´fórmula de área del rectángulo	$A_b = l * l$ $A_b = 5{,}3cm * 5{,}3\ cm$ $A_b = 28{,}09\ cm^2$
Realizar la multiplicación de los factores	5,3 X 5,3 959 265 28,09 $A_b = 28{,}09\ cm^2$
Se coloca el resultado calculado en el paso anterior en la fórmula	$V = \frac{28{,}09\ cm^2 * 12\ cm}{3}$
Realizar la multiplicación de los factores en el numerador	28,09 X 12 5618 2809 33708
Colocar el resultado en la fórmula	$V = \frac{337{,}08\ cm^3}{3}$

Realizar la división del numerador entre el denominador para obtener el volumen de la pirámide. Observamos que el numerador (dividendo) **337,08** tiene dos cifras decimales es por ellos que al denominador (divisor 3 hay que colocarle dos ceros.	$33708 \div 300 = 112{,}3$ 300 $\overline{0370}$ 300 $\overline{0708}$ 600 $\overline{1080}$ 900 $\overline{0180}$ $V = 112{,}36\ cm^3$

Ejemplo
¿Calcular el volumen de una pirámide con base triangular de lados igual a 16 cm y una altura de 8 cm? La altura de la pirámide es 12 cm

Pasos	
Colocar la fórmula	$V = \frac{A_b * h}{3}$
Como es una pirámide Triangular el área de la base se calculará utilizando la fórmula de área del triángulo	$A_b = \frac{bxh}{2}$ $A_b = \frac{16cm\ x\ 8\ cm}{2}$
Realizar la multiplicación de los factores en el numerador	$16 \quad X \quad 8$ $\overline{1\ 2\ 8}$ $A_b = \frac{128\ cm^2}{2}$

Realizar la división del numerador entre el denominador para obtener el área de la base del triángulo.	$128 \div 2 = 64$ 12 ____ 008 8 ____ 0 $A_b = 64\ cm^2$
Se coloca el resultado calculado en el paso anterior en la fórmula	$V = \frac{64\ cm^2 * 12\ cm}{3}$
Realizar la multiplicación de los factores en el numerador	64 X 12 ____ 1 2 8 6 4 ____ 7 6 8 $V = \frac{768\ cm^3}{3}$
Realizar la división del numerador entre el denominador para obtener el volumen de la pirámide	$768 \div 3 = 256$ 6 ____ 16 15 ____ 018 18 ____ 00 $V = 256\ cm^3$

D. Manos a la obra

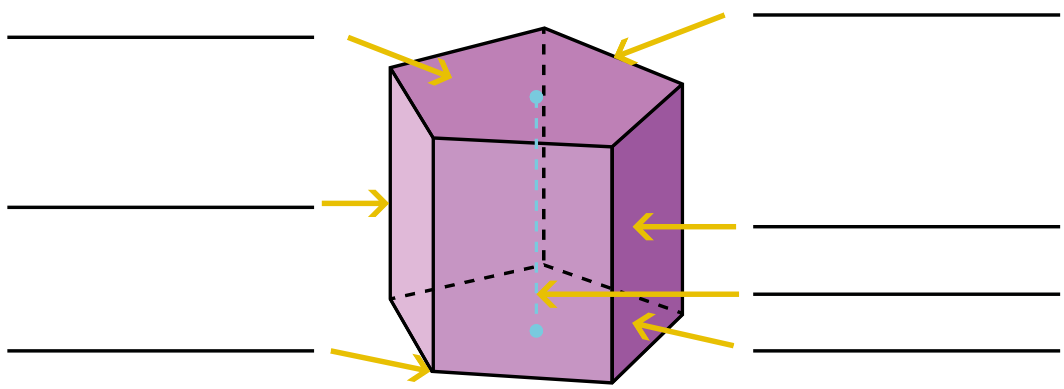
Utiliza lo aprendido en la guía para realizar la siguiente actividad

Actividad

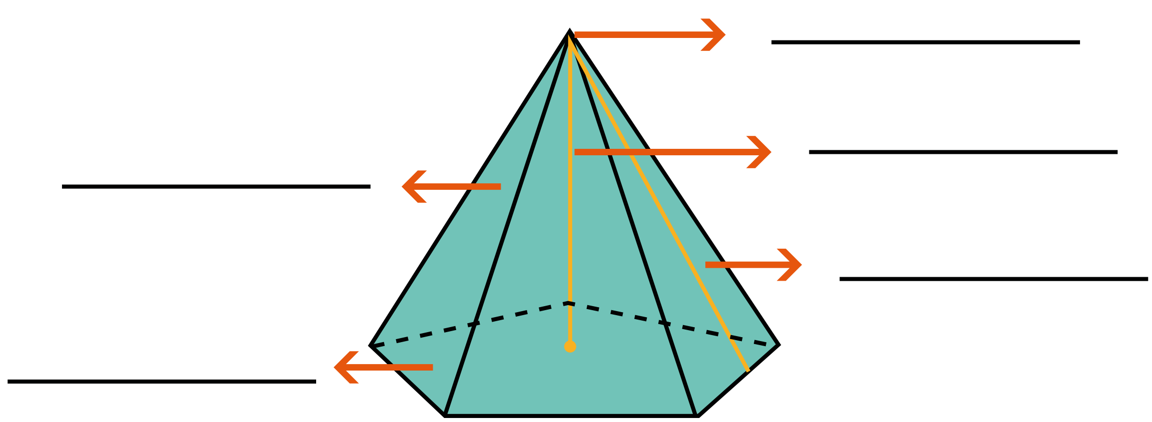
Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

1) Identifique los elementos del prisma



2) Identifica los elementos de la pirámide



3) Ilustra con figuras o dibujos objetos con forma de prisma y pirámide.

E. Lo que aprendí

Actividad constructiva

Nombre: ________________________ **Grado:** _____ **Fecha:** _______

Utilizando tu creatividad e ingenio elabora un prisma y una pirámide utilizando materiales reciclados.

Taller N° 1

Nombre: _________________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada. }

I. Responde correctamente las siguientes preguntas

1) Lugar donde se unen todas las caras laterales de todos los triángulos de la pirámide

a) __________________________

2) Es la distancia del vértice a la base

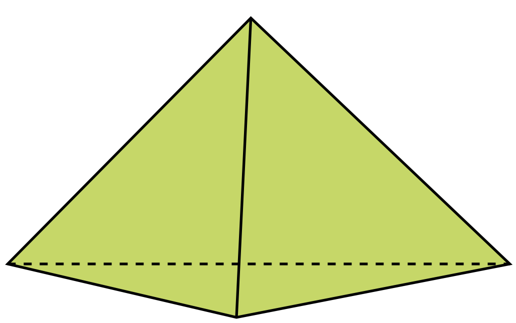
a) __________________________

3) Clasificación de las pirámides según el polígono

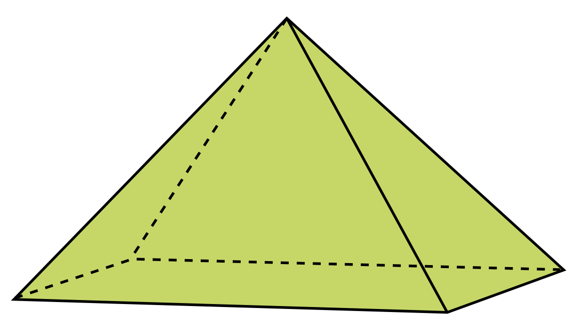
a) __________________________

b) __________________________

4) Basando en las características de las pirámides identifíquelas según el número de lados del polígono de la base

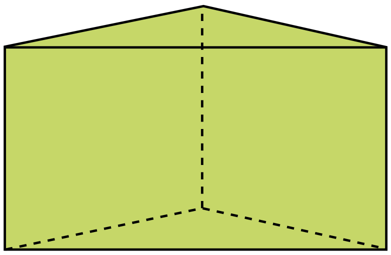
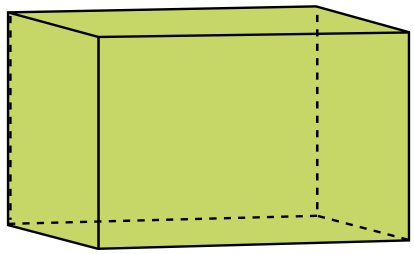
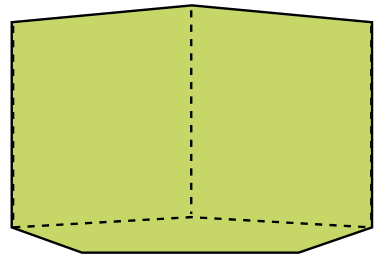


____



____

5) Identifica los tipos de prismas según los números de lados del polígono de la base

____________________ ____________________ ____________________

Taller N° 2

Nombre: ______________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Utilizando el contenido estudiado sobre cómo calcular el volumen del prisma y la pirámide resuelve los siguientes problemas

1) Calcular el volumen de un prisma triangular cuya base y altura del triángulo mide 8cm y 32 cm; y la altura el prisma mide 55 cm.

2) Calcular el volumen de un prisma cuadrangular cuyo lado de la base mide 7 m y la altura de 12 m.

3) Determina el volumen de una pirámide con base cuadrangular si cada lado mide 6 cm y la altura de la pirámide es de 13 cm.

4) Calcular el volumen de una pirámide con base triangular de 8 cm y una altura de 11 cm. La altura de la pirámide es 12 cm.

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Cuerpos Geométricos

Fecha: Puntaje total: 20 puntos

Actividad: confección de prisma y pirámide

Criterio	Puntaje				
	1	2	3	4	5
1. Nitidez en el trabajo terminado					
2. Creatividad en el diseño del prisma y la pirámide					
3. Los trabajos son confeccionados con materiales reciclados					
4. Los objetos presentan la forma de prisma y pirámide					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Cuerpos Geométricos

Fecha: Puntaje total: 10 puntos

Actividad: Taller N°. 1

Criterio	Puntaje				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Utilizando el contenido del tema de los cuerpos geométricos responde correctamente las preguntas					
2. Identifica los prismas y pirámides en base al número de lados del polígono					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: Cuerpos Geométricos

Fecha: Puntaje total: 30 puntos

Actividad: Taller N°. 2

Criterio	Puntaje				
	1	2	3	4	5
1. Realiza los cálculos de forma ordenada					
2. Presenta los datos del problema y la fórmula para resolverlos					
3. Reemplaza los datos en la fórmula					
4. Realiza las multiplicaciones de los factores					
5. Efectúa las divisiones					
6. Expresa correctamente los resultados					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Tema 17

La estadística en proyectos de investigación

> Concepto

> Etapas del proyecto

Indicador de logros:

- Emplea la estadística como herramienta en proyecto para el estudio y solución de situaciones en el entorno.

A. Recuerda

Recordemos en donde vemos porcentaje o cálculo de probabilidades.

Bueno porcentaje lo podemos observar cuando vamos al súper a comprar, o cuando compramos y nos cobrar el 7 % sobre el valor de la compra, las probabilidades las observamos en los juegos de azar en donde calculamos la probabilidad que salga nuestra carta para ganar el juego o cuando nuestros familiares comprar billetes de lotería esperando que la probabilidad de que ese número comprado juegue, sea alta y así ganar el premio mayor

B. Para empezar

Te reto a resolverlo

1) Si su mamá lo envía al súper a comprar una tarjeta de celular de 5 dólares. ¿Cuánto es el 7 % de los 5 dólares de la tarjeta?

No puedes hacerlo verdad. Claro que no, para poder resolverlo necesitas conocer el tema que a continuación estudiaremos y después de terminar de estudiarlo te invito a que intentes resolverlo nuevamente verás que si podrás.

C. Considera lo siguiente

Lee y analiza el siguiente contenido

ESTADÍSTICA

» **CONCEPTO**
La estadística es una disciplina científica que se ocupa de la obtención, orden, análisis, agrupación e interpretación de un conjunto de datos con el fin de obtener explicaciones y predicciones, sobre fenómenos observados. La Estadística no son sólo los resultados de encuestas, ni el cálculo de unos porcentajes, es un método científico que pretende sacar conclusiones a partir de unas observaciones hechas.

Se puede decir que la estadística es la ciencia de los datos.

» **IMPORTANCIA**
Se dice que la estadística es transversal porque su metodología es aplicable al estudio en diversas disciplinas tales como: biología, física, economía, sociología entre otras. La estadística ayuda a obtener conclusiones relevantes para el estudio de todo tipo de agentes como humanos, animales, plantas, generalmente lo hace a través de muestras.

» **TIPOS**

1. **Estadística descriptiva:** se refiere a los métodos de recolección y organización de los datos, en ella se describe las características de los datos generalmente se utilizan gráficos y tablas.

2. **Estadística inferencial:** se refiere a los métodos utilizados para hacer predicciones y obtener conclusiones a partir de los analizados, siempre teniendo en cuenta el grado de incertidumbre o error sobre la predicción.

ESTUDIO ESTADÍSTICO
En un estudio estadístico distinguimos los siguientes conceptos.

1. **Población:** son todo el conjunto de elementos que forman la información que se va a analizar.

2. **Muestra:** es el grupo que se va a estudiar.

3. **Individuo:** es cada elemento de la muestra

4. **Variable estadística:** es la información que se va a analizar, las variables pueden ser cualitativas que son las características que no se representan con números porque son cualidades y las cuantitativas que son las características representadas con números.

5. **Modalidad:** son los valores que pueden tomar las variables, ejemplo; sexo, edad, altura de una persona.

Analicemos un ejemplo de un estudio estadístico

Se realiza una encuesta a 10 personas que estaban esperando a sus hijos salir de la escuela, preguntándoles, su edad, sexo y estatura. Las personas llenabas la siguiente encuesta

Nombre: ______________________________

Edad: ______________________________

Sexo: ______________________________

En base a los datos recolectados se elaboró la siguiente tabla estadística

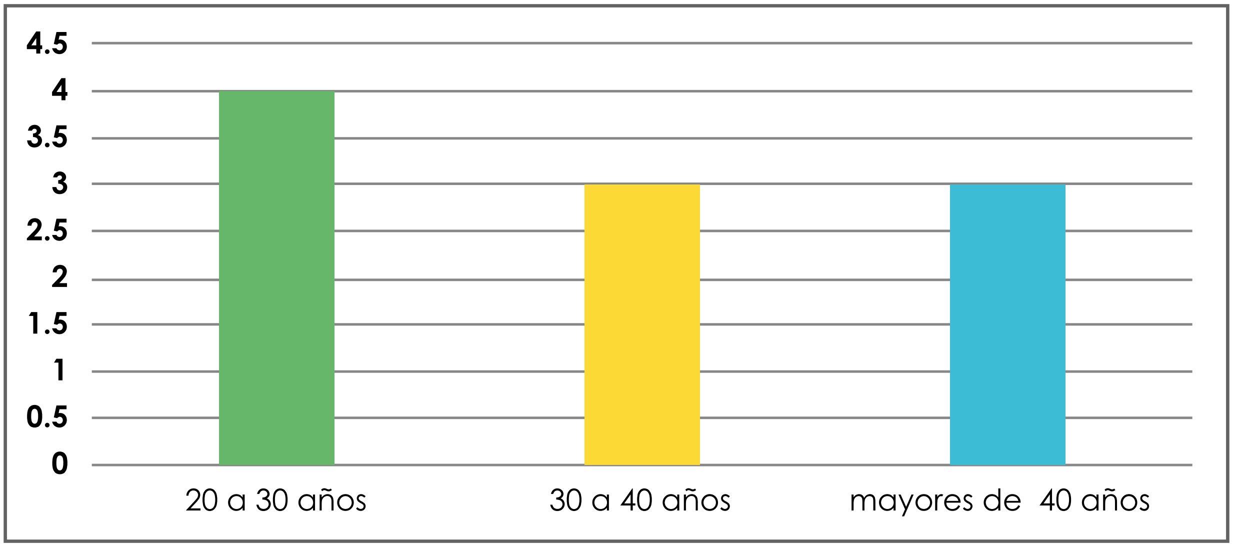
Nombre	Edad	Sexo	Estatura
1. Ana flores	25	F	1.65
2. Jaime González	34	M	1,71
3. Carlos Morales	33	M	1,69
4. Sandra Mejía	24	F	1,55
5. Adrián Castro	29	M	1,59
6. Angélica Lozada	26	F	1,52
7. Samuel Pérez	42	M	1,66
8. Tatiana Navas	37	F	1,63
9. Esteban Mendoza	41	M	1,74
10. Alberto Ortega	46	M	1,60

Observemos cuantos de los que respondieron son:

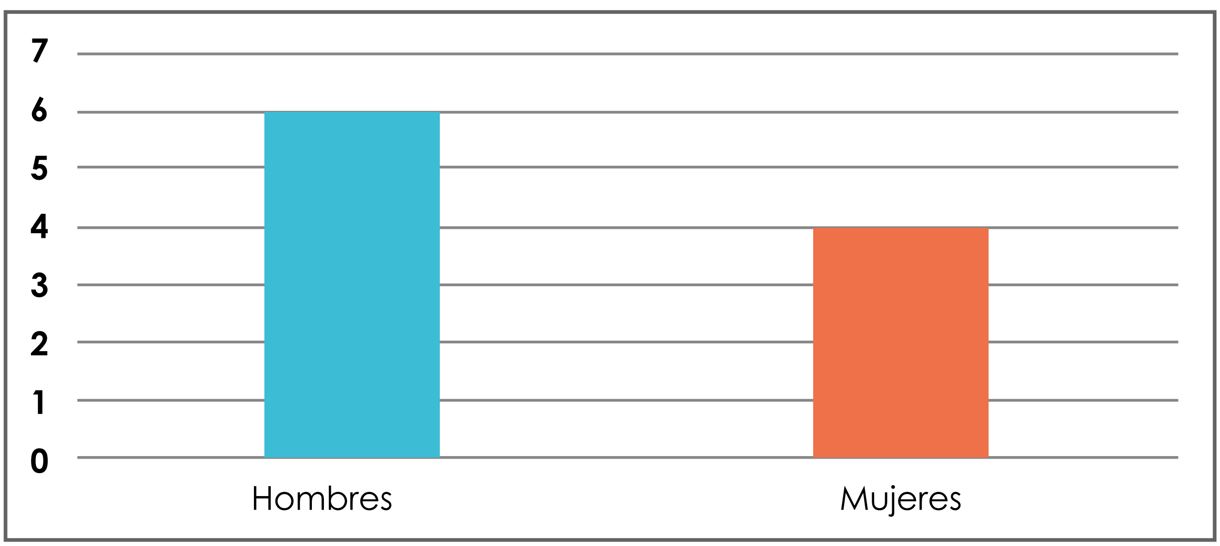
1. De 20 a 30 años _4_ De 30 a 40 años _3_ .

Mayores de 40 años _3_ .

Representemos estos valores en una gráfica



Cuantos son mujeres _4_ Cuantos son varones _6_

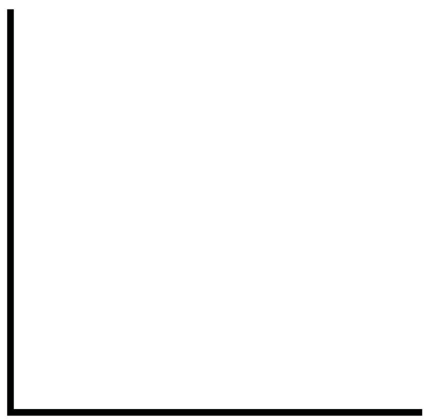


Los realizadores de la encuesta dedujeron que ese día buscando sus hijos la mayoría eran personas mayores de 20 años y que más varones fueron ese día a retirar a sus hijos de la escuela.

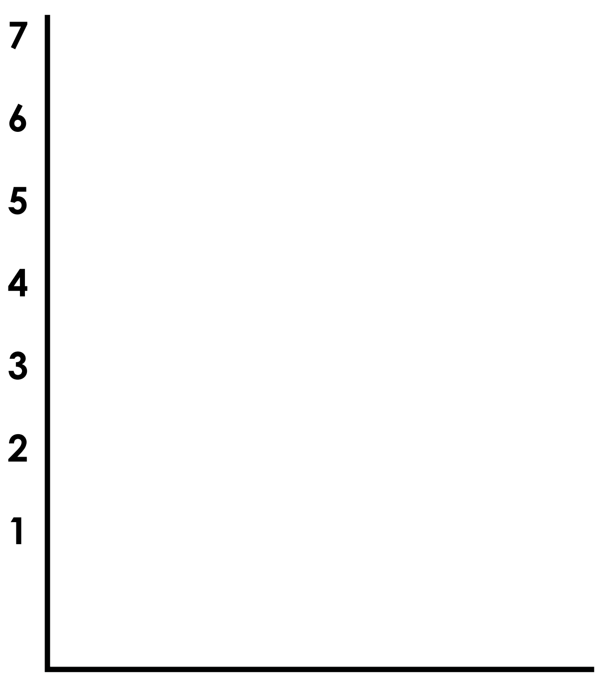
OBSERVACIÓN: un estudio estadístico te permite sacar conclusiones mediante la recolección de datos.

Te dejo aquí los pasos de cómo elaborar una gráfica para que puedas realizarla en casa al elaborar tu estudio estadístico.

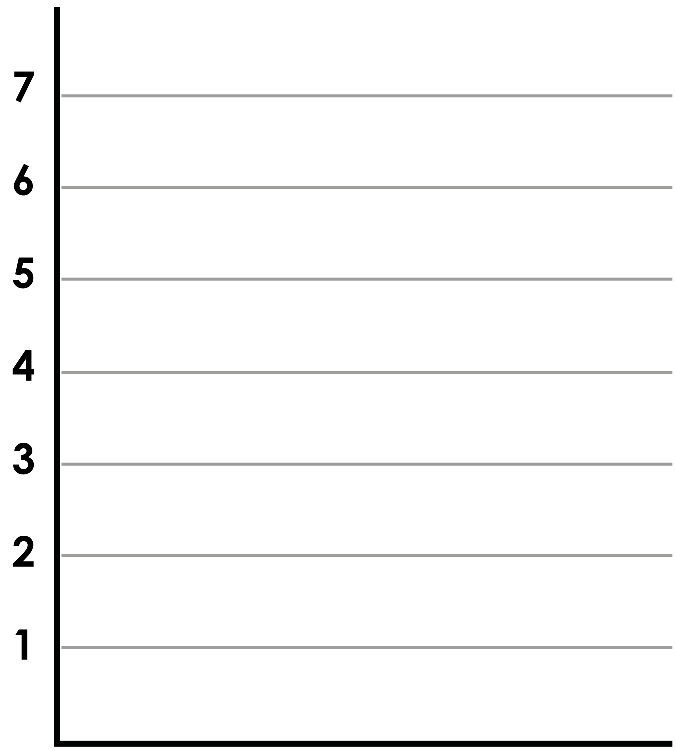
1. Dibuja tu esquema que sería como una L con el eje vertical que sería el eje de las y positivas, y el eje horizontal que sería el eje de las x positivas. Quedaría de la siguiente forma.



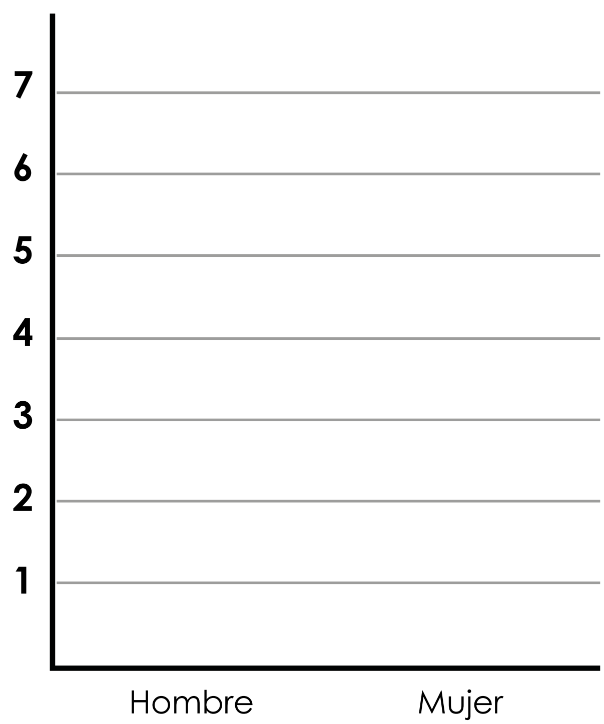
2. Divide el eje vertical y horizontal en unidades, que van a depender de tus datos, ejemplo si tus datos son pequeños divide de una en una unidad, si los datos son un poco más grandes amplias la unidad. (de 5 en 5, de 10 en 10, de 20 en 20 etc.)



3. Dibujas las barras horizontales paralelas al eje horizontal.



4. Colocas la información en la parte de debajo de la gráfica (los datos)



5. Colocas los valores de tu tabla de datos en las barras horizontales y construyes el recuadro, que puedes pintar del color que desees.

CONOSCAMOS LAS ETAPAS PARA LA REALIZACION DE UN PROYECTO ESTADISTICO

1. Recolección de información.
    a. Elección de la muestra.
    b. Determinación del tipo de encuesta.
    c. Diseño del cuestionario.
    d. Conducción del experimento.
2. Organización de la información.
    a. Confección de tablas de frecuencias.
    b. Selección de tipo de gráfico y confección de gráficos.
3. Análisis de la información.
    a. Cálculo de porcentajes.

b. Cálculo de parámetros

- Parámetros de posición
- Parámetros de dispersión
- Correlación

4. Interpretación de resultados.

a. Establecimiento de predicciones

b. Test de Causa-Efecto

EL PORCENTAJE EN LA ESTADÍSTICA

El porcentaje es aquel que nos permite extrapolar una cantidad en base a 100. Es una propiedad matemática que nos permite igualar situaciones para compararlas y entenderlas.

Los porcentajes los utilizamos continuamente en nuestra vida diaria, estudiemos algunos ejemplos

EN LOS IMPUESTOS

Cuando compramos en los almacenes la ropa u otros artículos, en la compra de comida o en los impuestos que pagamos cuando adquirimos un préstamo.

Veamos en el siguiente ejemplo como calculamos el porcentaje de un producto sería de la siguiente forma

Ejemplo:

Calcula el valor a pagar de unas zapatillas, que aparecen en el mostrador con un precio de 49,99

Primero hay que calcular primero el 7% de 49.99

Primero debemos saber que no podemos multiplicar por 7% de forma tradicional por lo que convertiremos ese 7% en decimal esto como se hace dividiendo el 7 ÷100. Observamos que el 7 es menor que 100 por lo que agregamos un cero coma después del igual y un cero al lado del 7 y quedaría en 70 pero sigue siendo menor que 100 por lo que agregamos otro 0 después de la coma y otro cero al lado del 70 y vemos que ahora es 700 y es mayor 100 entonces procedemos a dividir	$\mathbf{700 \div 100 = 0,07}$ $\mathbf{700}$ $\mathbf{000}$
Ahora este valor tomara el lugar del 7 %	7% = 0,07
El valor total del producto los multiplicamos por el porcentaje El total del producto es 49,99	Total * 7 % 49,99 * 0,07
Realizamos la multiplicación de los factores Observamos que 4,99 tiene dos números (cifras) después de la coma y 0,07 tiene dos números (cifras) después de la coma entonces entre los dos hay 4 números después de la coma por lo tanto ese es el número de cifras que debe haber después de la coma en el resultado	49,99 X 0,07 3 4 9 9 3 0 0 0 0 0 0 0 0 3 ,4 9 9 3
El resultado es **3 ,4 9 9 3** pero como es dinero debemos dejar dos números (cifras)	3 , 49

Ahora sabemos que el 7 % de 49, 99 es 3,49 entonces queremos saber el valor de las zapatillas a pagar en la caja

Para saber el valor a pagar se debe sumar el precio que tienen las zapatillas más el 7% calculado esto sería 49,99 + 3,49

$$\begin{array}{r} \mathbf{49,99} \\ + \underline{\mathbf{3,49}} \\ \mathbf{53,48} \end{array}$$

Respuesta: el precio a pagar por las zapatillas es de B/ 53,48
Vez como la estadística está presente en nuestra vida cotidiana.

EN LAS REBAJAS U OFERTAS

Cuando observamos que algún artículo está en oferta observamos que dice 25 % de descuento o 50 % de descuento, observemos mediante un ejemplo como calcular estas rebajas

Ejemplo:

Un computador de B/ 750,00 está en oferta indica en un anuncio que tiene 25 % de descuento, como calculamos cuanto es ese descuento y cuánto costaría la computadora con ese descuento y además saber cuánto voy a pagar con el 7% .

Primero debemos saber que no podemos multiplicar por 25 % de forma tradicional por lo que convertiremos ese 25 % en decimal esto como se hace dividiendo el 25 ÷100. Observamos que el 25 es menor que 100 por lo que agregamos un cero coma después del igual y un cero al lado del 25 y quedaría en 250 vemos que ahora es mayor 100 entonces procedemos a dividir	$250 \div 100 = 0,25$ 200 0500 500 000
Ahora este valor tomara el lugar del 25 %	25% = 0,25
El valor total del producto los multiplicamos por el porcentaje El total del producto es 49,99	Total * 25 % 750.00 * 0,25
Realizamos la multiplicación de los factores Observamos que 4,99 tiene dos números (cifras) después de la coma y 0,07 tiene dos números (cifras) después de la coma entonces entre los dos hay 4 números después de la coma por lo tanto ese es el número de cifras que debe haber después de la coma en el resultado	750,00 X 0,25 3 7 5 0 0 0 1 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 8 7,5 0 0 0
El resultado es **1 8 7,5 0 0 0** pero como es dinero debemos dejar dos números (cifras) después de la coma entonces quedaría **1 8 7,5 0** por regla de redondeo.	1 8 7,5 0 0 0 =1 8 7,5 0

Ahora sabemos que el 25 % de B/ 750,00 es =1 8 7,5 0 entonces queremos saber el valor de la computado para pagar en la caja, para ello se debe restar el valor de la computadora menos el valor obtenido del descuento del 25%.

7 5 0, 0 0
- <u>1 8 7, 5 0</u>
5 6 2, 5 0

Ahora calculemos en 7 % del valor de la computadora ya con el descuento del 25 %

Primero debemos saber que no podemos multiplicar por 7% de forma tradicional por lo que convertiremos ese 7% en decimal esto como se hace dividiendo el 7 ÷100.	$\mathbf{700 \div 100 = 0,07}$ $\frac{\mathbf{700}}{\mathbf{000}}$
Observamos que el 7 es menor que 100 por lo que agregamos un cero coma después del igual y un cero al lado del 7 y quedaría en 70 pero sigue siendo menor que 100 por lo que agregamos otro 0 después de la coma y otro cero al lado del 70 y vemos que ahora es 700 y es mayor 100 entonces procedemos a dividir	
Ahora este valor tomara el lugar del 7 %	7% = 0,07
El valor total del producto los multiplicamos por el porcentaje	Total * 7 %
El total del producto es 49,99	5 6 2, 5 0* 0,07
Realizamos la multiplicación de los factores	5 6 2, 5 0 X 0,07
Observamos que 4,99 tiene dos números (cifras) después de la coma y 0,07 tiene dos números (cifras) después de la coma entonces entre los dos hay 4 números después de la coma por lo tanto ese es el número de cifras que debe haber después de la coma en el resultado	3 9 3 7 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 9 ,3 7 5 0
El resultado es **3 9 ,3 7 5 0** pero como es dinero debemos dejar dos números (cifras)	= 3 9 ,3 7

Ahora sabemos que el 7 % de 5 6 2, 5 0 es 3 9 ,3 7 entonces queremos saber el valor de las computadora más el 7% para pagar en la caja

Para saber el valor a pagar se debe sumar el precio que tienen la computadora ya con el descuento más el 7% calculado esto sería 5 6 2, 5 0 + 3 9 ,3 7

$$\begin{array}{r} 562,50 \\ + \quad \underline{39,37} \\ 601,87 \end{array}$$

Respuesta: el precio a pagar por la computadora es de B/ 601, 87

D. Manos a la obra

Actividad práctica

Nombre: ________________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve de forma clara y ordenada las siguientes actividades.

I. utilizando el contenido estudiado resuelve los siguientes problemas

1. Calcula el 7 % de las siguientes cantidades

a) 250

b) 46,50

2. Calcula el 50 % de las siguientes cantidades

a) 385,00

b) 170,00

3. En una empresa se realizó una encuesta del color de ojos de los empleados y los resultados fueron los siguientes

Número de empleados	**Color de ojos**
20	Ojos negros
12	Ojos chocolates
3	Ojos verdes
2	Ojos grises
1	Ojos azules

En base a los datos presentados en la tabla confecciona una gráfica de barras, utilizando el contenido en el tema de cómo confeccionar una gráfica

E. Lo que aprendí

Utiliza tu ingenio para realizar las siguientes actividades

Taller N° 1

Nombre: ________________________________ Grado: _____ Fecha: ________

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

I. Elabora una pequeña encuesta entre tus familiares y vecinos más cercanos sobre qué deportes les gusta más entre el béisbol o el fútbol.

Nombre	
Sexo (varón o dama)	
Deporte de su agrado entre béisbol y fútbol (elegir solo una)	

Con esta información completa el siguiente cuadro e identifica a cuántos varones les gusta el béisbol y a cuántos el fútbol, de igual forma identifica cuántas mujeres les gusta el béisbol y cuántas el fútbol.

Sexo	Béisbol	Fútbol	Total
Varones			
Damas			

Utilizando estos datos confecciona dos graficas una de varones y damas que le gusta el béisbol y otra de varones y damas que les gusta el fútbol.

Gráfica N° 1
Varones y damas que les gusta el béisbol

Taller N °2

Nombre: ________________________________ Grado: ____ Fecha: _______

Indicaciones Generales: Resuelve el taller de forma clara y ordenada.

Utilizando el contenido sobre el cálculo de porcentaje de impuestos y rebajas; y resuelve el siguiente problema

La señora Jacinta fue al súper y compro una licuadora, una plancha y una lavadora, los artículos costaban lo siguiente:

La licuadora B/15,00 La plancha B/ 30,00
La lavadora 180,00 pero adicional la lavadora tenía un descuento del 30 %

Responde las siguientes preguntas utilizando los procedimientos de cálculo de porcentaje

1. ¿Cuánto es el descuento del 30 % del valor de la lavadora?

2. ¿Cuánto es el valor de la lavadora restándole el descuato del 30%?

3. ¿Cuánto es el valor total de la compra de la licuadora, la plancha y la lavadora ya con el descuento del 30%?

4. ¿Cuánto es el 7 % del valor de la compra sumado en la pregunta anterior?

5. ¿Cuánto es el total a pagar ya sumado el 7 %?

Ahora que ya terminaste de estudiar este tema te invito a resolver la actividad que está en el punto B. PARA EMPEZAR.

F. Evaluación

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: La estadística

Fecha: Puntaje total: 25 puntos

Actividad: Taller N° 1

Criterio	Puntaje				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Orden y nitidez en la realización del trabajo					
2. Creatividad en la elaboración de las gráficas					
3. Realiza la encuesta y completa la tabla de datos					
4. Elabora correctamente la gráfica de los datos del béisbol					
5. Elabora correctamente la gráfica de los datos del fútbol					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
ESCALA NUMÉRICA

Materia: Matemática

Tema: La estadística

Fecha: Puntaje total: 30 puntos

Actividad: Taller N° 2

Criterio	**Puntaje**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Orden y nitidez en la realización del trabajo					
2. Realiza correctamente el procedimiento para calcular el 30 % de descuento de la lavadora					
3. Efectúa la diferencia entre el valor de la lavadora y el descuento del 30 %					
4. Calcula el valor total de la compra					
5. Calcula el valor del 7 % sobre el monto total de la compra					
6. Realiza el cálculo del valor total a pagar					
PUNTAJE OBTENIDO					
CALIFICACIÓN					

Glosario

Bidimensional: Que se representa según su altura y anchura, y no su profundidad.
Binomio: Consta únicamente de una suma o resta de dos monomios.
Cociente: Es el resultado de la división.
Coeficiente: Número o parámetro que se escribe a la izquierda de una variable o incógnita y que indica el número de veces que éste debe multiplicarse.
Confluyen: juntan en un mismo punto o lugar
Cuadrinomio: Expresión algebraica que consta de cuatro términos.
Dividendo: Es el número que se va a dividir.
Divisor: Es el número que se va a dividir.
Exponente: Es un número que denota la potencia que se debe elevar otra expresión u otro número (la base), y se debe colocar en la parte superior derecha del elemento que se desea elevar.
Fracciones homogéneas: Dos o más fracciones que tienen denominadores iguales.
Fracciones heterogéneas: Dos o más fracciones que tienen denominadores distintos.
Geometría: Parte de las matemáticas que estudia la extensión, la forma de medirla, las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos, figuras y la manera cómo se miden.
Grado absoluto de un monomio: Resultado de la suma de los exponentes de cada una de las variables de un monomio. Si el monomio no tiene variables, su grado absoluto es 0.
Grado de un polinomio: Mayor de los grados absolutos que forman el polinomio.
Homogenización de fraccione: Procedimiento que consiste en hacer homogéneas dos o más fracciones heterogéneas.

Longitud: Es una magnitud fundamental creada para medir la distancia entre dos puntos.
Matriz: Arreglo bidimensional de números.
Matricial: Cálculo con matrices.
Máximo común divisor de dos o más números: Mayor divisor de dos o más números naturales. Se denota por M.C.D.
Mínimo común múltiplo de dos o más números: Menor múltiplo, diferente de 0, que tienen en común dos o más números naturales.
Monomio: Expresión algebraica que consta de un solo término o en que los términos que la forman están relacionados por la operación producto.
Parte literal: Letras que aparecen en el monomio con los exponentes.
Plano: Es un objeto ideal que sólo posee dos dimensiones y contiene infinitos puntos y rectas.
Potencia: Multiplicar una cantidad por sí misma tantas veces como su exponente indica.
Predicciones: Hace referencia aquel acto mediante el cual una persona puede decir antes de tiempo que algo sucederá de tal forma.
Propiedad: Atributo o cualidad de un objeto.
Raíz cúbica: Cantidad que se ha de multiplicar por sí misma dos veces para obtener un número determinado.
Semicírculo: Figura geométrica formada por la mitad de un círculo.
Transversal: En geometría una línea transversal es aquella que tiene la particularidad de atravesar al menos otras dos líneas.
Valor absoluto de un número real: Distancia, en la recta numérica, entre un número real y 0. Se denota por dos barras verticales.
Volumen: Espacio que ocupa un cuerpo.

Bibliografía

MATEMÁTICA 9°

- ww.guao.org default files-Método de gráfico de resoluciones de ecuaciones lineales .pdf
- www3.uji.es ti-alumnos.pdf
- www.juntdeandalucia.es apuntes7_____circulo y sus variantes.pdf
- www.matemáticasonline.es medidas-volumen.pdf
- Files.sld.cu el sistema-internacional-de-unidades-optimizado
- Meteo.ieec.uned.es capitulo2.pdf
- Dialnet.uniroja.es Dialnet-sistemainternacionalDeUnidadesResumenHistorico-YUlt-4042855.pdf
- www.sectormatematica.cl Unidades_de_superficies
- Aprendeenlinea.udea.edu.co FACTORIZACIÓN
- Dgenp.unam.mx m4unidad05
- https://www.slideshare.net/valladares/estadistica-resumen
- iescomplutense.es hoja-06-Sstemas-de-ecuaciones-pend-3eso.pdf
- www.edu.xunta.ga Ejercicios de sistemas de ecuaciones.pdf
- BALDOR, Aurelio; Álgebra. Editorial Patria, Séptima Edición, MEXICO, 2015.
- AROSEMENA, Elda; DE LAS CASAS VEGA, Fedra; TORRERO, Elvia L. Matemática 9º, Editorial Santillana, Segunda Edición, 2012.
- ALVARADO Vargas, Marilyn, Matemática 9º, Santillana, Tercera Edición, 2014.
- AGUILAR MÁRQUEZ, Arturo; BRAVO VÁSQUEZ, Fabián Valapai; GALLEGOS RUIZ, Hernán Aurelio; CERÓN VILLEGAS, Miguel; REYES FIGUEROA, Ricardo, Aritmética y Álgebra, Editorial Pearson, Cuarta Edición México 2016.
- SULLIVAN, Michael; Álgebra y Trigonometría; Editorial Pearson, Séptima Edición, México 2006.

REPÚBLICA DE PANAMÁ

GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN