UNIDAD 3 Potenciación y radicación. Notación científica

La potenciación es una operación que permite escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. En el desarrollo de esta unidad vas a trabajar con potencias estudiando sus elementos —la base y el exponente— sus propiedades y las situaciones en las que es necesario encontrar la operación inversa, es decir, la radicación. Observarás también que esas propiedades son la base de la notación que se usa para escribir números muy grandes o muy pequeños.

En esta unidad se desarrollan tres temas; consultá con tu docente para ver cómo te vas a organizar en el tiempo para resolver las actividades correspondientes a cada uno.
Si disponés de una calculadora, su uso te hará más fácil la tarea y podrás hacer muchos cálculos más rápidamente. Al final, como en todas las unidades, vas a encontrar un apartado con desafíos matemáticos para que te entretengas y al mismo tiempo desarrolles tu creatividad.

TEMA 1: LA POTENCIACIÓN

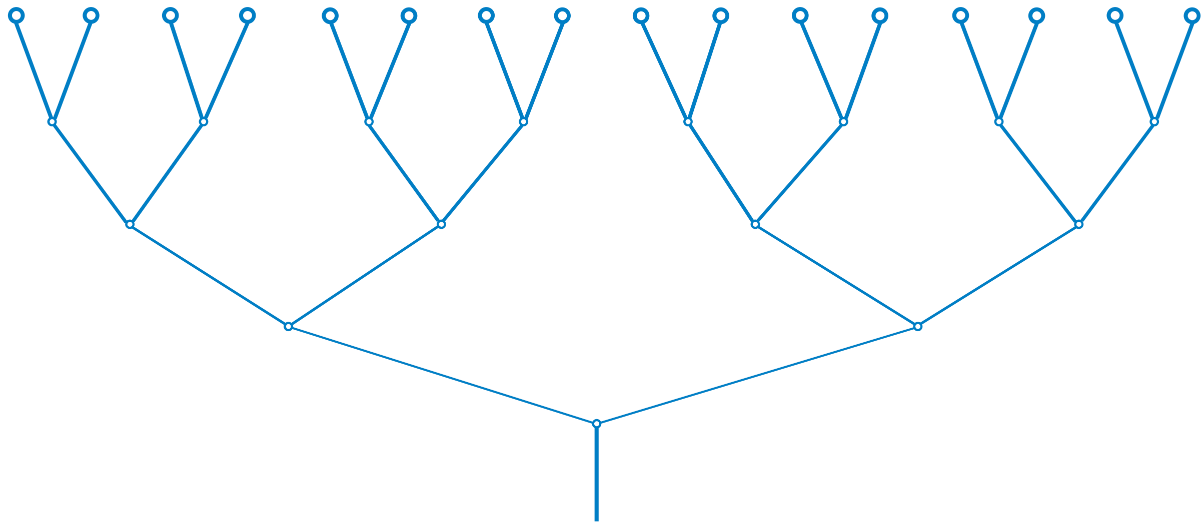
En esta primera actividad vas a trabajar con la potenciación aplicada a números enteros y racionales, negativos y positivos, y en la actividad **2** analizarás las propiedades de esta operación.

A 1. Potenciación con exponente natural

En muchos casos es útil emplear los llamados diagramas arbolares para contar elementos sin escribirlos uno por uno. Para realizar esos diagramas, los matemáticos se inspiraron en la naturaleza, en la disposición de las ramas de los árboles a partir del tronco y luego de las hojas y de las flores:

- La disposición de las flores es una característica de cada especie; la de algunas plantas constituyen una inflorescencia que es un sistema de ramificación cuyos vástagos terminan en flores.

a) Observá el siguiente esquema que corresponde a una inflorescencia.



b) Respondé: ¿qué cálculo te permite encontrar fácilmente el número de flores de la inflorescencia?

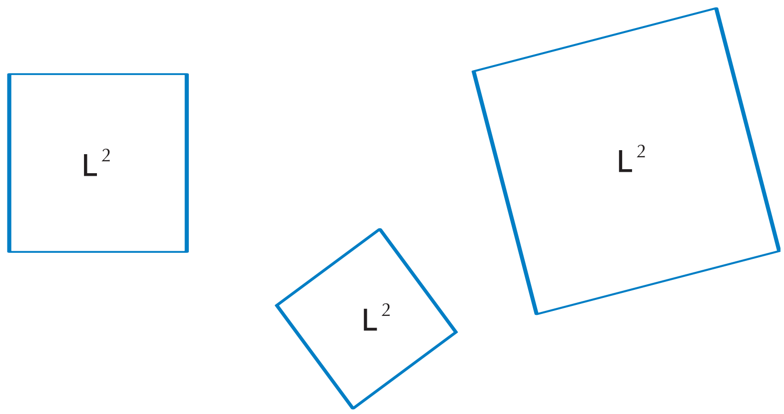
El cálculo 2 x 2 x 2 x 2 x 2 puede abreviarse usando la operación de potenciación. En símbolos se escribe 2^5 donde 2 es la **base** y 5, el **exponente**. El resultado de la operación es 32 y se llama **potencia**. El exponente indica el número de veces que se multiplica la base por sí misma.

c) Copiá este cuadro en tu carpeta y completalo con la expresión que es equivalente a cada potenciación y su resultado.

Potenciación	Multiplicación	Resultado
$(-6)^5$	$(-6)\ (-6)\ (-6)(-6)\ (-6)$	-7776
$(-0,5)^2$		
$\left(\frac{2}{5}\right)^3$		
	$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$	
	$(3,6) \cdot (3,6) \cdot (3,6)$	
		81

Una de las aplicaciones más interesantes de la potenciación es el cálculo del área de un cuadrado, conocido el lado.

d) Mirá las figuras y realizá la consigna que está a continuación:



1. La siguiente tabla te permitirá observar cómo varían el área y el perímetro de un cuadrado al variar la longitud de su lado. Copiala y completá en tu carpeta los valores de las columnas de área y perímetro para cada una de las medidas del lado de la primera columna.

Lado (cm)	Área (cm^2)	Perímetro (cm)
1	1	4
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

e) Reflexionando en la relación de los valores de la tabla, respondé:

1. ¿Entre qué números enteros está la medida del lado de un cuadrado de área 72,25?

2. Si el lado del cuadrado mide **n**, ¿cuál es el área? y ¿cuál es el perímetro?

3. Y si el lado se duplica, es decir, si el lado mide **2n**, ¿cuál es el área? y ¿cuál es el perímetro?

4. La relación lado - perímetro, ¿es de proporcionalidad directa? ¿Por que?

5. Y la relación lado - área, ¿es proporcional? ¿Por qué?

f) Construí en tu carpeta la siguiente tabla con las primeras seis potencias de los números del 1 al 10 y completála. Si tenés una calculadora, podés usarla.

exponente / base	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4				
3	3	9	27			
4	4	16				
5	5	25				
6	6	36				
7	7	49				
8	8	64				262.144
9	9	81				
10	10	100				1.000.000

Las potencias se leen así: "3 elevado al cuadrado es igual a 9", "3 elevado al cubo es igual a 27", "3 elevado a la cuarta es igual a 81", y así sucesivamente.

Para resolver operaciones combinadas es necesario incluir la potenciación en el orden jerárquico de las operaciones y respetar que:
- Siempre rige la regla de que los paréntesis separan operaciones que deben ser resueltas previamente.
Si no hay paréntesis:
- Las sumas y restas separan más que las multiplicaciones y divisiones.
- Las multiplicaciones y divisiones separan más que las potenciaciones.

g) Analizá los siguientes cálculos, resolvélos y luego explicá el orden en que los resolviste:

1. $7^2 + 2^4 \times 5^4 =$

2. $(0,3 + 2,8) \times 4^3 + 132 =$

h) Ahora tendrás que copiar y completar en tu carpeta el siguiente cuadro de potencias con base entera y exponente natural. Si disponés de calculadora, usala para encontrar los valores de los casilleros vacíos. En la línea horizontal están escritas las bases y en la vertical, los exponentes.

Exponentes

					1	6							
						5							
			81			4			81				
				–8	–1	3	1	8					
36						2							
						1						6	
-6	-5	-4	-3	-2	-1		1	2	3	4	5	6	Bases

Por ejemplo: $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$= 4 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$= (-8)\ (-2) \cdot (-2)$

$= 16 \cdot (-2)$

$= -32$

¡Atención! No trabajarás por ahora en el estudio de la potenciación con exponente 0 o exponentes que no sean enteros positivos. El análisis de esas situaciones requiere un estudio más complejo de la potenciación.

i) Observá los resultados de las potencias con base negativa y respondé:

1. ¿En qué casos son positivos?

2. ¿En qué casos son negativos?

j) Copiá en tu carpeta y completá las siguientes reglas según tus observaciones:

Las potencias de base negativa y exponente par dan resultados ....

Las potencias de base negativa y exponente impar dan resultados ....

A 2. Las propiedades de la potenciación

a) Copiá y completá en tu carpeta cada una de las siguientes igualdades, poniendo los exponentes que corresponden para hacerlas verdaderas:

1. $(-3)^2 \,.\, (-3) \,.\, (-3)^{\cdots} = (-3)^{\cdots}\, (-3)^{\cdots} = (-3)^4$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\cdots} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

b) Observen el primer miembro de cada igualdad de la consigna **a** y respondan.

1. ¿Con qué operación se combina la potenciación?

2. ¿Cómo son las bases de las potencias?

3. ¿Cómo organizaron los exponentes que faltan para obtener la igualdad?

4. Escriban una conclusión sobre el significado de estas igualdades. Si pueden, antes de escribirla en sus carpetas, conversen con sus compañeros sobre las conclusiones que sacaron.

c) Compará el texto que escribiste en el punto anterior con la información dada a continuación y, si encontrás diferencias, con tu docente.

Cuando se multiplican dos o más potencias de igual base, el resultado es una potencia de la misma base con un exponente que es la suma de los exponentes de los factores.
En símbolos: $\boldsymbol{a^x \cdot a^y \cdot a^7 = a^{x+y+z}}$

Recordá que la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma se expresa:

$a\,(m + n) = a \cdot m + a \cdot n$ y también: $a\,(m + n) = a\,m + a\,n$.

La acción de pasar de $a\,(m + n)$ a su equivalente $a \cdot m + a \cdot n$ se llama **distribuir**.

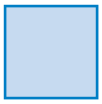
La propiedad distributiva del producto sobre la suma permite cambiar el orden de las operaciones y obtener el mismo resultado. Vas a considerar si la potenciación es distributiva sobre la suma.

d) Elegí dos números positivos como valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

1. Dibujá en tu carpeta un cuadrado de lado ($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$).

2. Recortá en un papel de color un cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$ y un cuadrado de lado $\boldsymbol{b}$.

3. ¿Con qué cálculo se obtiene el área de cada cuadrado? Anotalo sobre cada uno. Por ejemplo, en el cuadrado de lado $\boldsymbol{L}$ hacés la cuenta y anotás: área $\boldsymbol{L^2}$.



L

A medida que vayas pensando en las consignas siguientes anotá en tu carpeta lo que necesites para terminar de resolverlas.

e) Trabajá con los cuadrados que construiste para ver si juntando los dos cuadrados a^2 y b^2 cubrís la misma superficie que con el cuadrado de lado igual a la suma **(a + b)** o sea $(a + b)^2$.

f) Trabajá con los cuadrados de los números **a** y **b** que elegiste como medida de los lados de tus figuras para efectuar dos operaciones diferentes:

1. Suma de cuadrados. $a^2 + b^2 =$

2. Cuadrado de la suma. $(a + b)^2 =$

3. ¿Dan el mismo resultado?

g) ¿Qué relación hay entre la experiencia geométrica y esta comprobación aritmética?

h) Leé la información siguiente y conversá con tus compañeros y con tu docente sobre las conclusiones.

No es lo mismo el cuadrado de la suma de dos números que la suma de sus cuadrados.
Ejemplo: $3^2 + 4^2 \neq (3 + 4)^2$
$9 + 16 \neq 7^2$
ya que $25 \neq 49$
Dados dos números cualesquiera **a** y **b** no es cierto que $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$ es igual a $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$.

i) Copiá en tu cuaderno y completá cada igualdad para hacerla verdadera poniendo los números que correspondan en el lugar de los puntos suspensivos.

$$2^3 \cdot 3^3 = 6^{\cdots}$$

$$(-0{,}2)^2 \cdot 4^2 = (\ldots)^2$$

1. ¿Cómo son los exponentes de las potencias en cada producto?

2. ¿A qué es equivalente el resultado de multiplicar dos o más potencias de igual exponente?

3. Compará tu respuesta con la información que sigue. Si encontrás diferencias, conversá con tu docente.

Cuando se multiplican dos o más potencias con el mismo exponente, el resultado es igual a otra potencia que tiene:

- *como **exponente**, el **mismo** de los factores,*
- *como **base**, el **producto** de las bases.*

En símbolos: $(a \cdot b \cdot c)^x = a^x \cdot b^x \cdot c^x$

*Esta es la propiedad **distributiva** de la potenciación sobre el producto.*

j) Reunite con tus compañeros para leer el siguiente texto.

Una operación entre dos elementos es conmutativa si cambiando el orden de los elementos se obtiene el mismo resultado. Por ejemplo, la adición es conmutativa porque **a** + **b** = **b** + **a**; la multiplicación es conmutativa porque **a** · **b** = **b** · **a**; la división no es conmutativa porque $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \neq \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$.
Cuando en matemática se muestra con un ejemplo que una propiedad no se cumple se lo llama contraejemplo. En este caso $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ es un **contraejemplo** que permite afirmar que la división no es conmutativa.

Averiguar si la potenciación es una operación conmutativa o no es lo mismo que preguntarse: ¿se puede cambiar el orden entre la base y el exponente sin que cambie la potencia? O a través de un ejemplo: ¿$\mathbf{2^3}$ es lo mismo que $\mathbf{3^2}$? Y en general, ¿$\mathbf{a^x}$ es lo mismo que $\mathbf{x^a}$? Un contraejemplo permite afirmar que: La potenciación no es una operación conmutativa.

Por no ser una operación conmutativa, la potenciación tiene dos operaciones inversas:

1. Conocida la potencia y el exponente se puede encontrar la base; la operación que permite esta búsqueda es la **radicación**. Por ejemplo, dada la potencia **8** y el exponente **3**, la radicación indica que la base es **2** porque $\mathbf{2^3 = 8}$.
2. Conocida la potencia y la base se puede encontrar el exponente llamado también **logaritmo**; la operación que permite encontrarlo es la **logaritmación**. Por ejemplo, dada la potencia **8** y la base **2**, el **logaritmo de 8 en base 2** es **3** porque $\mathbf{2^3 = 8}$.

De igual modo que en la actividad anterior, en la siguiente vas a tener que seguir algunos razonamientos. En ellos, lo que se explica en cada paso es indispensable para entender el siguiente y todos juntos te llevan a comprender el concepto que estás estudiando. Para poder seguir el razonamiento sin perderte nada, detenete donde veas que algo no te quedó claro y volvé a leer, hacé todas las cuentas, esquemas, gráficos que necesites para darte una idea de lo que se está diciendo con ejemplos y hacé anotaciones en tu carpeta que te sirvan para ir acordándote de los pasos que fuiste siguiendo.

TEMA 2: LA RADICACIÓN

A 3. ¿Qué es la raíz cuadrada?

Tal como acabás de ver, la consecuencia de que la potenciación no sea una operación conmutativa es que tiene dos operaciones inversas. En la actividad **3** trabajarás sobre una de ellas: la radicación.

a) Leé el siguiente texto.

Si tomamos como punto de partida un número y le aplicamos una operación llegamos a un resultado. Para volver al número inicial partiendo del resultado, se aplica la operación inversa.

$4 \xrightarrow{+12} 16$ $\qquad$ $4 \xrightarrow{\times 4} 16$

$16 \xrightarrow{-12} 4$ $\qquad$ $16 \xrightarrow{\div 4} 4$

$\boxed{4^2 = 16 \text{ y } \sqrt{16} = 4}$

Aplicar a un número la operación **raíz cuadrada** consiste en encontrar los dos factores iguales que dan como producto ese número.

*La **raíz cuadrada** es la **operación inversa** de elevar al **cuadrado**, y se indica con el signo* $\sqrt{\ }$.

Aplicar la operación inversa significa obtener como resultado el número primitivo, es decir, el número al que se aplicó la operación directa. Si conocemos el cubo de un número y queremos saber cuál es ese número tenemos que buscar la raíz cúbica, que es la operación inversa de elevar al cubo. Por ejemplo, encontrar la raíz cúbica de 8 es buscar un número **n** tal que **n** · **n** · **n** = 8. En símbolos, $\sqrt[3]{8} = 2$.

En $\sqrt[3]{8} = 2$*: 8 es el **radicando**, 3 es el **índice**, 2 es la **raíz** y el signo* $\sqrt{\ }$ *se llama **signo radical.***

Por ejemplo, si nos dicen que un cuadrado tiene 25 cm^2 de superficie y queremos conocer la medida del lado, pensamos cuál es el número que elevado al cuadrado da 25, o sea, $\sqrt{25}$ y como $\sqrt{25} = 5$, el lado del cuadrado mide 5 cm. Aquí 25 es el radicando, y 5, la raíz.

Número original n	→	Número elevado al cuadrado n^2	→	Número original $\sqrt{n^2} = n$

Por convención, el índice 2 no se escribe y en ese caso la raíz cuadrada queda expresada por el signo radical sin anotar el índice.

Hay números cuyas raíces cuadradas son exactas como $\sqrt{49} = 7$ y $\sqrt{100} = 10$; a estos números se los llama cuadrados perfectos. Podés ver cuáles son algunos cuadrados perfectos en la tabla de potencias que completaste en la actividad **1**, ítem **d**.

Para los números que no son cuadrados perfectos se puede encontrar una raíz cuadrada aproximada. Por ejemplo, si lo que buscamos es la $\sqrt{40}$, es decir, el lado de un cuadrado cuya área sea 40, no hay ningún número entero que elevado al cuadrado dé 40. Sin embargo –siempre que se trabaje con las mismas unidades de medida– sabemos que un cuadrado de área 40 es más grande que uno de área 36 y más pequeño que otro de área 49. Luego podemos ordenar los lados de los tres cuadrados de la misma manera que sus áreas. Es decir que, como el cuadrado de área 36 es menor que el cuadrado de área 40, y que este es menor que el cuadrado de área 49, entonces el lado del cuadrado de área 36 es menor que el lado del cuadrado de área 40, y que este es menor que el lado del cuadrado de área 49.

En símbolos:

cuadrado de área 36 < cuadrado de área 40 < cuadrado de área 49

6 < lado del cuadrado de área 40 < 7

$$6 < \sqrt{40} < 7$$

De este modo no se obtiene un valor exacto pero sí aproximado. Si tenés oportunidad de usar una calculadora podés encontrar que $6{,}3 < \sqrt{40} < 6{,}4$ y seguir aproximando.

b) Resolvé en tu carpeta:

- $\sqrt[3]{8}$ = 2 porque $2^3 = 8$
- $\sqrt[3]{125}$ = ... porque ....
- $\sqrt[3]{16}$ = ... porque ....
- $\sqrt[4]{81}$ = ... porque ....
- $\sqrt{144}$ = ... porque ....
- .... < $\sqrt{12}$ < ....

c) Dibujá un cuadrado de 45 mm de lado; si es posible usá papel milimetrado.

1. Calculá su área.

2. Comprobá el resultado con el dibujo que hiciste.

3. Escribí las operaciones que permiten obtener para este cuadrado:

- el área, conociendo el lado;
- el lado, conociendo el área.

TEMA 3: NOTACIÓN CIENTÍFICA

A

4. Números muy grandes o muy chicos

a) En algunas ocasiones expresar un número puede presentar dificultades por tener una gran cantidad de cifras, ya sea por ser muy grande, como la distancia entre planetas, o muy pequeño, como las medidas microscópicas. En el siguiente texto se explica cómo los científicos expresan esos números.

Las potencias de 10 permiten escribir números con su valor exacto o aproximado, en la modalidad denominada **notación científica**.

Así, el radio de la Tierra se indica con **$6{,}37 \cdot 10^6$ metros**; si hacemos los cálculos resulta: **$6{,}37 \cdot 1.000.000$ metros = 6.370.000 metros**

10.000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

El exponente:
- positivo, indica el número de ceros escritos a la derecha de 1;
- negativo, indica el número de ceros escritos a la izquierda de 1.

*En la **notación científica**, un número se expresa con una sola cifra en la parte entera y hasta dos cifras en la parte decimal, multiplicado por la potencia de 10 correspondiente.*

b) Escribí en tu carpeta usando notación científica:

1. Treinta mil millones de pesos.

2. La distancia de la Tierra a la Luna que es aproximadamente 60 veces el radio de la Tierra.

3. La distancia del Sol a la Tierra que es aproximadamente 149.000.000.000 metros. Expresala en kilómetros.

4. La milésima parte de un mes.

5. La razón entre el peso de un virus que es 10^{-21} kg y el de un niño de un año que pesa 8 kilogramos.

Para finalizar

En esta unidad estudiaste dos operaciones: la potenciación, como operación directa, y la radicación, como la inversa de la potenciación que permite hallar la base conociendo el exponente y la potencia.

Aprendiste que hay propiedades que tienen validez en algunas operaciones y no tienen sentido en otras; por ejemplo, tiene sentido la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma y la resta, pero no ocurre lo mismo con la potenciación ni la radicación.

Para expresar números que por ser muy grandes o muy pequeños requieren muchas cifras en su escritura en el sistema decimal se usa la notación científica, que muchas veces aparece en las calculadoras y computadoras.

Tanto la potenciación como la radicación se emplean para resolver problemas geométricos y calcular medidas de superficies y volúmenes.

A continuación van algunos desafíos matemáticos para que los resuelvas, acordando previamente con tu docente cuándo y dónde realizarlos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Balas como naranjas

En el siglo XVIII, las balas de cañón eran esféricas y se apilaban formando pirámides de base triangular o cuadrada, como se hace hoy con las naranjas en los mercados. En un regimiento de artillería tenían sus balas formando una pirámide. Una tormenta empapó las balas y el coronel ordenó colocarlas en el suelo para secarlas. Cuando lo hicieron formaban un cuadrado perfecto. ¿Cuántas balas había? ¿Cómo era la pirámide?, ¿cuántos pisos tenía?

2. ¿Será cierto?

Si los enteros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ..., se elevan al cuadrado, se obtiene 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, y se observa la siguiente ley:

La cifra de las unidades de estos cuadrados forman un período simétrico: 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0

3. Un problema para pensar

Veamos un ejemplo de la utilidad de la "notación científica": es un problema en el que se puede pensar y calcular pero, si tuviéramos una hoja de papel suficientemente grande, ¿se podría efectuar la solución en la práctica?

Supongamos una hoja de papel muy fino, papel de seda, de un grosor de tan solo un milésimo de centímetro. Si la dobláramos 4 veces, tomando siempre la hoja plegada por los dobleces que ya hicimos; el grosor del cuadernillo formado sería: 2^4 = 16 milésimas de cm. Si la dobláramos 10 veces; el grosor del cuadernillo formado sería: 2^{10} = 1024 milésimas de cm = 1 cm aproximadamente. Si el número de veces que la dobláramos fueran 17: 2^{17} = 131 072 milésimas de cm = 1,31 m. Si pudiéramos doblarla 27 veces: 227 = 134 217 728 milésimas de cm = 1342 m.

Y puestos a imaginar, si pudiéramos hacerle sucesivamente 50 dobleces a la hoja de papel de seda, la pila de papel obtenida alcanzaría una altura sorprendente: 2^{50} = 1 125 899 906 842 624 milésimas de cm = 11 258 999 068 m. ¡Más de 11 millones de kilómetros!

¿Se podría practicar esa cantidad de dobleces?

4. El calendario

Se trata de sumar los nueve números contenidos en un cuadrado seleccionado en el calendario, solo con que nos digan el número menor del cuadrado.

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

En este caso se trata del número 7.

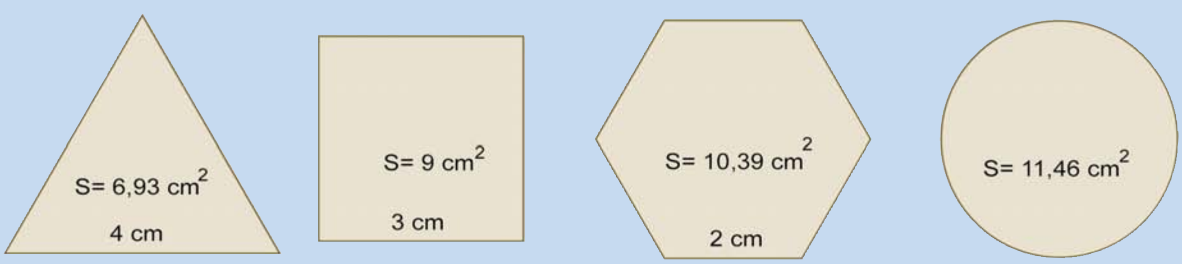
Para averiguar la suma, debemos sumar 8 al número menor que nos dieron y después multiplicar por 9: $(7 + 8) \cdot 9 = 135$.

Esta "receta" ¿vale para cualquier cuadrado de nueve números en el calendario de cualquier año y de cualquier mes? ¿Por qué?

5. Un panal de rica miel

Para almacenar la miel, las abejas construyen sus panales con celdas individuales, que forman un mosaico homogéneo sin huecos desaprovechados. Eso se puede conseguir con celdas triangulares, cuadradas y hexagonales.

Veamos cuáles son las superficies de un *triángulo*, un *cuadrado*, un *hexágono* y un *círculo*, todos de igual perímetro: 12 cm:



La opción empleada por las abejas es la más favorable por ofrecer mayor superficie con igualdad de perímetro sin dejar huecos entre celdas. ¿Cuál es esa opción? ¿Por qué?