UNIDAD 11 Volumen y área de prismas y pirámides

En muchas ocasiones de la vida cotidiana se presentan problemas prácticos como los siguientes: qué relación se puede establecer entre la forma de ciertos objetos y su volumen para estimar cuántos de ellos caben en un determinado lugar, o si la forma de dos recipientes de la misma capacidad influye en la cantidad de papel que se necesita para embalarlos. En ambos casos se trata de considerar conceptos como el volumen y la capacidad. Esos conceptos tienen significados diferentes: mientras el volumen se refiere a un espacio ocupado, la capacidad lo hace a un espacio vacío con posibilidad de ser llenado. A pesar de eso, habrás advertido que muchas veces la capacidad de un recipiente y el volumen que ocupa el líquido que contiene se usan como expresiones equivalentes. De hecho, se sabe que no se trata de situaciones totalmente independientes y que, si una sustancia llena un recipiente de un litro de capacidad, ocupa un volumen de un decímetro cúbico.

Cuando se tratan problemas como estos, se requiere reflexionar acerca de las relaciones entre la superficie y el volumen de los cuerpos, tema que se tratará especialmente en esta unidad.

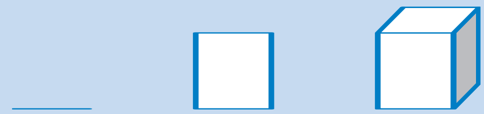
En esta unidad trabajarás especialmente con el cálculo de las áreas y los volúmenes de prismas y pirámides. Para eso, relacionarás el cálculo del volumen de un prisma recto con sus dimensiones lineales –ancho, largo y alto– y también aprenderás a calcular el área y el volumen de las pirámides en función de sus dimensiones.
Para encarar las actividades, necesitás tener presente qué forma tienen los prismas y las pirámides, y también cuáles son las unidades de medida que se usan para medir las longitudes, las áreas, el volumen y la capacidad. Para revisar esos temas podés consultar las unidades de Geometría del Cuaderno de estudio 1*, especialmente las* ***9***, ***11*** *y* ***12***, *o buscar libros de Matemática en la biblioteca en cuyos índices identifiques estos temas.*

Para resolver las actividades de esta unidad vas a necesitar papel de diario, cartulina y papel cuadriculado o isométrico (que es un papel con puntitos que forman cuadros o triángulos). También necesitarás utilizar "cubos unidad" de 1 cm de arista (que podrán ser de madera, de plastilina o de cartulina). Consultá con tu docente para decidir de qué material serán los cubos con los que vas a trabajar.

TEMA 1: VOLUMEN DE UN CUERPO

En este primer tema vas a trabajar sobre procedimientos para el cálculo de volúmenes y vas a revisar las unidades de medida que se usan.
Para realizar parte de las actividades ***1*** *y* ***2*** *vas a necesitar trabajar junto con otro compañero. Si tus compañeros que están trabajando con el* Cuaderno de estudio 1 *están resolviendo la unidad* ***11***, *es conveniente que te reúnas con ellos. Si así no fuera, consultá con tu docente para decidir con quién podés realizar la tarea y cómo organizarte.*

*Para empezar a trabajar con los contenidos de esta unidad, es importante que recuerdes que: el volumen de un cuerpo indica cuánto espacio ocupa y se expresa habitualmente en m^3, dm^3 o cm^3. Un cubito de 1 cm de arista ocupa un volumen de **1 centímetro cúbico** (**1 cm^3**), y cada una de sus caras tiene una superficie de **1 centímetro cuadrado** (**1 cm^2**).*



1 cm   1 cm^2 1 cm^3

A 1. ¿Qué espacio ocupa un metro cúbico?

a) Construyan un espacio de un metro cúbico (1 m^3). Para poder lograrlo sigan estas instrucciones.

1. Peguen hojas de papel de diario para armar dos o tres cuadrados de 1 metro de lado.

2. Para delimitar un cubo de un metro de lado pueden ayudarse con las paredes y el piso de un rincón del aula. Si dos personas sostienen convenientemente con las manos los cuadrados de papel, el piso puede representar la base del cubo y las paredes, dos de las caras laterales. Lo importante es que puedan apreciar el espacio que ocupa un metro cúbico.

3. Escriban en sus carpetas cómo construyeron ese espacio y estimen cuántas personas caben en él.

b) A partir del volumen del metro cúbico que acaban de construir hagan una estimación acerca de cuántos metros cúbicos mide el espacio del aula. Anótenlo y consulten con su docente para controlar sus resultados.

El espacio que ocupa un cubo de un decímetro de arista es 1 dm^3. En 1 m^3 caben 1000 dm^3.

A 2. Estimación de volúmenes

a) Estimá el volumen aproximado de los siguientes objetos. Tus estimaciones te van a servir para completar la tabla siguiente. Copiala en tu carpeta y después completá las filas con el nombre de los objetos de esta lista que correspondan.

- *Una caja de zapatillas*
- *Una calculadora*
- *Un cuaderno*
- *Una lenteja*
- *Un zapallo*
- *Una naranja*
- *Una heladera comercial*
- *Un escritorio*
- *Una goma de borrar*
- *Una caja de fósforos*
- *Una caja de arroz*
- *Una pelota de fútbol*
- *Un armario del aula*
- *Un diccionario*

Mayor que 1 dm^3	Menor que 1 dm^3	Mayor que 1 m^3

b) Agregá a cada una de las columnas tres objetos que te resulte interesante mencionar.

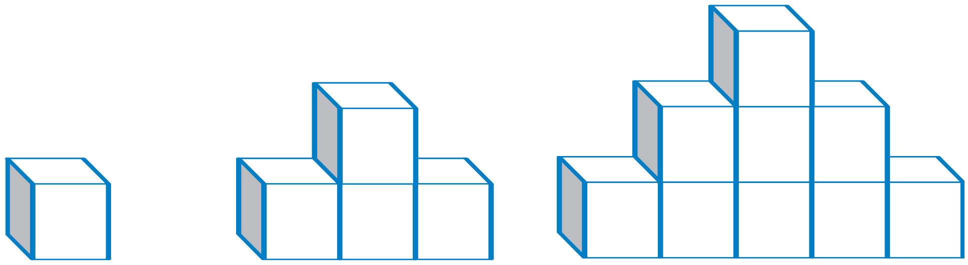
Uno de los objetivos de esta unidad es que aprendas a calcular el área y el volumen de los prismas y las pirámides en función de sus dimensiones. Para eso vas a empezar por analizar una familia de cuerpos en la que cada uno se construye agregando cubos al anterior. De ese modo podrás observar cómo la variación en las dimensiones influye en el aumento del volumen.

*La actividad **3** está vinculada con la construcción de escaleras simples o dobles a partir de cubos. Como vas a necesitar dibujarlas, te va a resultar más fácil si usás papel isométrico o papel cuadriculado.*

A 3. Volumen de una familia de cuerpos

En esta actividad encontrarás una fórmula que permite calcular el volumen de cualquier cuerpo de la familia sin necesidad de dibujarlo ni contar los cubos uno por uno.

a) El volumen de los sucesivos cuerpos de esta familia de escaleras crece cuando se pasa de uno cualquiera al siguiente. El aumento de 2 cm en el ancho y de 1 cm en el alto provoca un aumento del volumen. Observá las siguientes figuras que son escaleras dobles de 1, 2 y 3 escalones construidas con cubos de 1 cm^3.



b) Dibujá en tu carpeta una o dos escaleras más de este tipo, por ejemplo, con una altura de cuatro, cinco o seis cubos.

c) Copiá la siguiente tabla en tu carpeta y completá los espacios en blanco. En la columna *n* escribí una expresión general, es decir, una fórmula, para calcular el volumen (en cm^3) de las escaleras dobles de cualquier altura, que podemos llamar altura *n*.

Altura de cada escalera doble	1	2	3	4	5	6	*n*
Número de cubos en cada escalera doble	1	4	9				

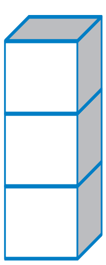
Seguramente habrás observado que la fórmula para calcular el volumen de un cuerpo es el cuadrado de un número: $V = n^2$. En este caso, el número n^2 no expresa la medida de una superficie sino el número de cubos que se usan en la construcción del cuerpo, vale decir, la medida de su volumen.

En la actividad anterior trabajaste con la variación en el ancho y el alto de los cuerpos. Para seguir viendo cómo influyen las dimensiones en el cálculo del volumen, en la actividad ***4*** *trabajarás con una familia de cuerpos en los que varían el ancho, el largo y el alto.*

Vas a necesitar cubos unidad, pero, si no los tenés disponibles, podés dibujarlos.

A

4. Volumen de otra familia de cuerpos



a) El dibujo muestra un cuerpo en forma de torre construido con tres cubos de 1 cm^3. Sus dimensiones son: 1 cm de ancho, 1 cm de largo y 3 cm de alto. Dibujá una torre semejante a la de este dibujo, pero duplicá todas sus dimensiones: ancho, largo y alto. ¿Cuántos cubos de 1 cm^3 la forman?

b) ¿Y si triplicás todas las dimensiones de la primera torre? Dibujá la nueva construcción. ¿Cuántos cubos contiene?

c) Construí en tu carpeta una tabla como esta y registrá en ella los datos obtenidos.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_n
Largo (cm)	1	2	3	4	5	*n*
Ancho (cm)	1	2				*n*
Alto (cm)	1	6				$3 \cdot n$
Volumen (cm^3)	3	24				

d) Continuá este proceso dos veces más para formar nuevas torres.

e) ¿Cuántos cubos contiene una torre de dimensiones 9 · 9 · 27? Explicá claramente cómo procedés para responder.

En oportunidades anteriores viste que, si se duplica el lado de un cuadrado, el área de la nueva figura no es el doble de la anterior sino su cuádruple. En símbolos, si el lado del cuadrado es **n**:
área $\blacksquare_n = n^2$ y **área** $\blacksquare_{2n} = (2\ n)^2 = 4\ n^2$.

Cuando se trata del volumen de un prisma, si se multiplican por **n** todas sus dimensiones se produce un aumento del volumen de $\mathbf{n^3}$ unidades cúbicas. Por ejemplo, para calcular el número de centímetros cúbicos necesarios para formar un cubo de 10 cm de arista es:
1 dm³ = 10 cm de ancho · 10 cm de largo · 10 cm de alto,
o sea, 10 cm · 10 cm · 10 cm = $\mathbf{10^3\ cm^3 = 1000\ cm^3}$.

En el tema **2** vas a empezar a relacionar área y volumen trabajando con prismas y pirámides.

A lo largo de este tema y del siguiente, vas a ir aprendiendo las expresiones simbólicas, es decir, las fórmulas para encontrar áreas y volúmenes. Una vez que las hayas descubierto, podrás escribirlas en una hoja aparte de tu carpeta o en un afiche en el aula para tenerlas disponibles. A medida que trabajes con ellas, es importante que las recuerdes, porque luego las vas a poder aplicar al cálculo de volúmenes de cualquier prisma o pirámide.

Ahora vas a trabajar sólo con prismas y pirámides, para ver las relaciones entre dimensiones y áreas de sus caras.

TEMA 2: SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL

A

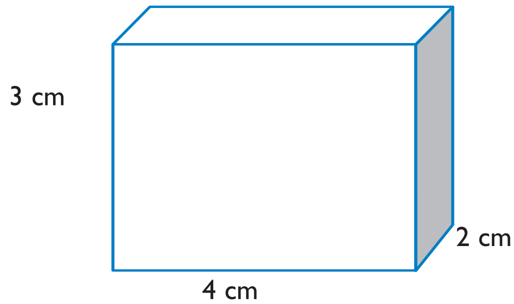
5. Prismas pintados

a) Suponé que deseas pintar toda la superficie exterior de un cubo de 1 cm de arista. Dicha superficie es la **superficie total** del cubo. Dibujá en tu carpeta la superficie que tendrías que pintar. ¿Cuánto mide en cm²?

*El **área total** de un cuerpo es la suma de las áreas de todas sus caras. Si no se considera la superficie de la o las bases, se trata del **área lateral** del cuerpo.*

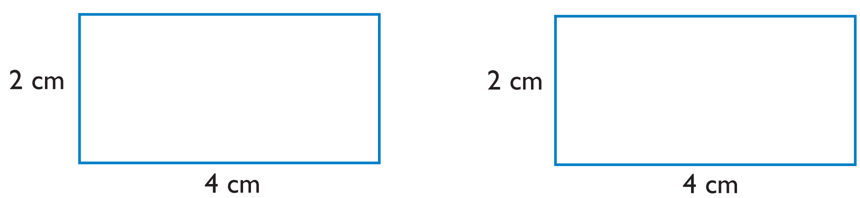
b) Seguí el siguiente razonamiento y hacé en tu carpeta las cuentas que necesites para verificar los resultados.

1. Con 24 cubitos de 1 cm de arista se puede construir, por ejemplo, un prisma de 3 cm de altura, cuya base sea un rectángulo de 4 cm de largo y 2 cm de ancho. Recordá que la base del prisma es la cara en la que está apoyado.

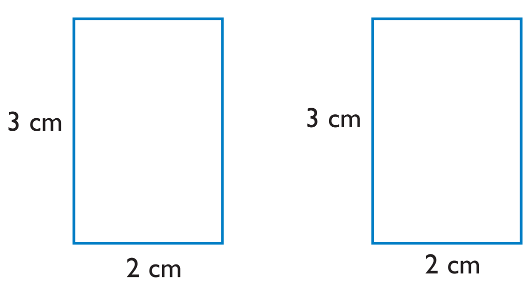


2. Ya sabés que su volumen es 24 cm^3, pero ¿cómo calcular su superficie total? Se puede imaginar al prisma como una caja de cartón e ir desarmándola para mostrar sus caras. Considerá las seis caras y hacé los cálculos necesarios para averiguar su área.

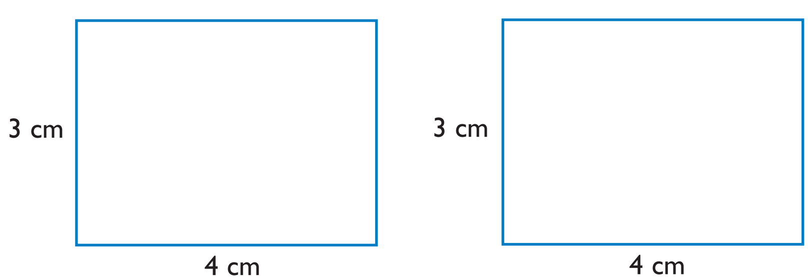
• Primero la base y la cara superior.



• Después, dos caras laterales de 2 cm · 3 cm.

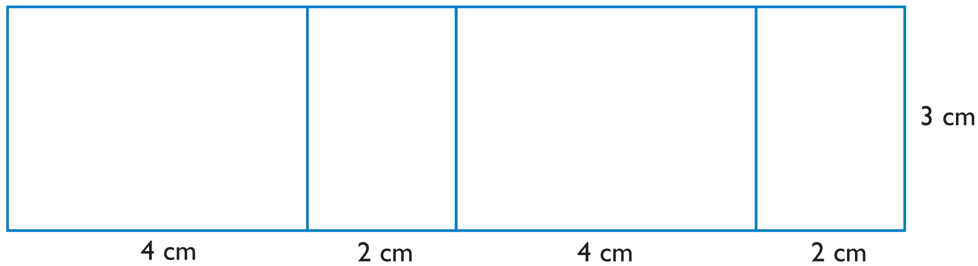


• Por último, dos caras laterales de 4 cm · 3 cm.



• Si sumaste bien las áreas de todas las caras habrás obtenido el **área total**, que es de 52 cm^2.

Las caras laterales se pueden pensar una a continuación de otra formando un solo rectángulo, como se ve en la siguiente figura.



Es decir que la superficie lateral de un prisma recto rectangular se puede calcular como el área de un solo rectángulo de base igual al perímetro de la base del prisma y altura igual a la del prisma. La superficie de este rectángulo es la **superficie lateral** del prisma. En este caso, el área lateral es de **36 cm²**.

c) Mediante el procedimiento desarrollado en **b**, u otro que resulte equivalente, hallá la superficie total y lateral de otro prisma diferente del anterior que también se pueda construir con 24 cubitos. Dibujá en la carpeta todas las figuras que necesites y escribí las cuentas correspondientes.

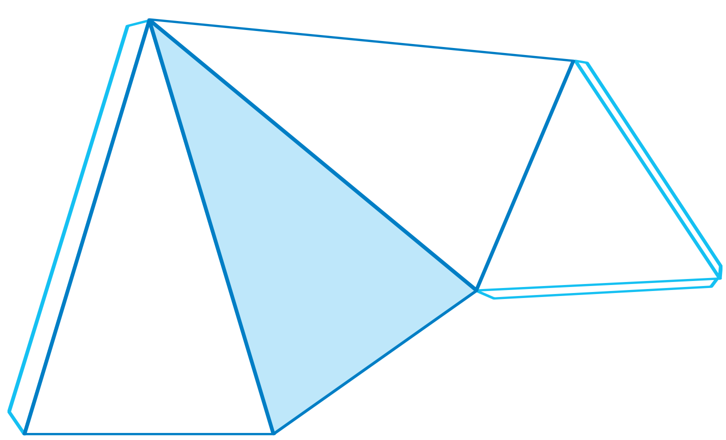
d) Comentá lo que hiciste con tus compañeros y con tu docente, y piensen entre todos una fórmula que permita obtener el área lateral de un prisma recto de base rectangular.

e) Hacé lo mismo para el área total. Escribí y recuadrá las fórmulas en tu carpeta.

f) Explicá por qué el área total de un cubo de 6 cm de arista es 216 cm² y calculá su área lateral.

6. El área de una pirámide

a) ¿Cómo procederías para obtener el área lateral de una pirámide recta de base triangular? ¿Y el área total? Te conviene trabajar con una pirámide construida en cartulina. Podés copiar el desarrollo siguiente.



Recordá que la altura de una cara de la pirámide es su ***apotema****.*

b) Generalizá el procedimiento que usaste y escribí una fórmula que permita calcular el área total de una pirámide recta cuya base sea un polígono regular de **n** lados.

c) Compará tu trabajo con el de tus compañeros y muéstrenle al docente sus conclusiones.

Ahora que ya tenés presente el cálculo de las áreas, vas a avanzar en el cálculo del volumen de prismas y pirámides.

Para realizar la actividad ***7*** *necesitás 24 cubitos unidad de 1 cm de arista de madera, cartulina o plastilina, según lo que hayan acordado utilizar con tu docente.*

TEMA 3: CÁLCULO DEL VOLUMEN DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

A

7. Volumen de un prisma

a) Construí distintos prismas rectos de base rectangular con 24 cubitos unidad. Cualquiera de esos prismas ocupa un espacio equivalente a 24 cm^3, porque en su construcción se usan todos los cubitos. Pero, ¿cómo se puede obtener ese volumen a partir de conocer las dimensiones lineales de esos prismas?

b) La siguiente tabla muestra las dimensiones (en cm) de seis prismas distintos: *A, B, C, D, E* y *F,* que fueron construidos con 24 cm^3. Al nombrar las aristas se menciona el ancho, el largo y el alto. Copiá la tabla en tu carpeta y completala.

Prisma	Largo cm (l)	Ancho cm (a)	Alto cm (h)	Base		Área lateral cm^2	Área total cm^2	Volumen cm^3
				Perímetro cm	Área cm^2			
A	24	1	1	50	24	50	98	24
B	12	2	1					
C	6	2	2					
D	6	4	1					
E	3	8	1					
F	3	4	2					

c) A partir de la observación de la tabla, respondé las siguientes preguntas con tus palabras y escribí las operaciones correspondientes en símbolos.

1. ¿Qué operación hay que realizar entre el ancho y el largo del prisma para obtener el área de la base?

2. ¿Cómo se obtiene el perímetro de la base del prisma conociendo el largo y el ancho?

3. ¿Qué operaciones hay que efectuar para obtener el área lateral? ¿Y para obtener el área total?

4. ¿Qué operación hay que realizar entre el área de la base y la altura para obtener el volumen del prisma?

5. ¿Qué operación hay que efectuar entre el largo, el ancho y el alto para obtener el volumen del prisma?

6. La fórmula ***volumen del prisma = a · l · h***, en la que ***a*** es la longitud del ancho del prisma, ***l*** es la longitud del largo, profundidad o fondo del prisma, y ***h*** es la longitud de la altura, ¿es equivalente a la fórmula ***volumen del prisma = área de la base · altura***? ¿Por qué? Explicalo en la carpeta.

d) Ahora que conocés las fórmulas para el cálculo del volumen de un prisma, respondé las preguntas.

1. ¿Qué ancho, qué largo y qué alto puede tener un prisma de 36 cm^3 de volumen?

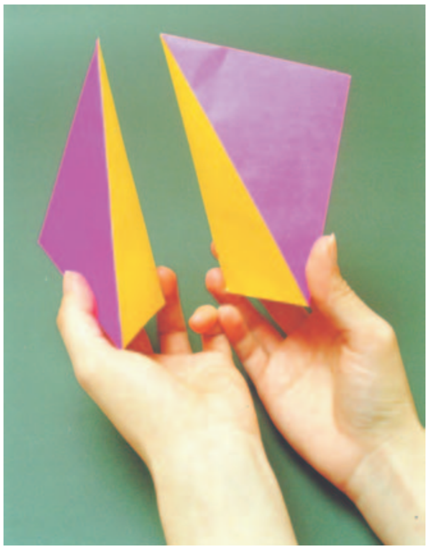
2. ¿Y otro de 64 cm^3?

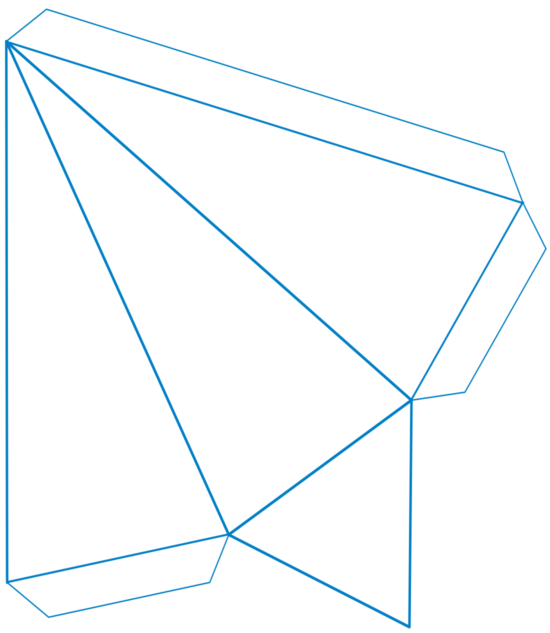
3. En cada caso, ¿la respuesta es única? Compará la tuya con la de tus compañeros.

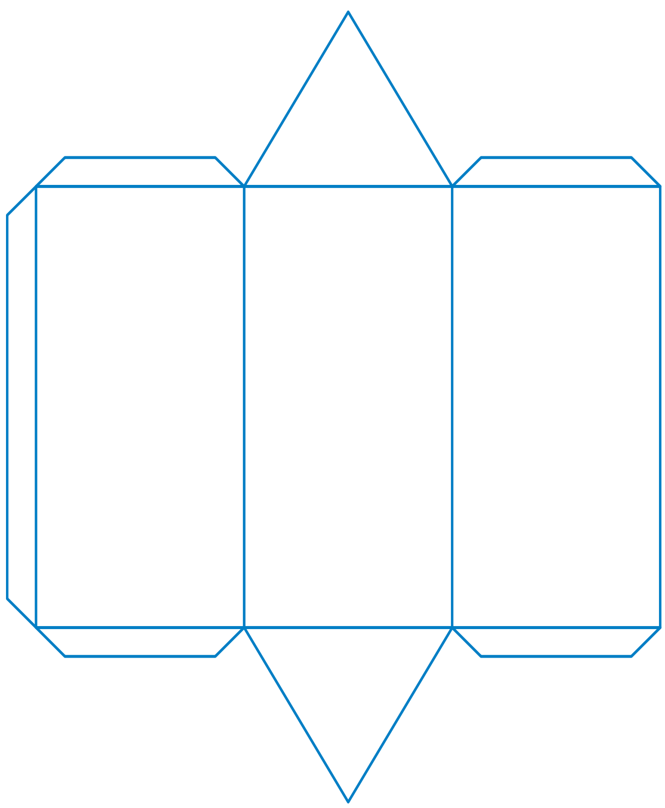
A 8. Volumen de una pirámide

Para resolver esta actividad realizarás una experiencia con dos cuerpos armados con cartulina: un prisma recto de base triangular y una pirámide recta de la misma base y la misma altura.

a) Construí los dos cuerpos en cartulina siguiendo los esquemas que representan el desarrollo de ambos. Usá los dibujos de la página siguiente como modelo; para ampliarlos, les podés aplicar una homotecia de razón 2. Después, recortalos y uní sus aristas pegando las aletas. Tené la precaución de dejarlos "destapados", es decir, de no pegar la base.







b) Llená la pirámide con arena seca o harina de maíz y volcá su contenido dentro del prisma.

1. Repetí esa acción las veces necesarias hasta que el prisma quede lleno.

2. Respondé estas preguntas en tu carpeta.

• De acuerdo con lo realizado, ¿qué relación existe entre los volúmenes del prisma y de la pirámide? ¿Por qué es así?

3. Compará tus respuestas con las de tus compañeros y consultá con tu docente para escribir la fórmula que permita hallar el volumen de una pirámide recta de base rectangular. Después, copiala en la carpeta.

Volumen de una pirámide recta de base rectangular = ...

La siguiente actividad te permitirá revisar y aplicar lo que aprendiste sobre la relación entre áreas y volúmenes de prismas y pirámides. Volvé a mirar lo que resolviste en las actividades anteriores y repasá las fórmulas que hallaste. Te conviene escribirlas todas en una tabla - resumen que te ayudará a recordarlas cada vez que las necesites.

A 9. Áreas y volúmenes

a) Copiá en tu carpeta el siguiente cuadro y completalo. En cada caso, se trata de prismas o pirámides de base rectangular nombrados en la primera columna cuyas dimensiones y volumen se dan en las restantes.

	Ancho (cm)	Profundidad (cm)	Alto (cm)	Volumen (cm^3)
Prisma		6	5	90
Pirámide	3,5	6	2	
Prisma	6		24	
Pirámide		2	5	4

b) Resolvé las siguientes situaciones.

1. Se desea envasar 1000 cm^3 de dulce de batata en una caja de madera. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de la caja? Elegí, entre las posibles respuestas, las que resulten adecuadas para que la caja pueda guardarse en una alacena.

2. Imaginate que tenés 8 cubos de madera de 1 cm de arista. Podés pintar algunas caras de color rojo y otras, de azul. Explicá cómo se podrían pintar de manera que los 8 cubos puedan reunirse para formar otro cubo de 2 cm de arista, todo de color rojo o todo de color azul.

3. Si tuvieras 27 cubos de 1 cm de arista, ¿podrías colorearlos de manera que puedan formar otro cubo de 3 cm de arista que se viera todo rojo o todo azul o todo amarillo?

Para finalizar

Habrás observado que, si bien la unidad convencional para medir volúmenes es 1 m^3, su gran tamaño hace que en la vida cotidiana su uso no resulte cómodo. Es más frecuente el uso diario de submúltiplos del metro cúbico: el decímetro cúbico (1 dm^3) para recipientes que contienen uno o más litros, y el centímetro cúbico (1 cm^3) para la medición del volumen de objetos más pequeños.

Las experiencias en medición de áreas y volúmenes y el registro en tablas seguramente te ayudaron a comprender las relaciones entre los atributos de los cuerpos en estudio y el uso de las unidades apropiadas para medirlos. En tal sentido, estudiaste que, si se conoce el volumen de un cubo, se puede determinar el área de su superficie, por ejemplo, si el volumen de un cubo es 64 unidades cúbicas, entonces el área de su superficie es de 96 unidades cuadradas. Pero esa relación no es cierta en prismas rectangulares o, en general, para otros cuerpos porque hay muchos cuerpos diferentes que tienen el mismo volumen.

Las tablas te permitieron observar la gran variabilidad que existe en la superficie lateral y total de prismas que tienen el mismo volumen. La construcción de diferentes prismas rectangulares usando cubos apilables ayuda a visualizar que los prismas más parecidos a un cubo (sus dimensiones son bastante similares) tienen menor superficie que los muy alargados.

En esta unidad pudiste establecer muchas fórmulas que volverás a analizar con mayor profundidad en las unidades siguientes que tratan temas de Álgebra y funciones.

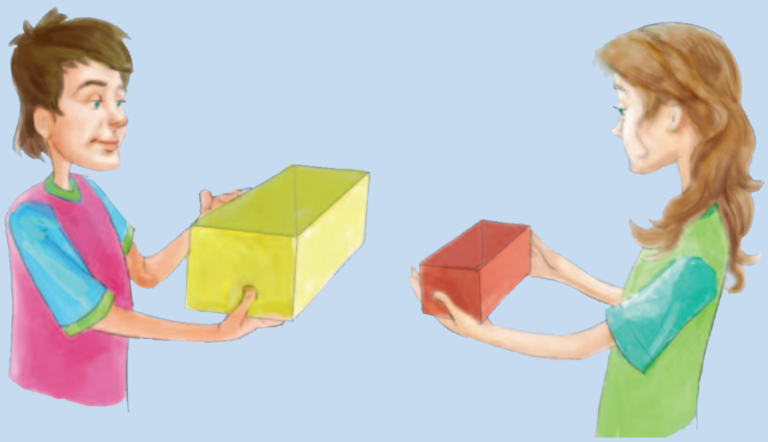
En los desafíos que siguen, vas a encontrar situaciones relacionadas con el tema de esta unidad y un interesante juego con números.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El prisma de Lucas

Mariana construyó un prisma rectangular. Lucas construyó otro, duplicando sólo las medidas de sus aristas en el ancho y el largo. ¿Cuál es la relación entre los volúmenes de ambos prismas? ¿Por qué?

Pablo quiso llenar con arena el prisma de Lucas y para hacerlo usó el prisma de Mariana cargado exactamente hasta la mitad. ¿Cuántas veces tuvo que volcarlo en el prisma de Lucas para llenarlo? ¿Por qué?



2. Un juego con números

Es un juego sencillísimo para multitudes de tres a un millón de personas. Las reglas son las siguientes.

- Cada uno elige, en secreto, un número entero positivo y lo escribe en un papel. Todos los números se revelan al mismo tiempo. Gana quien haya elegido el número más bajo que no esté repetido.
- Por ejemplo, si los números elegidos fueran 1, 1, 3, 5, 8, gana quien eligió el 3. El 1 es menor que 3, pero está repetido. El 5 no está repetido, pero es mayor que 3.
- El juego es muy desconcertante. Al probarlo conviene hacer varias rondas seguidas para detectar tendencias y evaluar estrategias.

3. Una variante del juego anterior

No se conoce con exactitud el origen de este juego. Tampoco se sabe si tiene un nombre estandarizado. Sborochan remite a Andrés Sborovsky y Rodolfo Kurchan, quienes lo propusieron en la lista Snark* hace muchos años. Allí se practicó con fruición y surgieron muchas variantes. Una de ellas es ligeramente paradójica. Fue bautizada "San Segundo" y sólo tiene un pequeño cambio en las reglas: gana el segundo número más bajo que no esté repetido. ¿Qué número conviene elegir? Evidentemente no el 1: jamás podría ser el segundo número más bajo. Queda descartado. ¿Y el 2? Bueno, si nadie elegirá el 1, el 2 no podrá ser nunca el segundo número más bajo. También queda descartado. Si nadie elige ni el 1 ni el 2, tampoco es razonable elegir el 3; de la misma manera se descartan el 4, el 5, el 6 y todos. Conclusión: no conviene elegir ningún número. Y sin embargo, al jugar, habrá alguno que gane.

Una variante más permite elegir más de un número. Otra, propuesta por Salva, sirve para torneos: el ganador de cada ronda obtiene tantos puntos como el número que eligió. De esta manera se da la tensión entre elegir números bajos (pues el más bajo no repetido sigue ganando) y números altos (para sumar más puntos).

4. Los cuatro cuatros

En la siguiente serie de cálculos hay un error en el orden de los resultados. El desafío es encontrar el error.

a) $\dfrac{44 - 4}{4}$

b) $4 + 4 + \dfrac{4}{4}$

c) $4 + 4 + 4 - 4$

d) $\dfrac{44}{4} - 4$

e) $\dfrac{4 + 4}{4} + 4$

f) $\dfrac{4 - 4}{4}$

g) $\dfrac{4 \times 4 + 4}{4}$

h) $\dfrac{4 + 4 + 4}{4}$

i) $\dfrac{4}{4} + \dfrac{4}{4}$

j) $\dfrac{44}{44}$

* Snark es una lista de juegos de ingenio.