UNIDAD 10 La relación pitagórica

En esta unidad vas a explorar algunas relaciones entre las medidas de los lados, y los ángulos de los triángulos y de otros polígonos. En particular, vas a trabajar sobre lo que se conoce como relación pitagórica, que es una característica de los triángulos rectángulos y tiene muchas aplicaciones en construcciones de todo tipo. Se la llama así en honor a Pitágoras, un eminente filósofo griego que vivió en la primera mitad del siglo VI a.C.

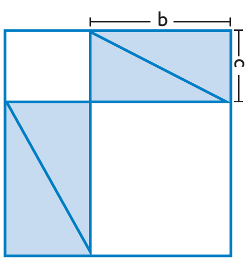
Vas a trabajar con propiedades que ya conocés de triángulos y cuadriláteros, y necesitás tener presente la fórmula para calcular sus áreas. También vas a trabajar con potenciación. Si es preciso recurrí a las unidades en las que se tratan estos temas en el Cuaderno de estudio 1 y 2 o consultá un libro de Matemática de la biblioteca. Podés hacer anotaciones en tu carpeta sobre algunas de estas cosas que repases, para tenerlas a mano cuando avances con las actividades.

A 1. Un rompecabezas

En esta actividad vas a descubrir relaciones matemáticas a partir de algunas construcciones en papel.

a) Construí, en una hoja de cartulina, dos rectángulos congruentes; recortalos, trazales una diagonal y cortalos por ella para que resulten cuatro triángulos rectángulos congruentes. Llamá ***a*** a la hipotenusa del triángulo rectángulo; ***b***, al cateto mayor, y ***c***, al cateto menor.

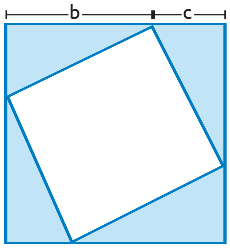
b) Trabajá en tu carpeta. Usá como moldes los cuatro triángulos que recortaste: colocalos como se muestra en la figura y trazá los lados del cuadrilátero que se forma.



1. Observá tu dibujo y respondé. El cuadrilátero que contiene los cuatro triángulos ¿qué forma tiene? ¿Cómo son sus lados? ¿Cuál es el área?

2. ¿Cuál es el área del cuadrado interior pequeño? ¿Cuál es el área del otro cuadrado interior?

c) Construí un cuadrado de lado $b + c$ y colocá en él los cuatro triángulos como se muestra en la figura, ¿cuál es el área del cuadrado interior?



d) Compará los dos cuadrados de lados $b + c$ y andá comprobando este razonamiento:

1. En el primer cuadrado, el área es: 4 áreas del triángulo $ABC + b^2 + c^2$.

2. En el segundo cuadrado, su área es: 4 áreas del triángulo $ABC + a^2$.

Como ambas áreas son iguales por tratarse de cuadrados de lados congruentes, resulta que $a^2 = b^2 + c^2$.

e) Reunite con tus compañeros y comparen sus trabajos. Piensen qué conclusiones pueden obtener de esta comprobación que acaban de hacer y escríbanlas con sus palabras en la carpeta.

Esta propiedad de los cuadrados construidos sobre los lados de cualquier triángulo rectángulo se conoce como **teorema de Pitágoras** en honor a Pitágoras de Samos, que vivió en el siglo VI a.C. en una colonia griega del sur de Italia. Pitágoras fue el primero en elaborar una demostración formal de esta propiedad. Mucho antes de que él naciera, en el tercer milenio a.C.; se encontraron manifestaciones de esta propiedad en tablillas babilónicas, y los egipcios ya sabían que los triángulos cuyos tres lados guardan la relación 3-4-5 son triángulos rectángulos.

Propiedad pitagórica
En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.
En símbolos: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

Esta fórmula vincula los números que resultan de elevar al cuadrado (es decir, a la segunda potencia) las medidas de los catetos y de la hipotenusa. Es la propiedad más importante de los triángulos rectángulos y constituye también una propiedad de los números cuadrados.

*Para avanzar en la actividad que sigue sobre la relación pitagórica necesitás recordar la rotación y otras transformaciones en el plano, que estudiaste a partir de la unidad **6**. Tenelas a mano para consultar lo que no recuerdes.*

A 2. La demostración de Leonardo

Vas a revisar una demostración muy interesante de la propiedad pitagórica que data del siglo XV y se atribuye a Leonardo da Vinci. Para ello trabajá en tu carpeta. Tené en cuenta las orientaciones que te ofrecen las consignas. Para resolverlas, seguí cada paso, observándolo en la figura que se presenta en el punto **b**.

a) Dibujá un triángulo rectángulo cualquiera ABC y colocá las letras de modo que ***a*** sea la hipotenusa; ***b***, el cateto mayor, y ***c***, el cateto menor.

b) Dibujá un cuadrado sobre cada lado del triángulo.

1. Marcá el punto *O*, centro del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

2. Aplicá al triángulo *ABC* una rotación de centro *O* y ángulo de 180° para construir la imagen de *ABC*, y llamala *A"B"C"*.

3. Trazá los segmentos *B'C'*, *DE* y *AA"* como se indica en la figura.

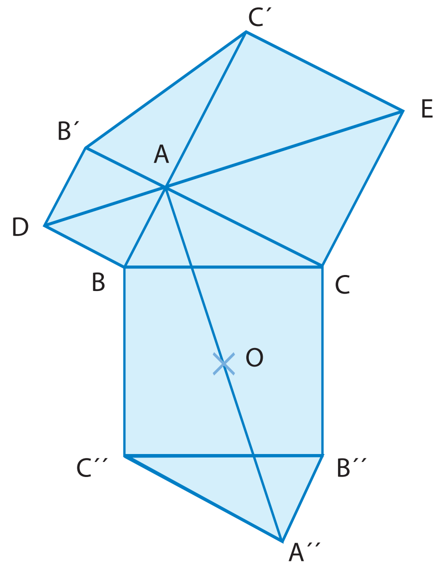
4. Respondé: ¿qué rotación hay que aplicarle al cuadrilátero *ABC"A"* para que se superponga con *A"B"CA*?

5. ¿Cómo podés justificar que los hexágonos *BCEC'B'D* y *A"B"CABC"* tienen áreas equivalentes?

6. Observá las siguientes igualdades y escribí tus conclusiones:

Área *BCEC'B'D* = 2 área *ABC* + c^2 + b^2

Área *A"B"CABC"* = 2 área *ABC* + a^2



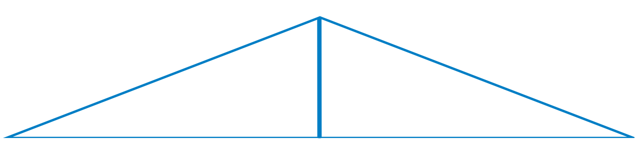
c) ¿Por qué este desarrollo demuestra la propiedad pitagórica que aprendiste en la actividad **2**? Explicalo en tu carpeta.

Las aplicaciones de la propiedad pitagórica son innumerables. En esta actividad analizarás algunas.

Para realizarla vas a necesitar un rollo de piolín.

A 3. Aplicaciones de la propiedad pitagórica

En primer lugar, vas a estudiar cómo se relaciona con la propiedad pitagórica el armado de la cumbrera en los techos a dos aguas en los que la altura de la viga central depende de la inclinación que quiera dársele al tejado.

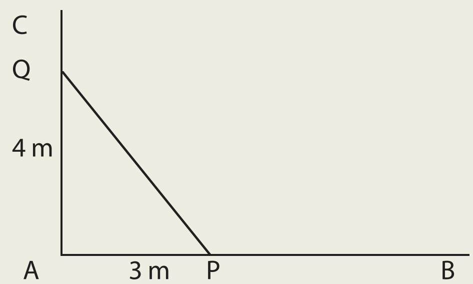


Por ejemplo, si la inclinación deseada es del 40%, eso significa que por cada metro en la dirección horizontal corresponde 0,40 m en la viga vertical central.

a) Conocido el ancho de la cumbrera, explicá cómo calcularías la longitud de la viga inclinada.

b) También se aplica esa propiedad en la construcción de paredes "a escuadra", es decir que formen ángulo recto. Para analizarlo, resolvé la siguiente situación.

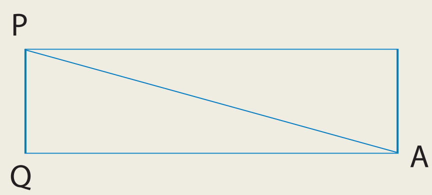
Don José quiere construir un galpón para guardar el tractor, las herramientas y armar un taller. El albañil que contrató limpió el terreno y usó piolín, estacas, un martillo y una cinta métrica para marcar los cimientos.
Para asegurarse de que el ángulo formado fuera recto, el albañil plantó una estaca en A. Luego midió 3 metros sobre el lado AB y plantó una estaca en P. Desde A hacia C midió 4 metros y plantó otra estaca en Q. Tensó un piolín entre P y Q y al medirlo obtuvo 4,85 m. Tuvo que desclavar una estaca y corregir su posición hasta que PQ midiera exactamente 5 metros.



1. Explicá por qué procedió de ese modo.

c) Otras aplicaciones pueden observarse en la construcción de rectángulos. Continuá analizando la situación anterior.

Don José aprendió del albañil a construir ángulos rectos usando estacas, piolín y una cinta métrica. Quiere marcar un cantero rectangular de 50 cm por 120 cm, ¿cuánto debe medir PA para que PQ y AQ formen un ángulo recto?



d) Observá la relación en el uso práctico de la "escuadra egipcia".

Los egipcios, mucho antes de que naciera Pitágoras, ya sabían que los triángulos cuyos lados guardan la relación: 3-4-5 son rectángulos. Este conocimiento les permitió la construcción de un instrumento útil y sencillo: **la escuadra egipcia**.

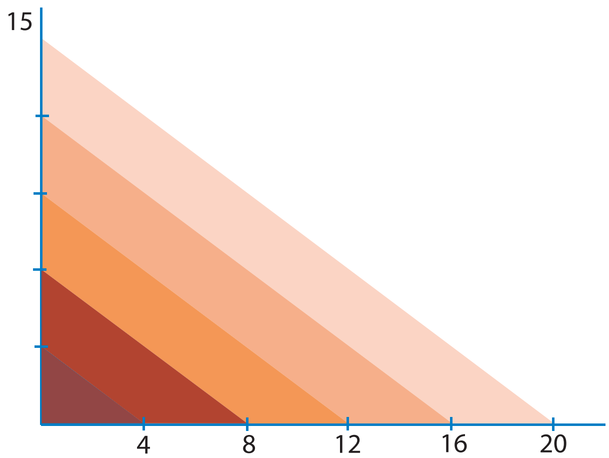
1. Para construirla tomá un rollo de piolín y, con mucha paciencia, hacele nudos de modo que entre ellos queden 12 espacios exactamente iguales. Para eso cerrá el piolín atando el primer nudo con el último. Con esta escuadra egipcia de 12 espacios podés verificar si las paredes de tu casa o las de la escuela están realmente "en escuadra".

2. Explicá con tus palabras por qué la escuadra egipcia permite obtener ángulos rectos.

A

4. Las ternas de números pitagóricos

a) El siguiente esquema representa cinco triángulos superpuestos. Copialo en tu carpeta y completá una tabla como la que aquí se presenta con sus respectivas medidas.



Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa
3	4	5
6		
9		
12		
15		

En la tabla se han formado ternas de números (3-4-5), (6-8-10), (9-12-15), (12-16-20), (15-20-25) que representan la relación que estás estudiando.

Las ternas de números naturales que expresan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo se llaman **ternas de números pitagóricos**.

b) Respondé en tu carpeta las preguntas que siguen.

1. ¿Te parece que 4-5-6 son números pitagóricos? Verificá tu respuesta usando la calculadora.

2. Repetí el procedimiento con 8-5-17.

3. Proponé ejemplos de una terna pitagórica y de otra terna que no lo sea.

Desde el tercer milenio a.C., los pueblos babilonios escribieron sobre tablillas de arcilla que aún hoy se conservan. En más de 500 de ellas aparecen expresiones matemáticas que nos han permitido conocer su sistema de numeración en base 60 y su dominio sobre la relación pitagórica.

La tablilla conocida como Plimpton 322 se conserva en la Universidad de Columbia y fue escrita por los babilonios hacia el año 1800 a.C. En esa tabilla aparecen las ternas de números pitagóricos que pueden calcularse a partir de operar con dos números enteros, por ejemplo *m* y *p*.

c) Elaborá una tabla como la siguiente en tu carpeta y completala. Inventá otras ternas pitagóricas. Controlá tus resultados usando la calculadora.

m	p	a $(m^2 + p)$	b $(m^2 - p)$	c 2mp	$a^2 = b^2 + c^2$
2	1	5	3	4	$5^2 = 3^2 + 4^2$
3	1	10	8	6	$10^2 = 8^2 + 6^2$
3	2				
4	1				
4	2				
4	3				
5	1				

A 5. La diagonal del cuadrado

En la actividad **3** viste algunas aplicaciones prácticas de la propiedad de Pitágoras en la construcción de galpones y edificios. Ahora verás una aplicación muy importante para el conocimiento matemático: vas a calcular la medida de la diagonal de un cuadrado conociendo su lado.

a) Dibujá un cuadrado y trazale la diagonal. Llamá ***l*** al lado del cuadrado, y ***d***, a la diagonal.

b) Leé el siguiente recuadro y, teniendo en cuenta la lectura, respondé la pregunta que le sigue.

Aplicando la propiedad pitagórica: $d^2 = l^2 + l^2$. Es decir que: $d^2 = 2\,l^2$. Se puede buscar la raíz cuadrada en los dos miembros de la igualdad y escribir: $d = \sqrt{2\,l^2}$ o bien $d = l\,\sqrt{2}$.

1. ¿Cuánto mide la diagonal de un azulejo cuadrado de 15 cm de lado? Hacé los cálculos y comprobá el resultado midiendo con una regla la diagonal en un cuadrado de papel del tamaño del azulejo.

c) Resolvé las siguientes situaciones.

1. Si el lado de un cuadrado mide 1 dm, ¿cuánto mide su diagonal?

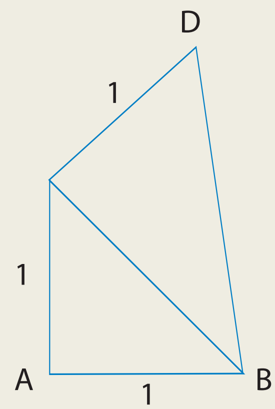
2. ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de 1 cm de lado?

3. Dibujá un cuadrado *ABCD* y trazá las diagonales. Por cada uno de los vértices trazá las paralelas a las diagonales. ¿Cómo es el área del nuevo cuadrado con respecto al primero?

4. El procedimiento del problema anterior te permite calcular rápidamente el área de un cuadrado conocida la diagonal. Explicá con tus palabras por qué es así.

5. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal mide 6 cm?

6. Observá la figura y calculá la longitud del segmento *DB*.



d) Usando papel cuadriculado, construí un cuadrado de lado 8 y trazá las dos diagonales. Construí otro cuadrado dentro del anterior uniendo los puntos medios de las mitades de las diagonales. ¿Qué relación hay entre los perímetros de los dos cuadrados? ¿Y entre sus áreas?

1. Respondé en tu carpeta: ¿por qué es importante esta aplicación de la relación pitagórica?

2. ¿En qué situaciones es útil?

Para finalizar

En esta oportunidad vas a realizar vos mismo la síntesis de la unidad. Para ello:

1. Elaborá un índice con el nombre de las actividades.

2. Escribí el o los conceptos más importantes que estudiaste en cada una de ellas. Incluí definiciones o fórmulas si corresponde.

3. Terminá tu síntesis con las respuestas a estas preguntas:

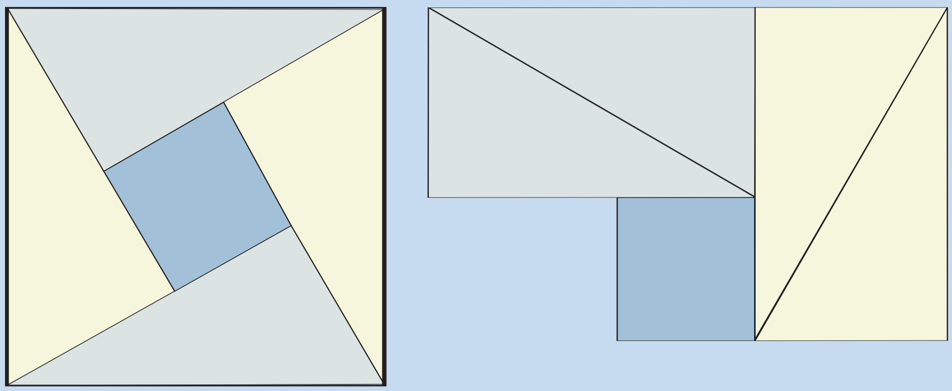
- **¿A qué se llama relación pitagórica?**
- **¿En qué consiste?**

En los siguientes desafíos podrás reconstruir algunos de los problemas que se plantearon sobre la relación pitagórica a lo largo de la historia de la Matemática. Verás las situaciones ingeniosas que propusieron matemáticos chinos e hindúes y tendrás la posibilidad de resolverlas por tu cuenta.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Un matemático indio

Bashara, un matemático de la India medieval que vivió entre 1114 y 1185, dejó en su obra este desafío:



Observando las figuras, imaginá en qué consiste el desafío.

2. Más desafíos de Bashara

"Lilavati" quiere decir hermosura. Ese es el nombre de una obra de Bashara que contiene una serie de problemas, entre los cuales figuran los dos siguientes que se plantean para que los resuelvas.

a) El bambú roto

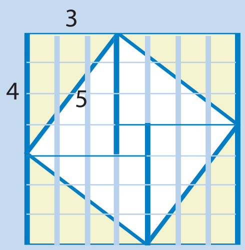
Si un bambú de 32 codos de altura ha sido roto por el viento de tal manera que su extremo superior queda apoyado en el suelo a una distancia de 16 codos de su base, ¿a qué altura del suelo se rompió?

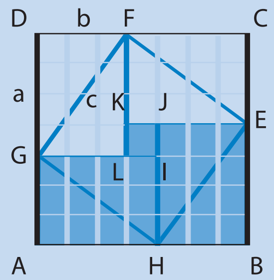
b) El pavo real y la culebra

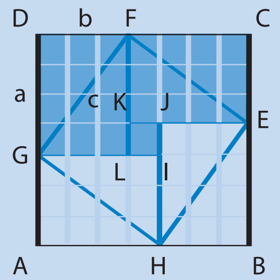
Un pavo real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero que es la entrada de la cueva de una culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el pavo real se lanza sobre ella en línea recta mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el pavo real captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos codos de distancia del agujero se produjo la captura?

3. Un desafío chino

Uno de los primeros libros chinos dedicados a la Matemática y la Astronomía es el Chou Pei, de una antigüedad aproximada a los 300 a.C. En él se hace referencia al teorema de Pitágoras en un caso particular: si a partir de un cuadrado de 7 unidades de lado se sacan de las esquinas 4 triángulos rectángulos de catetos 3 y 4 (vale decir 24 unidades cuadradas) queda un cuadrado de 25 unidades cuadradas y, por lo tanto, su lado es 5.







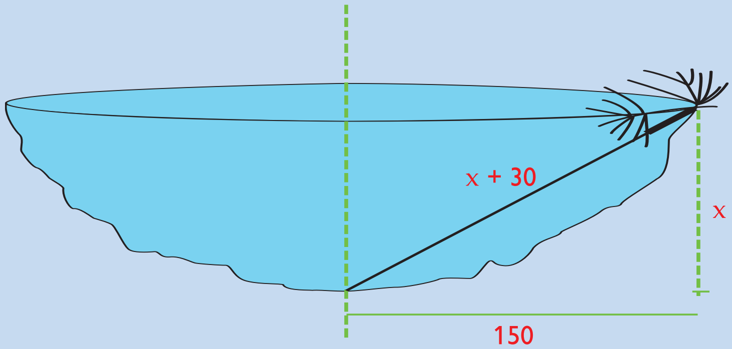
El desafío es que a partir de las figuras justifiques con tus palabras la siguiente expresión:

$$(3 + 4)^2 - 2\,(3 \cdot 4) \;=\; 3^2 + 4^2 = 5^2$$

4. El junquillo chino que fue loto indio

El siguiente problema pertenece al libro chino *Chu Chang Suan Shu* o *Arte matemático en nueve secciones.* Ese libro probablemente sea del siglo II a.C., su autor es desconocido y contiene 246 problemas divididos en 9 capítulos.

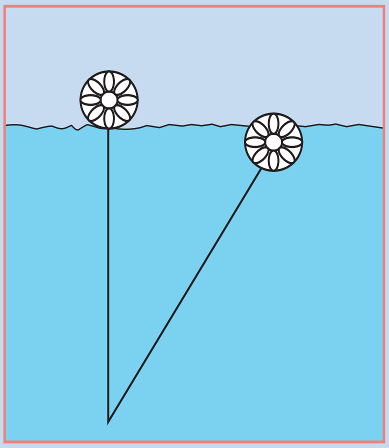
> "Crece en medio de una laguna circular de 3 m de diámetro un junquillo que sobresale 30 cm del agua. Cuando se inclina hasta que lo cubre el agua alcanza justamente la orilla de la laguna. ¿Qué profundidad tiene el agua?"



Posiblemente el libro haya pasado de la China a la India porque Bashara en su *Lilavati* expone este problema con algunas modificaciones, por ejemplo, toma una planta familiar en su entorno como es el loto y lo presenta así:

> "En cierto lago repleto de gansos rosados y grullas se podía ver la parte superior de una flor de una planta de loto, un palmo arriba de la superficie del agua. Forzado por el viento, avanzó gradualmente y fue sumergido por el agua a una distancia de 4 palmos. Calcula, ¡deprisa matemático!, la profundidad del agua."

Con la ayuda de los dibujos te será fácil resolver estos desafíos.



5. Se busca un número

a) Tenés que encontrar un número de cuatro cifras tal que:

La cifra de las centenas sea menor que la de las unidades.

La cifra de las unidades sea $\frac{2}{3}$ de la de las unidades de mil.

La cifra de las unidades de mil sea $\frac{2}{3}$ de las decenas.

La cifra de las decenas sea el triple de las centenas.

b) Inventá otras búsquedas y probalas con tus compañeros.