Talleres de Formación Matemática

Maracaibo, 26 al 31 de julio de 2004

Resolución de Problemas Matemáticos

José Heber Nieto Said

Prefacio

Estas notas constituyen el material de apoyo de un taller para estudiantes Licenciatura en Matemáticas dirigido a desarrollar la habilidad para resolver problemas.

Aunque por lo general los problemas juegan un rol importante en cualquier curso de matemática y la habilidad para resolverlos es un aspecto importante de la evaluación, los profesores suelen centrar sus esfuerzos en los aspectos técnicos específicas de su asignatura y no en los aspectos generales de la resolución de problemas. El objetivo de esta obra en cambio es ayudar al lector a desarrollar su habilidad general para resolver problemas.

Es bueno dejar en claro que el desarrollo de esta habilidad es básicamente el resultado del trabajo personal, de la práctica adquirida resolviendo problemas y de la reflexión sobre esa práctica. No es posible convertirse en un solucionista experto mediante la mera lectura pasiva de un libro, del mismo modo que no es posible convertirse en un buen nadador o pianista simplemente leyendo un manual. Sin embargo el conocimiento de las técnicas apropiadas y de los errores típicos que es preciso evitar puede ser tan útil para el solucionista como lo es para el nadador o el pianista.

Con el fin de que la obra sea de utilidad para el mayor número posible de estudiantes se ha procurado que los problemas analizados no requieran de conocimientos especializados. Sin embargo las mismas técnicas y estrategias que ejemplificamos con problemas elementales se aplican a los más avanzados.

Índice general

Introducción

La palabra *problema* proviene del griego $\pi\rho o\beta\alpha\lambda\lambda\varepsilon\iota\nu$, “lanzar adelante”. Un problema es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada. Todos vivimos resolviendo problemas: desde el más básico de asegurar la cotidiana subsistencia, común a todos los seres vivos, hasta los más complejos desafíos planteados por la ciencia y la tecnología. La importancia de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico, el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No es de extrañar por lo tanto que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de psicólogos, ingenieros, matemáticos, especialistas en inteligencia artificial y científicos de todas las disciplinas. En el campo educativo se ha reconocido ampliamente su importancia. y en muchas Universidades el desarrollo de la creatividad y de la habilidad para resolver problemas es una parte integral del curriculum.

Pero lamentablemente todavía es muy común que se expongan ante el alumno los *productos* y *resultados* de la resolución de problemas, pero no el proceso mismo. Si examinamos un libro de texto con problemas resueltos de matemática, encontraremos por lo general soluciones tersas y acabadas. Rara vez el autor incluye comentarios sobre los intentos fallidos de solución, los casos particulares examinados antes de llegar a la solución general o los refinamientos realizados a una primera solución no totalmente satisfactoria. Estos y otros elementos del proceso son cuidadosamente eliminados y lo que se nos presenta es el producto final, conciso y elegante. Hay muchas posibles razones para que esto sea así: un estilo de exposición matemática consagrado por la tradición, criterios estéticos de concisión y elegancia, razones económicas de las editoriales, etc. Pero la consecuencia es que el estudiante obtiene una visión falseada de lo que es resolver problemas y de la actividad matemática en general.

Si tiene la suerte de tener un profesor que entienda y valore el proceso de resolver problemas entonces las actividades de aula suplirán las deficiencias del texto. Pero si no es así y el profesor sigue al libro al pie de la letra, al enfrentarse al primer fracaso el estudiante terminará frustrado, perderá la confianza en sí mismo y creerá que la resolución de problemas es una actividad incomprensible, accesible solamente a unos pocos superdotados.

Nuestro principal objetivo en esta obra es ayudar al lector a desarrollar su habilidad para resolver problemas. Es bueno dejar claro desde el principio que el desarrollo de esta habilidad es el resultado del trabajo personal, de la práctica adquirida resolviendo problemas y de la reflexión sobre esa práctica. No es posible convertirse en un solucionista experto mediante la mera lectura pasiva de un libro, del mismo modo que no es posible convertirse en un buen nadador o pianista simplemente leyendo. Sin embargo el conocimiento de las técnicas apropiadas y de los errores típicos que es preciso evitar puede ser tan útil para el solucionista como lo es para el nadador o el pianista.

Capítulo 1

Principios Generales

> "La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que *realmente* consisten las matemáticas es en problemas y soluciones."
>
> Paul R. Halmos [14]

En este capítulo nos ocuparemos de los métodos y principios generales que resultan útiles para la resolución de problemas. Pero recordemos que la única manera de aprender a resolver problemas es ... resolviendo problemas! Por lo tanto la lectura de este capítulo solamente será útil si se combina con la práctica constante. Para quienes tengan poca experiencia es recomendable pasar rápidamente por las páginas siguientes, para volver a ellas más tarde, como referencia, mientras estén trabajando en la resolución de problemas concretos. Quienes se interesen por el estudio en profundidad de la habilidad para resolver problemas pueden consultar [27].

1.1. Resolución de Problemas y Creatividad

Evidentemente la resolución de problemas está estrechamente relacionada con la *creatividad*, que algunos definen precisamente como la habilidad para generar nuevas ideas y solucionar todo tipo de problemas y desafíos.

La especie humana es creativa por naturaleza. Todo ser humano nace con un gran potencial para la creación, pero mientras algunos lo aprovechan al máximo, otros casi no lo utilizan. Sin embargo la creatividad, al igual que cualquier otra habilidad humana, puede desarrollarse a través de la práctica y el entrenamiento adecuado. Lamentablemente también puede atrofiarse, si no se ejercita adecuadamente.

El pensamiento creativo se ha dividido en *divergente* y *convergente*. El primero consiste en la habilidad para pensar de manera original y elaborar nuevas ideas, mientras que el segundo se relaciona con la capacidad crítica y lógica para evaluar alternativas y seleccionar la más apropiada. Evidentemente ambos tipos de pensamiento juegan un rol fundamental en la resolución de problemas.

Tres aspectos de la creatividad han recibido mucha atención: el *proceso creativo*, las características de la *personalidad creativa*, y las *circunstancias* que posibilitan o favorecen el acto creativo. Como consecuencia de estos estudios se han desarrollado técnicas y métodos generales dirigidos a desarrollar el potencial creativo. En esta obra nos concentraremos en las técnicas y estrategias específicas que han demostrado ser m's útiles para la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo haremos a continuación una breve reseña de algunos de los métodos más generales, remitiendo al lector interesado a la bibliografía correspondiente.

1.1.1. Invertir el problema

Cada concepto tiene uno contrario y la oposición entre ellos genera una tensión favorable al hecho creativo. Esta idea, que tiene profundas raíces tanto en la filosofía oriental como en la occidental, se refleja en la sabiduría popular en aforismos tales como: "Para saber mandar hay que aprender a obedecer" o "Para ser un buen orador hay que saber escuchar". Como ejemplo de esta técnica supongamos que deseamos diseñar un zapato que sea muy cómodo. El problema inverso sería diseñar un zapato incómodo. Pero el análisis de este problema nos llevará seguramente a descubrir los factores que causan incomodidad, y al evitarlos habremos dado un buen paso hacia la solución del problema original. Vea [38].

1.1.2. Pensamiento lateral

Consiste en explorar alternativas inusuales o incluso aparentemente absurdas para resolver un problema. En otras palabras: evitar los caminos trillados, intentar lo que nadie ha intentado, ensayar percepciones y puntos de vista diferentes. Vea [5].

1.1.3. Principio de discontinuidad

La rutina suprime los estímulos necesarios para el acto creativo, por lo tanto si experimenta un bloqueo temporal de su capacidad creadora interrumpa su programa cotidiano de actividades y haga algo diferente a lo acostumbrado. Vaya a dar un paseo por sitios que no conoce, ensaye una nueva receta de cocina, escuche música diferente a la que escucha habitualmente, lea un libro que no tenía pensado leer, asista a algún tipo de espectáculo diferente a sus favoritos.

1.1.4. Imitación

La mayor parte de los grandes artistas comienzan imitando a sus maestros. Más aún se ha llegado a afirmar, en parte en broma y en parte en serio, que "la originalidad no es otra cosa que un plagio no detectado". En cualquier caso es claro que la imitación puede ser un primer paso válido hacia la originalidad. En particular observe y no vacile en imitar las técnicas de resolución de problemas empleadas con éxito por sus compañeros, maestros o colegas.

1.1.5. Tormenta de cerebros (Brainstorming)

Es una técnica desarrollada en el mundo de la publicidad, en el cual el éxito depende de la generación de nuevas y brillantes ideas. Para ello se reúne un grupo de personas y se les invita a expresar todas las ideas que se les ocurran en relación a un problema o tema planteado, sin importar lo estrafalarias o ridículas que parezcan. La evaluación y la crítica se posponen, esperando crear un clima estimulante que favorezca el surgimiento de algunas ideas realmente útiles. La utilidad de esta técnica es dudosa fuera de ciertos campos o situaciones muy específicas.

1.1.6. Mapas mentales

Es una técnica desarrollada por Tony Buzan (vea [6] y [7]) que trata de representar en forma gráfica el carácter asociativo de la mente humana. Se comienza con la idea principal ubicada en el centro de la hoja y alrededor de ella se van colocando las ideas asociadas y sus respectivos vínculos. Utilizando diversos colores y símbolos esta técnica puede llegar a ser muy útil para organizar las ideas que van surgiendo en torno a un problema.

1.1.7. Programación neurolingüística (PNL)

También conocida como "la ciencia de la experiencia subjetriva", es un conjunto de técnicas muy desarrolladas a través de las cuales se trata de caracterizar el contexto (físico, fisiológico, psicológico, ambiental, etc.) en el cual somos más creativos, para luego reproducirlo a voluntad. Los practicantes de la PNL han incluso "modelado" el comportamiento de algunos personajes famosos, tales como Walt Disney, para tratar de aprovechar sus modos y procedimientos más creativos. Vea [10] y [11].

1.1.8. Factores afectivos

La resolución de problemas no es un asunto puramente intelectual. Las emociones, y en particular el *deseo* de resolver un problema, tienen también una gran importancia. La incapacidad que manifiestan algunos alumnos para resolver incluso el ejercicio más sencillo no es producto por lo general de una deficiencia intelectual, sino de una absoluta falta de interés y motivación. A veces no existe ni siquiera el deseo de *comprender* el problema, y por lo tanto el mismo no es comprendido. El profesor que desee realmente ayudar a un alumno con estas características deberá ante todo despertarle su curiosidad dormida, motivarlo y transmitirle deseos de logro y superación.

Algunas creencias negativas para el proceso creativo están asociadas a una baja autoestima y pueden tener raíces emocionales profundas. Por ejemplo hay quienes enfrentados a un problema creen *a priori* que no podrán resolverlo, y que si lo intentan sólo conseguirán terminar con un dolor de cabeza. El maestro o profesor debe en estos casos apelar a todas sus dotes y conocimientos como educador, aunque en casos extremos será necesaria también la ayuda de un orientador o la de un psicólogo.

En el polo opuesto, alguien que tenga confianza en su propia capacidad y crea que un problema es un desafío que vale la pena enfrentar y que resolverlo le proporcionará una satisfacción intelectual al mismo tiempo que será una experiencia valiosa para su formación, estará en excelentes condiciones psicológicas para abordar el proceso resolutivo. Para profundizar en estos aspectos vea [4], [24], [25], [26].

1.1.9. Bloqueos mentales

James Adams, profesor de diseño en la Universidad de Stanford, centra su enfoque de la creatividad en la superación de los *bloqueos mentales*, barreras que nos impiden percibir un problema en la forma correcta y encontrarle solución. En [1] analiza diferentes tipos de bloqueos y propone ejercicios para identificarlos y superarlos. Su clasificación es la siguiente:

- **Bloqueos perceptivos:** estereotipos, dificultad para aislar el problema, delimitar demasiado el espacio de soluciones, imposibilidad de ver el problema desde varios puntos de vista, saturación, no poder utilizar toda la información sensorial.
- **Bloqueos emocionales:** miedo a cometer errores, a arriesgar, a fracasar; deseo de seguridad y orden; preferir juzgar ideas a concebirlas; inhabilidad para relajarse; falta de estímulo; entusiasmo excesivo; falta de control imaginativo.
- **Bloqueos culturales:** tabúes; el peso de la tradición; roles predeterminados asignados a la mujer y al hombre.
- **Bloqueos ambientales:** distracciones; falta de apoyo para llevar adelante una idea; falta de cooperación entre colegas.
- **Bloqueos intelectuales:** inhabilidad para seleccionar un lenguaje apropiado para el problema (verbal, matemático, visual); uso inadecuado de las estrategias; falta de información o información incorrecta.
- **Bloqueos expresivos:** técnicas inadecuadas para registrar y expresar ideas (a los demás y a uno mismo)

1.2. La Creación Matemática

Una de las reflexiones más profundas que se han hecho sobre la creatividad en matemática es la realizada a principios de siglo por Henri Poincaré, uno de los más grandes matemáticos de su tiempo. En una conferencia pronunciada ante la Sociedad Psicológica de París [30] hizo interesantísimas revelaciones sobre sus propias experiencias como creador:

> "¿Qué es, de hecho, la creación matemática? No consiste en hacer combinaciones nuevas con entes matemáticos ya conocidos. Cualquiera podría hacerlo, pcro las combinaciones que se podrían hacer así serían un número limitado y en su mayoría totalmente desprovistas de interés. Crear consiste precisamente

> no en construir las combinaciones inútiles, sino en construir las que son útiles y que están en ínfima minoría. Crear es discernir, es escoger…"
>
> "A menudo, cuando se trabaja en un problema difícil, no se consigue nada la primera vez que se comienza la tarea. Luego se toma un descanso más o menos largo y uno se sienta de nuevo ante la mesa. Durante la primera media hora se continúa sin encontrar nada. Después, de repente. la idea decisiva se presenta ante la mente…"
>
> "Hay que hacer otra observación a propósito de las condiciones de este trabajo inconsciente. Se trata de que tal trabajo no es posible, y en todo caso no es fecundo, si no está por una parte precedido y por otra seguido de un período de trabajo consciente. Estas inspiraciones súbitas no se presentan … más que trás algunos días de esfuerzos voluntarios, aparentemente estériles, en los que uno ha creído no hacer nada interesante, y piensa haber tomado un camino falso totalmente. Estos esfuerzos no fueron, por tanto, tan estériles como se pensaba. Pusieron en movimiento la máquina inconsciente y sin ellos ésta no habría funcionado ni hubiera producido nada…"

Poincaré esboza luego una teoría del trabajo del yo subliminal, en la cual atribuye un rol fundamental a la sensibilidad y el sentido estético del matemático en el proceso de selección, durante el trabajo inconsciente, de las combinaciones más significativas.

Una conclusión práctica: cuando un problema se resiste a nuestros mejores esfuerzos, nos queda todavía la posibilidad de dejarlo durante un tiempo, descansar, dar un paseo, y volver a él más tarde. Sin embargo solamente aquellos problemas que nos han apasionado, manteniéndonos en una considerable tensión mental, son los que vuelven más tarde, transformados, a la mente consciente. La inspiración o iluminación súbita, que los antiguos consideraban un don divino, hay que merecerla.

1.3. La metodología de Pólya

En 1945 el insigne matemático y educador George Pólya (1887–1985) publicó un libro que rápidamente se convirtiría en un clásico: *How to solve it* [31]. En el mismo propone una metodología en cuatro etapas para resolver problemas. A cada etapa le asocia una serie de preguntas y sugerencias que aplicadas adecuadamente ayudarán a resolver el problema. Las cuatro etapas y las preguntas a ellas asociadas se detallan a continuación:

Etapa I: Comprensión del problema.

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cual es la condición?
- ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Etapa II: Concepción de un plan.

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado con el suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría utilizarlo? ¿Podría emplear su resultado? ¿Podría utilizar su método? ¿Podría utilizarlo introduciendo algún elemento auxiliar?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿en qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Etapa III: Ejecución del plan.

- Al ejecutar el plan, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?

Etapa IV. Visión retrospectiva.

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

La primera etapa es obviamente insoslayable: es imposible resolver un problema del cual no se comprende el enunciado. Sin embargo en nuestra práctica como docentes hemos visto a muchos estudiantes lanzarse a efectuar operaciones y aplicar fórmulas sin reflexionar siquiera un instante sobre lo que se les pide. Por ejemplo si en el problema aparece una función comienzan de inmediato a calcularle la derivada, independientemente de lo que diga el enunciado. Si el problema se plantea en un examen y luego, comentando los resultados, el profesor dice que el cálculo de la derivada no se pedía y más aún que el mismo era irrelevante para la solución del problema, algunos le responderán: ¿o sea que no nos va a dar ningún punto por haber calculado la derivada? Este tipo de respuesta revela una incomprensión absoluta de lo que es un problema y plantea una situación muy difícil al profesor, quien tendrá que luchar contra vicios de pensamiento arraigados, adquiridos tal vez a lo largo de muchos años.

La segunda etapa es la más sutil y delicada, ya que no solamente está relacionada con los conocimientos y la esfera de lo racional, sino también con la imaginación y la creatividad. Observemos que las preguntas que Pólya asocia a esta etapa están dirigidas a llevar el problema hacia un terreno conocido. Con todo lo útiles que estas indicaciones son, sobre todo para el tipo de problemas que suele presentarse en los cursos ordinarios, dejan planteada una interrogante: ¿qué hacer cuando no es posible relacionar el problema con algo conocido? En este caso no hay recetas infalibles, hay que trabajar duro y confiar en nuestra propia creatividad e inspiración.

La tercera etapa es de carácter más técnico. Si el plan está bien concebido, su realización es factible y poseemos los conocimientos y el entrenamiento necesarios, debería ser posible llevarlo a cabo sin contratiempos. Sin embargo por lo general en esta etapa se encontrarán dificultades que nos obligarán a regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para modificarlo por completo. Este proceso puede reperirse varias veces.

La cuarta etapa es muchas veces omitida, incluso por solucionistas expertos. Pólya insiste mucho en su importancia, no solamente porque comprobar los pasos realizados y verificar su corrección nos puede ahorrar muchas sorpresas desagradables, sino porque la visión retrospectiva nos puede conducir a nuevos resultados que generalicen, amplíen o fortalezcan el que acabamos de hallar.

1.4. El trabajo de Alan Schoenfeld

Si bien la mayoría de los matemáticos reconocen en las estrategias heurísticas de Pólya los métodos que ellos mismos utilizan habitualmente, no es tan fácil para el que no tiene experiencia aplicarlas exitosamente. En otras palabras, dichas estrategias son más descriptivas que prescriptivas. Alan Schoenfeld (ver [34], [35], [36]) es uno de los que más han estudiado esta problemática. En su análisis identifica los siguientes cuatro factores relevantes para la resolución de problemas:

- **Recursos cognitivos**. Son nuestros conocimientos matemáticos generales, tanto de conceptos y resultados como de procedimientos (algoritmos).
- **Heurística**. Es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que conocemos y estamos en capacidad de aplicar.
- **Control o metacognición**. Es la capacidad de utilizar lo que sabemos para lograr un objetivo.
- **Creencias**. Se refiere a aquellas creencias y opiniones relacionadas con la resolución de problemas y que pueden afectarla favorable o desfavorablemente.

La importancia del primer factor es obvia. Sin embargo se ha demostrado (ver [9]) que no es suficiente poseer un amplio bagaje de conocimientos matemáticos para ser un solucionista experto. También es necesario dominar algunas técnicas y estrategias que nos ayuden a atacar el problema. En dominios restringidos y bien delimitados, en los cuales los problemas a resolver son más o menos rutinarios, se han desarrollado estrategias que pueden ser aplicadas con éxito incluso por un computador, con resultados tan buenos o mejores que los obtenidos por los expertos humanos (estos son los famosos *sistemas expertos*, producto de las investigaciones en inteligencia artificial y ciencia cognitiva). Sin embargo para resolver problemas no rutinarios en dominios ricos en contenido, como la matemática, se requiere algo más que conocimientos y estrategias. Ese factor adicional es lo que llamamos *control*; actúa como una voz interior que nos dice qué ideas y estrategias (entre muchas alternativas posibles) nos conviene aplicar para el problema que tenemos entre manos, o bien si debemos abandonar un camino que no parece arrojar resultados o por el contrario redoblar esfuerzos y perseverar en él. Los solucionistas inexpertos tienen evidentes deficiencias en este aspecto: se apresuran a transitar el primer camino que se les ocurre y luego se mueven en círculos, cayendo una y otra vez en el mismo error.

El último factor puede influir también de manera importante en el proceso de resolución de problemas. Algunas creencias comunes, sobre todo entre estudiantes de enseñanza media, son las siguientes: "todo problema se resuelve mediante alguna fórmula", "lo importante es el resultado y no el procedimiento", "la respuesta del libro no puede estar equivocada". Este tipo de creencias es un obstáculo para el desempeño de cualquier persona como solucionista.

Schoenfeld elaboró también una lista de las *estrategias* más utilizadas:

1. **Análisis.**
   a) Dibuje un diagrama siempre que sea posible.
   b) Examine casos especiales.
      1) Seleccione algunos valores especiales para ejemplificar el problema e irse familiarizando con él.
      2) Examine casos límite para explorar el rango de posibilidades.
      3) Si hay un parámetro entero, dele sucesivamente los valores $1, 2, \ldots, m$ y vea si emerge algún patrón inductivo.
   c) Trate de simplificar el problema.
      1) Explotando la existencia de simetría.
      2) Usando argumentos del tipo "sin pérdida de generalidad".
2. **Exploración.**
   a) Considere problemas esencialmente equivalentes.

1) Reemplazando condiciones por otras equivalentes.
2) Recombinando los elementos del problema de maneras diferentes.
3) Introduciendo elementos auxiliares.
4) Reformulando el problema:
    - Mediante un cambio de perspectiva o notación.
    - Mediante argumentos por contradicción o contraposición.
    - Asumiendo que tenemos una solución y determinando sus propiedades.

b) Considere un problema ligeramente modificado.

1) Escoja submetas (tratando de satisfacer parcialmente las condiciones).
2) Relaje una condición y luego trate de reimponerla.
3) Descomponga el dominio del problema y trabaje caso por caso.

c) Considere problemas sustancialmente modificados.

1) Construya un problema análogo con menos variables.
2) Deje todas las variables fijas excepto una, para determinar su impacto.
3) Trate de aprovechar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones similares.

3. **Verificación de la solución.**

a) ¿Pasa su solución estas pruebas específicas?

1) ¿Usa todos los datos pertinentes?
2) ¿Está de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables?
3) ¿Soporta pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?

b) ¿Pasa estas pruebas generales?

1) ¿Puede ser obtenida de manera diferente?
2) ¿Puede ser sustanciada por casos especiales?
3) ¿Puede ser reducida a resultados conocidos?
4) ¿Puede utilizarse para generar algún resultado conocido?

Capítulo 2

Ejemplos sencillos

> "Resolver un problema es hacer un descubrimiento. Un gran problema significa un gran descubrimiento, pero hay una partícula de descubrimiento en la solución de cualquier problema. El suyo puede ser modesto, pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, y si lo resuelve por medios propios, puede experimentar la tensión y el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo."
>
> George Pólya [31]

En este capítulo pondremos en práctica los principios examinados en el capítulo anterior. Para ello hemos seleccionado varios problemas sencillos y de fácil solución, de modo que nos podamos concentrar en el *proceso de resolución* más que en el contenido de los mismos.

2.1. Aritmética y Álgebra

Algunos de los problemas más antiguos que se conocen son de tipo aritmético. Es típico que se pida hallar una cantidad determinada por ciertas condiciones, o bien efectuar un reparto cumpliendo ciertos requisitos. Los siguientes problemas pertenecen a esta categoría.

Problema 2.1. *Diofanto fue un notable matemático griego que desarrolló su actividad en Alejandría en el siglo III A.C. y del cual se conservan muy pocos* *datos biográficos. Sin embargo se dice que su epitafio contenía la siguiente inscripción:*

> *Caminante: aquí yacen los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte cuando sus mejillas se cubrieron de vello. Luego de una séptima parte se casó, y transcurrido un quinquenio le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito, cuya existencia duró tan sólo la mitad de la de su padre. Luego de cuatro años buscando consuelo en la ciencia de los números, descendió Diofanto a la sepultura.*

¿Qué edad alcanzó Diofanto? ¿A qué edad se casó? ¿Cuántos años vivió su hijo?

Solución. Veamos si comprendemos bien el problema. ¿Cuál es la incógnita? El número de años que vivió Diofanto (las preguntas restantes se responden fácilmente conociendo la respuesta a la primera). ¿Cuáles son los datos? Una serie de informaciones sobre las etapas sucesivas de su vida, desde su infancia hasta su muerte. Ahora debemos concebir un plan. ¿Se ha encontrado con un problema semejante? Es de esperar que sí, ya que la mayoría de los problemas resolubles por métodos algebraicos elementales son semejantes. El plan general consiste en escribir ecuaciones que reflejen las condiciones planteadas, resolver el sistema resultante y finalmente interpretar las soluciones obtenidas en el contexto original del problema. Llamemos x al número de años vividos por Diofanto. Esta cantidad debe ser igual a la suma de las duraciones de las etapas de su vida, a saber: su infancia ($x/6$), la duodécima parte transcurrida hasta que le salió barba ($x/12$), los años transcurridos hasta que contrajo matrimonio ($x/7$), los años transcurridos hasta que nació su primogénito (5), los años que éste vivió ($x/2$) y los 4 años que Diofanto le sobrevivió. Por lo tanto escribimos:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \tag{2.1}$$

Agrupando términos semejantes resulta:

$$(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{7} - \frac{1}{2})x = 5 + 4$$

y simplificando queda

$$\frac{3}{28}x = 9.$$

Por lo tanto $x = 28 \times 9/3 = 84$. Verifiquemos el resultado:

$$\frac{84}{6} + \frac{84}{12} + \frac{84}{7} + 5 + \frac{84}{2} + 4 = 14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84$$

Diofanto se casó cuando contaba $84/6 + 84/12 + 84/7 = 33$ años, y su hijo vivió $84/2 = 42$ años. □

Los documentos matemáticos más antiguos que se conservan son dos rollos de papiro egipcios que datan aproximadamente de la XII dinastía (2078 a 1788 A.C.). Uno de ellos, conocido como el *papiro Rhind*, consta de unos 85 problemas y ejemplos prácticos. El siguiente es uno de ellos:

Problema 2.2. *Dividir cien panes entre cinco hombres, de modo que las porciones que reciban estén en progresión aritmética y que la séptima parte de la suma de las tres mayores sea igual a la suma de las dos porciones menores.*

Solución. Asegurémonos de comprender bien el problema. ¿Qué se nos pide? Dividir cien panes entre cinco hombres, de modo que se cumplan ciertas condiciones. ¿Cuáles son los datos? El número total de panes (100), la cantidad de porciones (5) y las condiciones que debe cumplir el reparto. ¿Cuáles son las incógnitas? Obviamente, la cantidad de panes que le corresponderá a cada uno. ¿Comprendemos la condición? En primer lugar las porciones deben estar en progresión aritmética; esto significa que si escribimos las porciones en orden creciente de magnitud, la diferencia de cada una de ellas con la siguiente es constante. En otras palabras, si llamamos x a la menor de las porciones y r a la diferencia común o *razón* de la progresión, entonces las cinco porciones deberán ser x, $x+r$, $x+2r$, $x+3r$ y $x+4r$. Utilizando esta notación podemos describir la última condición del problema mediante una ecuación:

$$\frac{(x+2r)+(x+3r)+(x+4r)}{7} = x + (x+r) \tag{2.2}$$

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? Estas preguntas vienen muy bien en este momento, ya que nos hacen observar que tenemos dos incógnitas x y r pero una sola ecuación. En general (pero por supuesto hay excepciones) esto significa que el problema es indeterminado, es decir que en vez de una única solución admite varias, tal vez hasta un número infinito de ellas. Pero otra posibilidad a tener en cuenta es que no tengamos suficientes ecuaciones sencillamente por haber pasado por alto algún dato o condición del problema. Recordemos las preguntas de Pólya: ¿Ha empleado todos los datos?, ¿Ha empleado toda la condición? Bueno, leyendo una vez más el enunciado del problema vemos que no hemos utilizado el hecho de que los panes a dividir son cien. Este dato nos permite escribir otra ecuación:

$$x + (x + r) + (x + 2r) + (x + 3r) + (x + 4r) = 100 \tag{2.3}$$

Bien, ya tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. El plan a seguir es simple: resolver el sistema. Para ello simplificamos primero las ecuaciones 2.2 y 2.3 hasta obtener

$$11x - 2r = 0 \tag{2.4}$$
$$x + 2r = 20 \tag{2.5}$$

de donde resulta $x = 5/3$ y $r = 55/6$. Las cinco porciones serán entonces: $5/3 = 1\frac{2}{3}$, $5/3+55/6 = 65/6 = 10\frac{5}{6}$, $65/6+55/6 = 20$, $20+55/6 = 175/6 = 29\frac{1}{6}$ y finalmente $175/6 + 55/6 = 115/3 = 38\frac{1}{3}$.

Visión retrospectiva: ¿Puede usted verificar el resultado? Esto es fácil: $5/3+65/6+20+175/6+115/3 = 100$ y $65/6-5/3 = 20-65/6 = 175/6-20 = 115/3 - 175/6 = 55/6$. ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? Bueno, si se tiene cierta experiencia resolviendo problemas con progresiones aritméticas se observa que muchas veces resulta más cómodo representar la progresión de manera simétrica, alrededor de un término central. En nuestro caso, si llamamos z al término central y r a la razón, los cinco términos serán $z-2r$, $z-r$, z, $z+r$ y $z+2r$. Ahora la condición de que las partes suman cien se escribe así:

$$(z - 2r + +(z - r) + z + (z + r) + (z + 2r) = 100$$

que se reduce a $5z = 100$ y por tanto $z = 20$. La otra condición es

$$\frac{20 + (20 + r) + (20 + 2r)}{7} = (20 - 2r) + (20 - r)$$

que luego de simplificar nos da $60 + 3r = 7(40 - 3r)$, de donde podemos despejar $r = (280 - 60)/24 = 55/6$. Obtenemos por supuesto la misma solución que antes, pero el procedimiento luce más limpio y elegante: en lugar de resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sólo tenemos que resolver un par de ecuaciones de primer grado. Esto se debe a que la simetría hace que se cancelen los términos con r en la primera ecuación. □

Problema 2.3. *Tres recipientes contienen agua. Si se vierte 1/3 del contenido del primer recipiente en el segundo, y a continuación 1/4 del contenido del segundo en el tercero, y por último 1/10 del contenido del tercero en el primero, entonces cada recipiente queda con 9 litros de agua. ¿Qué cantidad de agua había originalmente en cada recipiente?*

Solución. Este problema puede tratarse en principio con el mismo método que los anteiores: si llamamos x, y, z a los contenidos iniciales de los recipientes es posible escribir unas ecuaciones que reflejen las condiciones del problema. Por ejemplo, después de la primera operación el contenido del primer recipiente será $(2/3)x$ y el del segundo $y + x/3$. Luego de la segunda operación el contenido del segundo recipiente será $(3/4)(y + x/3) = x/4 + (3/4)y$ y el del tercero $z + (1/4)(y + x/3) = x/12 + y/4 + z$. Luego de la tercera operación el contenido del tercer recipiente será $(9/10)(x/12 + y/4 + z)$ y el del primero $(2/3)x + (1/10)(x/12 + y/4 + z)$. Igualando ahora el contenido final de cada recipiente con 9 obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuya solución es la respuesta buscada. Los detalles se los dejamos al lector como ejercicio.

Visión retrospectiva: No cabe duda de que el método anterior, aunque infalible, es bastante aburrido y proclive a errores numéricos. ¿No habrá otra forma de proceder más apropiada para este tipo de problema? Sí la hay, y consiste en sustituir el análisis *hacia adelante* que realizamos, partiendo de la configuración inicial y estudiando la evolución del contenido de los recipientes con cada operación, por un análisis *retrospectivo*. Este tipo de análisis consiste en partir de la configuración *final* y estudiar cómo se llegó a ella. En nuestro caso los tres recipientes finalizan con 9 litros, y la última operación consistió en trasvasar 1/10 del contenido del tercer recipiente al primero. Pero si el tercer recipiente, luego de perder la décima parte de su contenido, quedó con 9 litros, es obvio que debía contener diez litros. Y el primero, como quedó con 9 luego de ganar un litro, antes contenía 8 litros. En otras palabras, después de la segunda operación y antes de la tercera el contenido de los recipientes era 8, 9 y 10 litros, en ese orden. Del mismo modo se ve que antes de la segunda operación el segundo recipiente contenía 12 litros, para poder quedar en 9 al perder la cuarta parte de su contenido. Y el tercero, por consiguiente, tenía 7 litros. Los contenidos antes de la segunda operación eran entonces 8, 12 y 7. Razonando de igual forma llegamos a que inicialmente los recipientes contenían 12, 8 y 10 litros de agua. Este análisis retrospectivo se resume en la siguiente tabla:

1°	2°	3°
9	9	9
8	9	10
8	12	7
12	8	10

□

2.2. Combinatoria

Hay una clase importante de problemas en los cuales tenemos que *contar* o enumerar configuraciones resultantes de combinar, de alguna manera, un número finito de elementos. La rama de la matemática que se ocupa de esto se conoce como *combinatoria*. Los siguientes son algunos ejemplos sencillos.

Problema 2.4. *Un cubo sólido de madera de lado 20 cm se pinta de rojo. Luego con una sierra se hacen cortes paralelos a las caras, de centímetro en centímetro, hasta obtener* $20^3 = 8000$ *cubitos de lado 1 cm. ¿Cuántos de esos cubitos tendrán al menos una cara pintada de rojo?*

Solución. El problema es de fácil comprensión. El primer plan que se nos ocurre es sencillamente contar los cubitos pintados. Por ejemplo: en cada cara del cubo hay $20^2 = 400$ cubitos pintados, por lo tanto en total serán ... ¿400×6? No, porque estaríamos contando más de una vez los cubitos que están en los vértices y aristas del cubo. Pero al menos esto nos da una pista para mejorar el plan (y una cota superior: el número de cubitos pintados debe ser menor que 2400). Contemos entonces por separado los diferentes tipos de cubitos pintados:

- Los correspondientes a los vértices del cubo, que tienen tres caras pintadas y son ocho en total.
- Los correspondientes a las aristas del cubo, excluídos los vértices (tienen exactamente dos caras pintadas). Cada arista tiene contacto con 20 cubitos, pero dos de ellos son vértices (que ya contamos aparte) por lo cual nos quedan 18. Como el cubo tiene 12 aristas, el número total es $18 \times 12 = 216$.
- Los cubitos con exactamente una cara pintada. En cada cara del cubo, las caras pintadas de estos cubitos forman un cuadrado de 18×18, por lo tanto en total serán $18 \times 18 \times 6 = 1944$.

Por consiguiente la respuesta es $8 + 216 + 1944 = 2168$.

Visión retrospectiva: ¿Podemos obtener el resultado en forma diferente? Una primera alternativa es partir de nuestro primer resultado erróneo, 2400, y efectuar las correcciones necesarias. Como los cubos de los vértices se contaron tres veces cada uno, restemos $8 \times 2 = 16$. Y como los de las aristas se contaron dos veces, restemos 216. El resultado será $2400 - 16 - 216 = 2168$. Otra idea (posiblemente la más elegante) se obtiene invirtiendo el problema. Contemos los cubitos que *no tienen* ninguna cara pintada. Es claro que estos cubitos forman un cubo interior al primero, de lado 18. Por lo tanto son $18^3 = 5832$. Los que tiene al menos una cara pintada se pueden obtener ahora restando esta última cantidad del total de cubitos, a saber $20^3 - 18^3 = 8000 - 5832 = 2168$. □

Problema 2.5. *En cada una de las 64 casillas de un tablero de ajedrez hay un grano de azúcar. Una hormiga comienza en un vértice del tablero, come el azúcar, y se traslada a una casilla adyacente, desplazándose en dirección horizontal o vertical (pero nunca en diagonal). Continúa de este modo hasta acabar con todo el azúcar, y sin pasar dos veces por una misma casilla. ¿Es posible que su trayecto finalice en el vértice diagonalmente opuesto al inicial?*

Solución. Este problema es de naturaleza diferente a los anteriores. No se nos pide calcular nada, por lo cual muchos pensarán que no es un verdadero problema de matemática. Sin embargo, si hacemos abstracción de la hormiga y el azúcar (que obviamente se han incluido para hacer más atractivo el enunciado) vemos que el problema trata de la existencia de trayectorias con ciertas características geométricas.

Por alguna razón, la mayoría de las personas a quienes les he planteado este problema contestan de inmediato que sí. Cuando les pido que dibujen en la pizarra la trayectoria, demuestran que no han comprendido cabalmente el enunciado: trazan líneas diagonales, pasan más de una vez por la misma casilla o simplemente finalizan en un vértice que no es el opuesto al inicial, y aún así creen haber solucionado el problema. Cuando por fin comprenden las condiciones, luego de dos o tres intentos fallidos cambian súbitamente de posición y contestan que es imposible. Ahora bien, es claro que una respuesta afirmativa queda suficientemente justificada con sólo exhibir una trayectoria que cumpla las condiciones pedidas. ¿Pero cómo podemos justificar una respuesta negativa? Es muy importante comprender la enorme diferencia que existe entre las afirmaciones "no puedo hallar ninguna solución" y "no existe ninguna solución". Para poder afirmar esto último hay básicamente dos maneras de proceder. Una de ellas consiste en dibujar *todas* las trayectorias posibles que parten de un vértice y recorren todo el tablero, desplazándose en dirección horizontal o vertical y sin pasar dos veces por ninguna casilla. Una vez hecho esto podemos examinar las trayectorias y verificar que ninguna finaliza en el vértice opuesto al inicial. Un inconveniente de este procedimiento es que resulta muy lento y engorroso para un ser humano, aunque sería factible realizarlo con ayuda del computador. Otro inconveniente es que si se nos ocurre generalizar el problema para tableros más grandes rápidamente el problema se vuelve inmanejable, incluso para el computador. Más aún, si queremos una respuesta general, para tableros de $n \times n$, este procedimiento resulta completamente inútil.

La segunda manera de proceder es *demostrar* que no existe trayectoria alguna que cumpla las condiciones exigidas. Para esto resulta útil el hecho de que las casillas de un tablero de ajedrez están pintadas de dos colores, digamos blanco y negro, en forma alternada. La observación clave es que cada movimiento unitario en dirección horizontal o vertical nos lleva de una casilla a otra de diferente color. Ahora bien, como el tablero tiene $8 \times 8 = 64$ casillas, comenzando en cualquiera de ellas se requieren 63 movimientos para recorrerlas todas. Pero es claro que después de 1, 3, 5 o cualquier número impar de movimientos estaremos en una casilla de color diferente a la inicial. Esto demuestra que la respuesta al problema que nos ocupa es negativa, ya que un vértice y el opuesto son del mismo color.

Visión retrospectiva: Una generalización obvia de este problema consiste en considerar tableros de $n \times n$, para cualquier entero positivo n. Es claro que si n es par entonces la respuesta es negativa, por el mismo argumento usado para el caso 8×8. En cambio si n es impar el argumento no se aplica. De hecho es fácil ver que la respuesta es afirmativa. Otras generalizaciones que se resuelven con el mismo método: especificar dos casillas cualesquiera como inicio y fin de la trayectoria; cambiar el tipo de movimiento básico, usando por ejemplo saltos de caballo; plantear el problema en tres dimensiones, por ejemplo en un cubo. □

El lector interesado en estos temas puede consultar [29].

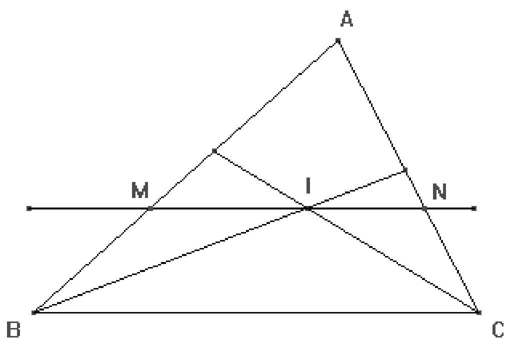
2.3. Geometría

La otra clase importante de problemas que encontramos en la matemática elemental son los de geometría. El lector interesado en este tema puede consultar [12].

Hay una gran variedad de problemas geométricos: problemas de construcción, de cálculo, de demostración, etc. El siguiente es un ejemplo sencillo.

Problema 2.6. *Los lados del triángulo ABC miden $AB = 26cm$, $BC = 17cm$ y $CA = 19cm$. Las bisectrices de los ángulos de vértices B y C se cortan en el punto I. Por I se traza una paralela a BC que corta a los lados AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcule el perímetro del triángulo AMN.*

Solución. La primera de las estrategias que Schoenfeld coloca en su lista es *hacer un diagrama, toda vez que sea posible.* Si bien esta recomendación se aplica a todo tipo de problemas, es casi insoslayable si el problema es de carácter geométrico. Muchas veces el enunciado de estos problemas va acompañado de un dibujo, pero otras veces (como en este caso) no es así, y hacerlo es la primera tarea que debemos realizar. Tal vez usted haya oído frases tales como "un dibujo no constituye demostración", "razonar en base a un dibujo puede conducir a errores", etc. Todo eso es cierto, sin embargo un dibujo nos ayuda en primer lugar a comprender el problema. Además estimulará nuestra imaginación y es posibleque nos sugiera algún plan para hallar la solución. Si tiene a mano instrumentos geométricos úselos; sin embargo incluso un bosquejo aproximado suele ser de mucha ayuda (¡Hágalo antes de seguir leyendo!).



Hay muchas maneras de resolver este problema. El que tenga afición a los cálculos complicados podría por ejemplo comenzar por hallar el área del triángulo ABC (usando la fórmula de Heron). Dividiendo el área entre el semiperímetro se obtiene el radio de la circunferencia inscripta, es decir la distancia de I a los lados del triángulo ABC. Con estos datos es posible calcular, por proporcionalidad, las longitudes de AM, MN y AN. Sin embargo esto es bastante engorroso. ¿No habrá una manera más sencilla? Si miramos el dibujo detenidamente, buscando alguna relación interesante, observaremos (sobre todo si el dibujo está bien hecho) que los triángulos BMI y CNI parecen isósceles. Si esto fuese cierto la solución sería inmediata, ya que de las igualdades $MI = MB$ y $IN = NC$ se obtiene:

$$\begin{aligned} AM + MN + AN &= AM + MI + IN + AN = AM + MB + AN + NC \\ &= AB + AC = 26 + 19 = 45. \end{aligned}$$

Ahora bien, ¿podremos probar que los triángulos BMI y CNI son isósceles? Para probar por ejemplo que BMI es isósceles es suficiente probar que los ángulos $\angle MBI$ y $\angle MIB$ son iguales. Pero sabemos que MN es paralela a BC, por lo tanto $\angle MIB = \angle IBC$ ya que son ángulos alternos internos. Pero BI es la bisectriz de $\angle ABC$, por lo tanto $\angle MBI = \angle IBC$ y hemos completado la demostración (por supuesto que para el triángulo CNI se razona de modo análogo).

Visión retrospectiva: Si revisamos los datos del problema vemos que hay uno de ellos que no fue utilizado: la longitud del lado BC. En realidad para cualquier triángulo con $AB = 26$ cm y $CA = 19$ la solución sería la misma, $26 + 19 = 45$. ¿Y si variamos AB y CA? Bueno, es fácil ver que la respuesta será siempre $AB + CA$. En otras palabras, los valores 26 y 19 no juegan ningún papel especial, y mucho menos $BC = 17$. Estos datos en vez de ayudar a resolver el problema más bien estorban, dirigiendo nuestra atención hacia detalles sin importancia. Son elementos *distractores* , que aumentan la dificultad del problema suministrando más información que la estrictamente necesaria para resolverlo. Para aclarar mejor este punto supongamos que el enunciado del problema hubiese sido:

> En un triángulo ABC las bisectrices de los ángulos de vértices B y C se cortan en el punto I. Por I se traza una paralela a BC que corta a los lados AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcule el perímetro del triángulo AMN en función de los lados AB y AC.

Este problema, a pesar de ser más general, es probablemente más fácil de resolver ya que nuestra atención se enfocará directamente hacia los lados AB y AC. Este es el sentido de la recomendación de Pólya: “eonsidere un problema más general”, la cual parece paradójica ya que un problema más general debería ser por lógica más difícil. Sin embargo una abstracción adecuada, al eliminar la hojarasca innecesaria, puede permitirnos ver el camino con más claridad. Ahora bien, ¿es posible detectar y evitar el efecto de estos elementos distractores? Es bastante difícil, ya que *a priori* no podemos saber cuáles datos son esenciales y cuáles superfluos para resolver un problema. Sin embargo es razonable desconfiar de los datos que parecen muy particulares para la naturaleza del problema. Pero hay que tener cuidado, ya que hay propiedades que sí dependen de valores muy particulares de los datos (esto es muy común en problemas de aritmética, por ejemplo). □

Muchos problemas no se pueden clasificar de manera clara dentro de una rama de la matemática, sino que se encuentran en la frontera entre dos o más de ellas. El siguiente, por ejemplo, pertenece tanto a la geometría como a la combinatoria.

Problema 2.7. *¿En cuántas regiones queda dividido el plano por 6 rectas en posición genérica (es decir tales que no haya dos de ellas paralelas ni tres concurrentes en un punto)?*

Solución. Evidentemente una recta divide el plano en dos regiones, y dos rectas no paralelas lo dividen en cuatro. Pero ya para tres rectas el problema comienza a complicarse. Si trazamos unos cuantos diagramas veremos que la tercera recta atraviesa siempre a tres de las cuatro regiones determinadas por las dos primeras, pero no a la cuarta, y por lo tanto la respuesta para tres rectas parece ser siete. ¿Pero podemos estar seguros de esto? ¿Y qué pasará cuando tracemos la cuarta, la quinta y la sexta recta? Lamentablemente los dibujos se complican demasiado, algunas rectas se cortan fuera de la hoja y no es fácil contar las regiones sin equivocarnos. Además pareciera que la respuesta depende de como dibujemos las rectas. Volvamos entonces al principio. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? Bueno, en vez de disminuír el número de rectas podemos disminuír la *dimensión*, es decir considerar en cuántas regiones queda dividida una recta por cierto número de puntos. Este problema sí es fácil, n puntos dividen a la recta en $n+1$ regiones (a saber $n-1$ segmentos y 2 semirrectas). ¿Y no podemos aprovechar este resultado para el problema en el plano? Veamos, si ya hemos trazado $n-1$ rectas entonces al trazar la n-sima ésta cortará a las anteriores en $n-1$ puntos diferentes (por la hiótesis de genericidad). Por lo tanto la n-sima recta quedará dividida en n partes por esos puntos de intersección. Pero es claro que cada una de esas partes estará contenida por completo en una región de las determinadas por las primeras $n-1$ rectas, región que quedará dividida en dos por la n-sima recta. Por lo tanto hemos descubierto que al trazar la n-sima recta *el número de regiones aumenta en n unidades*. Apliquemos ahora este resultado desde el comienzo y de manera sucesiva. Inicialmente hay una sola región: el plano. Al trazar la primera recta el número de regiones aumenta en una unidad, y tendremos $1+1=2$ regiones. Al trazar la segunda recta el número de regiones aumenta en dos unidades, y tendremos $2+2=4$ regiones. Al trazar la tercera recta el número de regiones aumenta en tres unidades, y tendremos $4+3=7$ regiones. Hasta aquí los resultados concuerdan con lo que ya sabíamos. Ahora resulta fácil continuar: para cuatro rectas son $7+4=11$ regiones, para cinco rectas son $11+5=16$ regiones, para seis rectas son $16+6=22$ regiones.

Visión retrospectiva: Resulta natural preguntarse cuál será el número de regiones en que queda dividido el plano por un número n cualquiera de rectas en posición genérica. Recordando que la suma de los enteros desde 1 hasta n es $n(n+1)/2$ es fácil obtener

$$1+1+2+3+\cdots+n=1+n(n+1)/2=(n^2+n+2)/2$$

Hay otras generalizaciones y problemas similares a los cuales se puede aplicar el mismo método. □

Capítulo 3

Algunas Estrategias Básicas

En este capítulo se enuncian algunas estrategias básicas y se ilustra su aplicación a la solución de varios problemas, muchos de ellos tomados de competencias matemáticas internacionales.

3.1. Figuras y diagramas

El proverbio *una figura vale más que mil palabras* tiene plena validez en la resolución de problemas matemáticos. Por eso nuestra primera estrategia es:

Estrategia 1. ***Dibuje una figura o un diagrama siempre que sea posible.***

La importancia de este principio es obvia cuando se trata de resolver un problema de geometría. Pero hay muchos problemas que, sin ser de geometría, admiten una interpretación geométrica, lo cual amplía mucho el verdadero alcance de esta estrategia. Los siguientes ejemplos ilustran lo dicho.

Problema 3.1.1 (Olimpiada Bolivariana 2000).
Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3 números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada.

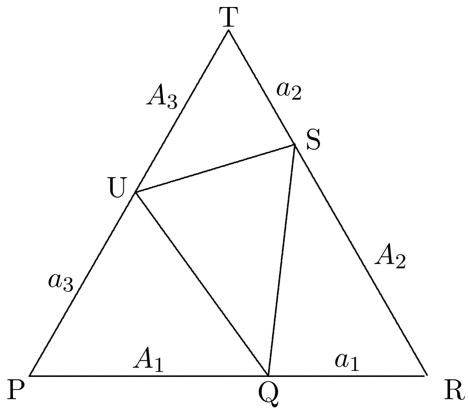
a) Demostrar que
$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_1 < k^2.$$

b) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, a_4, A_4 reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Si $a_i \geq A_i$, demostrar que

$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_4 + a_4A_1 \leq k^2,$$

y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Solución. Cada igualdad $a_i + A_i = k$ puede representarse mediante un segmento de longitud k dividido en dos partes de longitudes a_i y A_i. Con estos tres segmentos podemos construir un triángulo equilátero como se muestra en la figura:



El producto a_1A_2 está relacionado con el área del triángulo QRS, que denotaremos $|QRS|$. De hecho como $\angle QRS = 60°$ se tiene que $|QRS| = a_1A_2\sqrt{3}/4$. Del mismo modo $|STU| = a_2A_3\sqrt{3}/4$ y $|UPQ| = a_3A_1\sqrt{3}/4$, mientras que $|PRT| = k^2\sqrt{3}/4$. Observando la figura es obvio que

$$|QRS| + |STU| + |UPQ| < |PRT|,$$

y multiplicando por $4/\sqrt{3}$ resulta la desigualdad de la parte (a).

La parte (b) es tal vez más fácil: basta dibujar un cuadrado de lado k y dentro del mismo cuatro rectángulos correspondientes a los productos del miembro izquierdo de la desigualdad. □

Problema 3.1.2 (Olimpiada Bolivariana 2000).
Sea n un entero positivo par. Halle todas las ternas de números reales (x, y, z) tales que

$$x^ny + y^nz + z^nx = xy^n + yz^n + zx^n.$$

Solución. A primera vista parece difícil dibujar una figura que corresponda a este problema. Sin embargo si escribimos la condición en la forma equivalente

$$x^n(y-z)+y^nz = xy^n + z^n(y-x)$$

y restamos y^{n+1} a ambos miembros resulta

$$x^n(y-z)+y^n(z-y) = (x-y)y^n + z^n(y-x)$$

o bien

$$(y^n - x^n)(z-y) = (z^n - y^n)(y-x). \tag{3.1}$$

De aquí es claro que si dos de las tres cantidades x, y, z son iguales la tercera también debe serlo, por lo tanto todas las ternas (x,x,x) cumplen la condición. Para las ternas con las tres componentes distintas, luego de dividir ambos miembros de (3.1) entre $(z-y)(y-x)$ resulta

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = \frac{y^n - z^n}{y-z}. \tag{3.2}$$

Esta ecuación se puede interpretar como una igualdad entre la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x,x^n), (y,y^n) y la pendiente de la recta que pasa por los puntos (y,y^n),(z,z^n), es decir que la condición equivale a que los tres puntos (x,x^n), (y,y^n), (z,z^n) estén alineados. Pero como n es par la función $f(x)=x^n$ es convexa (su gráfica es una parábola para $n=2$ y una curva parecida pero más achatada cerca del origen para $n=4,6,\ldots$) por lo cual no puede tener tres puntos diferentes alineados. □

3.2. Examen de casos especiales

El enunciado de muchos problemas es intimidante por la generalidad de lo que plantean y exigen. Un ejemplo típico son los problemas que piden *Hallar todos los enteros positivos tales que...* En estos casos y a falta de una idea brillante que solucione el problema de inmediato, es recomendable examinar casos especiales. Esto sin duda nos ayudará a comprender mejor el problema y muchas veces nos permitirá vislumbrar cuál podría ser la solución.

Estrategia 2. ***Examine casos especiales. En particular si su problema depende de un parámetro entero n examine lo que sucede para los primeros valores de n y trate de ver si emerge algún patrón característico, entonces formule una conjetura y trate de probarla.***

El siguiente problema es un buen ejemplo para aplicar esta estrategia.

Problema 3.2.1 (Olimpiada de Centro América y el Caribe 2001).

Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de n. ¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

Solución. Sea $b(n)$ el número de representaciones buenas (r.b.) del entero n. Es fácil ver que $b(1) = 1$, $b(2) = 2$, $b(3) = 1$, $b(4) = 3$, $b(5) = 2$, $b(6) = 3$, $b(7) = 1$, $b(8) = 4$, $b(9) = 3$, $b(10) = 5$, $b(11) = 2$. El patrón aparente es que $b(n)$ es par si y sólo si n es de la forma $3k + 2$. El paso siguiente es probar esta conjetura por inducción. Ya sabemos que se cumple para los enteros del 1 al 11. Supongamos que es cierto para los enteros menores que $3k$ y tratemos de probarlo para $3k$, $3k + 1$ y $3k + 2$. Para esto sería bueno disponer de una relación de recurrencia que vincule cada valor de $b(n)$ con los valores anteriores.

Es claro que las r.b. de $2n + 1$ deben incluir exactamente un 1, y si cada uno de los sumandos restantes se divide entre 2 resulta una r.b. de n. Por lo tanto $b(2n + 1) = b(n)$. Las r.b. de $2n$ deben incluir dos unos o ninguno. Estas últimas son tantas como las r.b. de n, mientras que las primeras son tantas como las r.b. de $n - 1$, es decir que $b(2n) = b(n) + b(n - 1)$. Armados con estas dos relaciones de recurrencia consideremos ahora dos casos, según que k sea par o impar.

Si $k = 2r$ entonces $b(3k) = b(6r) = b(3r) + b(3r - 1)$, que es la suma de un impar y un par por la hipótesis inductiva, por lo tanto es impar. Por su parte $b(3k + 1) = b(6r + 1) = b(3r)$ es impar, y $b(3k + 2) = b(6r + 2) = b(3r) + b(3r + 1)$ es par por ser suma de dos impares.

Si $k = 2r+1$ entonces $b(3k) = b(6r+3) = b(3r+1)$ es impar, $b(3k+1) = b(6r+4) = b(3r+1)+b(3r+2)$ es impar, y $b(3k+2) = b(6r+5) = b(3r+2)$ es par. □

Problema 3.2.2 (Olimpiada Bolivariana 2000).
Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de $n \times n$, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna sea igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo haya uno o dos números diferentes de cero.

Solución. Es fácil ver que para $n = 1$ hay una una sola forma (3) y para $n = 2$ hay cuatro formas, a saber:

$$\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

Para $n = 3$ hay 6 formas usando tres 3, 18 formas usando un 3, un 2 y un 1 y 12 formas usando tres 2 y tres 1, para un total de 36. Esto nos lleva a conjeturar que para n cualquiera el número de formas es $(n!)^2$. Lo bueno de esta conjetura es que sugiere su propia demostración: como el número de permutaciones de los números del 1 al n es $n!$,si logramos mostrar que cualquier forma de llenar el tablero proviene de la elección, de manera independiente, de dos de estas permutaciones, no habrá más nada que hacer. Pues bien, sean a_i y b_i $(i = 1 \ldots n)$ dos permutaciones de los números del 1 al n y coloquemos en la fila i del tablero un 1 en la columna a_i y un 2 en la b_i si $a_i \neq b_i$, o un 3 en la columna a_i si $a_i = b_i$, rellenando el resto de la fila con ceros. Es fácil ver que la matriz obtenida cumple la condición del problema, y que así pueden obtenerse todas las formas válidas de llenar el tablero. □

3.3. Transformaciones e Invariantes

Muchos problemas están relacionados con *sistemas* cuyo estado se puede cambiar aplicando ciertas *transformaciones*. Los juegos pertenecen a esta categoría, así como muchos otros problemas en los cuales ee aplican en forma reiterada transformaciones geométricas o algebraicas.

Un *invariante* I es una función que a cada estado E del sistema le asocia un valor $I(E)$ de tal manera que, si de un estado E_1 se puede pasar a otro estado E_2 mediante una transformación válida, entonces $I(E_1) = I(E_2)$.

Enunciemos ahora nuestra siguiente estrategia:

Estrategia 3. ***Si en su problema hay un sistema que cambia de estado al aplicarle ciertas transformaciones, trate de hallar un invariante.***

Los invariantes son muy útiles para probar la imposibilidad de pasar de un estado a otro: si un invariante toma valores diferentes en dos estados, entonces es imposible pasar de uno al otro mediante transformaciones válidas. Comencemos por un ejemplo sencillo:

Problema 3.3.1. Suponga que en una pizarra se escriben los números naturales desde el 1 hasta $2n$, siendo n un número natural impar. A continuación se escogen dos de esos números a y b, se borran y se escribe $|a-b|$. Se continúa de este modo hasta que quede un sólo número k en la pizarra. Probar que k es impar.

Solución. Busquemos un invariante. La suma de todos los números en la pizarra no sirve, ya que disminuye en cada operación. ¿Pero en cuánto disminuye? En $a+b-|a-b|$, que es igual al doble del menor de los números a y b. Es decir que la disminución es siempre par. Por lo tanto la *paridad* de la suma se mantiene durante todo el proceso, y es el invariante que buscábamos. El valor inicial de la suma es $1+2+\cdots+2b = n(2n+1)$, que es impar. Por lo tanto el valor final también será impar. □

Problema 3.3.2. Considere la matriz de 100×100

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & 99 & 100 \\
2 & 3 & 4 & \dots & 100 & 1 \\
3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
99 & 100 & 1 & \dots & 97 & 98 \\
100 & 1 & 2 & \dots & 98 & 99
\end{array}$$

en la cual se permite sumar o restar un mismo número a todos los elementos de una fila o de una columna. Aplicando operaciones de este tipo, ¿será posible obtener una matriz con todos los elementos iguales?

Solución. Denotemos por $c(i,j)$ el elemento de la matriz que está en la fila i y en la columna j. Entonces $I = c(1,1) - c(1,100) - c(100,1) + c(100,100)$ es un invariante. En la posición inicial $I = 1 - 100 - 100 + 99 = -100$, pero en cualquier matriz con todos los elementos iguales I sería 0, por lo tanto la respuesta es negativa. □

Problema 3.3.3. A un tablero de ajedrez se le recortan dos casillas ubicadas en vértices diagonalmente opuestos. Se tienen además 31 rectángulos de cartón, cada uno de los cuales puede cubrir exactamente dos casillas del tablero. ¿Es posible cubrir completamente el tablero con los rectángulos?

Solución. Ya hemos visto un problema parecido a éste: el Problema 2.5, en el cual una hormiguita recorría un tablero de ajedrez. Es natural entonces que se nos ocurra tomar en cuenta los colores de las casillas, y observamos que cada rectángulo cubre una casilla blanca y una negra. Si vamos cubriendo el tablero con rectángulos, en cada momento habrá tantas casillas cubiertas de un color como del otro. El número total de casillas cubiertas aumenta a medida que avanza el proceso, pero la *diferencia* entre las casillas blancas cubiertas y las negras es un invariante, ya que en todo momento es cero. Este invariante nos permite dar una respuesta negativa al problema, ya que el tablero recortado tiene 32 casillas de un color y sólo 30 del otro. □

Más en general, es fácil ver que si se quitan dos casillas del mismo color en un tablero rectangular de dimensiones $n \times k$, no es posible cubrirlo con rectángulos de dimensiones 1×2. ¿Pero qué ocurre si a un tablero de ajedrez (o a un tablero cualquiera con número par de casillas) se le quitan dos casillas de un mismo color? En este caso habría tantas casillas por cubrir de un color como del otro, y si se logra cubrir completamente el tablero no se presenta ninguna contradicción. Pero esto no prueba que se pueda. En realidad sí se puede, pero para probarlo hay que exhibir un procedimiento concreto para cubrir el tablero, lo cual dejamos como ejercicio al lector.

Problema 3.3.4 (Olimpiada del Cono Sur, 2000).
En el plano cartesiano, considere los puntos con ambas coordenadas enteras y las rotaciones de 90 grados en sentido antihorario con centro en esos puntos. ¿Es posible, mediante una sucesión de esas rotaciones, transformar el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1) en el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1)?

Solución. Luego de algunos intentos fallidos uno comienza a pensar que es imposible. Si aplicamos las rotaciones permitidas al punto (0,0) vemos que se obtienen los puntos (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1), (2,0), (0,2), etc. pero en cambio no pueden obtenerse (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (2,1), (1,2),... Esto nos sugiere que sólo pueden obtenerse puntos con suma de coordenadas par, como el origen. De hecho, la paridad $I(P) = x + y \text{ mód } 2$ de la suma de ambas coordenadas de un punto $P = (x, y)$ es un invariante. En efecto, si se aplica a P la rotación R de centro (a, b) se obtiene $R(P) = (a+b-y, b-a+x)$. La diferencia entre la suma de coordenadas de $R(P)$ y P es $(a + b - y) + (b - a + x) - (x + y) = 2(b - y)$ que es par, luego $I(P) = I(R(P))$. Ahora bien, para el primer triángulo se tiene $I(0, 0) = 0$, $I(1, 0) = I(0, 1) = 1$, es decir que I es 0 en un vértice y 1 en los dos restantes, mientras que para el segundo $I(0, 0) = I(1, 1) = 0$, $I(1, 0) = 1$. Inmediatamente se concluye que es imposible transformar uno en otro. □

Las estrategias ganadoras en juegos bipersonales suelen estar ligadas a invariantes, como en el siguiente problema:

Problema 3.3.5 (Olimpiada de Centro América y el Caribe 2002).

Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Solución. Como 2001 es impar, en uno de los arcos que separan A de B hay un número par de personas interpuestas y en el otro una cantidad impar. Si A logra que se repita esa situación cada vez que sea su turno entonces ganará el juego, ya que la reducción del número de personas hará que eventualmente B quede a su lado. Esto lo logra A fácilmente tocando a su vecino en el arco par, dejando así un número impar de personas en cada arco. Al jugar B vuelven a quedar un arco par y otro impar. $\square$

El siguiente problema muestra una aplicación interesante de los invariantes para probar una relación.

Problema 3.3.6 (Olimpiada de Centro América y el Caribe 2002).

En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de $n \times n$, con n entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras (x, y), con $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0, 0)$ a (n, n) sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama *equilibrado* si la suma de los valores de x de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de y de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado n en dos figuras de la misma área.

Solución. Sea P_0, P_1,…,P_{2n} un camino. Pongamos $P_i = (x_i, y_i)$ y llamemos L al área que queda por debajo del camino y U al área que queda por encima. Sean P_{k-1}, P_k, P_{k+1} tres puntos consecutivos tales que el segmento $P_{k-1}P_k$ sea vertical y el segmento P_kP_{k+1} sea horizontal. Construyamos otro camino sustituyendo P_k por $P'_k = (x_k + 1, y_k - 1)$. Es claro que en el nuevo camino la suma de las x's aumenta en 1 respecto al camino original, mientras que el área debajo del camino disminuye en 1. Por lo tanto $I = L + \sum x_i$ es un invariante para estas transformaciones elementales de caminos. Como cualquier camino puede llevarse mediante sucesivas transformaciones de este tipo al camino que tiene n segmentos horizontales seguidos de n segmentos verticales, resulta que $L + \sum x_i = 0 + (0 + 1 + 2 + \cdots + n) + (n + \cdots + n) = n(n+1)/2 + n^2$. Intercambiando los ejes se prueba del mismo modo que para cualquier camino se cumple $U + \sum y_i = n(n+1)/2 + n^2$. Por tanto $L + \sum x_i = U + \sum y_i$. Esta igualdad muestra que $L = U$ si y sólo si $\sum x_i = \sum y_i$. □

3.4. El Principio Extremal

En muchos problemas se pide probar la *existencia* de un objeto que cumpla ciertas condiciones. En estos casos suele resultar útil prestar atención a los objetos que maximizan o minimizan alguna función convenientemente relacionada con la condición, y tratar de probar por absurdo que estos objetos cumplen la condición pedida. En resumen:

Estrategia 4. ***Examine los objetos que maximizan o minimizan alguna función relacionada con la condición del problema.***

Veamos esta estrategia en funcionamiento en el siguiente problema:

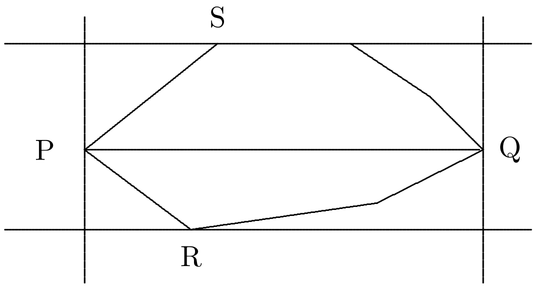
Problema 3.4.1.
En el parlamento unicameral de cierto país cada diputado tiene a lo sumo tres enemigos. Pruebe que es posible dividir el parlamento en dos cámaras de modo tal que cada diputado tenga, en su propia cámara, a lo sumo un enemigo.

Solución. Para cada partición P del conjunto de todos los diputados en dos cámaras definamos el grado de conflictividad $g(P)$ calculando el número de enemigos que cada diputado tiene en su propia cámara y sumando todos los valores resultantes. Esta función sólo toma valores enteros no negativos, por lo tanto debe existir una partición P en dos cámaras en la cual g toma su valor mínimo. Probemos ahora que en esta partición cada diputado tiene a lo sumo un enemigo en su propia cámara. En efecto, si un diputado tuviese más de un enemigo en su propia cámara, en la otra tendría a lo sumo uno (puesto que en total tiene a lo sumo tres). Entonces cambiándolo de cámara la suma $g(P)$ disminuiría al menos en una unidad, lo cual es absurdo. □

Las demostraciones por reducción al absurdo que resultan al aplicar esta estrategia pueden muchas veces convertirse en demostaciones constructivas. Por ejemplo en este problema podríamos haber comenzado con una partición cualquiera P_0 y si no cumple la condición pedida, cambiando un diputado de cámara se obtiene otra partición P_1 con menor conflictividad. Repitiendo este procedimiento se obtiene una sucesión de particiones P_0 ,P_1, P_2,... con $g(P_0) > g(P_1) > g(P_2) > \ldots$ Pero como los $g(P_i)$ son enteros positivos esta sucesión debe detenerse en cierta partición P_k cuya conflictividad ya no se pueda disminuir, y por tanto es una solución al problema.

Veamos ahora un ejemplo geométrico:

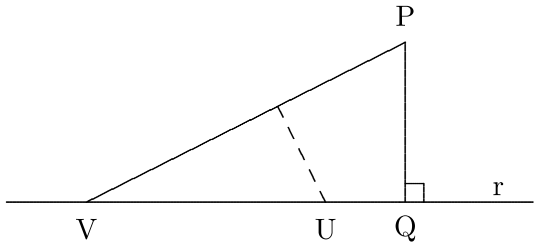
Problema 3.4.2 (Olimpiada Matemática Iberoamericana 1993). Demuestre que para cualquier polígono convexo de área 1 existe un paralelogramo de área 2 que lo contiene.



Solución. Tomemos dos vértices P, Q del polígono que estén a la mayor distancia posible entre sí. El polígono debe estar contenido en la franja limitada por las rectas perpendiculares al segmento PQ que pasan por sus extremos (ya que si un vértice X está por ejemplo del otro lado de la recta que pasa por Q, entonces $\overline{PX} > \overline{PQ}$). Tracemos dos paralelas a PQ lo más cercanas posibles y que contengan al polígono entre ellas. Es claro que cada una de ellas debe contener al menos un vértice del polígono (de lo contrario podrían acercarse más). Digamos que una de ellas contiene al vértice R y la otra al vértice S. El rectángulo limitado por las cuatro rectas satisface la condición pedida, ya que su área es el doble del área del cuadrilátero $PQRS$, el cual está contenido en el polígono. $\square$

Para finalizar veamos un famoso problema propuesto por Sylvester en 1893 y que permaneció abierto hasta 1933, cuando T. Gallai publicó una complicada solución. La sencilla solución que expondremos a continuación, usando el principio extremal, fue hallada por L. M. Kelly en 1948.

Problema 3.4.3 (Sylvester, 1893).
Sea S un conjunto finito de puntos del plano con la propiedad de que la recta determinada por dos puntos cualesquiera de S pasa al menos por un tercer punto de S. Pruebe que entonces todos los puntos de S están alineados.



Solución. Supongamos por absurdo que los puntos no estén todos alineados, y consideremos el conjunto A formado por todos los pares (P, r) tales que $P \in S$ y r es una recta que pasa por dos puntos de S pero no pasa por P. Como A es finito debe haber un par (P, r) para el cual la distancia de P a r sea mínima. Sea Q el pie de la perpendicular de P a r. Como r contiene al menos tres puntos de S debe haber dos de ellos, digamos U y V, de un mismo lado de Q. Supongamos que U es más cercano a Q que V. Entonces la distancia de U a la recta determinada por P y V es menor que la distancia de P a r, lo cual es una contradicción. □

Epílogo

Disponer de un buen repertorio de estrategias es de gran ayuda para el solucionista de problemas matemáticos. Sin embargo es necesario tener presente que las reglas heurísticas no son infalibles. El éxito en su aplicación depende mucho de la experiencia, juicio y buen sentido de quien las use.

Naturalmente que existen muchas estrategias que aquí no se han discutido, sin embargo creemos que no es conveniente tratar de memorizar numerosos principios sin realizar el trabajo necesario para internalizarlos. Es preferible, por el contrario, concentrarse en una estrategia y trabajarla a través de la resolución de numerosos problemas hasta dominarla completamente, antes de pasar a otra. Una excelente fuente de material para quien desee seguir este programa se encuentra en [13].

Capítulo 4

Un problema y varias soluciones

"La matemática es rica en técnica y argumentos."

I. N. Herstein

Es común que un problema admita varias soluciones, las cuales en algunos casos son tan diferentes entre sí que causan asombro. Como un ejemplo bastante extremo de esta situación y de la riqueza de los argumentos matemáticos, en este capítulo se analiza el siguiente problema:

Problema 4.1. *Un rectángulo se divide en varios rectángulos, cada uno de los cuales tiene al menos un lado de longitud entera. Pruebe que entonces al menos un lado del rectángulo original tiene longitud entera.*

A continuación veremos cómo diferentes técnicas y áreas de la matemática pueden ser usadas para resolver el problema. Las demostraciones serán más concisas que en los capítulos anteriores, y completar los detalles queda como ejercicio para el lector.

En lo que sigue R denotará el rectángulo dado, que supondremos ubicado en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas, con un vértice en el origen y los lados paralelos a los ejes. Denotaremos por a el ancho de R y por b su altura,de modo que los cuatro vértices de R serán (0,0), (a,0), (0,b) y (a,b). Si R se descompone en rectángulos como dice el enunciado del problema, a cada rectángulo de la descomposición le llamaremos *baldosa*. A las baldosas que tengan el lado horizontal entero las llamaremos H-baldosas , y a las que tengan el lado vertical entero las llamaremos V-baldosas.

4.1. Inducción

Intentar probar el resultado por inducción parece bastante natural, y de hecho existen varias demoatraciones posibles usando este método. Sin embargo las pruebas son algo elaboradas, y como veremos luego no se encuentran entre las más claras y sencillas. Veamos una de ellas.

Solución 1: Inducción.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que todas las H-baldosas tienen ancho unidad y que todas las V-baldosas tienen altura unidad. Hagamos inducción en el número de H-baldosas. Si este número es 0 el resultado es inmediato. De lo contrario sea H_0 una H-baldosa. Si hay alguna H-baldosa cuyo borde inferior comparta un segmento con el borde superior de H_0, escojamos una de ellas y llamémosle H_1. En caso contrario sólo hay V-baldosas en contacto con el borde superior de H_0, y podemos expander H_0 una unidad hacia arriba, sin que el número de H-baldosas aumente (aunque tal vez disminuya). Pueden resultar V-baldosas cortadas, pero que siguen teniendo altura unidad. Continuemos expandiendo H_0 hacia arriba hasta alcanzar el borde superior de R o hasta alcanzar una H-baldosa H_1. La repetición de este proceso genera una cadena H_0,H_1,. . . ,H_k de H-baldosas que llega hasta el borde superior de R. De manera similar, trabajando desde H_0 hacia abajo, se construye una cadena H_0,H_{-1},. . . ,H_{-l} de H-baldosas que llega hasta el borde inferior de R. En este punto se suprimen todas las baldosas H_{-l},. . . ,H_0,. . . ,H_k y se cierra la brecha deslizando la parte derecha de lo que queda una unidad hacia la izquierda. Aplicando la hipótesis inductiva al rectángulo resultante se obtiene que uno de sus lados, y por lo tanto uno de los lados de R, es entero. □

4.2. Teoría de grafos

Recordemos que un *grafo* G consiste en un conjunto V de puntos (que llamamos *vértices* de G) y un conjunto E de líneas (que llamamos *aristas* de G), tales que a cada arista le corresponden un par de vértices llamados sus *extremos*. Si un vértice v es extremo de una arista e se dice que v y e

son *incidentes*. El *grado* de un vértice v se define como el número de aristas incidentes con v. Es fácil ver que la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas.

Llamaremos *camino* a una sucesión alternada v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,$\ldots$,e_k,v_k de vértices y aristas tal que todas las aristas son diferentes y los extremos de e_i son v_{i-1} y v_i $(i = 1, \ldots, k)$.

La prueba del siguiente lema es inmediata:

Lema 1. *Si un vértice v_0 tiene grado impar, existe un camino que parte de v_0 y termina en otro vértice v_k también de grado impar.*

La siguiente solución se basa en este sencillo lema.

Solución II: Caminos en Grafos.
Sea G el grafo cuyos vértices son los vértices de todas las baldosas y cuyas aristas unen dos vértices si y sólo si son los extremos de un lado horizontal de una H-baldosa o de un lado vertical de una V-baldosa (puede haber aristas múltiples). Es claro que los cuatro vértices de R tienen grado 1. Cualquier otro vértice pertenece a 2 o a 4 baldosas, por lo cual tiene grado 2 o 4. Por el lema existe un camino que parte del origen y finaliza en otro vértice de R. De aquí se deduce inmediatamente que al menos un lado de R es entero. $\square$

Un grafo G es *bipartito* si su conjunto de vértices es la unión disjunta de dos subconjuntos S y T tales que toda arista de G tiene un extremo en S y otro en T. En este caso el número de aristas, la suma de los grados de todos los vértices en S y la suma de los grados de todos los vértices en T son iguales. La siguiente solución se basa en estos sencillos conceptos.

Solución III: Grafos bipartitos.
Sea S el conjunto de los vértices de baldosas con ambas coordenadas enteras, y sea T el conjunto de todas las baldosas. Sea G el grafo bipartito con conjunto de vértices $S \cup T$ y cuyas aristas unen cada punto de S con todas las baldosas de las cuales ese punto es vértice. La condición del problema implica que el grado de cada baldosa es 0, 2 o 4 y por lo tanto el número total de aristas es par. Ahora bien, cada punto de S que no sea un vértice de

R tiene grado par, pues es vértice de 2 o 4 baldosas. Como (0,0) tiene grado 1, en S debe haber otro vértice de grado impar, que sólo puede ser uno de los tres vértices restantes de R. La conclusión se sigue de inmediato. $\square$

4.3. Pruebas por Integración

Digamos que una funcional ϕ que a cada rectángulo de lados paralelos a los ejes le haga corresponder un número (real o complejo) es *característica* para nuestro problema si cumple las dos condiciones siguientes:

I ϕ es aditiva, en el sentido de que si un rectángulo Q se subdivide en un número finito de rectángulos Q_i entonces $\phi(Q) = \sum \phi(Q_i)$.

II $\phi(Q) = 0$ si y sólo si el rectángulo Q tiene un lado entero.

Es evidente que la existencia de una funcional característica proporciona una solución al problema. Una forma conveniente de construir estas funcionales consiste en integrar funciones en los rectángulos, lo cual inmediatamente garantiza la aditividad.

Solución IV: Integración compleja.
Si se integra la función $e^{2\pi i(x+y)}$ en un rectángulo de vértices (x_1,y_1), (x_2,y_1), (x_2,y_2), (x_1,y_2) resulta

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} e^{2\pi i(x+y)}dx\,dy = (2\pi i)^{-2}e^{2\pi i x_1}e^{2\pi i y_1}(e^{2\pi i(x_2-x_1)})(e^{2\pi i(y_2-y_1)}),$$

de donde se sigue que la integral es nula si y sólo si al menos uno de los lados del rectángulo $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, es entero. Por lo tanto $\phi(Q) = \int\int_Q e^{2\pi i(x+y)}dx\,dy$ es una funcional característica. $\square$

Solución V: Integración doble real.
La funcional $\psi(Q) = \int\int_Q \operatorname{sen}(2\pi x)\operatorname{sen}(2\pi y)dx\,dy$ es característica. $\square$

La siguiente prueba es de carácter elemental (no usa integrales) pero se basa en la misma idea que las anteriores.

Solución VI: Coloraciones.
Consideremos el retículo generado por el cuadrado de vértices (0,0), (1/2,0), (1/2,1/2), (0,1/2) y coloreémoslo de blanco y negro como un tablero de

ajedrez. No es difícil probar que un rectángulo de lados paralelos a los ejes con un lado entero tiene igual área blanca que negra. Por lo tanto cada baldosa, y por consiguiente R, tiene igual área blanca que negra. Si a y b son el ancho y la altura, respectivamente, de R, entonces el rectángulo de vértices ($\lfloor a\rfloor$, $\lfloor b\rfloor$), (a, $\lfloor b\rfloor$), (a,b) y ($\lfloor a\rfloor$, b) tiene igual área blanca que negra. De aquí se sigue fácilmente que a o b es entero.
Nota: Compruebe que esta solución corresponde al uso del integrando real $(-1)^{\lfloor 2x\rfloor}(-1)^{\lfloor 2y\rfloor}$ en la solución anterior. $\square$

4.4. El método de perturbaciones

Una idea que muchas veces resulta útil en matemática consiste en modificar o *perturbar* un poco la configuración en estudio, ya sea para volverla más manejable conservando las características de la configuración original, o para analizar cómo cambian las características de la configuración al ser perturbada.

Solución VII: Perturbaciones I.
Definamos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x\rfloor + 1/2 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Apliquemos a las coordenadas de cada vértice de la descomposición de R la transformación f, es decir hagamos corresponder a cada vértice (x, y) el punto $(f(x), f(y))$. Así se obtiene una descomposición de un rectángulo R', posiblemente con menos baldosas que la original, pero cuyas baldosas tienen todas al menos un lado entero, ya que si $x_1 - x_2$ es entero entonces $f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2$ también lo es. Por lo tanto cada baldosa contiene un número par de cuadraditos de la cuadrícula generada por el cuadrado de vértices (0,0), (1/2,0), (1/2,1/2), (0,1/2), y R' también contiene un número par de estos cuadraditos. Entonces algún lado de R debe ser entero, ya que de lo contrario cada lado de R' sería un múltiplo impar de $1/2$ y R' contendría un número impar de cuadraditos de lado $1/2$. $\square$

Solución VIII: Perturbaciones II.
Sea t un parámetro real positivo y consideremos la función

$$f_t(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ x + t & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Como en la demostración anterior hagamos corresponder a cada vértice (x, y) de la descomposición de R el punto $(f_t(x), f_t(y))$. Así se obtiene una descomposición de un rectángulo R_t con el mismo número de baldosas que la original si t es suficientemente pequeño (digamos $t < \epsilon$). En esta descomposición cada baldosa tiene al menos un lado entero, ya que si $x_1 - x_2$ es entero entonces $f_t(x_1) - f_t(x_2) = x_1 - x_2$ también lo es. Por lo tanto el área de cada baldosa es una función lineal de t, o es constante, y el área de R_t será entonces una función afín de t (para $t < \epsilon$). Ahora bien, si ninguno de los lados a, b de R fuese entero entonces el área de R_t sería $(a+t)(b+t)$, es decir un polinomio de segundo grado en t, lo cual es absurdo. □

La siguiente solución combina el método de las perturbaciones con transformaciones geométricas y números primos.

Solución IX: Perturbaciones III.
Sea p un número primo. Apliquemos al rectángulo R subdividido una homotecia de centro en el origen y razón p. A cada vértice de las baldosas resultantes en pR apliquémosle la transformación $(x, y) \mapsto (\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$. Así resulta un nuevo rectángulo subdividido R', cuyas baldosas tienen ambos lados enteros y al menos uno de ellos múltiplo de p. Por lo tanto el área de cada baldosa, y por consiguiente el área de R', es un entero múltiplo de p. Pero como los lados de R' son enteros concluimos que al menos uno de ellos ($\lfloor pa \rfloor$ o $\lfloor pb \rfloor$) es múltiplo de p. Entonces a o b difiere de un entero en menos de $1/p$. Como este razonamiento vale para cualquier primo p, se concluye que a o b es entero. □

4.5. Funciones escalonadas

Solución X.
Supongamos que b no es entero, Quitémosle a cada baldosa su lado inferior y definamos $f : [0, b] \to [0, a]$ haciendo $f(t)$ igual a la suma de las longitudes de los segmentos intersección de la línea $y = t$ con las baldosas cuyo lado superior tiene una ordenada no entera. Es claro que $f(0) = 0$ y $f(b) = a$. La función f es escalonada, con saltos en los valores que son ordenadas de lados horizontales de baldosas. Ahora bien, considerando por separado los casos en que estas ordenadas son enteras o no se ve fácilmente que los saltos son siempre enteros. Por lo tanto $a = f(b)$ es entero. □

4.6. Triangulaciones y Lema de Sperner

Antes de ver la próxima solución examinaremos algunos conceptos elementales sobre triangulaciones.

Una *triangulación* de un polígono plano D es una división de D en un número finito de triángulos tales que cada lado de D pertenezca a un y sólo un triángulo y cada lado en el interior de D pertenezca a exactamente dos triángulos de la subdivisión.

Dada una triangulación de un polígono simple D etiquetemos cada vértice con A, B, o C. Un triángulo es *completo* (o del tipo ABC) si sus tres vértices tienen etiquetas diferentes. El *contenido* de la triangulación es el número de triángulos completos que contiene contados de acuerdo a su orientación. En otras palabras un triángulo se cuenta como $+1$ si sus etiquetas se leen ABC en sentido positivo (antihorario) y como -1 en caso contrario. El *índice* se define como el número de lados etiquetados AB alrededor del borde del polígono, contados de acuerdo a su orientación.

Lema 2 (Lema del índice). *El índice de una triangulación es igual a su contenido.*

Demostración. Contemos los lados de tipo AB de cada triángulo, tomando en cuenta la orientación, y sumemos los resultados. Como los lados interiores a D se cancelan, el resultado es igual al índice. Pero por otra parte cada triángulo completo aporta 1 o -1, segúb su orientación, mientras que cualquier otro tipo de triángulo (AAB, ABB, CCC etc.) aporta 0. Por lo tanto el resultado es también igual al contenido. □

Lema 3 (Lema de Sperner). *Sea $\mathcal{T}$ un triángulo y etiquetemos sus vértices con las letras A, B y C. Agreguemos puntos interiores a los lados de $\mathcal{T}$ y triangulemos el polígono resultante. Etiquetemos cada vértice del lado AB de $\mathcal{T}$ con A o con B, cada vértice del lado AC con A o con C y cada vértice del lado BC con B o con C. Etiquetemos cada vértice interior de manera arbitraria con A, B o C. Entonces la triangulación contiene un número impar de triángulos completos.*

Demostración. Obviamente el índice de la triangulación es igual al número de segmentos AB (contados con su orientación) en el lado AB de $\mathcal{T}$, el cual se ve fácilmente que es impar. Por el Lema del índice el contenido es también impar. □

La solución siguiente a nuestro problema se basa en una ligera variante del Lema de Sperner.

Solución XI: Triangulaciones.
Dividamos cada baldosa en dos triángulos mediante una diagonal y etiquetemos cada vértice (x,y) de la triangulación resultante con A si $x \in \mathbb{Z}$, con B si $x \notin \mathbb{Z}$ pero $y \in \mathbb{Z}$, y con C si $x \notin \mathbb{Z}$ y $y \notin \mathbb{Z}$. Si ninguno de los lados a, b de R fuese entero entonces todos los vértices con $y = b$ tendrían etiquetas A o C y todos los vértices con $x = a$ tendrían etiquetas B o C. Como obviamente todos los vértices con $x = 0$ tienen etiqueta A, el índice es igual al número de segmentos AB en la base de R (cuyos vértices son A o B). Como (0,0) es A y $(a,0)$ es B, es fácil ver que el índice debe ser impar, y por el Lema del índice el número de triángulos completos es también impar, y por tanto hay al menus un triángulo completo. Pero esto conduce a una contradiccón, ya que si una H-baldosa tiene un vértice A entonces los cuatro son A, y si una V-baldosa tiene un vértice B entonces los cuatro son B. $\square$

El lema de Sperner permite dar una demostración del Teorema del punto fijo de Brouwer en el plano (ver Problema 5.38).

El lector interesado en el origen de este problema y en soluciones y comentarios adicionales puede consultar [40].

Capítulo 5

Problemas para pensar

> "No debemos olvidar que la solución de todo problema digno de este nombre no se logra fácil e inmediatamente, sino que requiere un trabajo intelectual intenso, ya que la solución es el resultado de un esfuerzo considerable. ¿Porqué debe estar el joven dispuesto a realizar este esfuerzo en los límites de sus posibilidades?. Probablemente, la explicación se sitúa en una preferencia instintiva por ciertos valores, esto es, en la actitud que coloca el nivel del esfuerzo y de los logros intelectuales y espirituales por encima de las ventajas materiales. Tal escala de valores puede ser sólo el resultado de un largo desarrollo cultural del ambiente y del espíritu público, desarrollo que es difícil acelerar. Y el medio más efectivo para lograrlo puede consistir en transmitir a las mentalidades jóvenes la belleza del trabajo intelectual y el sentimiento de satisfacción que resulta como consecuencia de un esfuerzo intelectual sostenido y exitoso".
>
> Gábor Szegö

En este capítulo hay unos cuantos problemas para que ejercite y desarrolle su habilidad resolutiva. No se han ordenado por temas, sino más en grado de dificultad creciente. Si los primeros le parecen muy fáciles puede avanzar hasta encontrar otros más adecuados a su nivel. Los últimos han sido propuestos en varias olimpíadas internacionales, a saber:

OMCC: Olimpíada Matemática de Centroamérica y el Caribe

OIM Olimpíada Iberoamericana de Matemática

OIMU Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitaria

IMO Olimpíada Internacional de Matemática

En el capítulo siguiente hay sugerencias y algunas soluciones completas, pero resista la tentación de leerlas si no ha realizado primero un serio intento para hallar la solución usted mismo. De lo contrario, perderá una valiosa oportunidad para aprender y no disfrutará la satisfaccón de haber resuelto el problema con su propio esfuerzo.

Para el enamorado de los problemas matemáticos hay una abundante literatura, de la cual nos permitimos destacar [2, 3, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 28, 37, 39]. También se puede encontrar abundante material en Internet, por ejemplo en:

`http://www.kalva.demon.co.uk` (sitio con miles de problemas olímpicos)

`http://math.ucsd.edu/~pfitz/pastputnam.html` (sitio con problemas de las competencias matemáticas universitarias estadounidenses William Lowell Putnam)

Problema 5.1. *¿Cuántos minutos faltan para el mediodía, si hace 8 minutos faltaban 9/5 de lo que falta ahora?*

Problema 5.2. *En el mes de enero de cierto año hubo exactamente cuatro lunes y cuatro viernes. ¿Qué día de la semana fue el 17 de enero?*

Problema 5.3. *En un triángulo cuyos lados miden 10cm, 12cm y 15cm, ¿cuál es la razón entre la altura mayor y la altura menor?*

Problema 5.4. *El número*

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

¿es o no es entero?

Problema 5.5. *Una anciana parte al amanecer del pueblo A hacia el B. Simultáneamente otra anciana parte del pueblo B hacia el A. Cada una de ellas camina a velocidad constante. Al mediodía ambas se cruzan. La primera llega a su destino a las 4pm, mientras que la segunda lo hace a las 9pm. ¿A qué hora amaneció ese día?*

Problema 5.6. *En una pradera la grama crece continua y uniformemente. Se sabe que 70 vacas se comerían la grama completamente en 24 días, y que 30 vacas se la comerían en 60 días. ¿Cuántas vacas serían necesarias para acabar con la grama en 96 días? (Este problema se atribuye a Isaac Newton).*

Problema 5.7. *De las regiones en que queda dividido el plano por n rectas en posición genérica, ¿Cuántas son acotadas?*

Problema 5.8. *¿En cuántas regiones queda dividida una esfera por n círculos máximos en posición genérica?*

Problema 5.9. *Calcule el valor de la suma* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Problema 5.10. *Calcule el valor de la suma* $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

Problema 5.11. *Imagine un cubo de queso de 7 cm de lado, dividido en 7^3 cubitos de 1 cm de lado cada uno. Un gusanito está inicialmente en el cubito central, come el queso y se mueve a uno de los seis cubitos adyacentes (es decir, a uno que tenga una cara común con el primero). Continúa de esta manera hasta acabar con todo el queso, sin pasar dos veces por el mismo cubito. ¿Es posible que su trayectoria finalice en un vértice? Generalice.*

Problema 5.12. *Una hoja rectangular de papel milimetrado tiene 167 mm de ancho y 489 mm de altura. Se traza una línea recta desde un vértice hasta el vértice opuesto. ¿Cuántos cuadraditos son atravesados por la línea?*

Problema 5.13. *Dado un triángulo con vértices A, B y C sean K, L y M puntos ubicados en los lados AB, BC y CA, respectivamente, tales que $AK = 2KB$, $BL = 2LC$ y $CM = 2MA$. Sean $P = AL \cdot BM$, $Q = BM \cdot CK$ y $R = CK \cdot AL$. ¿Qué relación existe entre las áreas de los triángulos ABC y PQR?*

Problema 5.14. *Sea p un número primo impar y sean m y n enteros positivos tales que*

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n}$$

Pruebe que p divide a m.

Problema 5.15. *Halle las soluciones reales del sistema de ecuaciones siguiente:*

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x^5 + y^5 &= 31 \end{aligned}$$

Problema 5.16. *Dada una matriz de números reales con m filas y n columnas, está permitido cambiar de signo a todos los elementos de una misma columna o a todos los de una misma fila. Pruebe que mediante aplicaciones repetidas de esta operación se puede conseguir una matriz tal que la suma de los elementos de cualquier fila o columna sea no negativa.*

Problema 5.17. *¿En cuántos ceros termina el número 2004!?*

Problema 5.18. *Pruebe que cualesquiera 39 números naturales consecutivos incluyen al menos uno tal que la suma de sus dígitos es divisible entre 11.*

Problema 5.19. *Sea ABC un triángulo con $AB = AC$ y sean M el punto medio de BC, P el pie de la perpendicular desde M hasta AC y N el punto medio de MP. Pruebe que $BP \perp AN$.*

Problema 5.20. *Dada una cuaterna (a, b, c, d) de numeros reales positivos, se obtiene otra (ab, bc, cd, da) multiplicando cada elemento por el siguiente, y el último por el primero. Pruebe que por más que se repita esta operación nunca se vuelve a obtener la cuaterna inicial, a menos que sea $a = b = c = d = 1$.*

Problema 5.21. *Sea n una potencia de dos y considere la transformación $T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_1)$. Si se comienza con una n-upla cuyos elementos son todos 1 o -1, pruebe que aplicando T un número suficiente de veces se llega a obtener una n-upla formada exclusivamente por unos.*

Problema 5.22 (I OMCC (1999)). *Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefonea a la persona B, A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?*

Problema 5.23 (I OMCC (1999)). *Encontrar un entero positivo n de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número m que es divisor de n.*

Problema 5.24 (I OMCC (1999)). *En el trapecio $ABCD$ de bases AB y CD, sea M el punto medio del lado DA. Si $\overline{BC} = a$, $\overline{MC} = b$ y el ángulo MCB mide 150^o, hallar el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b.*

Problema 5.25 (I OMCC (1999)). *Sea a un entero impar mayor que 17, tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demostrar que existen enteros positivos distintos b y c, tales que $a + b$, $a + c$, $b + c$ y $a + b + c$ son cuatro cuadrados perfectos.*

Problema 5.26 (I OMCC (1999)). *Sea S un subconjunto del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S está en S. Encuentre el número máximo de elementos de S.*

Problema 5.27 (XIV OIM (1999)). *Halle todos los enteros positivos que que son menores que 1000 y cumplen con la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.*

Problema 5.28 (XIV OIM (1999)). *Sean n puntos distintos, P_1, P_2,..., P_n, sobre una recta del plano ($n \geq 2$). Se consideran las circunferencias de diámetro P_iP_j ($1 \leq i < j \leq n$) y coloreamos cada circunferencia con uno de k colores dados. Llamamos (n, k)-nube a esta configuración.*

Para cada entero positivo k, determine todos los n para los cuales se verifica que toda (n, k)-nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color,

Nota: Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

Problema 5.29. *Determinar el mayor entero n con la propiedad de que n es divisible por todos los enteros positivos que son menores que $\sqrt[3]{n}$.*

Problema 5.30 (XIV OIM (1999)). *Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demuestre que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.*

Problema 5.31. *Sobre los lados de un triángulo ΔABC se construyen exteriormente tres triángulos semejantes AKB, BLC, y CNA. Si D y E son los puntos medios de AB y KL respectivamente, pruebe que DE ei paralela a NC y determine la razón DE/NC.*

Problema 5.32. *Sea F el conjunto de todas las n-uplas $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ donde cada A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ es un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 1998\}$. Denotamos con $|A|$ al número de elementos del conjunto A. Hallar el número*

$$\sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

Problema 5.33. *Demostrar que cualesquiera sean los números enteros positivos a y b, el producto $(36a + b)(a + 36b)$ no puede ser una potencia de 2.*

Problema 5.34 (IV OIMU (2001)). *Las raíces de un polinomio de grado cuatro con coeficientes complejos están ubicadas en los vértices de un rectángulo con lados de longitud a y b en el plano complejo. Encontrar la distancia entre las raíces de la segunda derivada de este polinomio.*

Problema 5.35 (IV OIMU (2001)). *Una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la desigualdad $|f(x)| \geq |f'(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y al menos para un x_0 esta desigualdad es estricta, es decir, $|f(x_0)| > |f'(x_0)|$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces.*

Problema 5.36 (IMO 1997(4)). *Una matriz $n \times n$ con elementos pertenecientes al conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, se dice que es* plateada *si, para cada $i = 1, \ldots, n$, la fila i y la columns i contienen, entre ambas, a todos los elementos de S. Pruebe que:*

1. *No hay ninguna matriz plateada para $n = 1997$.*
2. *Existen infinitos n para los cuales hay matrices plateadas $n \times n$.*

Problema 5.37. *Sea P un polinomio con coeficientes enteros de grado $n > 12$. Si el máximo común divisor de los coeficientes de P es 1 y en más de $n/2$ enteros el valor tomado por P es 1 o -1, pruebe que P es irreducible.*

Problema 5.38. *Sea D un dominio homeomorfo a un triángulo cerrado en el plano y $f : D \to D$ una función continua. Pruebe que f tiene un punto fijo.*

Capítulo 6

Soluciones y sugerencias

> ‘Todo problema profana un misterio; a su vez, al problema lo profana su solución.”
>
> E. M. Cioran [8]

Este capítulo contiene algunas sugerencias y soluciones para los problemas planteados en el capítulo anterior. Repetimos lo allí dicho: resista la tentación de mirar las soluciones si no ha realizado primero un serio intento para resolver el problema usted mismo. De lo contrario, perderá una oportunidad de aprender y no disfrutará la satisfaccón de haber resuelto el problema con su propio esfuerzo.

Problema 5.1

Solución: Si llamamos x a los minutos que faltan para el mediodía, entonces

$$x + 8 = \frac{9}{5}x$$

y por tanto $x = 10$.

Problema 5.2

Sugerencia: Cuente el número de lunes y de viernes en los 31 días del mes de enero suponiendo que el primero de enero fue lunes. Haga lo mismo suponiendo que el primero de enero fue martes, miércoles, etc.

Solución: jueves.

Problema 5.3

Sugerencia: Los productos de cada lado por la altura correspondiente son iguales al doble del área del triángulo, y por lo tanto iguales entre sí.

Solución: $15/10 = 3/2$.

Problema 5.4

Muestre que la raíz cúbica de $20+14\sqrt{2}$ puede expresarse en la forma $a+b\sqrt{2}$, para ciertos enteros [equeños a y b.

Solución: Sí es entero, de hecho el número dado es 4.

Problema 5.5

Sugerencia: Como la velocidad de cada anciana es constante, también lo son las razones entre los tiempos que emplean en recorrer una misma distancia.

Solución: Supongamos que amaneció a la hora x, y llamemos C al punto en el cual las ancianas se encuentran al mediodía. La primera anciana recorrió la distancia AC en $12-x$ horas, mientras que la segunda lo hizo en 9 horas. La distancia BC fue recorrida en 4 horas por la primera anciana y en $12-c$ por la segunda. Por lo tanto

$$\frac{12-x}{9} = \frac{4}{12-x}$$

ya que ambas fracciones son iguales a la razón entre la velocidad de la segunda anciana y la de la primera. De esta ecuación se obtiene fácilmente que amaneció a las 6 am.

Problema 5.6

Sugerencia: Obviamente hay que tomar en cuenta el crecimiento de la grama. Llame G a la cantidad inicial de grama, g al crecimiento diario de la misma y d a la cantidad de grama que cada vaca come en un día. Plantee las condiciones del problema como un sistema de ecuaciones.

Solución: 20 días.

Problema 5.7

Sugerencia: De las n regiones en que una recta queda dividida por $n-1$ de sus puntos, exactamente $n-2$ son acotadas.

Solución: $1+2+\cdots+(n-2) = (n-1)(n-2)/2$.

Problema 5.8

Sugerencia: Cada círculo máximo corta en dos puntos a cada uno de los restantes.

Solución: $b^2 - n + 2$.

Problema 5.9

Sugerencia: Hay muchas maneras de resolver este problema. Una de ellas consiste en sumar miembro a miembro las identidades

$$(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Solución: $n(n + 1)(2n + 1)/6$.

Problema 5.10

Sugerencia: Inspírese en el problema anterior.

Solución: $n^2(n + 1)^2/4$.

Problema 5.11

Sugerencia: Imagine los cubitos pintados con dos colores, de tal modo que cubos adyacentes tengan colores diferentes.

Problema 5.12

Sugerencia: Determine si la diagonal pasa por algún nodo interior de la cuadrícula. Considere por donde sale la línea de cada cuadradito.

Problema 5.13

Sugerencia: Determine la razón en que P y Q dividen al segmento BM.

Solución: 7:1.

Problema 5.14

Sugerencia: tome $(p - 1)!$ como denominador común y analice los restos módulo p de cada sumando del numerador.

Problema 5.15

Sugerencia: Divida la segunda ecuación entre la primera y trate de llegar a una ecuación de segundo grado en xy.

Solución: $x = 2$, $y = -1$ y $x = -1$, $y = 2$.

Problema 5.16

Sugerencia: Si una fila o columna tiene suma negativa y se cambia de signo a todos sus elementos, ¿qué pasa con la suma total de los elementos de la matriz?

Problema 5.17

Sugerencia: La respuesta es igual al exponente de 5 en la descomposición en factores primos de 2004! (ya que el exponente de 2 será siempre mayor).

Solución: $\lfloor 2004/5 \rfloor + \lfloor 2004/25 \rfloor + \lfloor 2004/125 \rfloor + \lfloor 2004/625 \rfloor = 400 + 80 + 16 + 3 = 499$.

Problema 5.18

Sugerencia: ¿Cómo varía la suma de los dígitos al pasar de un número al siguiente? ¿Qué restos módulo 11 se obtienen? Trate de hallar el peor caso posible.

Problema 5.19

Sea Q el pie de la perpendicular trazada desde B al lado AC. Como $BM = MC$ y $BQ \parallel MP$ se tiene que $CP = PQ$, y como los triángulos rectángulos AMP, ACM y BCQ son claramente semejantes resulta $PA/BQ = MP/CQ$ $= (2NP)/(2PQ) = NP/PQ$. Por lo tanto los triángulos rectángulos BPQ y ANP son también semejantes, y en consecuencia $\angle PAN = \angle QBP$. Se concluye que las rectas AN y BP son perpendiculares ya que forman ángulos iguales y del mismo sentido con las rectas perpendiculares AC y BQ.

Problema 5.20

Sugerencia: Al pasar de una cuaterna a la siguiente, el producto de los cuatro elementos se eleva al cuadrado. Por lo tanto si $abcd \neq 1$ nunca se regresará a la cuaterna inicial. Si $abcd = 1$ pero no son los cuatro iguales, pruebe que al aplicar la transformación reiteradamente se obtienen elementos arbitrariamente grandes.

Problema 5.21

Sugerencia: Estudie el efecto de aplicar T 2 veces, 4 veces,..., 2^n veces a la cuaterna original.

Problema 5.22

Solución: $2(n-1)$.

Problema 5.23

Sugerencia: Trate de que la suma de los productos de los dígitos, tomados convenientemente de a pares, sea una potencia de 5.

Solución: (Una de muchas posibles) $\underbrace{111\ldots111}_{993\text{unos}}3791875$.

(Los 994 unos se multiplican de a pares y se suman dando 497 y los seis dígitos restantes se agrupan como $3\cdot 7+9\cdot 8+7\cdot 5$ para un total de 625.)

Problema 5.24

Solución: Tracemos por M la paralela a AB y sea N el punto en que esta recta corta a BC. Es fácil ver que el área del trapecio $ABCD$ es 4 veces la del triángulo MNC, por lo tanto la respuesta es $4(1/2)(a/2)b\operatorname{sen}150^o = ab/2$.

Problema 5.25

Solución: Pongamos $a = 2n+1$. Por hipótesis $3a-2 = 6n+1 = x^2$. Tomemos $b = 4n$ y $c = n^2-4n$. Entonces $b+c = n^2$, $a+b = 6n+1 = x^2$, $a+c = 2n+1+n^2-4n = (n-1)^2$ y $a+b+c = 2n+1+n^2 = (n+1)^2$.

Problema 5.26

Solución: 501.

Problema 5.27

Sugerencia: Si el cuadrado de n es un cubo perfecto entonces también n es un cubo perfecto.

Solución: 1 y 27.

Problema 5.28

Solución: $n > 2^k$. En otras palabras, con k colores se pueden colorear todas las circunferencias de una nube hasta para $n = 2^k$, pero no más, de manera aceptable (es decir de modo que circunferencias tangentes exteriormente sean de distinto color). La prueba es por inducción. Si $k = 1$ el resultado es obvio. Si asumimos que es cierto para k, entonces la nube con 2^{k+1} puntos se colorea así: primero se colorean de manera aceptable con los colores $1, \ldots, k$ las circunferencias con diámetros P_iP_j para $1 \le i < j \le 2^k$. Lo mismo se hace con las circunferencias con diámetros P_iP_j para $2^k + 1 \le i < j \le 2^{k+1}$. Finalmente las circunferencias con diámetros P_iP_j tales que $i \le 2^k < j$ se colorean con el color $k + 1$, y listo. Ahora bien, si para algún $n > k$ la nube se puede colorear con k colores, consideremos el conjunto A de los puntos P_i que son extremo izquierdo (i.e., el más cercano a P_1) de un diámetro de una circunferencia de color k, y sea B su complemento en $\{P_1, \ldots, P_n\}$. Las circunferencias con dos puntos en A no pueden ser de color k, como tampoco pueden serlo las que tienen dos puntos en B. Pero uno de estos dos conjuntos debe tener más de 2^{k-1} puntos, y se contrtadice la hipótesis inductiva.

Problema 5.29

Solución: 420. Para verlo, pruebe que el mínimo común múltiplo de 2,3,…,k supera a $(k+1)^3$ si $k \ge 8$ y por lo tanto ningún número mayor que $8^3 = 512$ es divisible por todos los enteros positivos menores que su raíz cúbica.

Problema 5.30

Solución: Si no fuera así los únicos factores primos de B serían 3 y 7. Pero es fácil ver que los números de la forma 3^n7^m tienen el penúltimo dígito par.

Problema 5.31

Solución: Sean $r = AN/AC = BK/BA = CL/CB$, $\phi = \angle CAN = \angle BCL = \angle ABK$ y $z = re^{i\phi}$. Interpretando cada punto como un número complejo se tiene

$$N - A = z(C - A), \quad L - C = z(B - C), \quad K - B = z(A - B).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E - D &= \tfrac{1}{2}(K + L) - \tfrac{1}{2}(A + B) \\ &= \tfrac{1}{2}(B + z(A - B) + C + z(B - C) - A - B) \\ &= \tfrac{1}{2}((C - A) - z(C - A)) = \tfrac{1}{2}((C - A) - (N - A)) \\ &= \tfrac{1}{2}(C - N). \end{aligned}$$

En consecuencia $DE \| NC$ y $DE/NC = \frac{1}{2}$.

Problema 5.32

Sugerencia: 1998 no tiene nada de particular, trabaje con los subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, k\}$. Determine cuántas veces es contado cada elemento x de este conjunto en la suma propuesta, o lo que es lo mismo cuántas n-uplas $(A_1, \ldots, A_n)$ son tales que la unión de sus elementos contiene a x.

Solución: $1998(2^n - 1)2^{1997n}$.

Problema 5.33

Sugerencia: Si $(36a + b)(a + 36b)$ fuese una potencia de 2 entonces a y b serían múltiplos de 4.

Problema 5.34

Las cuatro raíces del polinomio pueden escribirse como $z_1 = z_0 - A - B$, $z_2 = z_0 - A + B$, $z_3 = z_0 + A + B$, $z_4 = z_0 + A - B$, con A y B números complejos tales que $|A| = a/2$, $|B| = b/2$, $\Re(A\overline{B}) = 0$. El polinomio se escribirá entonces

$$\begin{aligned} P(z) &= k(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = \\ &= k\left((z - z_0)^2 - (A + B)^2)((z - z_0) - (A - B)^2\right) \\ &= k(u^2 - S^2)(u^2 - D^2), \end{aligned}$$

donde $u = z - z_0$, $S = A + B$, $D = A - B$. Derivando dos veces tenemos

$$\begin{aligned} P''(z) &= 2k(u^2 - D^2) + 8ku^2 + 2k(u^2 - S^2) \\ &= 2k(6u^2 - D^2 - S^2). \end{aligned}$$

Las raíces de este polinomio son $\pm\sqrt{(S^2 + D^2)/6}$ y la distancia buscada es

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}} \left|\sqrt{S^2 + D^2}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \left|\sqrt{A^2 + B^2}\right|.$$

Puesto que A y B pueden escribirse como

$$A = \frac{ae^{i\phi}}{2}, \qquad B = \frac{bie^{i\phi}}{2},$$

resulta

$$d = \sqrt{\frac{|a^2 - b^2|}{3}}.$$

Problema 5.35

Afirmamos que el conjunto C de los ceros de f es abierto. En efecto, si $f(a) = 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $|f(x)| < 1/2$ para todo x en $I = (a-r, a+r)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $r < 1/2$. Entonces para cada x en I existe un z en I tal que $|f(x)| = |f(x) - f(a)| = |f'(z)(x-a)| \leq |f(z)||x-a| \leq 1/4$, y reiterando este argumento resulta que en I se tiene $|f| \leq 1/8$, luego $|f| \leq 1/16, \ldots$ y en general $|f| \leq 1/2^n$ para todo $n > 0$. Conclusión: f es nula en I.

Ahora, como f es continua, C también es cerrado. Y como $\mathbb{R}$ es conexo, C es vacío o es todo $\mathbb{R}$. Pero esto último no es posible pues $|f(x_0)| > |f'(x_0)| \geq 0$, por lo tanto C es vacío.

Problema 5.36

Solución: Podemos comenzar analizando los casos $n = 2$, 3 y 4. Es fácil encontrar matrices plateadas para $n = 2$ y $n = 4$, y probar que no existe ninguna para $n = 3$. En realidad no hay matrices plateadas para ningún n impar mayor que 1. Si la hubiese, tomemos un elemento x que no aparezca en la diagonal, y sea k el número total de veces que aparece en la matriz. Entonces x debe pertenecer a exactamente k filas y k columnas. Pero como x debe pertenecer a la fila i o a la columna i, pero no a ambas, para cada $i = 1, \ldots, n$, se concluye que $n = 2k$.

Para la segunda parte lo más fácil es ver por inducción que para $n = 2^k$ se puede construir una matriz plateada M_k. Es trivial construir M_1, y suponiendo que ya hemos construido M_{k-1} construimos M_k con cuatro bloques cuadrados de igual dimensión. Ponemos dos copias de M_{k-1} en la diagonal. El bloque superior derecho es una matriz cuya primera fila es $(2^k, 2^k+1, \ldots, 2^k+2^{k-1}-1$ y las restantes se obtienen rotando cíclicamente los elementos de la primera. Análogamente el bloque inferior izquierdo es una matriz cuya primera fila es $(2^k+2^{k-1}, 2^k+2^{k-1}+1, \ldots, 2^{k+1}-1)$ y las restantes se obtienen rotando cíclicamente los elementos de la primera.

Problema 5.37

Observación: No existe ningún polinomio con coeficientes enteros que tome el valor -1 en cuatro enteros distintos a_1, a_2, a_3, a_4 (o más) y el valor 1 en otro entero b.

En efecto, supongamos que $p(x)$ verificara esto. Entonces $q(x) = p(x)+1$ cumpliría que $q(a_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, 4$ y $q(b) = 2$. De esta forma $q(x) =$

$(x-a_1)*(x-a_2)*(x-a_3)*(x-a_4)*r(x)$ para cierto $r(x)$ con coeficientes enteros. Evaluando en b tendríamos $2 = q(b) = (b-a_1)*(b-a_2)*(b-a_3)*(b-a_4)*r(b)$ y por lo tanto sólo podríamos tener que $(b-a_i) = \pm 1$ o $(b-ai) = \pm 2$ (y esto último sólo para un i). Pero los $(b-a_i)$ son todos diferentes, y sólo pueden tomar 3 valores diferentes. Contradicción.

Obsérvese que el mismo resultado vale para el valor 1 en cuatro enteros diferentes y el valor -1 en otro (o, más en general, si vale c para 4 valores y $c-p$ para otro con p primo).

Vamos ya a ver el resultado. Supongamos que tenemos $P(X)$ de grado $n > 11$ tal que toma valor 1 o -1 en más de $n/2$ valores. Si $P(X)$ fuera reducible entonces existirían polinomios no constantes $Q(X)$ y $R(X)$ con coeficientes enteros tales que $P(X) = Q(X)*R(X)$. Si $P(a) = \pm 1$, entonces lo mismo pasa con $Q(a)$ y $R(a)$. Podemos suponer que $Q(X)$ tiene grado $n/2$ o menor. Si $Q(X)$ toma el valor 1 en más de $n/2$ enteros, entonces $Q(X)-1$ tiene más de $n/2$ raíces y grado menor que $n/2$, contradicción. Lo mismo si en todos toma el valor -1. Así tenemos que en algunos enteros Q toma el valor 1 y en otros el valor -1. De hecho habrá más de $n/4$ enteros en los que toma el valor 1 (o el -1). Como $n > 12$, $n/4 > 3$ y tendremos como mínimo 4 enteros en los que toma el valor 1 (o el -1) y como mínimo un entero en el que toma el valor -1 (resp. 1), en contradicción con la observación inicial.

Problema 5.38

Es fácil ver que es suficiente probar el resultado cuando D es un triángulo cualquiera, digamos el de vértices (0,0), (1,0), (0,1). Para cada $P \in D$ sea $v(P)$ el vector $f(P) - P$. Si $v(P) = 0$ para algún P ya encontramos un punto fijo. De lo contrario sea $\theta(P)$ el ángulo que forma $v(P)$ con el eje Ox y considere una sucesión de triangulaciones T_n de D tales que el diámetro máximo de los triangulitos de T_n tienda a cero cuando n tiende a infinito. Etiquete los vértices de T_n con A si $0 \leq \theta(P) < \pi/2$, con B si $\pi/2 \leq \theta(P) \leq \pi$ y con C en cualquier otro caso. Por el lema de Sperner T_n tiene algún triángulo completo $A_nB_nC_n$. Aplicando Bolzano-Weierstrass se puede encontrar una subsucesión de estos triángulos tal que A_n converja a un punto P, y por la condición sobre los diámetros también B_n y C_n deben converger a P. Pero entonces se ve claramente que $v(P)$ debería ser 0, lo cual es absurdo.

Bibliografía

[1] Adams, J. L. *Conceptual Blockbusting*, Stanford, 1979. Hay versión en castellano: *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*, Gedisa, Barcelona, 1986.

[2] Andrescu, T., Gelca, R. *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhaüser, Boston, 2000.

[3] Barbeau, E. J., Moser, W. O., Klamkin, M. S., *Five Hundred Mathematical Challenges*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1995.

[4] DeBellis, V. A., Goldin, G. A., *The affective domain in mathematical problem solving*, in *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lahti, Finland, Vol. 2 (1997), 209–216.

[5] de Bono, E., *Serious Creativity* (ISBN 0-99730-566-0), Harper Business, 1992.

[6] Buzan, T., *Use Both Sides of Your Brain*, Plume, New York, 1991.

[7] Buzan, T., Buzan, B. *The Mind Map Book* (ISBN: 0-525-93904), Dutton 1994.

[8] Cioran, E. M. *Silogismos de la Amargura*, Monte Avila, Caracas, 1980.

[9] DeFranco, T. C. (1996). *A perspective on mathematical problem-solving expertise based on the performance of male Ph.D. mathematicians*, in J. Kaput, A. H. Schoenfeld, Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, II* (pp. 195-213), Conference Board of the Mathematical Sciences, Issues in Mathematics Education, Vol. 6, Providence, RI: American Mathematical Society.

[10] Dilts, R., Bonissone, G. *Skills for the Future* (ISBN: 0-916990-27-3) Meta Publications, 1983.

[11] Dilts, R., Dilts, R. W., Epstein, T., *Tools for Dreamers* (ISBN 0-916990-26-5) Meta Publications, Cupertino.

[12] Durán, D., *La Geometría Euclidiana*, Astrodata, Maracaibo, 2003.

[13] Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.

[14] Halmos, P. R., *The Heart of Mathematics*, American Mathematical Monthly, **87**(7), 1980, 519–524.

[15] Halmos, P. R., *Problems for Mathematicians Young and Old*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1991.

[16] Halmos, P. R., *Linear Algebra Problem Book*, Math. Assoc. Amer. Washington, 1995.

[17] Honsberger, R., *From Erdös to Kiev*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1995.

[18] Honsberger, R., *In Pölya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1997.

[19] Klamkin, M. S., *International Mathematical Olympiads 1978-1985 and Forty Supplementary Problems*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1986.

[20] Klamkin, M. S., *U.S.A. Mathematical Olympiads, 1972-1986*, Math. Assoc. Amer., Washington, 1988.

[21] Krantz, S. G., Techniques of problem solving, American Mathematical Society, 1996.

[22] Larson, L. C. *Problem-solving Through Problems*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[23] Loyd, S. *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, 2 vols., Dover, New York, 1959-1960.

[24] McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596), New York, NY: Macmillan.

[25] McLeod, D. B. , Adams, V.M., Eds. (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective*, New York: Springer-Verlag.

[26] McLeod, D. B., Craviotto, C. , Ortega, M. (1990). Studentsáffective responses to non-routine mathematical problems: an empirical study. In *Proceedings of the Fourteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. I (pp. 159-166), CINVESTAV, Mexico.

[27] Newell, A. , Simon, H. *Human Problem Solving*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972.

[28] Newman, D. J. *A Problem Seminar*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[29] Nieto, J. H., *Teoría Combinatoria*, EdiLUZ, Maracaibo, 1996.

[30] Poincaré, H. *Ciencia y Método*, Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1946.

[31] Pólya, G., *How to solve it; a new aspect of mathematical method*, Princeton University Press, Princeton, 1945. Hay traducción: *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1965.

[32] Pólya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning; Vol. 1. Induction and Analogy in Mathematics; Vol. 2. Patterns of Plausible Inference.* Princeton University Press, Princeton, 1954. Hay traducción: *Matemáticas y Razonamiento Plausible*, Tecnos, Madrid, 1966.

[33] Pólya, G., *Mathematical Discovery*, Princeton University Press, Princeton, 1962 (Volume 1), 1965 (Volume 2). Combined paperback edition: Wiley, New York, 1981.

[34] Schoenfeld, A. H.,*Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, 1985.

[35] Schoenfeld, A. H., *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*, in D. A. Grouws (Ed.), *NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370), Macmillan, New York, 1992.

[36] Schoenfeld, A. H., *Problem Solving Strategies in College-Level Mathematics*, Physics Department, University of California (Berkeley), 1978.

[37] Steinhaus, H., *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*, Dover, New York, 1979.

[38] Thompson, Ch., *What a Great Idea! Key Steps Creative People Take*, Harper Perennial, 1992.

[39] Ulam, S. M., *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Publishers, New York, 1960.

[40] Wagon, S. *Fourteen Proofs of a Result about tiling a Rectangle*, American Mathematical Monthly, **94**(1987), 601–617.

[41] Wycoff, J., *Mindmapping*, Berkley Publishing Group, 1991.

Índice alfabético