MODULO PRECALCULO

PRIMERA UNIDAD
Relaciones y Funciones

Los matemáticos no estudian los objetos, sino las relaciones
entre los objetos; por tanto les es indiferente reemplazar
estos objetos por otros, con tal que no cambien las relaciones.
Henri Poincaré

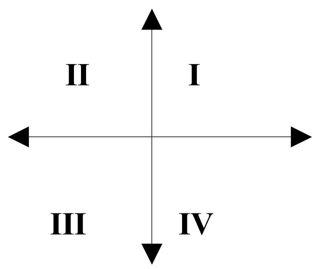
1.1 Coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

Objetivos.
a) Determinar un sistema de ejes coordenados.
b) Localizar puntos en el plano cartesiano.
c) Calcular la distancia entre dos puntos del plano
d) Determinar el punto medio entre dos puntos del plano.

En el curso de Matemática Básica se estudiaron los números reales y su representación en la recta numérica, después se continuó con el álgebra en una indeterminada o variable, es decir el estudio se concretó a la primera dimensión. Ahora, en esta unidad, los temas a tratarse se referirán a la segunda dimensión: el plano. Se estudiarán las relaciones y ecuaciones en dos variables con sus gráficas en el plano. El tema de mayor relevancia serán las funciones. Palabra ésta de mucho uso en nuestro lenguaje familiar, porque siempre estamos relacionando causa y efecto. Por ejemplo, nuestras calificaciones dependen de la dedicación al estudio, nuestro peso de la cantidad de alimentos que comamos, etc.

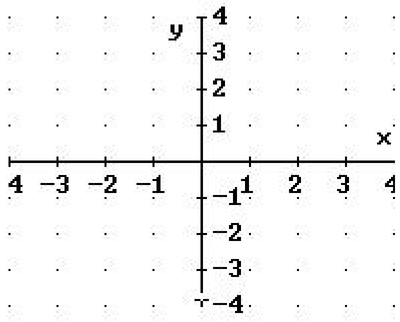
Para poder realizar estos estudios se necesitan conocimientos previos y básicos, de manera que comenzaremos con definiciones, como sistema de ejes coordenados, pareja ordenada,...

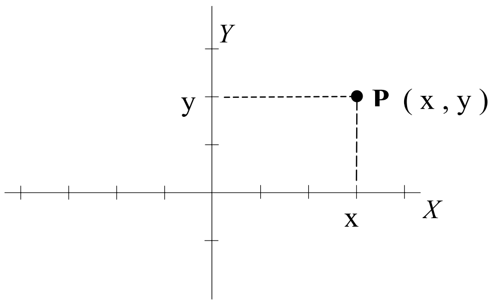
Sistema de Ejes Coordenados Rectangulares o Cartesianos.



Un sistema de ejes coordenados rectangulares o cartesianos consiste de dos rectas o dos ejes perpendiculares, que se cortan en el punto (0,0) llamado origen del sistema de coordenadas.

A la recta horizontal se le llama Eje X y a la recta vertical se le llama Eje Y.
El plano geométrico queda dividido en cuatro cuadrantes, en el orden como se muestra en la figura: I, II, III y IV. Se dice, por ejemplo, primer cuadrante, segundo cuadrante,..





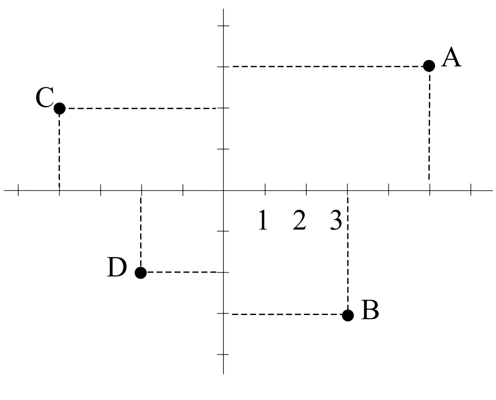
En cada eje o recta se representan los números reales a escala. En los semiejes de la derecha y de arriba (del origen), que limitan el primer cuadrante, se representan los números positivos; y a la izquierda y abajo del origen, se representan los números negativos.

Con el sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares se representan o localizan puntos en el plano, asignándole **una pareja o** par ordenado de números reales (x, y) a cada punto. La perpendicular bajada del punto P al Eje X determina el valor de x, y la perpendicular trazada de P al Eje Y determina el valor de y. Los valores x, y se leen sobre sus respectivos Eje X y Eje Y.

Los números ordenados **x**, **y,** que componen la pareja (x,y), son llamados las **coordenadas** del punto P representado en el plano; se denota por P(x, y), y se lee "el punto P de coordenadas x, y". Además, al valor de x, primera componente de la pareja, se le llama la **abscisa** de P, y al valor de y, segunda componente de la pareja, se le llama la **ordenada** de P.

Además, toda pareja ordenada de números reales representa un punto en el plano, y todo punto del plano se nombra o denota por medio de una pareja ordenada de números reales o coordenadas del punto. Hay una correspondencia uno a uno entre parejas y puntos del plano.

Ejemplos: Sean los puntos A, B, C y D representados en el plano cartesiano



El punto A con coordenadas 5 y 3, se denota por A (5,3), su abscisa es 5 y su ordenada 3. Los demás puntos se denotan así: B (3, -3), C(-4,2) y D(-2, -2). Cada punto está ubicado en distinto cuadrante. A está en el primer cuadrante, tiene ambas componentes positivas; D en el III cuadrante, ambas componentes son negativas; y C y B en el II y IV cuadrantes respectivamente, cada uno tiene sus componentes con signos opuestos o contrarios.

Producto Cartesiano $\Re \times \Re = \Re^2$**.** Se llama producto cartesiano $\Re \times \Re$ o $\Re^2$ al conjunto de parejas ordenadas de números reales x, y. La pareja o par ordenado (x,y) es un elemento del producto cartesiano $\Re^2$, o sea que $(x,y) \in \Re^2$. El plano cartesiano es el plano euclídeo o normal dotado de un sistema de ejes rectangulares o perpendiculares, que se identifica con $\Re^2$**,** esto es el producto cartesiano de $\Re$ por $\Re$:

$$\Re \times \Re = \Re^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \Re\}$$

Ejemplo: Las parejas: $(2, 3/2) \in \Re^2$, $(\pi, -2\sqrt{3}) \in \Re^2$**.** Pero $(\sqrt{-3}, 2) \notin \Re^2$**,** porque $\sqrt{-3} \notin \Re$ **(**recuerde que las raíces de números negativos no son reales**).**

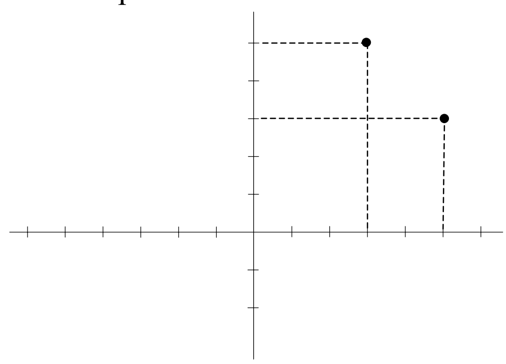
Existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los puntos del plano y las parejas ordenadas de números. A cada punto del plano corresponde una pareja ordenada y a cada pareja un punto.

Igualdad de Parejas: Dos parejas de números son iguales si tienen las mismas componentes y en el mismo orden.

(a, b) = (c, d) si y sólo si a = c, b = d

Ejemplo: Si (x + 2, -3) = (-4, 2y - 1), entonces
$x + 2 = -4 \quad \wedge \quad -3 = 2y - 1$
$\therefore \; x = -6 \qquad \therefore \; y = -1.$

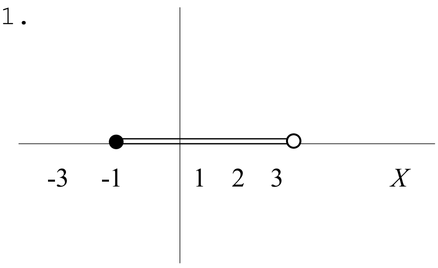
Las parejas $(3,5) \neq (5,3)$, porque los números no están en el mismo orden y representan diferentes puntos.



Relación: Se llama relación a cualquier conjunto de puntos en el plano cartesiano, o sea que, una gráfica en el plano o un conjunto de parejas ordenadas de $\Re^2$ es una **relación.**

Ejemplos de relaciones dadas por gráficas en el plano cartesiano $\Re^2$**.**

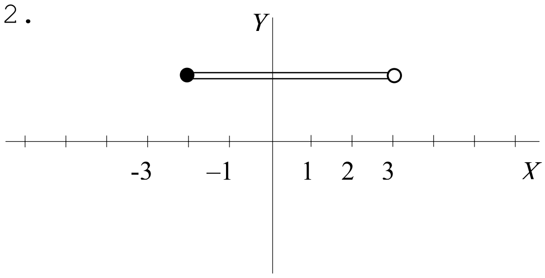
1.



Los puntos de la gráfica del intervalo [-2, 3[en el eje X, tienen como abscisas los valores de x en $-2 \leq x < 3$ y como ordenadas el mismo valor, y = 0.

Las parejas (-2, 0), (-1.5, 0), (-0.934, 0), (2.9, 0),... representan algunos puntos de esta relación.

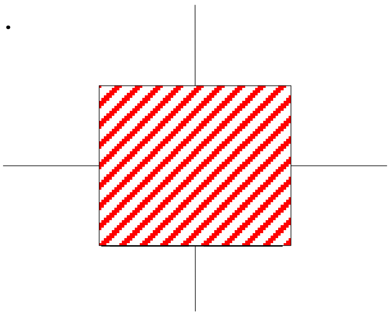
2.



El conjunto de puntos de la gráfica del intervalo [-2, 3[en el plano, tienen como abscisas los valores de x en $-2 \leq x < 3$, y todos tienen la misma ordenada, y = 2.

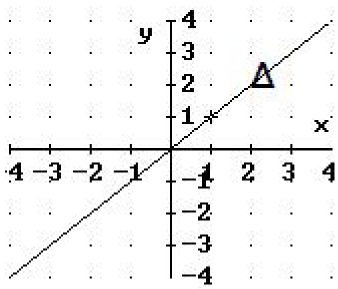
Las parejas (-2, 2), (-1.5, 2), (-0.934, 2), (2.9, 2),... representan algunos puntos o elementos de esta relación.

3.



En este plano, los puntos de la gráfica del rectángulo y su interior, tienen como abscisa los valores de x en $|x| \leq 3$ o sea $-3 \leq x \leq 3$, y como ordenadas valores de y en $-2 \leq y \leq 3$.

4.



Los puntos de la gráfica de esta recta tienen las dos coordenadas iguales, esto es y = x.

Esta recta es muy importante y se conoce como la **diagonal principal**, es bisectriz del primer y tercer cuadrante, y se denota por

$$\Delta = \{ (x, y) \in \Re^2 \mid y = x \}$$

Distancia entre dos Puntos

A B $d(A,B) = |x_2 - x_1|$

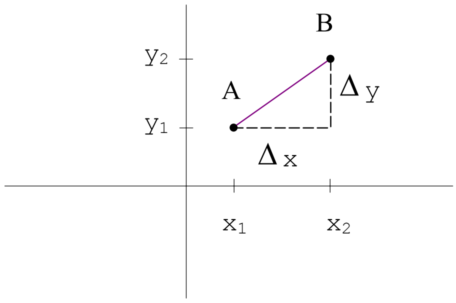
$d(A,B) = |\Delta x|$

x_1 x_2

3 5 $d(A,B) = |5 - 3| = 2$

Antes, en la recta numérica (de los números reales) se definió la distancia entre dos puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ como $d(A,B) = |x_2 - x_1| = |\Delta x|$, y además, sus propiedades.

Ahora, en el plano cartesiano, vamos a definir la distancia entre dos puntos cualesquiera A y B, considerando el segmento AB como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, donde los catetos serán Δx y Δy, lo que resolveremos aplicando el teorema de Pitágoras.

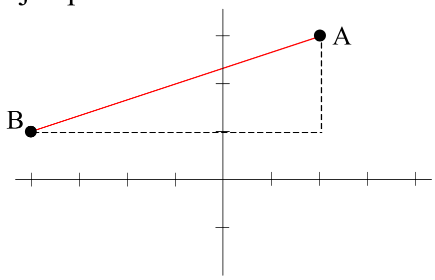


Para hallar la distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se aplicará la fórmula de Pitágoras:

$$d(A,B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo:



Para hallar la distancia entre A(2, 3) y B(-4, 1) se aplica Pitágoras:

$$\Delta x = -4 - 2 = -6, \quad \Delta y = 1 - 3 = -2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36 + 4}$$

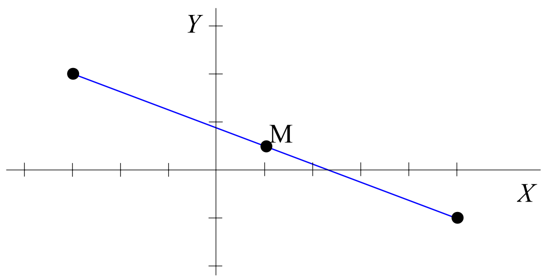
$$d(A,B) = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Punto Medio de un Segmento. También, antes en la recta numérica se determinó el punto medio de un segmento mediante la semisuma de las coordenadas de los puntos extremos del segmento.

A M B x_1 $\bar{x}$ x_2 3 5	$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\bar{x} = (3+5)/2 = 4$	En la recta numérica se definió el punto medio entre dos puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ como $M(\bar{x})$ tal que $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

En el plano cartesiano, el punto medio de un segmento tendrá por coordenadas las respectivas semisumas de las coordenadas de los extremos del segmento.

Ejemplo:

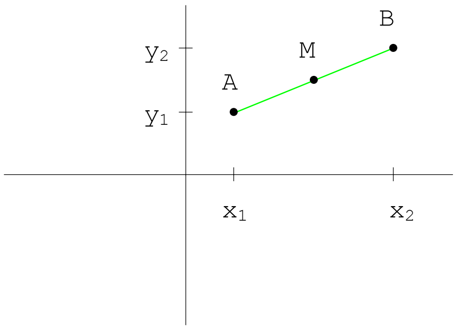


Para hallar el punto medio del segmento determinado por los puntos A(-3, 2) y B(5, -1), se aplica la fórmula

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego, M(1, ½) es el punto medio de AB



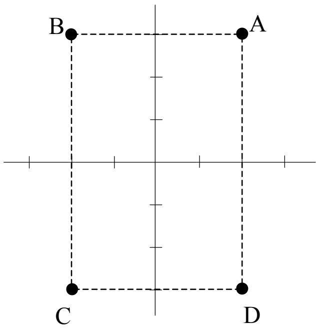
M($\bar{x}$, $\bar{y}$) es el punto medio del segmento AB, con extremos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), tal que

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Simetrías: En las gráficas de puntos se observan algunas simetrías con respecto a algún punto, o bien simetrías con respecto a una recta o eje. Para el caso, si M es el punto medio del segmento AB, entonces los extremos A y B son simétricos con respecto al punto medio M, esto es, las distancias AM y BM son iguales. Si dos parejas A y B tienen sus coordenadas invertidas, entonces A y B son simétricos respecto a la recta diagonal principal Δ

Ejemplo:



En el rectángulo ABCD, se tiene

A es simétrico de D respecto al Eje X.

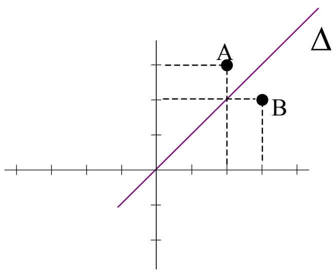
A es simétrico de B respecto al Eje Y.

A es simétrico de C respecto al origen (0,0)

Para un punto o pareja (x, y) su simétrico respecto al
  a) Eje X es (x, - y)
  b) Eje Y es (- x, y)
  c) Origen es (- x, - y)

punto	simetría		
	Eje X	Eje Y	origen
(- 3, 4)	(-3, - 4)	(3, 4)	(3, -4)
(- 2, - 4)	(- 2, 4)	(2, - 4)	(2, 4)
(3, - 6)	(3, 6)	(-3, -6)	(- 3, 6)

Inversa de una pareja o simetría respecto a la Diagonal Principal Δ: Invertir una pareja es cambiar el orden de sus componentes, esto es, la inversa de (x, y) es (y, x).

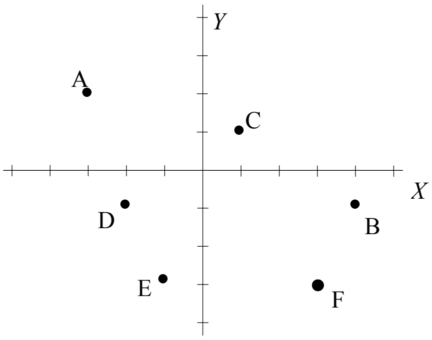


Ejemplo:

La inversa de la pareja A (2, 3) es B(3, 2), o sea su simétrico con respecto a la diagonal principal Δ.

EJERCICIOS 1.1

1. Indique las coordenadas de los puntos representados en la siguiente gráfica:



2. Ubique en el plano cartesiano los siguientes puntos:P(-3,-2),Q(2,-5/2), R($\sqrt{3}$,0), S(-1, 0.3)

3.a) Grafique todos los puntos que tienen ordenada y = 0. ¿Sobre que eje se encuentran?.
b) ¿Qué característica tienen los puntos localizados en el eje Y?. ¿En el eje X?.

4. Forme la pareja de números, si
a) la abscisa es -2 y su ordenada es el triple.
b) la abscisa es 9 y su ordenada es la raíz cuadrada de la abscisa.
c) la ordenada es 5 y la abscisa es su ordenada aumentada en 3.
d) la ordenada es - ½ y su abscisa el doble de la ordenada disminuida en 3.

5. Dadas la ecuación de la relación y una de las componentes de la pareja (x,y) calcule la otra componente:

a) $y = 3x - 1$, (-2,)
b) $y = \sqrt{1-x}$ (-8,)
c) $x^2 + y^2 = 4$, (, $\sqrt{3}$)
d) $3x + 2y = 5$, (, -1)
e) $xy^2 = 4$, (½,)

6. Si U = {1, 2, 3} Determine el producto cartesiano $U \times U = U^2$ y grafique en el plano

7. Grafique las siguientes relaciones si las parejas $(x,y) \in \Re^2$.

a) $-3 \leq x \leq 2$, $y = -2$
b) $x = 3$, $|y| \leq 2$
c) $x = 2$ d) $y = 2$
e) $|x| = 2$ f) $|y| = 2$
g) $xy > 0$ h) $x/y < 0$
i) $xy^2 > 0$ j) $x^2y < 0$

8. Calcule el valor de x y de y para que se verifique la igualdad de las parejas en:
a) $(x^2 + 1,\ |y|) = (5, 2)$;
b) $(\sqrt{18}, \sqrt{y+3}) = (2x + \sqrt{50}, \sqrt{2y})$

9. Calcule la distancia del segmento entre los puntos A y B. Dados:

a) A(3, -2) B(- 5, 2)
b) A($2\sqrt{6}$, -3/2) B($\sqrt{24}$, -2/3)
c) A($\sqrt{12}$, - $\sqrt{18}$) B(- $\sqrt{27}$, 3 $\sqrt{18}$)

10. Calcule el punto medio M de cada segmento determinado por los extremos A y B del ejercicio anterior.

11. Verifique que el punto P dado está en la mediatriz del segmento AB.
a) P(- 1, - 7/4); A(- 2, 3) y B(3, 1)
b) P(2, -2); A(- 2, - 4) y B(4,2)

12. Compruebe la fórmula para calcular el punto medio M, dados los extremos del segmento A y B. La distancia de A a M es igual que la distancia de M a B.

1.2 RELACIONES.

Objetivos

a) Definir una relación.
b) Determinar el dominio y rango o contradominio de una relación.
c) Calcular la relación inversa de una relación dada.

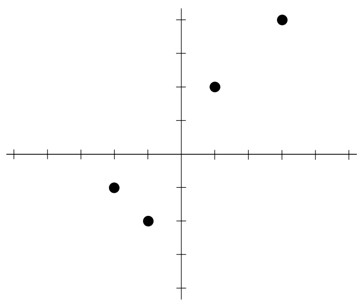
En nuestra vida cotidiana son frecuentes las relaciones de todo tipo: "madre-hijo", "profesor-alumno", "empleado-jefe", "paciente-médico", etc. En matemática, esta palabra "relación" es usada en forma semejante pero es preciso indicar el nexo entre los dos elementos como en: "a -igual- b", "x -menor que- y", "v -doble de- u" que se escribe simbólicamente por:
"a = b", "x < y" "v = 2u".

Cada una de esas "relaciones" tiene varias parejas de números que las verifican, cumplen o satisfacen la expresión, como por ejemplo:
Para **a = b** se tienen (3, 3), $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, (- 2/3, - 2/3), (π, π), (0.02, 0.02), ...
Para **x < y** se tienen (2, 5), (- 3, 0), $(\sqrt{2}, \pi)$, $(-\sqrt{24}, -\sqrt{8})$, (0.3, 0.31), ...
Para **v = 2u** se tienen (1, 2), $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, (0.001, 0.002), (- ½, -1), $(-\pi, -2\pi)$, ...

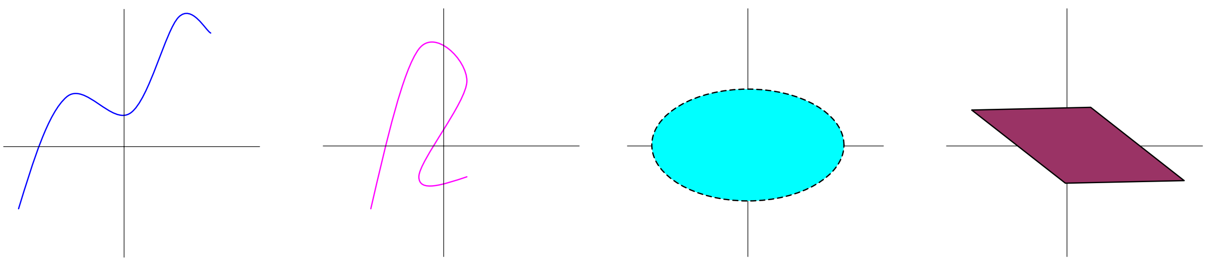
Relación: Todo subconjunto S de $\Re^2$ es una relación en los números reales $\Re$. Dos relaciones son iguales si tienen los mismos elementos.

Ejemplo 1:
El subconjunto
S = { (1,2), (3,4), (- 1,2), (- 2, - 1)} de $\Re^2$
es una relación en $\Re$.

Cualquier otra pareja no pertenece a S
por ejemplo, la pareja $(2, 1) \notin S$



Ejemplo 2: Las siguientes gráficas del plano cartesiano $\Re^2$ representan relaciones en $\Re$:



Nota: Una "relación" se puede determinar indistintamente por una frase, o por símbolos (letras, =, <, >,...) o bien, por medio de la lista de sus elementos o su gráfica. Se selecciona la forma más precisa, que generalmente es la simbólica.

Dominio y Rango de una relación: Se llama dominio de una relación al conjunto de las primeras componentes de las parejas de la relación; y se llama rango o contradominio de una relación al conjunto de las segundas componentes de sus parejas.

Ejemplo 1: En la relación $\{(3,2), (-5,3), (\sqrt{2},5), (0,2)\}$. El dominio D es el conjunto de las primeras componentes, D = $\{3, -5, \sqrt{2}, 0\}$ y el rango R es el conjunto de las segundas componentes, R = {2, 3, 5}.	Ejemplo 2: Dados A = {-2, -1, 0, 1, 2} y la relación en A como $\{(x,y) \in A^2 \mid y = x^2\}$ Halle su dominio y su rango. Solución: La relación en A es $\{(-1,1), (0,0), (1,1)\} \subset A^2$ Su D = {-1, 0, 1} y su rango R = {0, 1} Observe que $(-2,4), (2,4) \notin A^2$, porque $4 \notin A$

Ejemplo 3. Halle el dominio y rango para la relación $\{(x, y) \in \Re^2 \mid y = \frac{1}{x+3}\}$

Solución: En la ecuación de la relación dada, la variable x puede sustituirse por cualquier valor real, excepto x = -3, porque se anula el denominador y no es posible dividir entre 0.
Luego, su dominio es $D = \{ x \in \Re \mid x \neq -3 \}$.

Para saber el rango o contradominio, hay que buscar los valores prohibidos para y, y eso se consigue despejando x en función de y, así

Si $y = \frac{1}{x+3}$ entonces $x = \frac{1-3y}{y}$ en donde $y \neq 0$, por consiguiente,
el rango es $R = \{ y \in \Re \mid y \neq 0 \}$

En general, para determinar el dominio y el rango de una relación dada por una ecuación, se escribe la ecuación en forma explícita para cada variable y se excluyen los valores prohibidos (ceros del denominador, números negativos bajo un radical par). El dominio es un subconjunto del Eje X y el rango un subconjunto del Eje Y, o sean subconjuntos de los números reales. Dos relaciones iguales tienen el mismo dominio y el mismo rango.

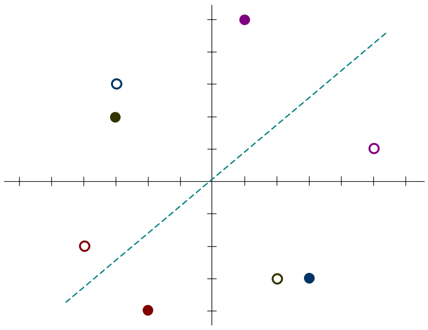
Inversa de una pareja ordenada y Relación Inversa: La inversa de una pareja ordenada de números se obtiene cambiando su orden: la primera componente pasa a ser segunda componente y la segunda componente al lugar de la primera. La inversa de la pareja (x, y) es (y,x). Una relación inversa se obtiene cambiando el orden de todas sus parejas, esto es invirtiendo todos sus elementos.

Observe que dominio y rango de la relación directa se intercambian para la relación inversa.

Ejemplos:
La inversa de la pareja (x, y) es (y, x),
Luego, la inversa de (- 3, 2) es (2, - 3).
Si S = {(-3,2), (1,5), (- 2, - 4), (3, - 3)},
entonces su inversa es
S^{-1} = {(2,-3), (5,1), (- 4, - 2), (- 3, 3)}.

Dominio de S es D(S) = {-3, -2, 1, 3}
Rango de S es R(S) = {-4, -3, 2, 5}
Dominio de S^{-1} es $D(S^{-1})$ = {-4, -3, 2, 5}
Rango de S^{-1} es $R(S^{-1})$ = {-3, -2, 1, 3}

Las gráficas de la relación directa y su inversa trazadas en el mismo plano son simétricas respecto a la diagonal principal Δ.



Para encontrar la relación inversa de una relación dada por medio de una ecuación, la regla más práctica es intercambiar las variables, o sea escribir **x** en lugar de **y**, y **y** en lugar de **x**.

Por ejemplo, la inversa de la relación: $x + y^2 = 5$ es $y + x^2 = 5$.

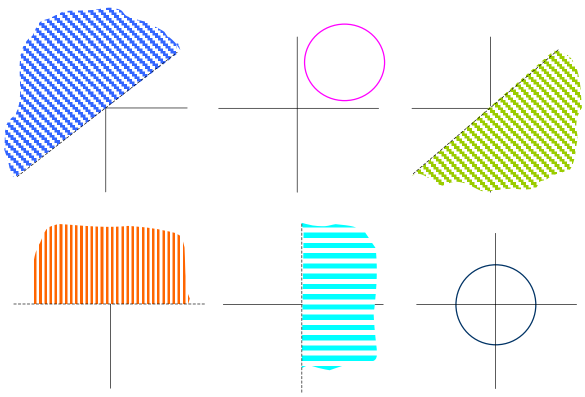
Ejercicios 1.2

1. Si A = {-1, 0, 1, 2} dé dos relaciones cualesquiera en A.

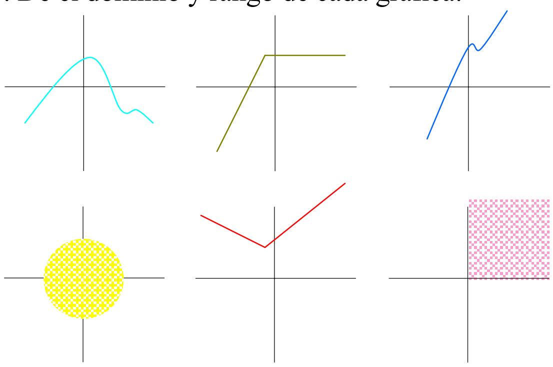
2. Determine el dominio y rango de las siguientes relaciones:
a) {(3,2), (5,0), (0, - 3), (½, ½)}
b) {(-2,1), (3, $\sqrt{2}$), (π, π), (-5,1)}

3. A cada expresión asígnele una de las gráficas siguientes:

a) $x > y$ b) $y \geq 0$ c) $x^2 + y^2 = 1$



4. Dé el dominio y rango de cada gráfica:



5. Dé el dominio y rango de cada relación:
a) $y = x$ b) $3x - 2y = 4$
c) $y = \dfrac{3}{x+1}$ d) $y = \dfrac{x}{x-1}$
e) $y = x^{1/2}$ f) $y = x^{-1/2}$
g) $x^2 + y^2 = 9$ h) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

6. Dé las relaciones inversas del ejercicio 2. Indique dominio y rango de las mismas.

7. Dé las ecuaciones de las inversas de las relaciones del ejercicio 5. Dé el respectivo dominio y rango.

1.3 Relaciones Notables: Circunferencia y Recta.

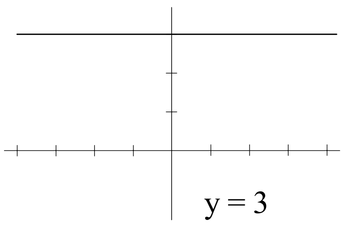
Objetivos.

a) Definir y graficar la ecuación de la circunferencia.
b) Definir y graficar la ecuación de la recta.

Gráficas de rectas y circunferencias en el plano $\Re^2$ son muy importantes en Matemática y es necesario conocer su ecuación o fórmula.

Las figuras siguientes son ejemplos sencillos de relaciones en el plano cartesiano:

1.

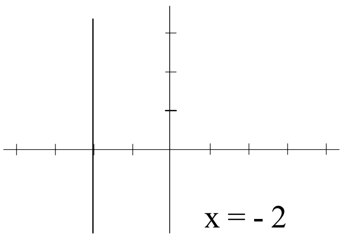


La gráfica es una recta paralela al eje X con la característica de que todos sus puntos tie-nen ordenada con el mismo valor, y = 3.

La relación es $\{ (x,y) \in \Re^2 \mid y = 3 \}$

El dominio, $D = \Re$ y el rango, $R = \{ 3 \}$.

2.

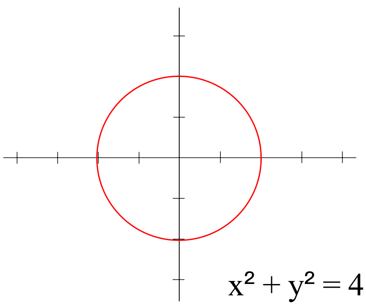


Aquí, la gráfica es una recta paralela al eje Y con la característica de que todos sus puntos tienen un mismo valor como abscisa,
x = - 2.

La relación es $\{(x,y) \in \Re^2 \mid x = -2 \}$

Con dominio $D = \{-2\}$ y rango $R = \Re$

3.



La gráfica corresponde a una circunferencia de centro en el origen y radio 2. Su caracte-rística está dada por la distancia de que todo punto P(x,y) de la circunferencia al centro (0,0) es igual al radio, o sea d(O,P) = 2.

$$d(O, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Su dominio y rango es el mismo intervalo

$$D = [-2,2] = R$$

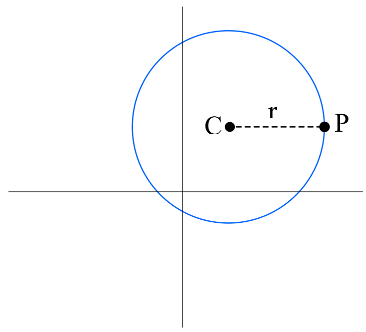
I. Ecuación de la Circunferencia.

La ecuación de una circunferencia de centro en el punto C(h,k) y radio r se obtiene cumpliendo con su definición de que la distancia de un punto cualquiera P(x,y) de la circunferencia al centro C es igual a r.

$$d(C,P) = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

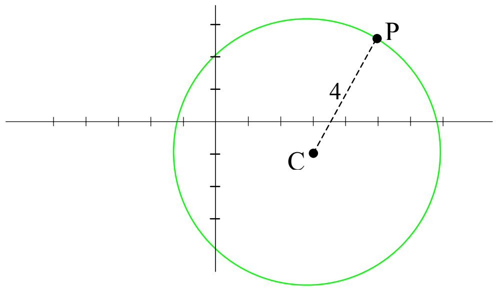


Ejemplo 1: Halle la ecuación de la circunferencia de centro en C(3, - 1) y radio r = 4.

Solución: Distancia $d(CP) = 4$

La ecuación es $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

Su dominio es D = [- 1,7] y
su rango es R = [- 5, 3]



Ejemplo 2: Dé la ecuación canónica de la circunferencia y su gráfica, si conoce

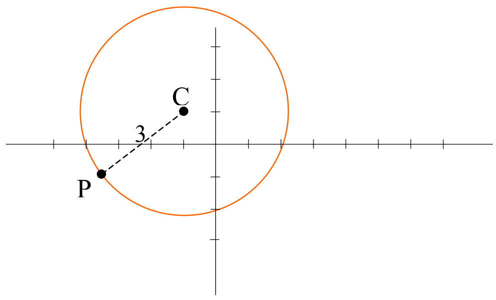
$$x^2 + 2x + y^2 - 3y = 23/4$$

Solución: Se agrupan los términos de acuerdo a la variable y se completan cuadrados: sumando lo mismo a ambos lados de la ecuación,

$$(x^2+2x+\mathbf{1}) + (y^2 -3y+\mathbf{9/4}) = 23/4 + \mathbf{1} + \mathbf{9/4}$$

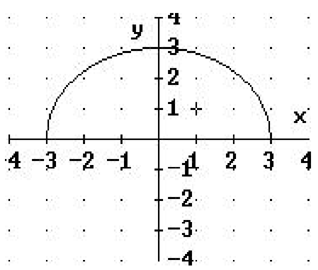
$$(x + 1)^2 + (y - 3/2)^2 = 9$$

Luego, el centro es C(- 1, 3/2) y r = 3.

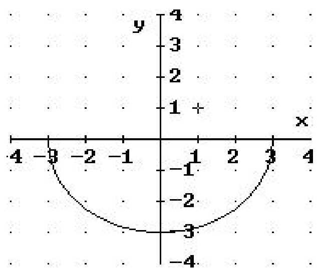


Partiendo de la ecuación de la circunferencia y despejando **y**, se tienen las ecuaciones de las **semicircunferencias**. Así de $y^2 = r^2 - x^2$ se obtienen $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, cuyas gráficas son

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$, D = [-r, r] y R = [0,r]



$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, D = [-r,r] y R = [-r,0]



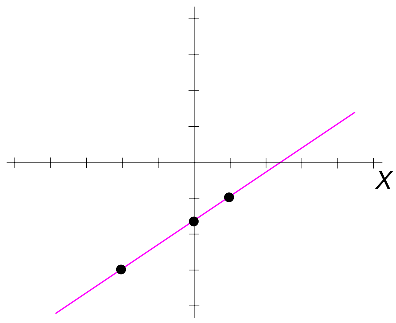
II. Ecuación de la Recta.

Por experiencia sabemos que dos puntos determinan el segmento de recta por el que pasa una recta, y que esa recta es única. En el plano cartesiano, una ecuación con dos variables de primer grado tiene como gráfica una recta, así $2x - 5 = 3y$ grafica como una recta. La fórmula normal de la recta es $\mathbf{Ax + By + C = 0}$, escrita en forma implícita, o bien $\mathbf{y = mx + b}$ en forma explícita.

A la fórmula normal $Ax + By + C = 0$, en las dos variables **x, y**, y con coeficientes numéricos A y B y constante C, corresponde como gráfica una **recta** en el plano cartesiano, y a toda recta del plano cartesiano le corresponde una ecuación como la fórmula escrita.
Por ejemplo, las ecuaciones $7x - 3y - 5 = 0$, o $x - ½y = 7/4$ tienen como representación gráfica sendas rectas en el plano cartesiano.

Ejemplo: La ecuación $2x - 3y = 5$ tiene como gráfica una recta que pasa por los puntos (x, y) que verifican la ecuación.
Obtenemos 3 puntos para trazar la recta, así:
Si $x = 1$, entonces $2(1) - 3y = 5 \therefore y = -1$
Si $x = 0$, entonces $2(0) - 3y = 5 \therefore y = -5/3$
Si $x = -2$, entonces $2(-2) - 3y = 5 \therefore y = -3$

Los puntos (1, -1), (0, -5/3) y (-2, -3) están sobre la gráfica de la recta o sea, están alineados.



Para trazar una recta, lo más práctico es buscar sus puntos de intersección con los ejes X e Y. Conocida la ecuación, los puntos de intersección se calculan dando el valor de cero a cada una de las variables, así: el punto de intersección con el

a) Eje X se obtiene cuando $y = 0$, y se denota por $\mathbf{I_x\,(x_1, 0)}$

b) Eje Y se obtiene cuando $x = 0$, y se denota por $\mathbf{I_y\,(0, y_1)}$.

En la gráfica del ejemplo anterior, los puntos de intersección son $I_x\,(5/2, 0)$ y $I_y\,(0, -5/3)$.

Otra fórmula normal de la ecuación de una recta es **y** = m**x** + b, escrita en forma explícita (la variable **y** aparece aislada). En esta forma, $y = mx + b$, el valor de m destaca la característica **inclinación** de la recta respecto al eje X orientado a la derecha, llamada pendiente de la recta, y el valor de b indica el corte en el eje Y, o sea $\mathbf{I_y\,(0, b)}$.

Ambas fórmulas: $Ax + By + C = 0$, $y = mx + b$ representan rectas en el plano. Y toda ecuación de una recta puede escribirse en una o en ambas formas.

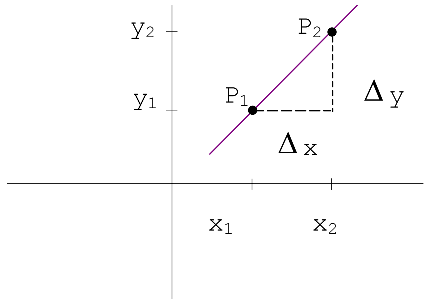
Ejemplo de ecuaciones equivalentes:

Ecuación de una recta	Forma Implícita	Forma Explícita
$3x + ½ = 5y$	$6x - 10y + 1 = 0$	$y = (3/5)x + 1/10$
$4y - 7 = 2x$	$2x - 4y + 7 = 0$	$y = ½x + 7/4$
$6 - ¾y = (5/3)x$	$5/3x + ¾y - 6 = 0$	$y = -(20/9)x + 8$

Pendiente: Si una recta pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ entonces se define su **pendiente** como el cociente de dividir la "elevación" entre el "desplazamiento" de los dos puntos, y se denota con la letra **m**

$$\mathbf{m} = \frac{elevacion}{desplazamiento} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente "mide" la inclinación de la recta.

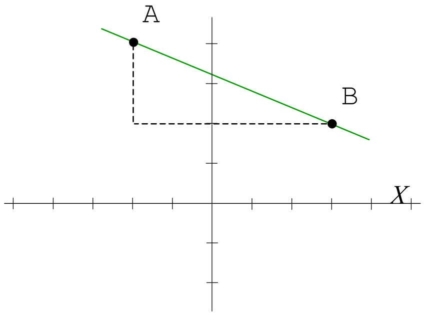


Ejemplo: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(- 2, 4) y B(3, 2).
Solución:
Para hacer el cálculo de la pendiente m, suponemos que $A = P_1$ y que $B = P_2$, así:

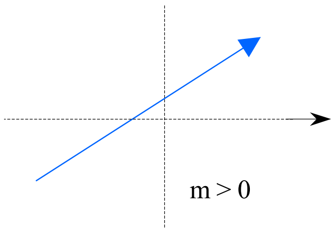
$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-4}{3-(-2)} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

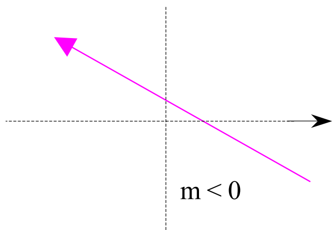
y m tendrá el mismo valor aún haciendo $A = P_2$ y $B = P_1$: La selección es arbitraria.

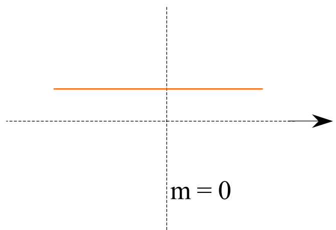
$$m_{BA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{-2-3} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$



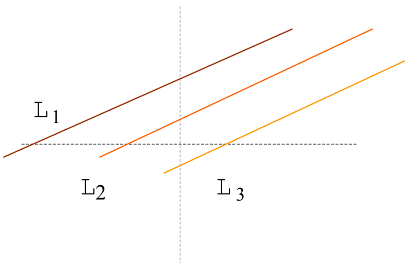
El valor de la pendiente de una recta depende de dos puntos cualesquiera que estén en la recta.
El valor de la pendiente de una recta será positivo, negativo o cero, según el ángulo que forme la recta con el eje X (orientado hacia la derecha) sea agudo, obtuso o llano, respectivamente.

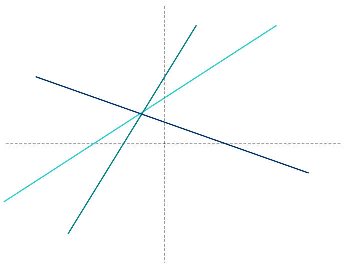


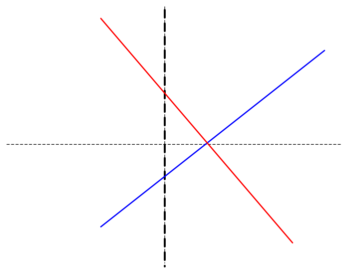




Cuando dos o más rectas son paralelas, todas tienen la misma pendiente. Si varias rectas pasan por un mismo punto entonces sus pendientes son distintos valores. Si dos rectas son perpendiculares sus pendientes son inversas y de signo contrario, o sea que $m_1 \cdot m_2 = -1$, donde m_1 y m_2 son las respectivas pendientes de las rectas perpendiculares. Si la recta L_1 tiene pendiente $m_1 = -3$ entonces su recta perpendicular XL tiene pendiente $m_2 = \frac{1}{3}$, de esta manera se cumple que $(-3)(\frac{1}{3}) = -1$.







Diferentes Procedimientos para obtener la Ecuación de una Recta:

Existen varios procedimientos para determinar la ecuación de una recta, dependiendo de los datos del problema. Un caso es cuando los datos conocidos son un punto y la pendiente de la recta, y otro caso cuando los datos conocidos son dos puntos por los que pasa dicha recta.

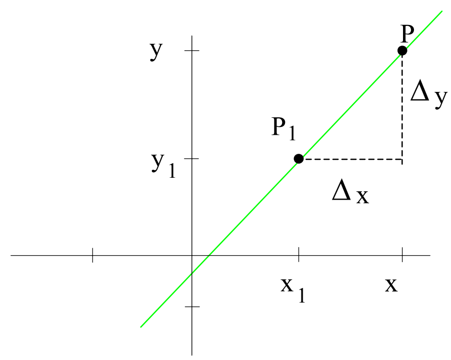
Datos: Pendiente y punto.

1. Forma p – p

Para hallar la ecuación de una recta conocidos **su pendiente m y un punto $P_1(x_1,y_1)$** de la misma recta, entonces se escoge cualquier otro punto P(x,y) sobre la recta y el valor de la pendiente del segmento P_1P se iguala a m, o sea $\mathbf{m}_{P_1P} = \mathbf{m}$**:**

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \iff y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma pendiente-punto: $\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$



Ejemplo:

Halle la ecuación de la recta con pendiente m = 3/4 y que pasa por el punto A(2,1).

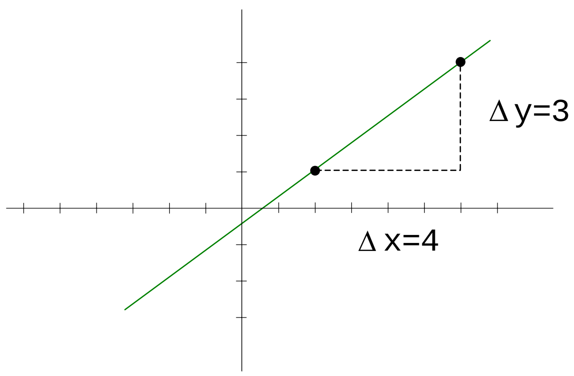
Solución:

Aplicamos la forma p-p, y se tiene

$$\frac{y-1}{x-2} = \frac{3}{4} \iff y - 1 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

Forma explícita: $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

Forma implícita: $3x - 4y - 2 = 0$



Ejercicio:

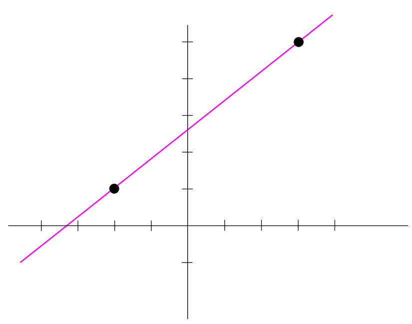
Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos (- 2, 1) y (3, 5).

Solución:

Primero calculamos la pendiente m y luego aplicamos la forma p-p. La pendiente es

$$m = \frac{5-1}{3-(-2)} = \frac{4}{5} \quad \text{entonces} \quad \frac{y-1}{x-(-2)} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \; y - 1 = \frac{4}{5}(x + 2) \iff \mathbf{y = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5}}$$



Datos: Pendiente y ordenada al origen.

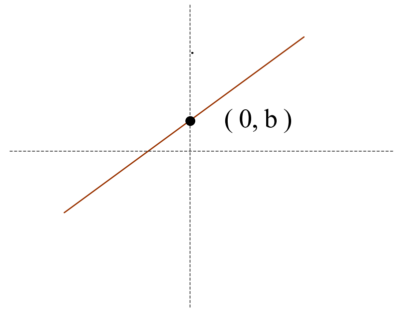
2. Forma pendiente-ordenada

Para hallar la ecuación de una recta cuando se conocen su pendiente m y su ordenada al ori-gen b, o sea su punto I_Y (0,b) de intersección con el Eje Y, entonces se sustituye (0,b) en la forma pendiente-punto, así:

Forma pendiente-punto: $y - y_1 = m(x - x_1)$

(0,b) en la forma p-p: $y - b = m(x - 0)$

Forma pendiente-ordenada: $y = mx + b$



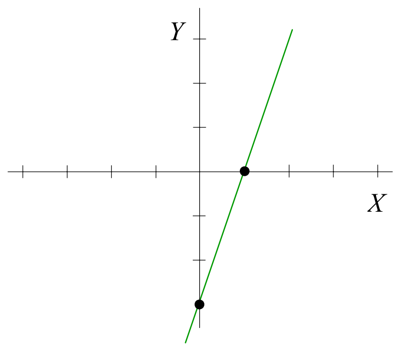
Ejemplo:

Para hallar la ecuación de una recta cuando los datos son su pendiente m = 4 y su ordenada al origen b = -3, o sea su punto I_Y (0,-3), entonces se sustituyen m y b en la forma pendiente-punto, así:

Forma pendiente-punto: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Esto es $y - (-3) = 4(x - 0)$

$\therefore$ $\mathbf{y = 4x - 3}$



Datos: Puntos I_X, I_Y, (intersectos con Ejes)

3. Forma: Intersección con los Ejes.

Si la recta tiene como intersecciones con los ejes X e Y los puntos I_X (a,0) e I_Y (0,b) con a, b $\neq$ 0, entonces su pendiente m es

$$m = \frac{b-0}{0-a} = -\frac{b}{a}$$

Sustituyendo m en la ecuación

pendiente-ordenada $y = mx + b$

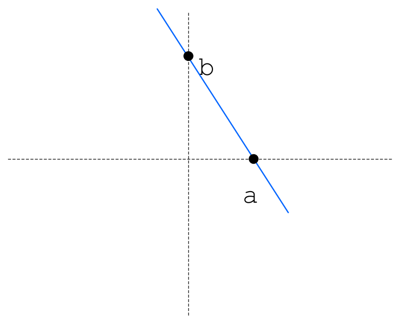
se tiene $y = -\frac{b}{a}x + b$

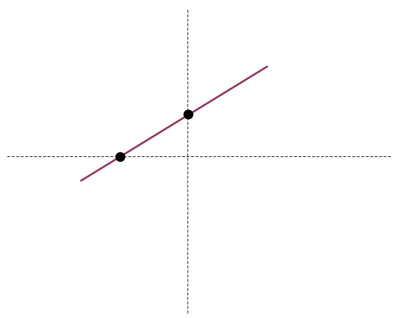
$\therefore$ **Forma intersección:** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ejemplo: Una recta con intersectos (-3,0) y (0, 2) tiene por ecuación $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$

su forma implícita es $2x - 3y + 6 = 0$

y su forma explícita $y = (2/3)\,x + 2$





En general, la **ecuación de una recta** se obtiene a partir de dos puntos conocidos P_1 y P_2 de la recta y un punto P(x, y) generador de la misma recta. La inclinación o pendiente de la recta es igual para cualquier par de puntos de la recta, entonces $\mathbf{m}_{P_1P} = \mathbf{m}_{P_1P_2}$

Datos: Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos dados de una recta y P(x, y) su punto genera-dor, entonces $\mathbf{m}_{P_1P} = \mathbf{m}_{P_1P_2}$.

$$\therefore \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$$

f. explícita $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x + (y_1 - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_2)$

$y = mx + b$

implícita $(y_2 - y_1)(x-x_1)=(x_2-x_1)(y-y_1)$

$Ax + By + C = 0$

Datos: Sean $P_1(2, -3)$ y $P_2(-1, 5)$ dos puntos de una recta y P(x, y) su punto generador, entonces $\mathbf{m}_{P_1P} = \mathbf{m}_{P_1P_2}$.

$$\therefore \frac{y+3}{x-2} = \frac{5+3}{-1-2} \Leftrightarrow y+3 = -\frac{8}{3}(x-2)$$

f. explícita $y = -\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$

f. implícita $8x + 3y - 7 = 0$

Ejemplos de Aplicaciones de la Ecuación de la Recta.

1. Pasar de la ecuación de la Recta escrita en forma implícita a la forma explícita y viceversa.

Ejemplo a):
Dada la ecuación implícita $3x + 2y - 6 = 0$ escriba su forma explícita $y = mx + b$.
<u>Solución:</u>
En la ecuación $3x + 2y - 6 = 0$, se despeja y,
así: $2y = -3x + 6$

$\therefore \quad y = -\frac{3}{2}x + 3,$

luego $\mathbf{m} = -\frac{3}{2}$, y $\mathbf{b} = 3$. Las dos ecuaciones: $\mathbf{3x + 2y - 6 = 0} \wedge \mathbf{y = -\frac{3}{2}x + 3}$ son equivalentes y su gráfica es la misma recta.

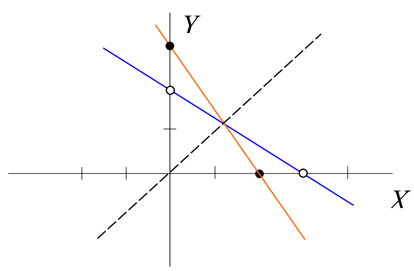
Ejemplo b):
Dada la ecuación explícita $y = \frac{5}{3}x - 8$, escriba su forma implícita $Ax + By + C = 0$.
<u>Solución:</u>
La ecuación $y = \frac{5}{3}x - 8$, se iguala a cero,
así: $0 = \frac{5}{3}x - y - 8$

$\therefore \quad 0 = 5x - 3y - 24,$

luego **A = 5, B = - 3, C = -24.** Ambas ecuaciones $\mathbf{y = \frac{5}{3}x - 8} \wedge \mathbf{5x - 3y - 24 = 0}$ son equivalentes y su gráfica es la misma recta.

2. Hallar la inversa de la ecuación de una recta dada. El procedimiento consiste en intercambiar las variables x e y.

Ejemplo:
Para hallar la ecuación de la inversa de la recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ se intercambian las variables, así: $\frac{y}{2} + \frac{x}{3} = 1$ y se tienen dos rectas simétricas con respecto a la diagonal principal Δ: $y = x$

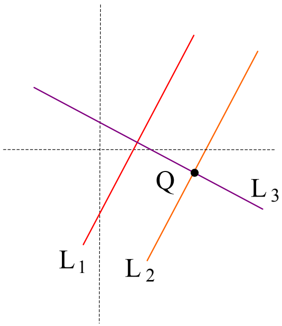


3. Dada una recta, hallar otra recta (paralela o perpendicular a la recta dada) que pasa por un punto del plano.

Dados una recta L_1 con ecuación **2y = 3x – 5** y un punto Q(4, - 1) fuera de la recta, entonces halle las ecuaciones de las rectas $\mathbf{L_2}$ **y** $\mathbf{L_3}$ que pasan por Q tales que sean:

i) L_2 paralela a L_1

ii) L_3 perpendicular a L_1.



Solución:

$\mathbf{L_1 : 2y = 3x - 5}$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

con $\mathbf{m}_1 = \frac{3}{2}$

i) La recta L_2 paralela a L_1 que pasa por Q (4, -1) tendrá la misma pendiente: $m_2 = m_1 = \frac{3}{2}$.

Luego, la ecuación para L_2 es

$L_2: \ \frac{y+1}{x-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow y + 1 = \frac{3}{2}(x - 4)$

$\therefore \quad \mathbf{y = \frac{3}{2}x - 7}$

ii) La recta L_3 perpendicular a L_1 trazada por Q(4, -1) tendrá como pendiente: $m_3 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{2}{3}$

Luego, la ecuación para L_3 es

$L_3: \ \frac{y+1}{x-4} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 4)$

$\therefore \quad \mathbf{y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}}$

Ejercicios 1.3

1. Grafique y dé la ecuación de la circun-ferencia con centro en C y radio r en:
a) C(2, -3), r = 2 b) C(-2, -1), r = ½
c) C(-5, 0), r = 2/3 d) C(3, -4), r = $\sqrt{2}$

2. Complete cuadrados y dé la ecuación y la gráfica de la circunferencia.
a) $x^2 + x + y^2 + 4y = - 13/4$
b) $x^2 + y^2 - 3y = 7/4$
c) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1$

3. Halle todos los puntos que equidistan
a) 3 del punto (3, -5). Grafique.
b) $\sqrt{3}$ del punto (-3, 4). Grafique.

4. Dé la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento de recta determinado por los extremos (3, -2) y (- 5, 4). Grafique.

5. Dé la ecuación de la recta que pasa por (3, - 4) y es paralela al eje: a) X, b) Y.

6. Averigüe gráfica y algebraicamente si los siguiente puntos están alineados:
a) (2, 6), (- 1, - 3/2), (- 4, - 9)
b) (1, 8/5), (5, 0), (- 2, 14/5)
¿ Es la recta a) perpendicular b)?

7. Halle la ecuación de la recta en la forma p-p, dados la pendiente m y un punto. Grafique.
a) m = 2/3, (3, -2) b) m = -3/4, (-4,1)
c) m = 0, (-3, 5) d) m = 4/3, (- 1,0)

8. Escriba las ecuaciones del ejercicio anterior en la forma y = mx + b. Indique la intersección con el eje Y, es decir el punto (0, b).

9. Escriba cada ecuación en forma y = mx + b, especificando el valor de m y el punto (0,b).
a) x + 2y = 3 b) 2x - 5y = - 6
c) 4x + 3y = 5 d) 3x - 4y = 0

10. Escriba las ecuaciones del ejercicio 9 en la forma $x/a + y/b = 1$. Grafique en el plano.

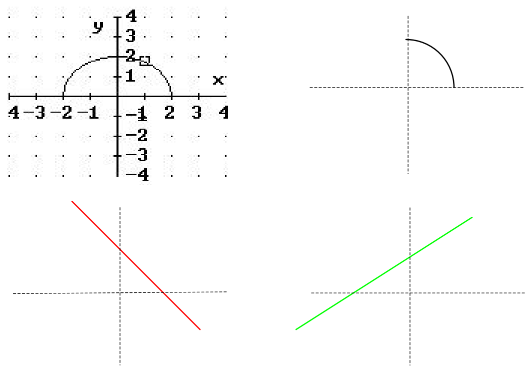
11. Grafique y dé la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
a) (3, -5) y (-2, 3) b) (-2, 7) y (-3, -1)
c) (3, 0) y (0, -5)d) (3, 5) y (0, -4)

12. Dada la recta $2x + 5y = 4$, entonces halle y grafique las ecuaciones de las dos rectas que pasan por (1, 1), tales que sean:
a) una paralela y b) la otra perpendicular a la recta dada.

13. Grafique las siguientes relaciones:
a) $y \geq 2x$ b) $y \leq 3x + 1$
c) $x^2 + y^2 \leq 1$ d) $x^2 + y^2 > 4$

14. Verifique si el punto (2, -3) está en la gráfica de:
a) $x^2 + (y + 1)^2 = 8$ b) $4x - 2y = 14$

15. Dé las relaciones inversas y sus respectivas ecuaciones para las siguientes gráficas:

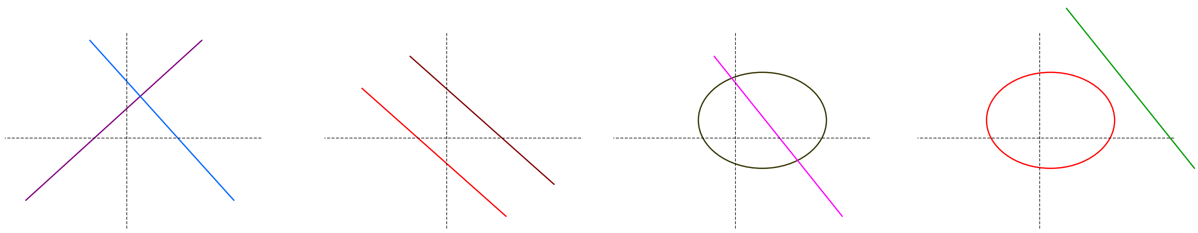


1.4 Sistemas de Ecuaciones

Objetivos

a) Definir sistemas de ecuaciones.
b) Resolver sistemas de ecuaciones lineales.
c) Resolver sistemas de ecuaciones no lineales.
d) Resolver sistemas de inecuaciones.

Definición: Se llama sistema de ecuaciones al conjunto de dos o más ecuaciones de relaciones. Sus gráficas, trazadas en un mismo plano, pueden intersectarse o no, y así se dice que el sistema es consisten o no, como en las siguientes figuras:



La solución de un sistema de dos o más ecuaciones simultáneas son los valores (x,y) que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones dadas y que representan al o los puntos comunes de intersección de las gráficas del sistema. Esto es, la o las soluciones son puntos comunes a las gráficas.

Ejemplo: El sistema de ecuaciones lineales

$$3x - y = 5$$
$$2x + y = 5$$

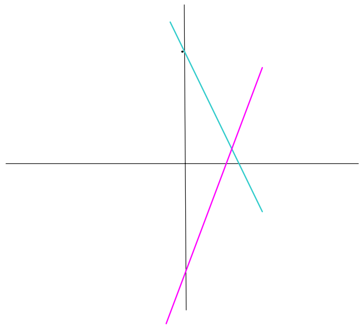
tiene como solución los valores

$$x = 2 \ \text{ y } \ y = 1$$

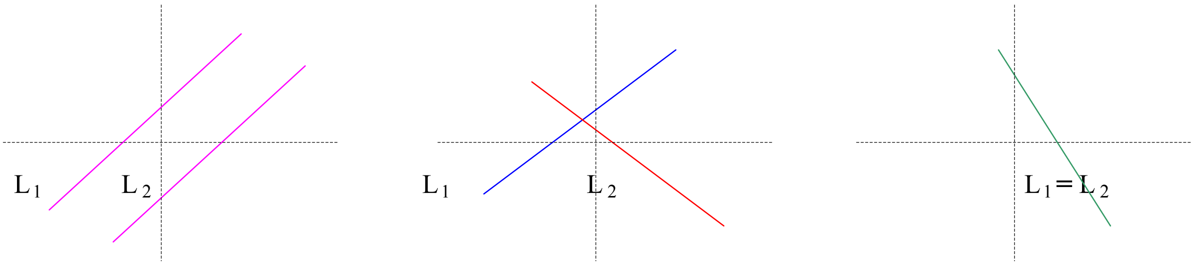
que satisfacen ambas ecuaciones:

$3{\cdot}2 - 1 = 5 \quad \wedge \quad 2{\cdot}2 + 1 = 5$

Entonces la solución es el punto, $S = \{ (2, 1) \}$



Sistema de ecuaciones lineales. Dado un sistema de dos ecuaciones lineales puede ocurrir que sus gráficas sean: a) paralelas, b) que se corten en un único punto, ó c) que coincidan en todos sus puntos. Según el caso, el sistema se dice, a) inconsistente, si las rectas no se cortan y no hay solución, $S = \phi$; b) consistente, la solución es el punto donde se cortan o sea el punto de intersección de las rectas, $S = \{P\}$; y c) consistente, con todos los infinitos puntos de ambas rectas iguales, como solución $S = L$.



Métodos de solución: Hay varios métodos o procedimientos para resolver un sistema de ecuaciones lineales; se explicarán los más usados: a) eliminación de variables, b) sustitución, c) igualando de variables.

a) **Eliminación de Variables.** Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, se escoge la variable que se desea eliminar y se multiplica cada ecuación por el coeficiente que esa variable tiene en la otra ecuación. Luego, ambas ecuaciones se restan (o suman) para eliminar la variable escogida. El problema se reduce a resolver una sola ecuación en la otra variable (la no eliminada). El proceso se repite con la variable restante.

Dadas dos ecuaciones lineales para eliminar la variable x, se multiplica cada ecuación por el coeficiente de la otra, o sea por a y r, así:

L_1: $ax + by = c \Rightarrow rL_1: rax + rby = rc$
L_2: $rx + sy = t \Rightarrow aL_2: arx + asy = at$

$\therefore aL_2 - rL_1 \Rightarrow (as - br)y = at - cr$
entonces $\mathbf{y = (at - cr)/(as - br)}$

Se aplica el mismo procedimiento con los coeficientes de la variable y:
$\therefore sL_1 - bL_2 \Rightarrow \mathbf{x = (cs - bt)/(as - br)}$

La comprobación o verificación de la solución se hace sustituyendo los valores de x e y en las ecuaciones dadas.

Ejemplo: Para resolver el sistema:
L_1: $3x - 2y = 7$
L_2: $2x + y = 0$

se multiplica L_1 por 2, y L_2 por 3 y luego se restan para eliminar la variable x:
$2L_1$: $6x - 4y = 14$
$\underline{3L_2: 6x + 3y = 0}$
$2L_1 - 3L_2: -7y = 14 \Rightarrow y = -2$

Después se elimina la variable y, asi
$L_1 + 2L_2$: $7x = 7 \Rightarrow x = 1$

El conjunto solución es $S = \{(1, -2)\}$ que satisface ambas ecuaciones, así:
L_1: $3(1) - 2(-2) = 7$
L_2: $2(1) + (-2) = 0$

b) Sustitución: Dado el sistema de dos ecuaciones lineales, para resolverlo, en una de las ecuaciones se despeja una de las variables y se sustituye en la otra ecuación, de modo que el problema se reduce a resolver una ecuación en una incógnita.

Dadas dos ecuaciones lineales, en la primera ecuación se despeja la variable x y se sustituye en la segunda ecuación, asi

L_1: $ax + by = c \Rightarrow x = (c - by)/a$
L_2: $rx + sy = t \Rightarrow r[(c - by)/a] + sy = t$

Operando en esta segunda ecuación, se tiene
$rc - rby + asy = at \Rightarrow (as - br)y = at - cr$

entonces $\mathbf{y = (at - cr)/(as - br)}$

Luego este valor de y se sustituye en x y se tiene que:

$$\mathbf{x = (cs - bt)/(as - br)}$$

La comprobación de la solución se hace sustituyendo los valores en las ecuaciones dadas.

Ejemplo: Para resolver el sistema:

L_1: $3x - 2y = 7$
L_2: $2x + y = 0$

se despeja la variable **y** en la segunda ecuación, por ser más fácil, y se sustituye en la primera:

$y = -2x$ entonces en L_1 se tendrá
$3x - 2(-2x) = 7 \Rightarrow 7x = 7 \therefore \mathbf{x = 1}$

Si en $y = -2x$, se hace $x = 1$, entonces se tiene
$\mathbf{y = -2(1) = -2}$

El conjunto solución es $S = \{(1, -2)\}$ tal que el punto satisface ambas ecuaciones:
L_1: $3(1) - 2(-2) = 7$
L_2: $2(1) + (-2) = 0$

c) Igualando variables: Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales por el método de igualar variables, se despeja en ambas ecuaciones la misma variable y se igualan sus segundos miembros; reduciendo el problema a resolver una ecuación con una incógnita.

Dadas dos ecuaciones lineales, en ambas ecuaciones se despeja la variable x, igualando sus segundos miembros, asi

L_1: $ax + by = c \Rightarrow x = (c - by)/a$
L_2: $rx + sy = t \Rightarrow x = (t - sy)/r$
luego, $(c - by)/a = (t - sy)/r$

Operando en esta ecuación, se tiene

$$rc - rby = at - asy$$
$$\Rightarrow (as - br)y = at - cr$$
$$\therefore \mathbf{y = (at - cr)/(as - br)}$$

Luego este valor de y se sustituye en x y se tiene que: $\mathbf{x = (cs - bt)/(as - br)}$

La comprobación o verificación de la solución se hace sustituyendo los valores de x e y en las ecuaciones dadas.

Ejemplo: Para resolver el sistema:

L_1: $3x - 2y = 7$
L_2: $2x + y = 0$

se despeja la variable **y** en ambas ecuaciones y se igualan sus segundos miembros, así:

$y = (3x - 7)/2$ $y = - 2x$	$(3x - 7)/2 = - 2x$

$\therefore$ $3x + 4x = 7 \Rightarrow \mathbf{x = 1}$
Luego, en $y = - 2x$, se sustituye la $x = 1$, se obtiene $y = -2(1) = -2$
La solución es $x = 1$, $y = -2$, $S = \{(1, -2)\}$

Comprobando, el punto en ambas ecuaciones:
L_1: $3(1) - 2(-2) = 7$
L_2: $2(1) + (- 2) = 0$

Sistema de Ecuaciones no Lineales.

Las ecuaciones de un sistema no siempre son lineales; el sistema puede estar formado, por ejemplo, de una circunferencia y una recta, de dos circunferencias, etc., y su solución consiste en hallar los puntos de intersección de sus gráficas. Según el caso, a veces conviene el método de sustitución y otros casos, el de igualdad de variables.

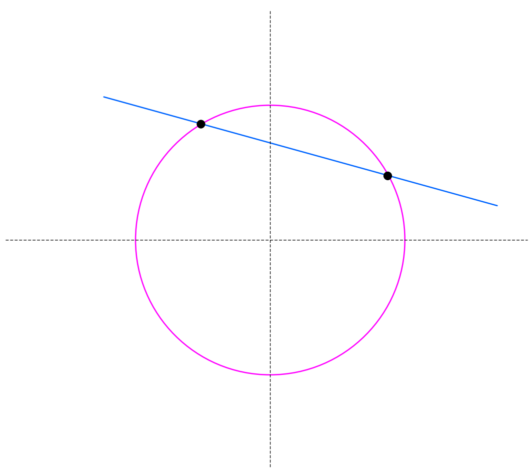
Ejemplo 1. Resolver el sistema:

$$x^2 + y^2 = 34$$
$$\mathbf{x + 4y = 17}$$

<u>Solución</u>: Se despeja x en la recta, y se sustituye en la circunferencia:
$x = 17 - 4y \Rightarrow (17 - 4y)^2 + y^2 = 34$

Operando se obtiene $y^2 - 8y + 15 = 0$
tal que $(y - 5)(y - 3) = 0$
con soluciones para $y = 5$, $y = 3$.

Al sustituir los valores de y, resulta:
para $y = 5$, se tiene $x = 17 - 20 = - 3$
para $y = 3$, se tiene $x = 17 - 12 = 5$



De donde, $S = \{ (-3, 5), (5, 3)\}$

Ejemplo 2. Resolver el sistema:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$(x - 3)^2 + y^2 = 7$$

Solución: Se despeja y^2 en la primera ecuación y se sustituye en la segunda:

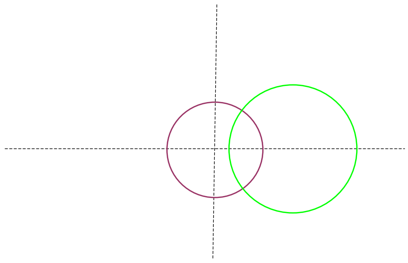
$$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + 4 - x^2 = 7$$

Operando se reduce a

$$- 6x + 13 = 7 \Rightarrow x = 1$$

Sustituyendo $x = 1$, se tiene

$$y^2 = 4 - 1^2 = 3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{3}$$



De donde, $S = \{ (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}) \}$

Sistema de Inecuaciones: Se resuelve gráficamente.

Ejemplo 1:

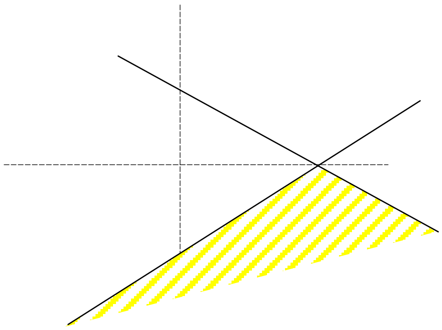
Grafique el conjunto solución del sistema

$$x + 2y \leq 6$$
$$2x - 3y \geq 12$$

Solución: Primero, se escriben las inecuaciones en forma explícita

$$y \leq - ½\, x + 3$$
$$y \leq 2x/3 - 4$$

La solución es la intersección de ambas regiones, identificada con dobles rayas.



Ejemplo 2.

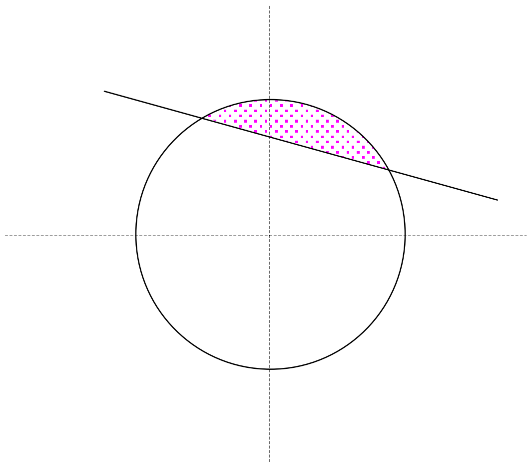
Grafique el conjunto solución del sistema:

$$x^2 + y^2 \leq 34$$
$$x + 4y \geq 17$$

Solución: Se despeja **y** en la recta y se grafica el sistema en el plano:

$$x^2 + y^2 \leq 34$$
$$y \geq - x/4 + 17/4$$

La solución es la intersección de ambas regiones, identificada con dobles rayas.



Ejercicios 1.4

1. Grafique e indique si los siguientes sistemas son consistentes o inconsistentes. Además si es consistente dé su solución.

a) $3x - 5y = 2$ b) $2x - 3y = 6$
$y = 3x/5 + 1$ $2y - 3x = 4$

c) $2x + y = 5$ d) $x^2 + y^2 = 4$
$3x - y = 5$ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$x + 3y = 5$

2. Resuelva los siguientes sistemas lineales aplicando los distintos métodos estudiados.

a) $3x - 5y = 2$ b) $3x/2 + 2y = 6$
$3y - 5x = 2$ $y = 3x/2 - 1$

c) $x + 3y = -\frac{1}{2}$ d) $4x + 2y = 5$
$2x - y = 4$ $3x - y = 5/2$

3. Si $y = 5x/2 - 1$, entonces dé la ecuación de:
a) su perpendicular que pasa por el punto (- 2, 0); y además, el punto de intersección de ambas rectas. Grafíquelas.
b) su inversa y el punto de intersección de ambas. Grafíquelas.

4. Resuelva los sistemas no lineales:

a) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 4$
$x + y = 1$

b) $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 3$
$x + y = 1$

5. Gráficamente resuelva los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $x^2 + y^2 + 2y + 1 \leq 4$
$x + y > 1$

b) $x^2 - 2x + y^2 - 2y \geq 3$
$x + y \leq 1$

6. Halle los números, si
a) La suma de dos números es 17, y su producto es 52.
b) La suma de un número con el duplo de otro es 11, y la suma de sus inversos es 8/15.
c) La diferencia de dos números es 5, y la suma de sus cuadrados es 73.

7. El largo de una sala excede al ancho en 30%. El perímetro es 70 m. Halle las dimensiones.

8. Si se tiene un capital de L 100 000 para invertir. Cierta suma se invirtió al 24% de interés y con el resto se compraron bonos que rinden el 30%. Si al año se obtiene un total de L 27 600 como ganancia ¿qué cantidad se invirtió en bonos?

9. La longitud de cierta circunferencia excede la longitud de su diámetro en 10 m. Calcule el diámetro y la longitud de la circunferencia.

10. Un pájaro vuela en la dirección del viento a razón de 75 km. por hora, y en la dirección contraria, cuando la velocidad del viento es el doble que en el primer caso, a razón de 30 km. por hora. Halle la velocidad del viento en los dos casos, y la del pájaro en aire tranquilo.

11. Un ruido recorrió 327 m. por segundo en la dirección del viento, y 316 m. por s. en la opuesta. ¿Cuál era entonces la velocidad del viento, y la correspondiente del sonido en aire tranquilo?

12. Dos trenes distan entre sí 150 km. Si parten el uno hacia el otro, se encuentran en hora y media. Si parten en una misma dirección, el uno alcanza al otro en 7 y media horas. Halle las velocidades de los dos.

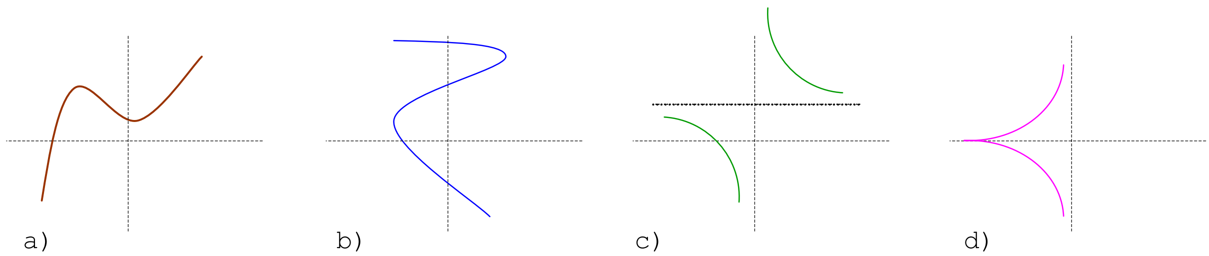
13. El oro pierde en agua 0.051 de su peso, y la plata 0.095. Si un objeto de 6 g. de peso, compuesto de oro y plata mezclados, pierde en agua 0.35 g ¿Cuántos gramos contiene el objeto de cada metal?

1.5 Funciones.

Objetivos

a) Definir una función.
b) Distinguir una función de una relación.
c) Calcular valores de una función.

En matemática, algunas **relaciones** son muy importantes. Esta relación importante y muy especial es la llamada **función**.
Entre las siguientes gráficas de relaciones en el plano, se identifican como funciones a) y c)



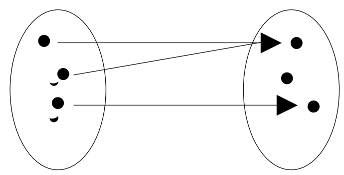
a) b) c) d)

Definición de función:

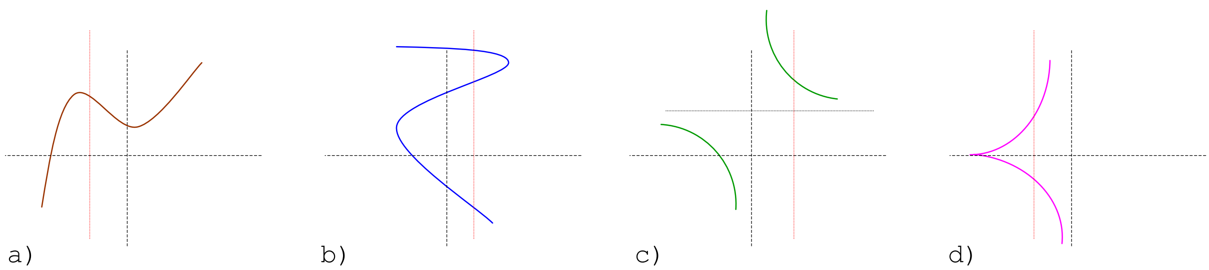
Una función es una relación en la que no hay dos parejas ordenadas con la misma primera componente y diferente segunda componente.

Una función asocia cada elemento en el dominio con uno y sólo uno en el rango.

Si f es una función cumple que cuando:
(x, y), (x, z) ∈ f, entonces y = z.



La gráfica de una función, en el plano cartesiano, se identifica con el trazo de una recta vertical que cortará a la gráfica en un solo punto. Las figuras b) y d) no corresponden a funciones.



a) b) c) d)

Nota: En una función a cada **x** se le asigna un solo valor de **y**. Pero esto no significa, que cada **y** corresponda a **un solo x**. Cuando es el caso, que cada **y** corresponde a una sola **x**, se dice función "uno a uno" o función "inyectiva". En las gráficas anteriores, (a) es una función uno a uno.
Cuando una relación está identificada por una ecuación, una manera de saber si la ecuación corresponde a una función, es resolviendo explícitamente para la variable **y,** y ver si está asociada con un solo valor de **x**. Por lo general se escribe como y = f(x) donde f(x) puede ser un polinomio en x, o una expresión racional algebraica en x, o un radical en x, etc.
Por ejemplo la expresión: $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$ corresponde a una función.

Un lenguaje muy usado es, decir que y es una función de x, y se denota por **y = f(x);** o bien, que f transforma a x en y, f: x → y También se dice, que **y** es la imagen de **x**, o que **x** es la pre-imagen de **y**	$x \to \boxed{f} \to y$ f "transforma" a **x** en **y** o sea que $(x, y) \in f$

Ejemplo: Dada la función f: $x \to y = x^2 + 3x - 1$, significa que f transforma a x en y.

Así, f: $2 \to y = 2^2 + 3\cdot 2 - 1 = 9$, o sea que $y = f(2) = 9$
Luego, la pareja **(2, 9)** $\in$ **f**, donde 9 es la imagen de 2.

Valores de la Función: Los valores de la función son los valores de sus imágenes, y el conjunto de imágenes o valores de **y** forman el **rango o contradominio** de la función.

Cuando la función es polinómica su dominio son los números reales, y su rango el conjunto de imágenes subconjunto o conjunto de los reales. En general, se dice que una función polinómica es una **función de valores reales.**

Ejemplo: Si $f(x) = x^3 + 3x - 5$, entonces calcule las imágenes para x = 0, 1, - 2.

Solución: Para hallar las imágenes se sustituye la variable x por sus valores: 0, 1, - 2.

$f(0) = 0^3 + 3\cdot 0 - 5 = -5$, entonces f: $0 \to -5$, $(0, -5) \in f$
$f(1) = 1^3 + 3\cdot 1 - 5 = -1$, entonces f: $1 \to -1$, $(1, -1) \in f$
$f(-2) = (-2)^3 + 3\cdot(-2) - 5 = -19$, entonces f: $-2 \to -19$, $(-2, -19) \in f$

Nota: Cuando f(x) es una función polinómica de grado impar, tanto su dominio como su rango son los números reales.

Los ceros de la función f(x) son los **valores de x** que hacen cero o anulan la expresión algebraica de f(x), o sea que el valor de x se asocia con su imagen cero, tal que la función f transforma x en cero, así f: $x \to 0$

Ejemplo: Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, entonces halle los ceros de la función polinómica.

<u>Solución:</u> Para hallar los ceros de la función se resuelve la ecuación $f(x) = 0$, o sea que se buscan los valores de x que tienen imagen cero, esto es, las raíces o soluciones de la ecuación polinómica $f(x) = 0$:

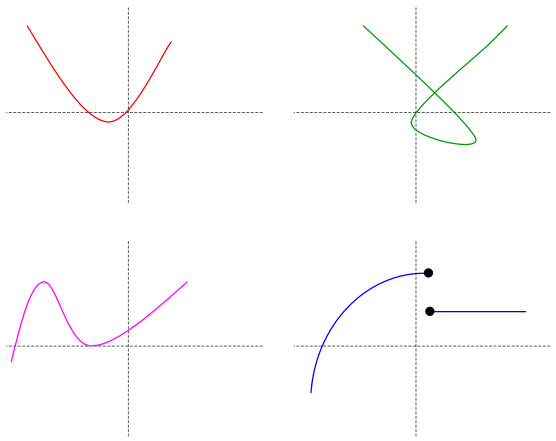
$$x^3 - 2x^2 + x = 0 \;\Rightarrow\; x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \therefore \quad x(x-1)^2 = 0$$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $x = 0$, $x = 1$ de multiplicidad 2, que son los ceros de la función f(x) dada, tal que las parejas $(0,0), (1,0) \in f$: estos puntos son las intersecciones de la curva o gráfica de la función con el Eje X. La intersección con el Eje Y, se obtiene haciendo $x = 0$, en este ejemplo $f(0) = 0$, y el punto (0, 0) es el origen que está en la intersección de ambos ejes. **Los ceros de f(x) son {0, 1}.**

Ejercicios 1.5

1. Selecciones las relaciones que son funciones:
A = {(3,1), (2,3), (5,-2), (0,0)}
B = {(1,-2), (3,-2), (4,3)}
C = {(-3,2), (3,2), (5,-1), (5,3)}

2. Indique las gráficas que corresponden a funciones:



3. En las siguientes ecuaciones despeje **y** y decida si su expresión corresponde o no a una función:
a) $3x - 2y = 5$ b) $x^2 + 2y = 5$
c) $x^2 + y^2 = 3$ d) $5y^2 + x = 6$

4. Escriba y como una función lineal en x:
$$\frac{x+1}{y+2} = \frac{3+x}{y-2}$$

5. Dada f(x) halle las imágenes indicadas:
a) $f(x) = 2x - 1$, $f(0)$, $f(½)$, $f(a)$, $f(a - 1)$
b) $f(x) = x^2 + 2x$, $f(-2)$, $f(-½)$, $f(b)$, $f(2b)$.

6. Dadas f(x) y su imagen, halle el valor de x:
a) $f(x) = 2x - 5$, si
$f(x) = -3$, $f(x) = 0$, $f(x) = a$, $f(x) = a + 1$
b) $f(x) = x^2 - 1$, si
$f(x) = 0$, $f(x) = 8$, $f(x) = a^2$, $f(x) = a^2 - 1$

7. Halle el rango de la función dados su fórmula y su dominio:
a) $f(x) = \sqrt{x-1}$, {1, 2, 5}
b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$, {1, 2, 3}

8. Escriba los enunciados siguientes como funciones en dos variables:

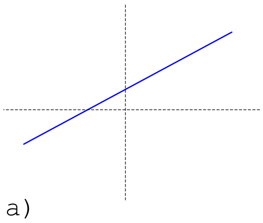
a) El área A de un triángulo de base b y altura 8 pulgadas. El área A en función de b.
b) El perímetro P de un rectángulo de base b y ancho 5 pulgadas. P en función de b.
c) La hipotenusa H de un triángulo rectángulo con un cateto a y el otro 6 cm. La hipotenusa H en función del cateto a.
d)Una pieza cuadrada de papel tiene de lado 30 cm. Se fabrica una caja cortando en sus cuatro esquinas, un cuadrado de lado x. Escriba el volumen V de la caja en función de x.

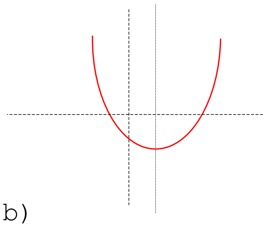
1.6 Gráficas.

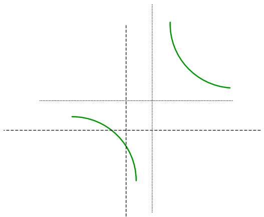
Objetivos

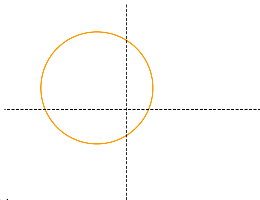
a) Reconocer algunas propiedades de las gráficas.
b) Trazar la gráfica de algunas funciones típicas.

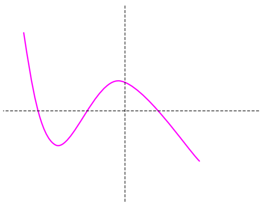
A toda relación expresada por una ecuación en dos variables corresponde una gráfica. La gráfica dependerá de la ecuación: polinómica, racional algebraica, radical, no algebraica, etc.

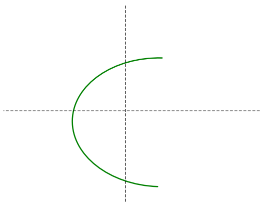

a)

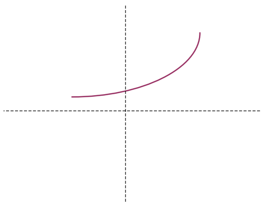

b)

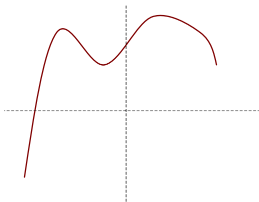

c)


d)


e)


f)


g)


h)

De las gráficas anteriores las d) y f) no corresponden a funciones. Además, se observa que la figura c) es discontinua en $x = 2$.

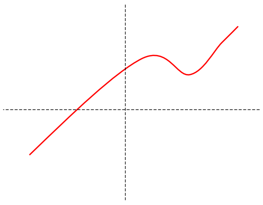
Propiedades de las gráficas:

1. <u>Continuidad o discontinuidad.</u>

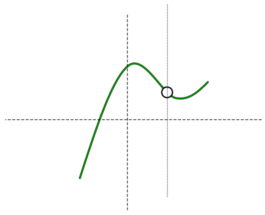
Una gráfica es continua, intuitivamente, en un intervalo de su dominio si se puede trazar "sin levantar el lápiz del papel". Si presenta agujeros o cortes, se dice que es discontinua en un punto o en tal intervalo del dominio.

Nota: estos conceptos o interpretaciones son completamente informales o intuitivos (gráficos).

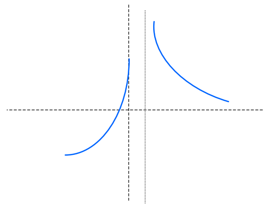
Ejemplos: Las siguientes gráficas se clasifican como continuas en su dominio o discontinuas en un punto o intervalo del dominio:



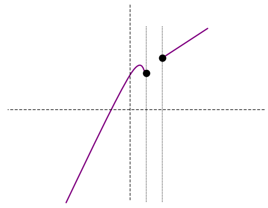
continua
en D



discont.
en x = 2

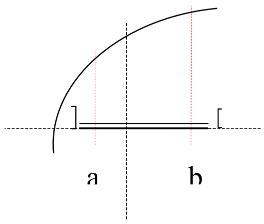
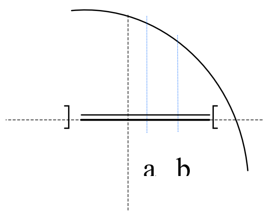
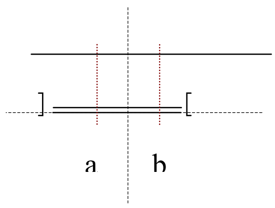


discont.
en x = 1

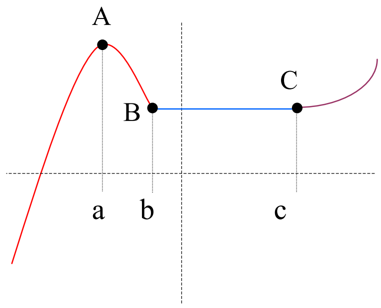


discont.
en]1,2[

2. <u>Creciente, decreciente o constante:</u> Sean y = f(x) una función, I =] x_1, x_2 [un intervalo del dominio de la función y a, b son valores de I tal que a < b , entonces se dice que f(x) es creciente, decreciente o continua si cumple condiciones como:

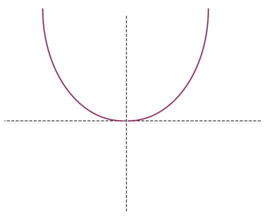
	Una función f es creciente en el intervalo I, si f(a) < f(b) cuando a < b en I. Para todo a, b en I.
	Una función f es decreciente en el intervalo I, si f(a) > f(b) cuando a < b en I. Para todo a, b en I.
	Una función f es constante en el intervalo I, si f(x) = c, para todo x en I, o sea que f(a) = f(b) = f(d) = ... = c, $\forall x \in$ I.

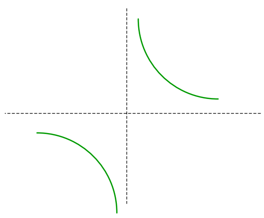
Ejemplo: La grafica de f(x) es continua en su dominio $\Re$, y en los intervalos de $\Re$ se tiene que
f es creciente en $]-\infty, a[\cup]c, \infty[$
f es decreciente en $]a, b[$
f es constante en $[b, c]$
Los puntos A, B, C son puntos críticos de f porque es donde la gráfica de f cambia de creciente a decreciente o a constante o viceversa

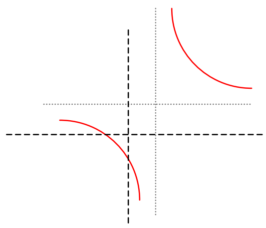


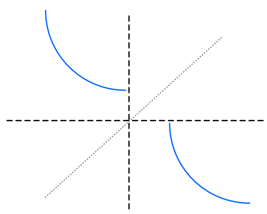
3. Simetrías: Algunas gráficas presentan simetrías con respecto a una recta o a un punto. El eje o recta de simetría es la mediatriz de los puntos simétricos. El punto de simetría es el punto medio del segmento que une los dos puntos simétricos de la gráfica.

Ejemplos de gráficas simétricas:


Simétrica al eje Y


Simétrica al origen

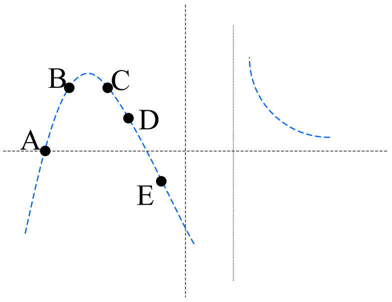

Simétrica al punto (1,1)

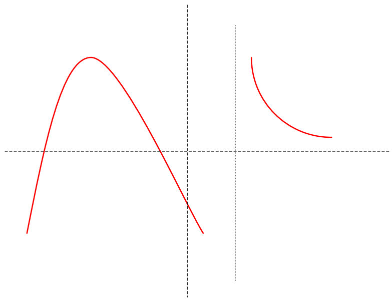

Simétrica a y = x.

Pasos para graficar. Para trazar el esquema gráfico de una ecuación existen métodos matemáticos muy aproximados y en la actualidad, con la computadora, puede hacerse la gráfica con más precisión y rapidez. En este curso usaremos unos cuantos puntos y un poco de "imaginación". Los pasos a seguir son sencillos y se resumen como sigue:

1. Se escribe la ecuación en forma explícita, y = f(x).
2. Se calculan algunas parejas ordenadas, dándole a la x valores "fáciles" para el cálculo de y. Son ideales los puntos de intersección con los ejes, los puntos críticos, entre otros.
3. Estas parejas se representan en el plano cartesiano.
4. Estos puntos se unen con trazos continuos bajo el supuesto que se están graficando funciones de valores reales.
5. Si hay valores reales excluidos en el dominio de la función su gráfica presentará discontinuidades (unas veces de “punto” y otras de “salto”).

Ejemplo: Para graficar la función y = f(x), se calculan parejas (x,y), que satisfacen la ecuación de la función, se representan en el plano con los puntos A, B, C, ..., G y después estos puntos se unen por medio de una curva obteniendo una posible gráfica o figura como la siguiente:



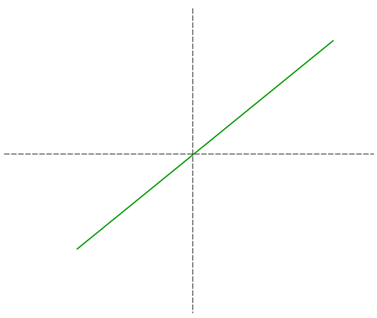


Nota: Por aproximación, las posibilidades para una curva pueden ser varias, sólo cuando se aplican los conocimientos del Cálculo se obtiene la curva verdadera, por ahora será una "supuesta".

Gráficas Típicas: En este curso las ecuaciones a graficar serán las conocidas y/o típicas. Para graficar las siguientes ecuaciones de funciones se calcularán algunas parejas que satisfagan la ecuación y esos puntos servirán de guía para trazar la curva.

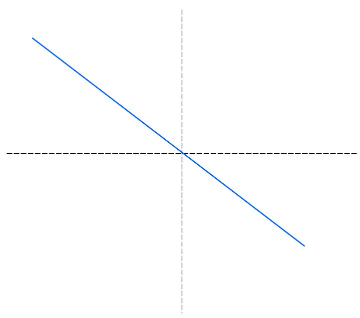
1. f(x) = x   o   y = x

x	- 3	- 2	0	1	3	
y	- 3	- 2	0	1	3	



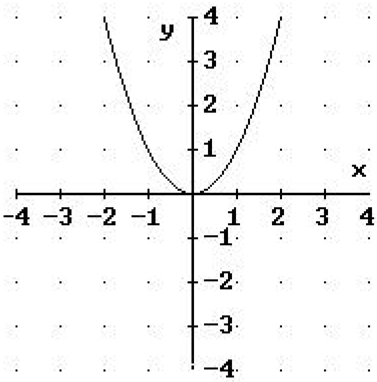
2. f(x) = - x

x	- 3	- 2	0	1	3	
y	3	2	0	-1	-3	



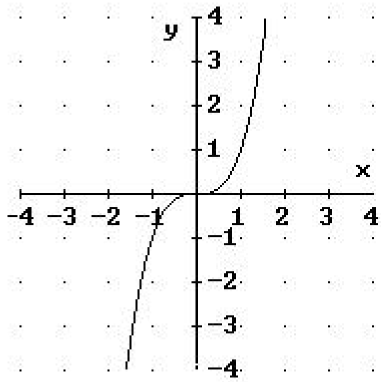
3. $f(x) = x^2$

x	- 2	- 1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9



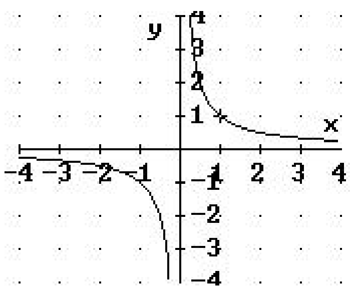
4. $f(x) = x^3$

x	- 2	- 1	0	1	2	3
y	- 8	- 1	0	1	8	27



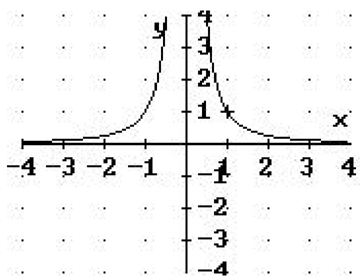
5. $f(x) = 1/x$

x	- 2	- 1	0	½	1	2
y	- ½	- 1	‖	2	1	½



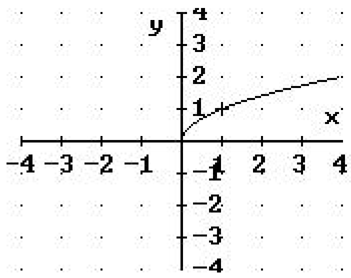
6. $f(x) = 1/x^2$

x	- 2	- 1	0	½	1	2
y	¼	1	‖	4	1	¼



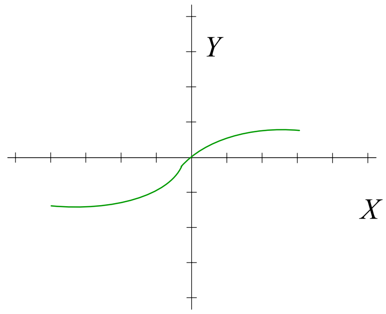
7. $f(x) = \sqrt{x}$ o $f(x) = x^{½}$

x	0	¼	1	4	9	10
y	0	½	1	2	3	$\sqrt{10}$



8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ o $f(x) = x^{1/3}$

x	- 8	- 1	0	1	8	10
y	- 2	- 1	0	1	2	$\sqrt[3]{10}$



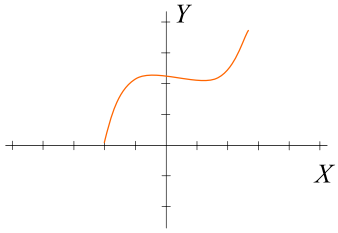
Ejercicios 1.6

1. Para cada una de las funciones graficadas anteriormente, indique, si es posible:

a) su dominio y su rango
b) continuidad en $\Re$ o discontinuidad en algún valor de x.
c) intervalos de crecimiento, decrecimiento o donde la función es constante.
d) simetrías respecto al origen o al Eje Y

2. ¿Por qué la gráfica de una función no puede ser simétrica respecto al Eje X?

3. Dada la siguiente gráfica



Trace la gráfica simétrica respecto al:
a) Eje Y b) Eje X
c) origen d) recta y = x

4. Grafique:
a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = x^2 + 1$
c) $f(x) = (x + 1)^{-1}$ d) $f(x) = (x + 1)^{½}$

1.7 Operaciones con Funciones.

Objetivos:

a) Definir las operaciones algebraicas con funciones
b) Reconocer las funciones pares o impares
c) Definir la composición de funciones y sus propiedades.

Operaciones con funciones. Sean dos o más funciones, la operación algebraica se realiza con las imágenes de cada x en las funciones dadas, obteniéndose una nueva imagen para esa x. El conjunto de estas imágenes forman los valores de la función resultado de la operación efectuada.

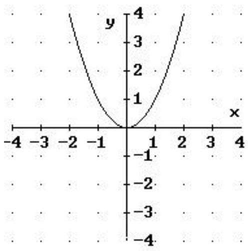
Sean f = { (1,3), (2,5), (3,-2), (4,4)*} y
g= { (1,0), (2,4), (3,7), (5,0)*}. Entonces
f + g = { (1,3), (2,9), (3,5) }, porque

(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 3 + 0 = 3
(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 5 + 4 = 9
(f + g)(3) = f(3) + g(3) = -2 + 7 = 5
D(f + g) = D(f) $\cap$ D(g)= {1, 2, 3}
* No se puede operar con diferentes valores de x.

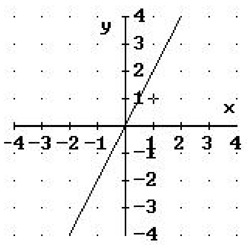
Dadas las funciones f(x) y g(x), entonces

f(x) + g(x) = (f + g)(x)
f(x) - g(x) = (f - g)(x)
f(x) · g(x) = (f · g)(x)
f(x) $\div$ g(x) = (f $\div$ g)(x), si g(x) $\neq$ 0

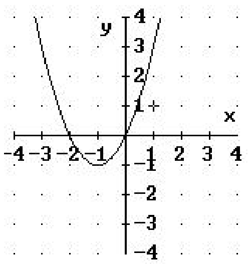
El dominio D(f*g) de la función resultante es la intersección de los dominios, pero cuando se trata del cociente f/g, es D(f) $\cap$ D(g) - {x: g(x) = 0}



$f(x) = x^2$



$g(x) = 2x$



$f(x) + g(x) = x^2 + 2x$

Ejemplo: Si f(x) = x² y g(x) = 2x, entonces la gráfica de f(x) + g(x) está a la izquierda.

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4	1	0	1	4	9
g(x)	-4	-2	0	2	4	6
f(x)+g(x)	0	-1	0	3	8	15

Entonces $f(x) + g(x) = x^2 + 2x = h(x)$
donde h(x) = (f + g)(x)
El dominio de f, g y h es $\Re$

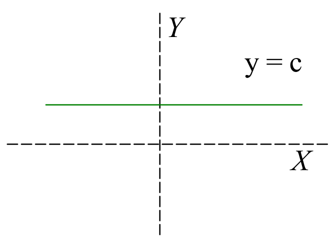
Las demás operaciones algebraicas tienen los siguientes resultados:

$f(x) - g(x) = x^2 - 2x$
$f(x) \cdot g(x) = x^2(2x) = 2x^3$
$f(x) \div g(x) = x^2 \div 2x = x/2$, si $x \neq 0$

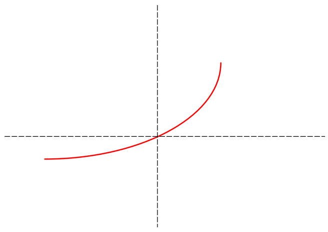
En el caso de la división el dominio son los reales meno cero, D = $\Re$ - { 0 }.

Función constante:

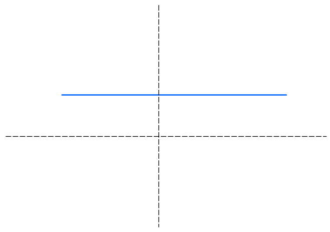
La recta paralela al Eje X, **y = c**, donde c es cualquier número real, es la gráfica de la función constante. Su dominio es $\Re$ y su rango el conjunto { c }. Interseca o corta al eje Y en el punto (0, c).



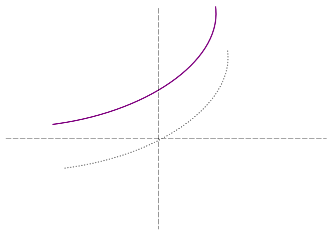
Si a una función f(x) se le suma o resta una función constante g(x) = c, entonces la gráfica de f(x) se desplaza en el eje Y, hacia "arriba" si c > 0 o hacia "abajo" si c < 0.



f (x)

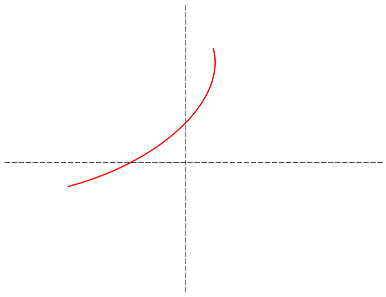


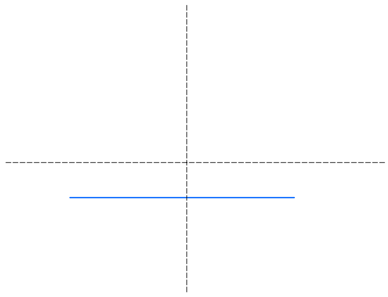
c

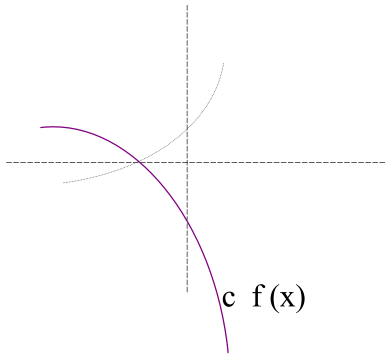


f (x) + c

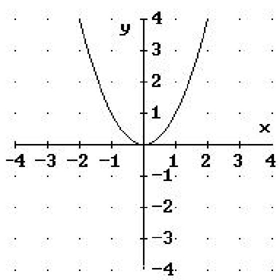
¿ Qué le ocurre a f(x) si se multiplica por la función constante g(x) = c ?
Recuerde que se opera únicamente con los valores de la función y se conserva la preimagen: x.
La función producto c f(x) "crece verticalmente" si c > 1;
se "reduce verticalmente" si 0 < c < 1; y toma los valores opuestos si c < 0.



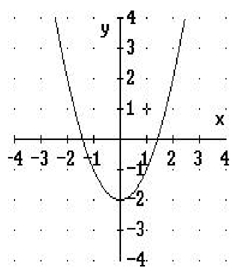




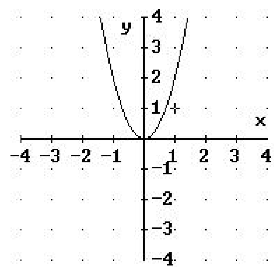
Ejemplo: Con las funciones $f(x) = x^2$ y la constante $g(x) = 2$, se obtienen las funciones
$h(x) = f(x) - g(x)$, $j(x) = g(x)\ f(x)$, tal que $h(x) = x^2 - 2$ y $j(x) = 2x^2$ grafican:



$f(x) = x^2$



$h(x) = x^2 - 2$



$j(x) = 2x^2$

Características Particulares.

Las operaciones algebraicas anteriores afectan únicamente los valores de las imágenes (opera con las imágenes). Se preguntará que "operación" tiene que ver con las **preimágenes o argumento** de la función. Estos casos son muy particulares, y obedecen a reglas especiales. Primero se estudiarán algunas definiciones y al final la operación llamada "composición de funciones".

Función Lineal: Por confianza en nuestro idioma, llamamos función lineal a las funciones que se grafican con rectas: f(x) = mx +b. Pero hablando con propiedad, sólo son funciones lineales las ecuaciones de f(x) = mx, con b = 0, representadas gráficamente por un haz de rectas que pasa por el origen de coordenadas, y que cumplen con las siguientes dos condiciones de "linealidad":

Una función lineal f(x) debe cumplir que: i) $f(a + b) = f(a) + f(b), \ \forall\, a, b \in \Re$ ii) $f(c\,a) = c\, f(a), \ \forall\, c \in \Re$	La function f(x) = mx es lineal porque cumple: i) $f(a + b) = m(a + b) = ma + mb = f(a) + f(b)$ ii) $f(c\,a) = m(c\,a) = c\,(ma) = c\, f(a)$

Ejemplos de funciones no lineales**:**

1. Si $f(x) = x^2$ entonces $f(a + 3) \neq f(a) + f(3)$ $(a + 3)^2 \neq a^2 + 3^2$ $a^2 + 6a + 9 \neq a^2 + 9$	2. Si $f(x) = x^2$ entonces $f(3a) \neq 3 \cdot f(a)$ $(3a)^2 \neq 3(a^2)$ $9a^2 \neq 3a^2$	3. Si $f(x) = -4x + 3$ entonces $f(a - 6) \neq f(a) - f(6)$ $-4(a - 6) + 3 \neq -4(a) + 3 - [(-4)(6) + 3]$ $-4a + 27 \neq -4a + 24$

Existen otras propiedades u "operaciones" no algebraicas dentro de la misma función, que sólo afectan a la preimagen. Antes consideremos las funciones impares y también las funciones pares.

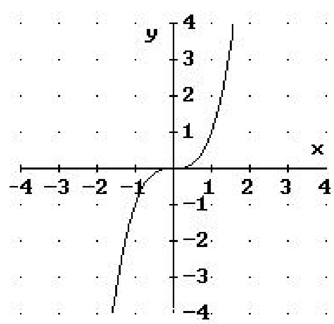
Función Impar: Una función es impar cuando **f(- x) = - f(x)** o bien **f(x) = - f(- x).** Esto es, al cambiar el signo de x también cambia el signo de y. Si f es impar, cuando (x,y) ∈ f también (-x, -y) ∈ f.

Su gráfica es simétrica respecto al origen, o sea que todo par de puntos simétricos equidista del origen de coordenadas.

Ejemplo: La función $f(x) = x^3$ es una función impar porque f(- x) = - f(x)

Así, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Su gráfica es simétrica respecto a (0,0)



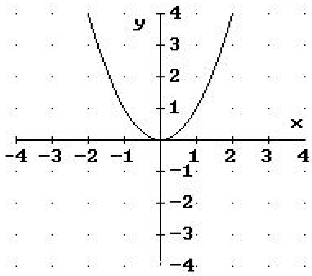
Función Par: Una función es par cuando **f(- x) = f(x).** Esto es, al cambiar el signo de x no cambia el signo de y. Si f es par, cuando (x,y) ∈ f también (-x,y) ∈ f.

Su gráfica es simétrica respecto al Eje Y, o sea que todo par de puntos simétricos equidista del Eje Y.

Ejemplo: La función $f(x) = x^2$ es una función par porque $f(- x) = f(x)$

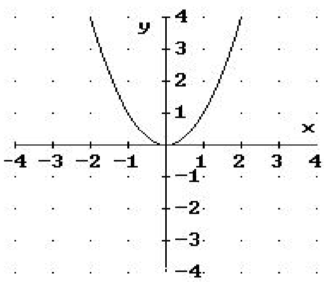
Así, $f(- x) = (- x)^2 = x^2 = f(x)$

Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.

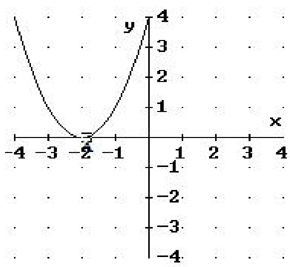


Veremos que, si la función f(x) se cambia por f(x + a), se produce un desplazamiento de su gráfica en el Eje X; y si f(x) se cambia por f(ax) se produce un "ensanchamiento o compre-sión" o "adelgazamiento o estiramiento" de su gráfica, dependiendo del valor y signo de **a**.

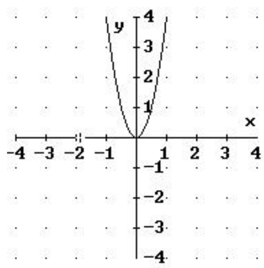
Ejemplo: Para $f(x) = x^2$, se muestran las gráficas de f(x + 2) y de f(2x).



$f(x) = x^2$



$f(x+2) = (x+2)^2$



$f(2x) = 4x^2$

Composición de Funciones.

Por fin, si en f(x) se cambia la x por otra función g(x), se tiene f [g(x)] que es la llamada función compuesta de f con g, y estará definida siempre que el valor de g(x) esté en el dominio de f. Se formalizará la definición de esta **operación no algebraica** de composición de funciones o también llamada "función de función", de la manera siguiente:

Dadas dos funciones f y g, se define la función compuesta de f con g, denotado por $f \circ g$, a la función que resulta de aplicar la función f a la imagen g(x) si es posible, como

$$f: g(x) \rightarrow f[g(x)] = (f \circ g)(x)$$

El dominio de la función $f \circ g$ es el conjunto de los valores del dominio de g tales que g(x) estén en el dominio de f.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, dashed, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & f\,[g(x)] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1: Si f = {(3, 2), (4, -1), (5, 4), (-2, 1)} y g = {(1, 3), (2, - 2), (3, 5), (0, 4)}, entonces calcule las funciones a) $f\circ g$, b) $g\circ f$, c) $f\circ f$, d) $g\circ g$

a) $(f\circ g)(x) = f[g(x)]$

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{g} & & \xrightarrow{f} & \\ 1 & \to & 3 & \to & 2 \\ 2 & \to & -2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 5 & \to & 4 \\ 0 & \to & 4 & \to & -1 \\ & & \xrightarrow{f\circ g} & & \end{array}$$

Esto es,
$(f\circ g)(1) = f[g(1)] = f(3) = 2 \therefore (1,2) \in f\circ g$
$(f\circ g)(2) = f[g(2)] = f(-2)= 1 \therefore (2,1) \in f\circ g$
$(f\circ g)(3) = f[g(3)] = f(5) = 4 \therefore (3,4) \in f\circ g$
$(f\circ g)(0) = f[g(0)] = f(4) = -1 \therefore (0,-1)\in f\circ g$

Entonces, $f\circ g = \{(1,2),(2,1),(3,4),(0,-1)\}$
cuyo dominio es $D(f\circ g) = \{0,1,2,3\} \subset D(g)$

b) $(g\circ f)(x) = g[f(x)]$

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ 3 & \to & 2 & \to & -2 \\ 4 & \to & -1 & \xrightarrow{no} & \\ 5 & \to & 4 & \xrightarrow{no} & \\ -2 & \to & 1 & \to & 3 \\ & & \xrightarrow{f\circ g} & & \end{array}$$

Esto es,
$(g\circ f)(3) = g[f(3)] = g(2) =-2 \therefore (3,-2) \in f\circ g$
$(g\circ f)(4) = g[f(4)] = g(-1)$ no está definida
$(g\circ f)(5) = g[f(5)] = g(4)$ no está definida
$(g\circ f)(-2) = g[f(-2)] = g(1) = 3 \therefore (-2,3) \in g\circ f$

Entonces, $g\circ f = \{ (3,-2), (-2,3) \}$
cuyo dominio es $D(g\circ f) = \{-2, 3\} \subset D(f)$

c) $(f\circ f)(x) = f[f(x)]$

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{f} & \\ 3 & \to & 2 & \xrightarrow{no} & \\ 4 & \to & -1 & \xrightarrow{no} & \\ 5 & \to & 4 & \to & -1 \\ -2 & \to & 1 & \xrightarrow{no} & \\ & & \xrightarrow{f\circ f} & & \end{array}$$

Esto es,
$(f\circ f)(3) = f[f(3)] = f(2)$ no está definida
$(f\circ f)(4) = f[f(4)] = f(-1)$ no está definida
$(f\circ f)(5) = f[f(5)] = f(4) =-1 \therefore (5,-1) \in f\circ f$
$(f\circ f)(-2) = f[f(-2)] = f(1)$ no está definida

Entonces, $f\circ f = \{ (5,-1) \}$ cuyo dominio es $D(f\circ f) = \{ 5 \} \subset D(f)$

c) $(g\circ g)(x) = g[g(x)]$

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{g} & & \xrightarrow{g} & \\ 1 & \to & 3 & \to & 5 \\ 2 & \to & -2 & \xrightarrow{no} & \\ 3 & \to & 5 & \xrightarrow{no} & \\ 0 & \to & 4 & \xrightarrow{no} & \\ & & \xrightarrow{g\circ g} & & \end{array}$$

Esto es,
$(g\circ g)(1) = g[g(1)] = g(3) = 5 \therefore (1,5) \in g\circ g$
$(g\circ g)(2) = g[g(2)] = g(-2)$ no está definida
$(g\circ g)(3) = g[g(3)] = g(5)$ no está definida
$(g\circ g)(0) = g[g(0)] = g(4)$ no está definida

Entonces, $g\circ g = \{ (1,5) \}$ cuyo dominio es $D(g\circ g) = \{ 1 \} \subset D(g)$

Ejemplo 2: Si $f(x) = 3x + 1$, y $g(x) = x^2 - x$, entonces halle las funciones: a) $f\circ g$, b) $g\circ f$, c) $f\circ f$, d) $g\circ g$

<u>Solución</u>:

a) $(f\circ g)(x) = f[g(x)]$
$= 3g(x) + 1$
$= 3(x^2 - x) + 1$
$(f\circ g)(x) = 3x^2 -3x + 1$

$x \xrightarrow{g} (x^2 - x) \xrightarrow{f} 3(x^2 - x) + 1$

donde el dominio es $D(f\circ g) = \Re$

b) $(g\circ f)(x) = g[f(x)]$
$= (f(x))^2 - f(x)$
$= (3x + 1)^2 - (3x - 1)$
$(g\circ f)(x) = 9x^2 + 3x + 2$

$x \xrightarrow{f} 3x + 1 \xrightarrow{g} (3x + 1)^2 - (3x - 1)$

donde el dominio es $D(g\circ f) = \Re$

c) $(f \circ f)(x) = f[f(x)]$
$= 3f(x) + 1$
$= 3(3x + 1) + 1$
$(f \circ f)(x) = 9x + 4$

$x \xrightarrow{f} 3x + 1 \xrightarrow{f} 3(3x + 1) + 1$

donde el dominio es $D(f \circ f) = \Re$

d) $(g \circ g)(x) = g[g(x)]$
$= ((g(x))^2 - g(x)$
$= (x^2 - x)^2 - (x^2 - x)$
$(g \circ g)(x) = x^4 - 2x^3 + x$

$x \xrightarrow{g} (x^2 - x) \xrightarrow{g} (x^2 - x)^2 - (x^2 - x)$

donde el dominio es $D(g \circ g) = \Re$

Propiedades de la Composición de Funciones: Para esta operación se enunciarán algunas de las propiedades algebraicas conocidas: Si la composición está definida para f, g y h, entonces se tiene que la operación es cerrada, asociativa, no es conmutativa, tiene

1. La existencia de neutro o identidad: la función identidad es $i(x) = x$ (es la misma $y = x$, **no** $y = 1$), tal que

$$\mathbf{f \circ i = f \ \wedge \ i \circ f = f}$$

2. La existencia de inversa para f, sólo cuando f es inyectiva o uno a uno, sólo así f^{-1} es función y cumple que

$$f \circ f^{-1} = i \ \wedge \ f^{-1} \circ f = i$$

Si $f(x) = x^3 - 5x$ y $i(x) = x$, entonces
$(f \circ i)(x) = f[i(x)]$
$= (i(x))^3 - 5(i(x))$
$= x^3 - 5x = f(x)$
$(i \circ f)(x) = i[f(x)] = f(x)$

La función $f(x) = x^3$ es inyectiva, entonces su inversa es la función $f^{-1} = x^{1/3}$, tal que
$(f \circ f^{-1})(x) = i(x) \quad \wedge \quad (f^{-1} \circ f)(x) = i(x)$
$f[f^{-1}(x)] = (f^{-1})^3 = [x^{1/3}]^3 = x = i(x)$
$f^{-1}[f(x)] = (f(x))^{1/3} = [x^3]^{1/3} = x = i(x)$

<u>Nota</u>: f^{-1} denota la función inversa de f respecto de la composición de funciones. No iguale f^{-1} con 1/f, inverso de la multiplicación de funciones. El inverso multiplicativo lo denotaremos por $[f(x)]^{-1} = 1/[f(x)]$.

3. Composición de funciones <u>no es conmutativa</u>

Si f y g son dos funciones diferentes, entonces
$f \circ g \neq g \circ f$
$f[g(x)] \neq g[f(x)]$

$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f[g(x)]$ es diferente de
$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$

Ejemplo: Si $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$,
Entonces:

i. $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^3 + 1$
$= [\sqrt{x}]^3 + 1$

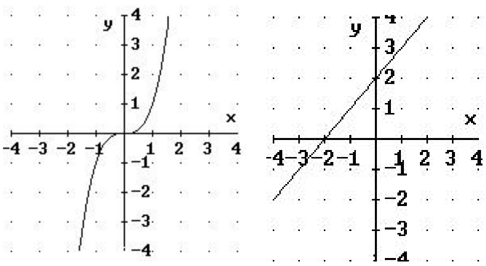
ii. $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x)}$
$= \sqrt{x^3 + 1}$

$\therefore \quad [\sqrt{x}]^3 + 1 \neq \sqrt{x^3 + 1}$

o sea que $\quad f \circ g \neq g \circ f$

Ejercicios 1.7

1. Apartir de las gráficas siguientes:



obtenga la gráfica de f + g, f - g

2. Si $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = x + 1$, entonces dé las funciones y su dominio:

a) f(x) + g(x) b) f(x) - 3g(x)
c) f(x)·g(x) d) f(x) ÷ g(x)

3. Si $f(x) = x^2$, entonces grafique:

a) f(x) + 3 b) f(x) - 4
c) f(x) - 1 d) 3f(x)
e) ½f(x) f) - 2f(x)

4. Si $f(x) = x^2 + 3x$, compruebe que:

a) $f(a^2 + 2) \neq f(a^2) + f(2)$

b) $f(2a + 3) \neq f(2a) + f(3)$

5. Indique la paridad de las siguientes funciones: (par, impar o ninguna) :

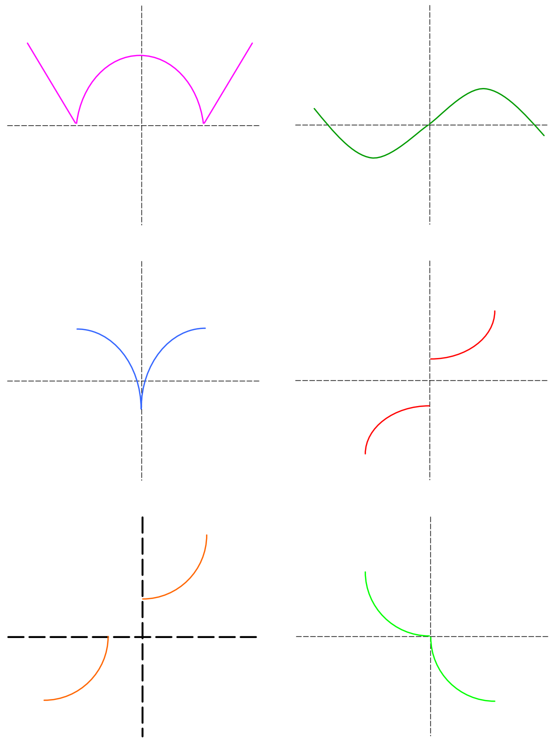
a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = x^2 + 2x$

c) $f(x) = x^3 + 1$ d) $f(x) = x^3 - x$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ f) $f(x) = \sqrt{x}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

6.Indique la paridad de las siguientes gráficas:



7. A partir de la gráfica de $f(x) = x^3$ grafique:

a) f(x + 1) b) f(x - 2)
c) f(½ x) d) f(2x)

8. Dadas las funciones: f = {(1,5), (3,4), (5,3)} y g = { (5,1), (4,3), (3,5) }, halle: $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$.

9. Si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces halle: $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$ y sus dominios.

10. Para cada función, halle su inversa, si es posible, y además dé la compuesta de ambas:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ b) $f(x) = x^2 + 2$

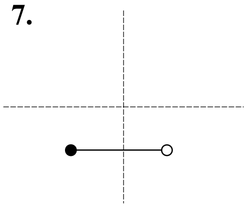
c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{2-3x}{x}$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS UNIDAD 1
RELACIONES Y FUNCIONES

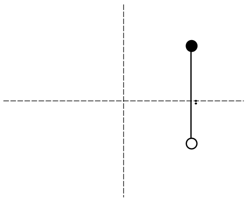
Ejercicios 1.1.

1. A(-3, 2), B(4, -1), C(1, 1), D(-2, -1), E(-1, -3), F(3, -3). **3.** a) Eje X. b) x = 0, y = 0.
4. a) (-2,-6), b) (9,3), c) (8,5), d) (-4,-½) **5.** a) (-2,-7), b) (-8,3), c) $(1,\sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$,
d) $(\frac{7}{3}, -1)$, e) $(½, \sqrt{8})$, $(½, -\sqrt{8})$. **6.** U^2 = UxU = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1),(2,2),(2,3), (3,1), (3,2), (3,3)}

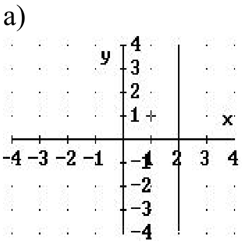
7.



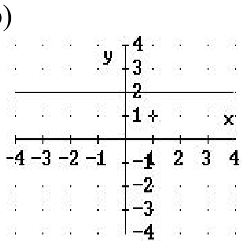
a)



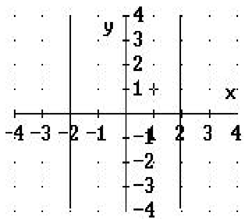
b)



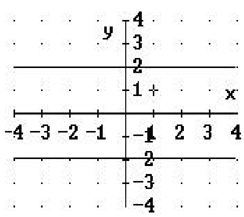
c)



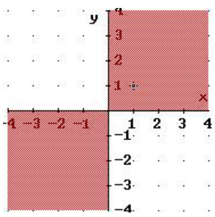
d)



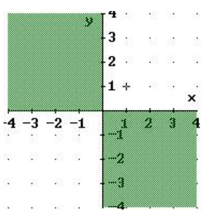
e)



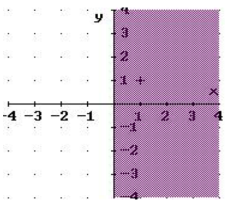
f)



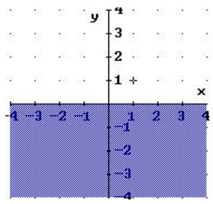
g)



h)



i)



j)

8. a) x = $\pm$2, y = $\pm$2, b) x = $-\sqrt{2}$, y = 3 **9.** a) $4\sqrt{5}$, b) 5/6, c) $11\sqrt{3}$.
10. a) (-1, 0), b) $(2\sqrt{6}, -\frac{13}{12})$, c) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{2})$ **11.** a) d(AP) = d(BP) = $\sqrt{377}/4$, b) $2\sqrt{5}$

Ejercicios 1.2

1. Por ejemplo R_1 = {(-1, -1), (0, 1), (1,2)} R_2 = {(-1, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 0)}.
2. a) D = {3, 5, 0, ½}, R = {2, 0, -3, ½} b) D = {-2, 3, π, -5}, R = {1, $\sqrt{2}$, π }
3. a con 3, b con 4, c con 6. **4.** Fig1, D = $\Re$, R =] $-\infty$, 2]. Fig2, D = $\Re$, R =] $-\infty$, 2]. Fig3, D = R = $\Re$. Fig4, D = R =] -1, 1[. Fig5, D = $\Re$, R = [2, ∞[Fig6, D = R =]0, ∞[.

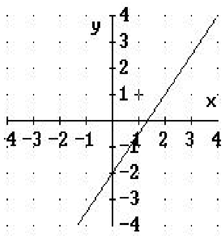
5.

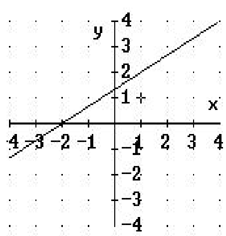
Relación	a	b	c	d	e	f	g	h
Dominio	$\Re$	$\Re$	$x \neq -1$	$x \neq 1$	$[0, \infty[$	$]0, \infty[$	[-3, -3]	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$
Rango	$\Re$	$\Re$	$y \neq 0$	$y \neq 1$	$[0, \infty[$	$]0, \infty[$	[-3, -3]	$[0, \infty[$

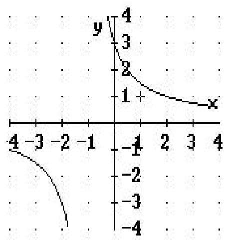
6. a) {(2, 3), (0, 5), (-3, 0), (½, ½)}, D = {2, 0, -3, ½}, R = {3, 5, 0, ½}
b) $\{(1, -2), (\sqrt{2}, 3), (\pi, \pi), (1, -5)\}$, $D = \{1, \sqrt{2}, \pi\}$, $R = \{-2, 3, \pi, -5\}$.

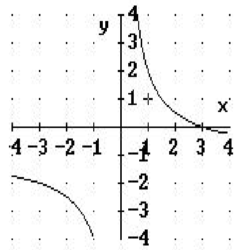
7	Ecuación Inversa	Dominio	Rango
a	$x = y$	$\Re$	$\Re$
b	$3y - 2x = 4$	$\Re$	$\Re$
c	$y = \frac{3-x}{x}$	$\Re$ - {0}	$\Re$ - {-1}
d	$y = \frac{x}{x-1}$	$\Re$ - {1}	$\Re$ - {1}
e	$y = x^2$	$[0, \infty[$	$[0, \infty[$
f	$y = 1/x^2$	$]0, \infty[$	$]0, \infty[$
g	$y^2 + x^2 = 9$	[-3, 3]	[-3, 3]
h	$y = \pm\sqrt{x^2+1}$	$[0, \infty[$	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

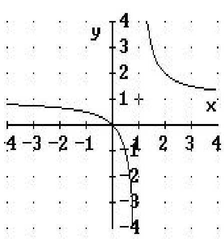
Gráfica directa (5) y su inversa (7)

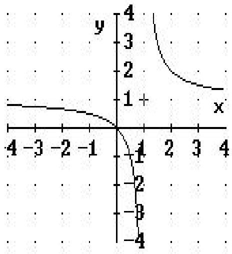

5 b)

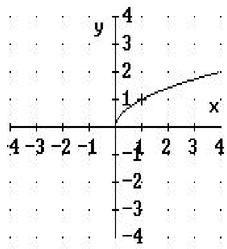

7 b)

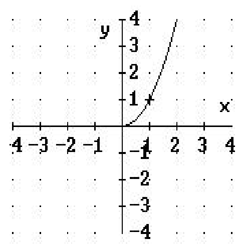

5 c)

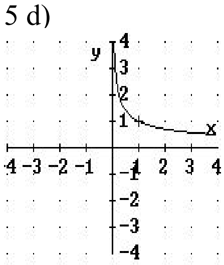

7 c)

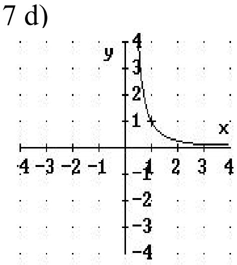

5 d)

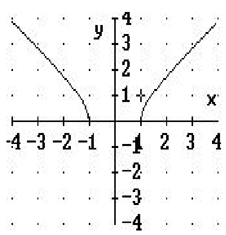

7 d)

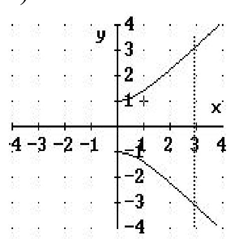

5 e)


7 e)


5 f)

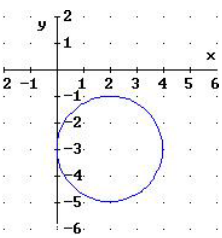

7 f)


5 h)

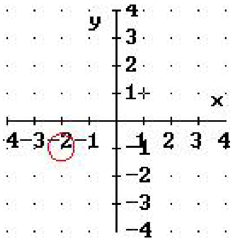

7 h) no es función

Ejercicios 1.3

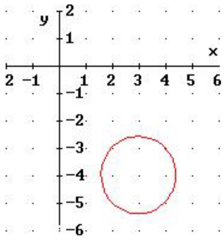
1.



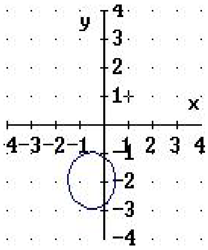
a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$



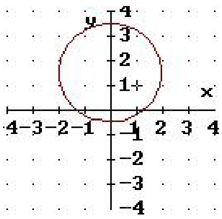
b) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$



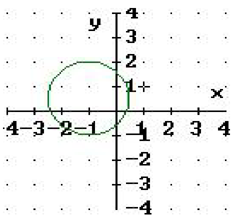
d) $(x - 3)^2 + (y+4)^2 = 2$



2a) $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+2)^2 = 1$



2b) $x^2 + (y - 3/2)^2 = 4$

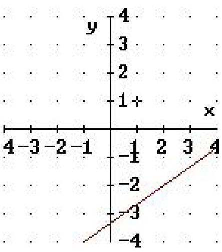


2c) $(x+1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$

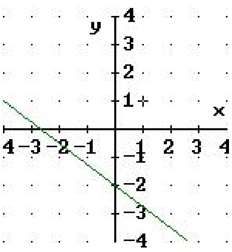
3.a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$, b) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 3$.
4. $C = (-1, 1)$, $r = 5$. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

5. a) $y = -4$, b) $x = 3$. 6. a) $m = 5/2$,
b) $m = -2/5$, c) si son $\perp$ s.

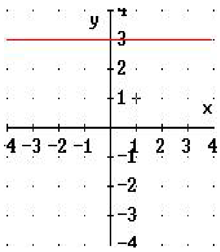
7.



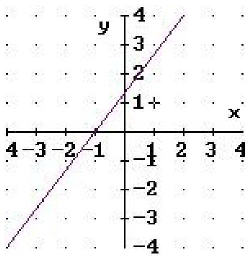
a) $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 3)$



b) $y - 1 = -\frac{3}{4}(x + 4)$.



c) $y = 3$

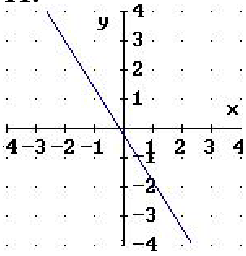


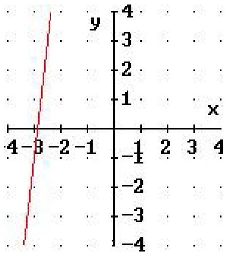
d) $y = 4/3(x + 1)$

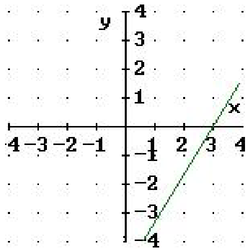
8.	$y = mx + b$	$I_y(0, b)$	**9.**	$y = mx + b$	m	$I_y(0, b)$
a)	$y = \frac{2}{3}x - 4$	$(0, -4)$	a)	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$(0, 3/2)$
b)	$y = -\frac{3}{4}x - 2$	$(0, -2)$	b)	$y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$(0, \frac{5}{3})$
c)	$y = 5$	$(0, 5)$	c)	$y = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	$(0, \frac{6}{5})$
d)	$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$	$(0, \frac{4}{3})$	d)	$y = \frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}$	$(0, 0)$

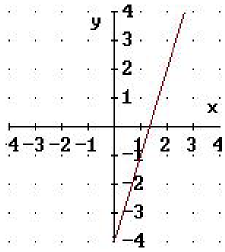
10.	a)	b)	c)	d)
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$	$\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{6}{5}} = 1$	$\frac{x}{\frac{5}{4}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$	No es posible, pasa por (0,0)

11.


a) $8x + 5y = -1$

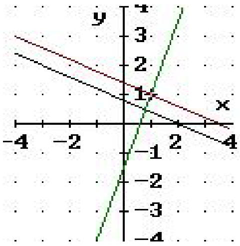

b) $8x - y = -23$


c) $5x - 3y = 15$

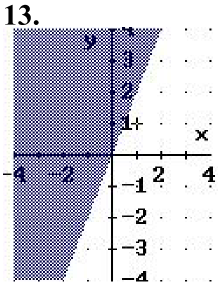

d) $3x - y = 4$

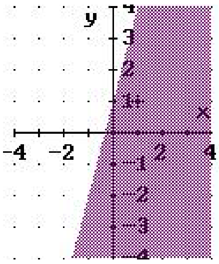
12. a) $m = -2/5$, $2x + 5y = 7$

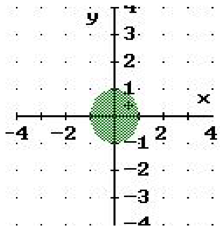
b) $m_{\perp} = 5/2$, $5x - 2y = 3$

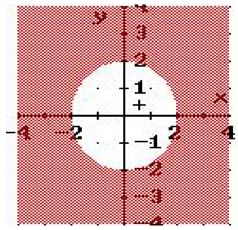


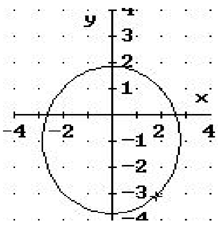
13.

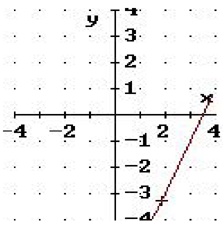

a) $y \geq 2x$

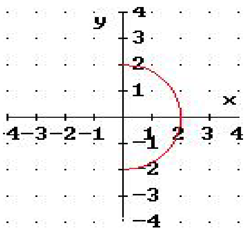

b) $y \leq 3x + 1$

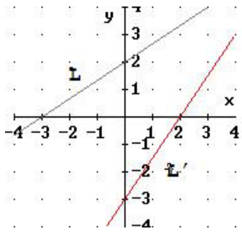

c) $x^2 + y^2 \leq 1$


d) $x^2 + y^2 > 4$


14. a) $2^2 + (-3+1)^2 = 8$


14b) $4(2) - 2(-3) = 14$


15a) $x = \sqrt{4-y^2}$

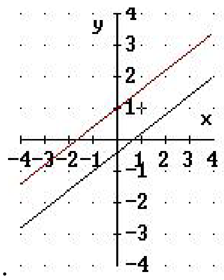


15d) $\dfrac{y}{-3} + \dfrac{x}{2} = 1$

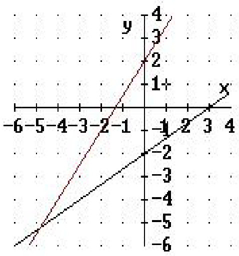
15.	Directa	Inversa	Obs.
a)	y = $\sqrt{4-x^2}$	x = $\sqrt{4-y^2}$	
b)	y = $\sqrt{4-x^2}$, D =R = [0,2]	x = $\sqrt{4-y^2}$ D =R = [0,2]	Gráficas iguales
c)	$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$	Gráficas iguales
d)	$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$	$\frac{y}{-3}+\frac{x}{2}=1$	

Ejercicios 1.4

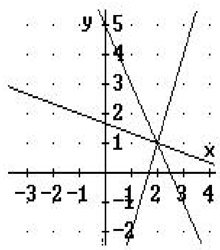
1. a) inconsistente b) S = {(-24/5, -26/5)}
c) S = {(2, 1)} d) inconsistente.



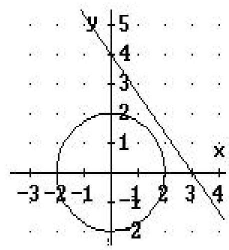
1 a)



1 b)



1 c)

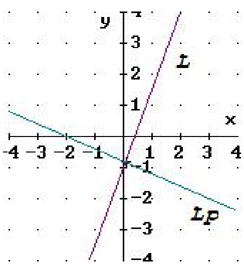


1 d)

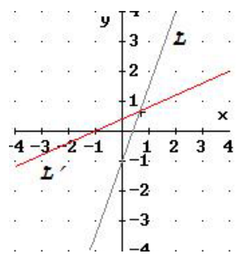
2. a) x = - 1, y = -1. b) x = 16/9, y =5/3.
c) x =23/14, y = - 5/7. d) x = 1, y = ½.

3. a) y = - 2x/5 – 4/5, S = {(2/29, -24/29)}
b) y = 2x/5 + 2/5, S = {(2/3, 2/3)}.

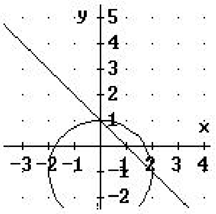
4. a) S ={(0,1), (2, -1)}, b) S ={(- 1, 2), (2, 1)}.



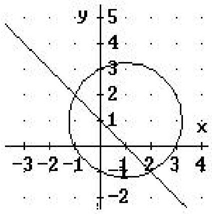
3 a)



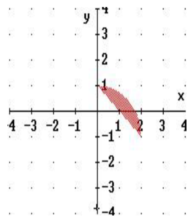
3 b)



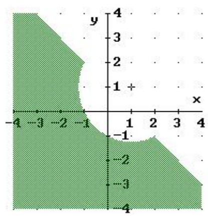
4 a)



4 b)



5 a)



5 b)

6. a) los números son 4 y 13. b) 3 y 5. c) 3 y 8 **7.** Ancho 15.2 m y largo 19.8 m.
8. Se invirtió L 60 000 en bonos. **9.** Diámetro mide 4.67 m. **10.** Velocidad del viento es 15 km/h y la del pájaro es 60 km/h. **11.** Velocidad del viento es 5.5 m/s y la del ruido es 321.5 m/s. **12.** Un tren tiene velocidad de 40 km/h y el otro tren su velocidad es de 60 km/h.
13. 5 gramos de oro y 1 g de plata.

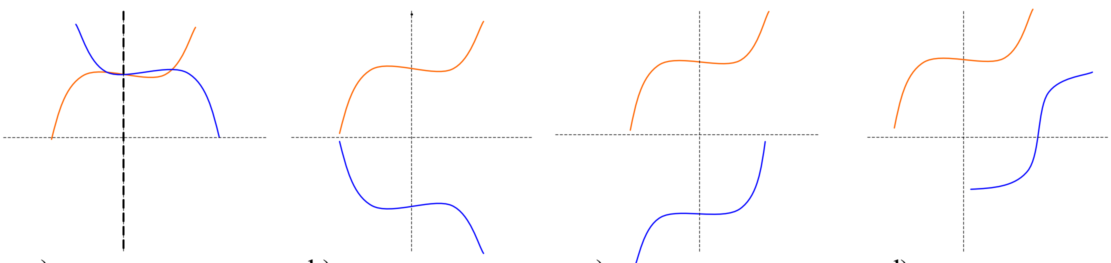
Ejercicios 1.5

1. Son funciones A y B. **2.** Son funciones a) y c). **3.** a) y b) son funciones: a) $y = 3x/2 - 5/2$, b) $y = x^2/2 + 5/2$. c) y d) no son funciones. **4.** $x + y = 2$. **5.** a) $f(0) = -1$, $f(½) = 0$, $f(a) = 2a - 1$, $f(a - 1) = 2a - 3$. b) $f(-2) = 0$, $f(-½) = -¾$, $f(b) = b^2 + 2b$, $f(2b) = 4b^2 + 4b$. **6.** a) $f(1) = -3$, $f(5/2) = 0$, $f((a + 5)/2) = a$, $f(a/2 + 3) = a + 1$. b) $x = \pm 1$, $x = \pm 3$, $x = \pm\sqrt{a^2 + 1}$, $x = \pm a$. **7.** a) $R = \{0, 1, 2\}$. b) $R = \{\sqrt{2}, \sqrt{11}, \sqrt{26}\}$. **8.** a) $A = 8b$, b) $P = 2(b + 5)$, c) $H = \sqrt{a^2 + 36}$ d) $V = (30 - 2x)^2 \cdot x$.

Ejercicios 1.6

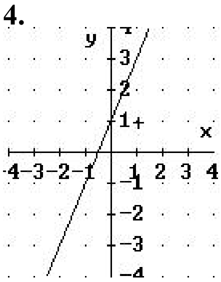
fig	Dominio y Rango	Continuo o discontinuo	Crecimiento o decrecimiento	Paridad
1	$D = R = \Re$	Continuo en $\Re$.	Creciente.	Impar
2	$D = R = \Re$	Continuo en $\Re$	Decreciente	Impar
3	$D = \Re$ $R = [0, \infty[$	Continuo en $\Re$	$]-\infty, 0[$ decrece $]0, \infty[$ crece	par
4	$D = R = \Re$	Continuo en $\Re$.	Creciente	Impar
5	$D = \{x \neq 0\}$ $R = \{y \neq 0\}$	Discontinuo en $x = 0$	$]-\infty, 0[$ decrece $]0, \infty[$ decrece	Impar
6	$D = \Re - \{0\}$ $R =]0, \infty[$	Discontinuo en $x = 0$	$]-\infty, 0[$ crece $]0, \infty[$ decrece	par
7	$D = [0, \infty[$ $R = [0, \infty[$	Continuo en D	$]0, \infty[$ crece	Nada
8	$D = R = \Re$	Continuo en $\Re$.	Creciente	Impar

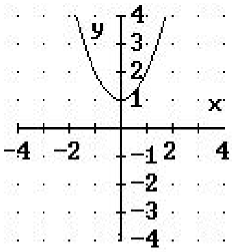
2. Porque cada x tendría dos imágenes que niega la definición de función.
3. Cada gráfica simétrica aparece en azul.

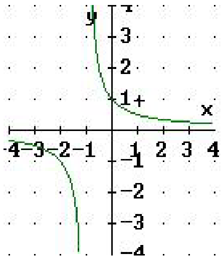


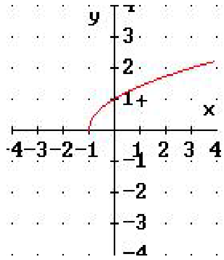
a) b) c) d)

4.


a)

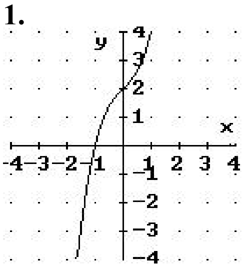

b)

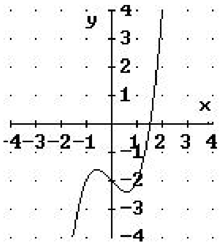

c)


d)

Ejercicios 1.7

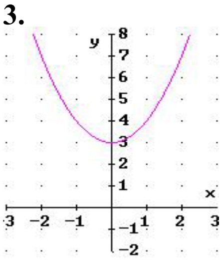
1.

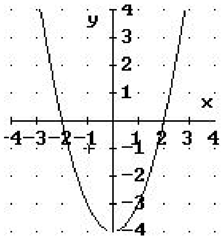

a)

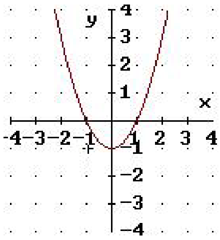

b)

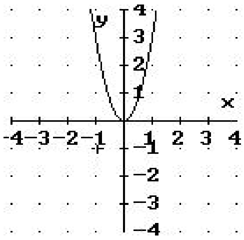
2. a) $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1$. b) $(f - 3g)(x) = x^2 - 2x - 3$. c) $fg(x) = x^3 + 2x^2 + x$. Todas tienen $D = R = \Re$. d) $(f/g)(x) = x$, con $D = R = \Re - \{-1\}$, su gráfica es la diagonal con discontinuidad en $(-1, -1)$.

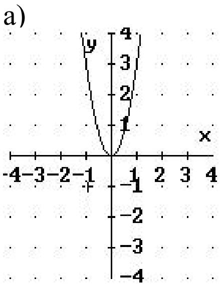
3.

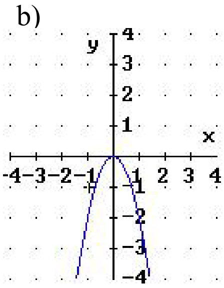

a)


b)


c)


d)


e)

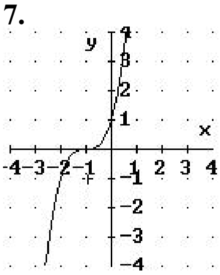

f)

4. a) $a^4 + 7a^2 + 10 \neq (a^4 + 3a^2) + 10$
b) $4a^2 + 18a + 18 \neq (4a^2 + 6a) + 18$.

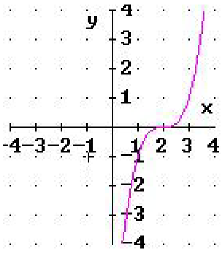
5. a) par, b) ninguna, c) ninguna, d) impar
e) impar, f) ninguna, g) impar, h) par.

6. a) par, b) impar, c) par, d) impar,
e) ninguna, f) ninguna.

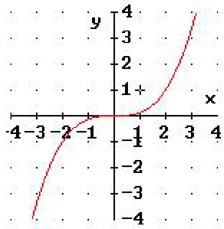
7.



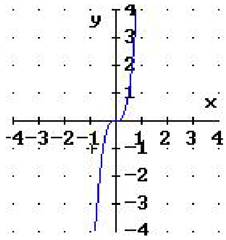
a)



b)



c)



d)

8. a) {(5,5), (4,4), (3,3)} b) {(1,1), (3,3), (5,5)} c) {(1,3), (5,4)} d) {(4,5), (3,1)}.

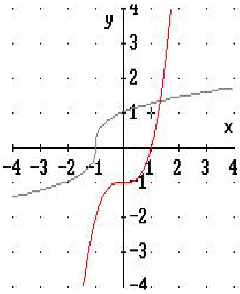
9. a) $f \circ g = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}$, D = $\Re$ - {0} b) $g \circ f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, x $\neq 0$

c) $f \circ f = \sqrt{x^2+2}$, D = $\Re$ d) $g \circ g = x$, D = $\Re$ - {0}.

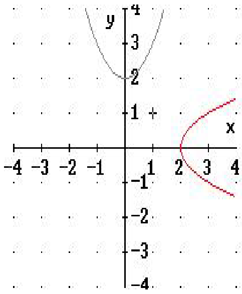
10. a) $f^{-1}(x) = y = x^3 - 1$. b) $y = \pm\sqrt{x-2}$, no es función.

c) $y = \dfrac{2-x}{x-1}$, $x \neq 1$, $y \neq -1$. d) $y = \dfrac{2}{x+3}$, $x \neq -3$, $y \neq 0$.

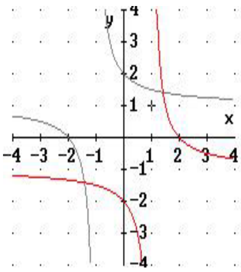
La inversa de cada función está graficada en rojo:



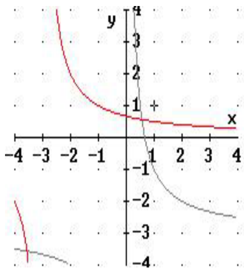
a)



b)



c)



d).