Reflexiones Sobre La Matemática y El Mundo Que Nos Rodea

Francisco Rivero

Autor

Mérida, 1995

Índice general

0.1. La Roca

Era un día caluroso del mes de Agosto. Uno de esos días en que el cielo azul intenso contrasta con el paisaje árido de las faldas erosionadas. El viento del sur golpea vigorosamente desde los picos más altos de la cordillera.

Un camino muy angosto se empina detrás de las altas cumbres, perdiéndose entre nubes, como un lazo tendido al cielo. Las desafiantes montañas elevan sus empinadas crestas, multiplicandose por todas partes creando un espacio de formas caprichosas que cautivan la mirada.

La naturaleza: ¿Por qué el hombre no ha sido capaz de conocerla y entenderla a plenitud formando parte de ella? ¿Por qué el hombre ha buscado siempre la perfección? ¿Se halla quizás la perfección en la naturaleza misma? ¿Por qué hay formas geométricas que se repiten en la naturaleza, como el circulo, la esfera? ¿Serán los números y la geometría la clave de todo el Universo?

Un viejo Jeep de techo de lona va rompiendo la densa soledad del camino. El chofer no conoce bien estos lugares apartados, pues viene de la ciudad en busca de aventuras: a llenarse de sí y a embeberse de las estimulantes sensaciones que sólo se conocen en las grandes alturas. Cristóbal es un profesor Universitario que está de vacaciones y le gusta conocer los pueblos más apartados de la geografía de su Estado.

De empinados contrastes, después de ascender sobre una loma, se cae en retorcidos declives. De pronto lo inesperado: el Jeep golpea una piedra y Cristóbal tarda en hacer una maniobra. El carro no obedece, da dos vueltas y queda atrapado entre la garganta de lo que fuera un arroyo.

Afortunadamente, Cristóbal sale ileso, con tan sólo una pequeña herida en la frente y algunos aporreos en las costillas. Se echa a descansar a un lado de la vía a esperar.

Al verse privado de su vehículo en aquél lugar inhóspito, se siente muy sólo y desamparado por un instante. Luego se queda observando largamente el paisaje maravilloso que tiene ante si, lo cual fortalece su espíritu. Se agacha y toma una pequeña flor del borde del camino y la observa con detalle. Aquella flor que sostiene con cuidado entre sus dedos es una obra perfecta de la naturaleza, tan perfecta como su propio organismo o como una galaxia. Sus pétalos son elipses que están unidas por un extremo a la circunferencia del centro. Todo ello de una forma armoniosa. ¿Es que acaso la geometría copia la naturaleza? ¿O es al contrario?

En estas meditaciones se va entregando a un sueño delicioso. El viento, las nubes, la soledad lo invitan a soñar. Decide echarse al suelo a descansar y se duerme. Escucha voces y susurros.

Cuando abre los ojos nuevamente, se encuentra tendido en una cama de blancas y olorosas sábanas en una habitación desconocida. Alguien habla con una voz que sobresale a las demás. Es la voz de una mujer que llama a un niño, de manera muy cariñosa. Le dice que no haga ruido, pues el "señor"está enfermo.

Cristóbal siente una sensación extraña de estar en un lugar irreconocible y piensa que aún sueña. Abre los ojos y los vuelve a cerrar pero no logra escapar del sueño y al fin acepta que todo lo que le rodea es real. Se levanta, sale de la habitación y exige una explicación a la mujer: "Rosa", se llama Rosa. Ella le cuenta cómo sucedieron los hechos:

- Usted probablemente venía distraído, señor. Fue recogido por unos campesinos que lo trasladaron a casa de Rafael, mi esposo, en el poblado de La Mesa. Estuvo Usted un día y medio enfermo, delirando y con fiebre, mientras Rafael y nosotros le cuidábamos.

- El trabajo de reparar su carro se llevará como 15 días, pues hay que cambiar algunas piezas -Rosa añadió-

- Usted puede quedarse aquí en casa el tiempo que quiera. Este lugar está muy lejos de la ciudad, y no hay medios de comunicación. La carretera se encuentra en pésimas condiciones debido a las lluvias. La única vía alterna es un viejo camino de recuas que se encuentra abandonado.Quédese unos días que le va a encantar. Hay muchos lugares bonitos en los alrededores de La Mesa como para ir a pasear y a disfrutar. Aquí la gente es muy sana y el clima le va a caer bien.

Cristóbal no supo porqué, pero la posibilidad de pasar un par de semanas en aquel lugar, le pareció atractiva. En realidad, estaba al inicio de unas largas vacaciones, muy merecidas por cierto, pues había trabajado mucho y se encontraba cansado. Ciertamente debería cambiar radicalmente sus planes de ir a la ciudad a reunirse con su familia cómo acostumbraba hacerlo desde hacía muchos años, pero una aventura inesperada en su vida monótona de profesor podría ser muy interesante. Estar en un lugar tan apartado, lejos del ambiente ruidoso de la civilización, me hará sentirme como un náufrago en una isla desierta en medio del mar - pensó- y quizás me sirva para reflexionar sobre muchas cosas de la vida.

Se sintió complacido con la invitación y aceptó, sin dejarse rogar mucho. Además, pensó, no tengo otra alternativa que quedarme hasta que reparen el Jeep. Ciertamente, el aire del campo, el contacto con la naturaleza y el ejercicio físico me harán bien.

Cristóbal interrogó a Rosa con aire de preocupación

- ¿Cómo hago para pagarles a ustedes todo lo que han hecho por mí? No tengo dinero suficiente, pues no pensaba estar fuera de mi casa por tanto tiempo.

Rosa respondió:

- Mire, no se preocupe Ud, pues no le vamos a cobrar. Solamente paséese por las calles de La Mesa, conozca a los vecinos y converse con ellos. Hábleles acerca de su trabajo allá en la ciudad: Quizás esto pueda ser de interés para ellos y los pueda hacer más felices. ¿Cuál es su profesión?

- Soy profesor de Matemáticas -

- Pues me parece muy bien que nos hable a todos acerca de las matemáticas. Aquí en La Mesa no tenemos profesor de esa materia.

Cristóbal aceptó la invitación, aunque un poco escéptico consideró: ¿Cuál podría ser el interés de aquella gente sencilla, acostumbrada a las rudas faenas del campo, por una disciplina abstracta como la matemática? Esa misma noche comenzó a planificar su objetivo de enseñar lo mejor posible: que es y para que sirve la matemática.

La tarea no era fácil, pues a decir verdad, tal cosa no se la había planteado nunca, tan seriamente como la sentía ahora. Como profesor, se habia limitado a transmitir mecánicamente lo que sabia sobre matemáticas. Esto era una tarea monótona que repetía cada año. Exponer las mismas definiciones y teoremas frente a un nuevo grupo de estudiantes que no se sentían atraidos por la matemática.

0.2. La Mesa

La Mesa era un pequeño pueblo de la Cordillera encaramado sobre una amplia meseta. Las únicas dos calles suben paralelamente, desde la parte baja de la meseta hasta el altozano en donde finalizan en una pequeña plaza. Una es la calle de subida, cómo la llaman algunos. La otra la de bajada.

Las blancas casas de gruesas paredes de tapia que soportan el peso de los rojos tejados, se alinean en torno a estas calles como cuentas de un rosario. La pequeña plaza cuadrada, con el busto del Libertador en el centro se destaca por el verde oscuro de sus cipreses bien podados. El viento de la tarde juega con los tupidos ramajes de los eucaliptos y mece con suave ritmo las cimeras de las solitarias palmas. La vieja iglesia de arquitectura sencilla se elevaba por encima del poblado, mostrando sus bien acicalados muros y la pequeña torre de su campanario rematado graciosamente en forma de cúpula.

Los alrededores del pueblo son de fértiles parcelas, en donde sus habitantes cultivan la caña, el café, la papa y otros rubros con bastante provecho. En la parte alta de la meseta, sobre tupidos pastos que prolongan su sinfonía de verde hasta las faldas de la cordillera, se observa un ganado de leche muy bien cuidado. En medio de este exuberante paisaje se observan también las huellas del progreso reciente, en los sitemas de riego, las torres de electricidad, los puentes y algunos vehículos rústicos que atraviesan los caminos construidos con maquinaria pesada.

Más allá de aquellos pastizales, aparecen las doradas espigas del trigo que suben hacia las heladas cumbres buscando el cielo. Es un paisaje de páramo de elevados riscos , profundos farallones y mágicas lagunas, en donde los solitarios frailejones dialogan con el viento helado que viene de las alturas. Las duras rocas, castigadas por la acción inclemente de los milenarios glaciares, se elevan formando siluetas puntiagudas que se hunden en las blancas nubes.

Cristóbal contempla todo a su alrededor sentado en un banco al lado de la iglesia. El casto silencio del pueblo, sólo es interrumpido por los juegos de los niños escondiendose entre los árboles de la plaza.

Que extraño -piensa- este pueblo desconocido por mi hasta ayer, se me presenta acogedor y familiar como si hubiese vivido toda mi vida aquí. Sus pobladores son amables, de trato respetuoso, pero muy amigables. A pesar de ser gente sencilla con muy poca instrucción, saben vivir en armonía unos con otros. No he visto gente enferma, ni mendigos. Parece ser que todos han alcanzado un nivel ideal en sus condiciones de vida. No hay ricos, ni muy pobres. Todas las casas parecen iguales, de la misma forma, con los mismos muebles en su interior. Todo es tan transparente y claro como la luz de la mañana.

Se levanta del banco y atraviesa la plaza para dirigirse a una casa grande ubicada en la otra esquina, que sirve de escuela. Allí habla con la maestra del pueblo. Ella se encarga de impartir los pocos conocimientos a los niños de La Mesa: leer, escribir, un poco de historia y las operaciones aritméticas.

Sobre un viejo estante a un lado de la mesa de la maestra, en un rincón, se hallan arrumados algunos libros viejos. La maestra toma uno de ellos de aspecto desgastado y se lo muestra a Cristóbal.

- Es el único libro de geometría que tenemos. Yo intenté usarlo hace muchos años cuando comencé a enseñar en La Mesa. Todo fue un fracaso, pues los niños no me comprendían. Creo que no les gusta la geometría, ni los números. Les cuesta mucho razonar.

- Ya veo, dijo Cristóbal con semblante dudoso.

Salió de aquel lugar meditando sobre todo lo que habia visto y se dirigió a casa de Rosa. Trajo consigo un viejo pizarrón y unas cuantas tizas que le dió la maestra, para dedicarse a la tarea que se había propuesto de enseñar matemáticas.

Aquella noche tuvo un sueño muy especial, en donde se sintió transportado a unas islas maravillosas muy lejanas de la antigua Grecia. Allí se encontró con Pitágoras y otros matemáticos quienes estaban reunidos al lado de un templo de blancas columnas de piedra, hablando de la Geometría y los números. Había una gran cantidad de personas alrededor del sabio, oyendo sus explicaciones sobre la ciencia y las matemáticas. La forma de explicar los conceptos era tan elemental que todos disfrutaban de aquel discurso, mientras aprendían.

0.3. Conjuntos

Cristóbal se dispone iniciar hoy sus lecciones de matemáticas. Sus seguidores son humildes agricultores y campesinos del pueblo que se sienten atraidos por este proyecto, mas por conversar y conocer a José que por aprender la ciencia de los números. Sus discípulos son Rafael y su esposa Rosa, su pequeña hija, José y sus dos hijos y Pedro.Así pues, reunidos todas las mañanas en el patio de la casa de Rafael inician sus lecciones entre el canto de las aves del corral y el gorgojeo de los pájaros. Veamos pues como se van desarrollando las clases...

Todas las cosas en la naturaleza - comenzó a explicar Cristóbal, están dentro de una colección o conjunto: los pájaros están dentro del conjunto de las aves, los gatos son mamíferos, las rosas son flores, etc.

Desde que el hombre tiene uso de razón, comenzó a poner orden en las cosas que veía en la naturaleza. Así pues la idea de clasificar las cosas en grupos o conjuntos es muy antigua.

Sin embargo, el concepto de conjunto es una idea abstracta, inspirada en la naturaleza. Por ejemplo si José tiene 5 gallinas y 3 patos en el patio de su casa, entonces el conjunto de las aves de José estará formado por 5 gallinas y 3 patos. Nadie puede negar lo contrario, claro.

Al lado de José está la finca de Pedro, en donde hay exactamente 20 gallinas, 4 patos y 3 palomas, luego el conjunto de las aves de Pedro estará formado por 20 gallinas, 4 patos y 3 palomas.

Continuando de esta manera, podemos formar muchos conjuntos de las aves de cada habitante de La Mesa. Este tipo de conjuntos (específicos) no son de utilidad práctica, pues hay demasiados de ellos y además cambian continuamente: después de matar una gallina habría que cambiar cada conjunto. Nos interesa hablar de conjuntos abstractos (o genéricos) porque de esta forma evadimos situaciones difíciles como por ejemplo tener que ir a un gallinero a contar las aves.

Definimos entonces un conjunto abstracto A, el cual será llamado **conjunto de las aves** cuyos **elementos** o miembros son todas las aves del mundo, en todas las épocas. Dicho conjunto es un conjunto **genérico, total** y **universal**, pues no hay un ave, por muy lejos que se encuentre de nosotros, o bien por haber desaparecido hace miles de años, o bien por nacer en el futuro que no sea un elemento de este conjunto.

Dentro de este conjunto total o universal si se puede tomar una parte y entonces definir un **subconjunto** de A, el cual es a su vez un conjunto de aves que cumple cierta **condición**. Por ejemplo podemos considerar el conjunto B, formado por todas las aves de La Mesa y entonces escribimos a B mediante:

$$B = \{x \in A \ / \ x \quad \text{vive en La Mesa}\}$$

0.4. Números

En la casa de Rafael hay una puerta, dos cuartos, cuatro ventanas, cinco sillas, 651 tejas,$\cdots$, etc. Podemos continuar haciendo este inventario, lo único que se requiere para esto es saber **contar**.

¡Que cosa tan sencilla y tan útil a la vez es el contar! Los hombre civilizados sabemos contar cualquier cantidad de sillas, tejas, ventanas,$\cdots$, etc. Los niños pequeños no saben contar; los animales tampoco saben contar.

¿En que consiste el saber contar? ¿Cómo se realiza este proceso dentro de la mente humana? En primer lugar para poder contar debemos tener los objetos delante de nosotros en **forma secuencial**. Es decir contamos de uno en uno. Nadie puede contar el número de granos de maíz que hay dentro de una vasija llena de un sólo vistazo. Sin embargo, todo el mundo puede contarlos de uno por uno.

El otro ingrediente que se requiere para poder contar es tener un **conjunto de números**, para poder ir asignando a cada objeto un número. El conjunto de números que usamos para contar es el conjunto de los **números naturales**, el cual se denota por la letra $\mathbb{N}$, así pues

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

Este conjunto es el más viejo de todos, y ha sido un buen compañero del hombre en todas las edades. Todos los hombres instruídos tienen este conjunto grabado en su conciencia y lo usan cada vez que van a contar. Cuando contamos sillas las colocamos en sucesión y a la primera se le asigna el número 1, a la segunda el 2, .. y así sucesivamente. Entonces establecemos, sin darnos cuenta de ello, una **correspondencia** entre las sillas que contamos y los números naturales.

Muy bien, los números naturales sirven para contar, pero ¿Qué cosa son estos números naturales?

- Esta pregunta es muy interesante y la respuesta a la misma merece una taza de café, Rafael.-

La hija de Rafael, trae dos tazas humeantes de oloroso café tostado, el día anterior. Rafael dice que este año hubo buena cosecha de café en su finca, además de abundante, de excelente calidad. Saboreamos nuestro cafecito colao, contemplando la vista hermosa ante nosotros de las vegas de caña en la parte baja del valle, que ascienden hacia la colina confundiendose entre las nubes. Después de este breve receso, continuamos con la conversación:

Un número natural es una idea abstracta creada por el hombre para contar o comparar. Por ejemplo el número cinco no es simplemente una palabra o el símbolo 5. El número 5 es una **clase** de todos los conjuntos que tienen 5 elementos. Sea A : Un conjunto formado por 5 granos de trigo y B otro conjunto formado por 5 casas. Luego A y B son conjuntos de naturaleza distinta, pero tienen algo en común como lo es el número de sus elementos. Luego A y B están en la misma clase de conjuntos, es decir, la clase del 5.

- De esta manera, a todo conjunto finito se le puede asociar una clase (o número) igual al número de sus elementos. Muy simple, ¡verdad!

0.5. Suma de Números

Rafael está en el amplio corredor de su casa convertida éste, en una especie de bodega, donde hay sacos de granos recostados a las paredes, plátanos, algunos frutos y una balanza colgada del techo.

Cuando regreso lo consigo pesando un kilo de maíz, para vendérselo a un vecino. Coloca una buena porción de maíz en el peso, luego ve que se ha pasado de 1 kg. y le quita una pequeña parte con una cuchara. Luego ve que le ha quitado mucho y vuelve a agregarle un poquito de lo que ha sustraido y así de esta manera hasta tener un kilo más o menos exacto.

La lección de hoy es sobre la **suma de números naturales**. Sumar números naturales es una operación conocida por todos. Si a un kilo de maíz se le añaden 2 kilos de maíz, entonces se tienen 3 kilos. No importa el orden en que esto se haga, es decir, que primero pudo haberse colocado 2 kilos y luego 1 kilo, obtenemos los 3 kilos, por lo tanto diremos que la operación suma es **conmutativa**. También se pueden **asociar** los términos de una suma de cualquier manera para efectuar la operación, y siempre se obtiene el mismo resultado.

Si queremos sumar tres cantidades, 5, 10 y 8 entonces se puede hacer la suma de varias maneras $(5+10)+8$, $(8+5)+10$, $8+(5+10)$,$\cdots$, etc. Lo importante aquí es que el resultado final siempre será el mismo. Entonces diremos que la suma es una operación asociativa.

Sigamos estudiando otros hechos importantes sobre la suma de números naturales. Desde tiempos muy remotos, el hombre se planteó problemas de matemática sobre sumas. Por ejemplo si tengo 7 naranja; ¿ Cuántas naranjas me faltan para llegar a 10 ? ¿ Cómo puedo escribir este problema usando los símbolos de la matemática?

Aquí aparece por vez primera la idea de **incógnita** o cantidad desconocida. Una incógnita es una cantidad a determinar dentro de un problema, la cual simbolizamos, usualmente, por la letra x.

Así pues el problema anterior se puede plantear numéricamente

$$x + 7 = 10$$

Esto es lo que se llama **una ecuación** en x. El valor de x correcto, será la **solución de la ecuación**.

-Espere un momento amigo Cristóbal- interviene Rafael, Yo creo que abusa de sus conocimientos y nos está dejando como mirando a San Felipe.

Vamos a tener que parar un poco aquí en esta parte del camino, pues la carga se ha vuelto pesada. Explique un poco mejor que es eso de Ecuación.

- Por supuesto- dijo Cristóbal un poco turbado, nos detendremos en este punto tanto como haga falta, pues sin el concepto de ecuación no se puede hacer casi nada en las matemáticas. En primer lugar una ecuación es como una balanza, en donde se tienen dos cargas a ambos lados, las cuales están equilibradas. Así pues, la ecuación de arriba se interpreta como una balanza en donde tenemos $x+7$ en el platillo del lado izquierdo, y 10 del lado derecho. Las cargas estan equilibradas ¿ Ves ?

Por tanteo le vamos dando valores a la x hasta que $x + 7$ sea igual a 10, luego la x debe ser 3. El mismo procedimiento utiliza Rafael con su balanza para completar un kilo de maíz: va añadiendo maíz poco a poco hasta tener el kilo exacto.

0.6. El Cero y los Números Enteros

Rosa está frente al jardín de su casa, observando tres palomas que comen algunos granos de arroz. De repente sale el perro de la casa dando ladridos y las aves emprenden el vuelo espantadas. Primero vuela una y quedan 2, luego vuela la otra y queda 1, finalmente se va la última ¿y entonces que queda? Pues quedan 0 palomas. Dice Cristóbal:

- El cero es un invento muy interesante de la matemática. No es un hueco o vacío, como muchos pretenden hacernos creer. El **cero** es simplemente la solución de la ecuación

$$x + a = a$$

donde a es cualquier número natural. Por ejemplo, si $x + 3 = 3$ entonces x debe ser igual a cero.

Gracias al cero podemos considerar los **números enteros negativos** que son **los opuestos** de los números enteros positivos. Esto es, si a es un número natural, el opuesto de a, o negativo de a, es otro número a', tal que

$$a + a' = 0$$

Usamos la notación $-a$ para indicar el opuesto de a. Luego debemos tener la ecuación

$$a + (-a) = 0$$

Por ejemplo $3 + (-3) = 0$. Luego -3 es el opuesto de 3.

Pero dígame una cosa- interroga José muy preocupado- si el número tres viene representado por tres piedras, o tres naranjas, entonces ¿Que son "menos tres piedras.º "menos tres naranjas"? ¿ Estos números existen en este mundo donde vivimos o sólo en nuestra mente?

Los números negativos no tienen una representación como objetos concretos. Son una invención de la mente humana, para resolver algunos problemas, que sí provienen de este mundo. Ellos existen en el mundo de las ideas. Así como existe el amor, la bondad y tantas otras ideas que tenemos, pero que no se pueden representar. La ventaja de emplear los números negativos es que permiten resolver cualquier tipo de ecuación en números naturales.

Por ejemplo la ecuación

$$x + 7 = 3$$

la escribimos en la forma

$$(x + 4) + 3 = 3$$

Luego debemos tener $x + 4 = 0$, y por lo tanto x debe ser -4.

Podemos definir entonces un nuevo conjunto que incluya a los números naturales, los números negativos de los naturales y el cero. Este nuevo conjunto se llama los **números enteros**.

Estos números también amplián las posibilidades de contar, pues gracias a ellos podemos contar no sólo hacia "adelante", si no también hacia "atrás".

Para ilustrar lo dicho, supóngase que alguien está parado sobre un camino recto y quiere calcular los pasos que le faltan para llegar a un punto F y los pasos que ha dado desde el punto de partida P. Bueno marcamos el punto donde estamos parados. Este será el cero. Si nos movemos hacia adelante contamos en **positivo** y si nos movemos hacia atrás contamos en **negativo**

0.7. Las Fracciones

Hoy es un típico día lluvioso de mediados de Agosto. Las montañas más alejadas de un tono azul oscuro, recortan sus agudos siluetas sobre un cielo plomizo. El agua hace resaltar el verde esmeralda de los campos cultivados, más cercanos a La Mesa, dando una inefable sensación de paz y sosiego. La niebla cubre las copas de los altos bucares y ya comienza a caer una lluvia muy fina que se mete un poco en los papeles de Cristóbal.

Rosa cierra la ventana de la casa pues hace un poco de frío. Estan sentados en la mesa del comedor para tomar el desayuno. Comerán acema (o acemita) con queso y chocolate caliente. Rafael toma un cuchillo y se dispone a cortar la acema en trozos iguales para ser repartidos entre todos...

Rafael corta la acema con mucho cuidado, lentamente y tomando medidas antes de hundir el cuchillo. Su rostro se torna pensativo. Todos piensan que está resolviendo algún problema de matemáticas.

Somos cinco personas sentadas a la mesa: Rafael, Rosa, sus dos hijos pequeños y yo. Cada uno espera recibir un trozo o fracción del mismo tamaño. Los niños, que han venido observando con mucho interés las maniobras de su progenitor, al recibir sus correspondientes trozos los comparan entre sí, a fin de cerciorarse que todos han recibido la misma cantidad de pan. Luego se sonrién satisfechos al verificar que se ha hecho un reparto justo: todos los pedazos son exactamente iguales.

Cristóbal entre serio y bromeando, le dice a Rafael que le asombra bastante su dominio de las fracciones. Todos los trozos de pan resultaron del mismo tamaño. Cad uno de ellos representa una quinta parte del pan original. Al dividir la unidad en cinco partes iguales, cada una de éstas partes se llama **un quinto**.

Para estudiar a fondo el conjunto de los números racionales, es necesario conocer bien sus propiedades, para lo cual veremos como se suman y multiplican entre si dos fracciones cualesquiera.

En primer lugar, la fracción que se tiene al dividir la unidad en b partes y tomando una cantidad a de trozos, la denotamos por el símbolo especial $\frac{a}{b}$. Es claro que a y b son números enteros, y además b es distinto de cero. El número b indica la cantidad de trozos iguales en que hemos dividido la unidad y se llama **el Denominador de la fracción**. El número a indica la cantidad de trozos que se han tomado, y se llama **el numerador de la fracción**.¿ Cómo se suman dos fracciones?¿ Cómo sumamos las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{5}$?. Muy fácil sumando la cantidad de trozos tendremos:

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$$

Es decir, aplicamos la regla siguiente: Cuando dos fracciones tienen el mismo numerador, entonces su suma es igual a otra fracción con el mismo denominador y con numerador igual a la suma de los numeradores.

¿ Y que pasa si yo sumo dos fracciones con distinto denominador? - Pregunta uno de los niños. Si tengo dos quintos de acema y un tercio de acema ¿ Cuanto tendré?

Buena pregunta esa niño, responde el Profesor. Pero para poder responderte debo hablar primero de las fracciones equivalentes. Si partimos las acemas en quince partes iguales, entonces dos quintos representan 6 trozos y un tercio representa 5 trozos. ¿ Estamos de acuerdo? Hemos hallado fracciones equivalentes a las dadas pero con el mismo denominador. Entonces dos quintos mas un tercio de acema es igual a la suma de $\frac{6}{15}$ mas $\frac{5}{15}$. Luego tendremos

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$$

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones, entonces la **suma** de ellas es igual a la fracción

$$\frac{(ad+cb)}{bd}$$

Rafael ha estado oyendo todo esto tomándose su taza de chocolate humeante, sin decir palabra. Ahora interviene para señalar que las fracciones son misteriosas, pues pueden adoptar varias formas como el Diablo. Por ejemplo, un tercio y cinco quinceavos son la misma cosa, pero se representan con símbolos diferentes. Esto sin duda alguna es engañoso.

Bueno no hay que preocuparse por esto, pues vamos a formar un conjunto en donde cada elemento es una **clase de fracción**.

Una clase de fracción es el conjunto de todas las fracciones equivalentes entre si. Esto, en la clase de $\frac{1}{2}$ estarán las fracciones $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{7}{14}, \cdots$, etc.

El conjunto formado por todas estas clases de fracciones será el **conjunto de los números racionales** y lo denotamos por la letra $\mathbb{Q}$.

0.8. Raíz Cuadrada de Dos

Hoy ha amanecido la tierra húmeda por tanta lluvia de anoche, y las aves se dedican a buscar insectos sobre la hierba mojada. El cielo comienza a despejarse poco a poco a medida que calientan los rayos del sol. Un olor a café recién colado sale del fogón y penetra en las habitaciones de la casa. Rafael ha salido muy temprano, con el cantar de los gallos a preparar un barbecho para la siembra. Cristóbal se lava la cara en el patio con el agua fría de la alberca.

La tenue brisa de la mañana forma ondulaciones graciosas en los cañaverales y la tranquilidad bucólica de aquel ambiente, sólo es interrumpida por las voces de algunos campesinos que trabajan la tierra.

Dos horas más tarde, están reunidos nuestros amigos en torno a la mesa del patio, preparándose para una nueva lección de matemáticas. Cristóbal toma la palabra:

Si bien tenemos una gran cantidad de números racionales, algunas ecuaciones planteadas con estos números pueden no tener solución. Los griegos se plantearon el siguiente problema ¿Existe un número racional x, tal que $x^2 = 2$? En la matemática griega a cada número se le asignaba la longitud de un segmento de recta. Podemos entonces replantear el problema ¿Existe un segmento de longitud x, tal que $x^2 = 2$?

La demostración de que tal segmento existe, se basa en el famoso Teorema de Pitágoras. Probaremos no sólo que $\sqrt{2}$ existe, si no que también daremos un método para construirlo, usando la regla y el compás a la manera de los griegos.

Trazamos una linea recta y luego con una abertura de compás, podemos trazar otra recta perpendicular a esta

Una vez que tengamos estas dos rectas perpendiculares, formamos un **triángulo rectángulo** con lados (o catetos) iguales a 1.

El lado mayor del triángulo se llama **la hipotenusa** ¿ Bonito nombre, verdad? Para calcular este valor, haremos uso de uno de los teoremas bellos de geometría, llamado el **Teorema de Pitágoras.** Según este, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Entonces, si denotamos por z la longitud de la hipotenusa de este triángulo, z se cálcula por medio del Teorema de Pitágoras.

$$z^2 = 1^2 + 1^2,$$

de donde $z^2 = 2$, luego $z = \sqrt{2}$. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es igual a la longitud de la hipotenusa.

Uno de los grandes logros de la matemática de los griegos, fue el haber dado una demostración correcta, desde el punto de vista lógico, de que $\sqrt{2}$ no es un número racional. El principio en que se basa tal demostración, se llama **método de reducción al absurdo**.

¿ Que es eso de reducción al absurdo?- Pregunta Rosa.

Supongamos Rosa que algún enemigo mío anda diciendo por ahí que yo soy una vaca - Explica Cristóbal-. Entonces para refutar esto ante cualquiera yo hago el siguiente razonamiento: Supongamos que yo soy una vaca, entonces yo debería tener un rabo y caminar en cuatro patas. Como no tengo rabo y camino sobre mis dos pies, lo cual es indiscutible, entonces soy un tipo de vaca absurda. Nadie ha visto una vaca sin rabo y caminado en dos patas. Entonces lo que dice mi enemigo es falso. Por lo tanto yo tengo razón al afirmar que no soy una vaca.

Si se supone que $\sqrt{2}$ es un cociente de dos enteros $\dfrac{m}{n}$, digamos, entonces podemos cancelar factores comunes en m y n hasta que ellos no tengan ningún factor en común (en este caso diremos que m y n son **primos relativos**) Luego se tiene que $n^2 2 = m^2$. Como el cuadrado de m es par, entonces m debe ser par. Podemos asumir entonces que $m = 2k$ y por lo tanto se tiene que $n^2 = 2m^2$ y nuevamente se concluye que n es par. Por lo tanto m y n tienen a 2 como un factor común, lo cual es un absurdo, pues de entrada no tenián factores en común.

Estos nuevos números los llamamos **números irracionales**, pues no son racionales. El hecho de existir **números construibles** en el plano con regla y compás, como $\sqrt{2}$, los cuales no son racionales hizo pensar a los griegos que el camino correcto para definir número era através de la Geometría. Los griegos entonces se dedicaron al estudio de los números en términos de proposiciones geométricas.

0.9. El Número de Oro

La casa de José tiene una ventana muy bonita con marco de madera en una de las paredes laterales que dan hacia el corredor. La ventana tiene forma de rectángulo alargado. Cristóbal, parado en medio de la pequeña sala, contempla desde adentro, una hermosa vista a través de la ventana. Se observan las matas de café en primer plano, más allá algunas matas de plátano y un poco más hacia arriba las líneas sinuosas de la montañas. Las proporciones entre el largo y la altura de la ventana, así como la distribución del color verde de los árboles, el blanco de las nubes y el azul del cielo, son muy agradables a la vista. Da la sensación de estar contemplando una pintura de un paisaje al natural.

La belleza de la naturaleza, al igual que las revelaciones de la matemática son un deleite para el espíritu. Así como nos extasiamos ante las proporciones y colores de un paisaje, también sentimos placer estético ante la pureza de las formas geométricas que definen una esfera, un cuadrado o un rectángulo.

-¿ Es que acaso la matemática también se relaciona con la belleza?- Pregunta Rosa a Cristóbal

-Por supuesto que si- Responde este- De todos los rectángulos, el más agradable a la vista, por sus proporciones es el **rectángulo dorado**. Dicho rectángulo tiene dimensiones a y b, tal que se satisfacen las relaciones:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} \tag{1}$$

Es decir, el rectángulo dorado de lados b y a, con $b > a$, tiene las mismas proporciones que el rectángulo de lados a y $b-a$ (el rectángulo más pequeño en la figura).

El cociente $\frac{b}{a}$ se le llama la **proporción dorada** o el **número de oro**. Esta proporción resulta ser la de mayor atractivo a la vista, razón por la cual se usa para las dimensiones de las páginas de los libros, tarjetas, ventanas, cuadros, etc.

Cuando un pintor, va a crear un paisaje, generalmente elige un lienzo cuyas dimensiones satisfagan la proporción dorada. Por ejemplo 65 cm. de largo por 40 de alto.

Además el centro de interés del cuadro, va colocado sobre un punto imaginario que es la intersección de dos rectángulos dorados (ver la figura).

- Muy interesante todo esto - observa Rafael - pero ¿cómo calculamos el número de oro? ? Cuál es esa proporción dorada?

La proporción dorada es otro ejemplo de número irracional. Para calcularlo, llamemos $x = \frac{a}{b}$, en la ecuación (1). Luego se tendrá una ecuación en x.

$$x = \frac{1}{x-1}$$

o sea

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

cuya solución es $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Así pues el **número de oro**, que designamos por la letra φ, viene dado por

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

su valor aproximado es $1,61803\ldots$

Por esta razón, explica Cristóbal, las cosas que construimos los hombres, como las páginas de los libros, las ventanas, los cuadros, ...etc. tienen casi todas la misma forma rectangular dada por el rectángulo dorado.

0.10. Las Secciones Cónicas

José y sus dos hijos están en la parte de afuera de la casa, en el patio delantero que sirve para secar el café. Sentados en sillas de cuero hablan un poco y cantan. José toca el violín mientras los jóvenes escuchan. Rafael y yo buscamos un par de sillas y nos unimos al grupo, dispuestos a disfrutar del encanto de unos valses andinos bajo la luz de una luna llena, que sonrie en medio de las estrellas.

Contemplamos el cielo y nos sentimos casi insignificantes, minúsculos en la inmensidad el Universo. La cantidad de estrellas y constelaciones es inmensa, las distancias que nos separan de ellas son astronómicas; miles de años luz entre una y otra galaxia. Sin embargo, gracias a la matemática el hombre tiene un conocimiento de los movimientos que rigen estos cuerpos celestes, de su tamaño y hasta de su composición química.

Los planetas y otros astros se mueven de acuerdo con leyes físicas muy bien determinadas, que permiten conocer el tipo de órbita que describen. Por ejemplo la tierra y los otros planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol. Los cometas describen hipérbolas.

La circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, son curvas llamadas secciones cónicas, pues ellas se pueden obtener a partir de un cono, intersectándolo con algunos planos.

Si se intersecta el cono con un plano paralelo a la base, que no pase por el centro, se obtiene una **circunferencia**.

Si se intersecta el cono con un plano perpendicular a la base, que no pase por el centro, se obtiene una **hipérbola**.

Si lo intersectamos con un plano oblicuo podemos tener una elipse o bien una parábola (dependiendo del ángulo de inclinación del plano).

Las secciones cónicas tienen propiedades geométricas muy interesantes y aparecen en gran cantidad de fenómenos naturales.

Veamos el caso de la órbita de la tierra alrededor del sol, la cual es una elipse, con el sol ocupando uno de sus **focos**.

¿Qué propiedad matemática tiene esta curva tan interesante. ¿ Será posible definirla en términos de relaciones algebraicas ? ¿ Que cosa determina su forma?

Los focos son dos puntos muy especiales del plano, que no pertenecen a la elipse, pero que nos sirven de guía para localizar todos los puntos de la elipse. Si un punto está sobre la elipse, entonces la suma de las distancias a cada foco es una constante y no depende del punto elegido.

Bueno, para construir una elipse, sólo debemos saber donde están ubicados los focos y la distancia desde un foco a un punto llamado vértice.

Si tomamos $d = c + 2h$, entonces los puntos P de la elipse tienen la siguiente propiedad

$$|PF_1| + |PF_2| = d$$

Es decir, la suma de las distancias de P a F_1 y de P a F_2 es una constante igual a d.

Luego la elipse es el conjunto de puntos del plano, cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados **focos**, es constante.

Si usamos **coordenadas cartesianas** para representar el punto P. Entonces sea $P = P(x, y)$, y la condición anterior nos conduce a una ecuación del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en donde el centro de la elipse coincide con el origen del sistema de coordenadas.

Una ecuación como la anterior, se llama **ecuación cuadrática** en las variables x e y. Todas las secciones cónicas se pueden representar mediante una ecuación cuadrática.

0.11. La Trigonometría

La matemática no es sólo un método de razonamiento abstracto, que permite entender muchos fenómenos de la naturaleza, sino también una fuente inagotable de aplicaciones en la vida diaria.

Entre estas aplicaciones directas de la matemática hacia la solución de problemas prácticos, una de las más antiguas es sin duda alguna, la medición de áreas. La división de la tierra en parcelas de igual área no es un problema tan sencillo como parece, pues estas pueden tener formas muy complicadas, diferentes de un simple rectángulo, debido a las irregularidades del terreno, los ríos y otra serie de obstáculos.

José tiene una hermosa finca de café, de más de 10 hectáreas. El año pasado un topógrafo hizo la medición del terreno. Fue un trabajo arduo pues la finca no es plana y hay todo tipo de linderos, los cuales son básicamente rectas imaginarias entre rocas, árboles, quebradas, etc.

La Trigonometría, es la rama de la matemática que se encarga de medir ángulos. Uno de los teoremas más importantes en Trigonometría sobre la semejanza de triángulos rectángulos afirma lo siguiente:

Sean $\triangle AOB$ y $\triangle COD$ dos triángulos semejantes como en la figura:

entonces ellos tienen las mismas proporciones entre sus lados. Es decir

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} \qquad \text{y} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} &= \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \end{aligned}$$

El cociente $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$, que sólo depende del ángulo α recibe el nombre de **coseno de** α y se denota por $\cos\alpha$.

El cociente $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$, sólo depende de α, y se llama el **seno de** α, y se denota por $\operatorname{sen}\alpha$.

También el cociente $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{OA}}$ depende solamente del ángulo α y se denomina la **tangente de** α. Esta se denota por $\tan\alpha$.

Como una aplicación práctica de la trigonometría, veremos como se puede calcular una distancia sobre la tierra, cuando hay obstáculos de por medio. Dicho método recibe el nombre de triangulación. Supóngase que el lindero de una finca pasa por sobre una laguna y se quiere hallar la distancia desde el punto A hasta el punto B.

Entonces tomamos un punto C, de tal forma que se tenga un triángulo recto. Luego calculamos la distancia desde C hasta B, la cual se denota por $\overline{CB}$. También calculamos el ángulo α, con un aparato para medir ángulos llamado **Teodolito**.

Luego calculamos la distancia entre A y B, denotada por $\overline{AB}$, usando un poco de razonamiento y elementos de trigonometría.

Tenemos la relación

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

de donde

$$\overline{AB} = \overline{AC}\cos\alpha$$

Luego si $\overline{AC} = 120$ m y $\alpha = 32°$, por medio de una calculadora hallamos el valor de $\cos 32°$, el cual es igual a 0.87631. Luego

$$\overline{AB} = 120 \text{ m} \times 0{,}87631 = 105{,}16 \text{ m}$$

0.12. Sistemas de Numeración

Hoy es Lunes; día de compras para José, quien se ha levantado muy temprano. La mañana anuncia un día de mucho sol; ya los primeros rayos resbalan sobre las duras hojas de los cafetos, reflejando las nubes por doquier. De los tupidos árboles de las laderas se escapan los cantos vigorosos de los pájaros, que picotean los cambures.

José está en la cocina haciendo un inventario de la alacena, para hacer una lista de Compras. Es una de esas típicas cocinas andinas con el techo negro de tanto hollín y un fogón en un rincón en donde su esposa cocina unas arepas de trigo. En el suelo, cerca de las brasas, un gato disfruta del agradable calor. En las paredes una gran cantidad de repisas, en donde descansaban algunas cacerolas de barro. Encima del fogón algunas yerbas arómaticas como la ruda y el hinojo, le daban un olor particular a campo fresco. Después de hacer la lista me la muestra y en ella leo lo siguiente:

2 docenas de naranja,
10 kilos de papa,
4 kilos de harina,
3 litros de aceite.

Le digo a José que compre 23 naranjas, en vez de 24, y se ríe. El sabe que todo el mundo compra las naranjas por docenas, o por cientos. El 23 es número poco usado.

- Si llego al pueblo -, dice José, y le digo al frutero: Mire, véndame 23 naranjas, entonces pensará que soy un tipo loco o venido de otro planeta.

También llama la atención los 10 kilos de papa ¿Por qué 10 y no 11? ¿Por qué un kilo tiene 1000 gramos y no 947 gramos?

Nuestro sistema de numeración es un **sistema posicional en base 10**. Esto quiere decir que usamos 10 dígitos para representar los números del 0 al 9 y que cada dígito tiene un valor, dependiendo de su posición. Mediante este sistema podemos representar todo número entero positivo, como una combinación de potencias de 10. Por ejemplo

$$6427 = 6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

Antiguamente se usaron otros sistemas de numeración. Por ejemplo el sistema de numeración de los romanos no era posicional. No tenía base alguna y por lo tanto las operaciones eran muy complicadas.

Los mayas, una de las civilizaciones de América más avanzadas, habían alcanzado un alto grado de desarrollo. Aplicaban la Matemática en la construcción de canales de irrigación. También la usaban en sus cálculos astronómicos y en la medición del tiempo. El Calendario construido por los Mayas es casi perfecto.

Ellos tenían un sistema de numeración en base 20, para lo cual utilizaban símbolos especiales para los números del 0 al 19. Estos símbolos eran:

Este sistema tiene la ventaja de reducir la cantidad de símbolos para representar un número. Los números se escribían en forma vertical y no en forma horizontal, como lo hacemos en la actualidad. La primera posición, comenzando por arriba, era la de las unidades del 0 al 19. La segunda posición, debajo de esta, era ocupada por los múltiplos de 20, la tercera por los múltiplos de 400 y así sucesivamente. Por ejemplo el número

$$\begin{array}{lll}
0 & _ & \bullet \longleftarrow 1^a \text{ posición} \\
20 & _ & \bullet \longleftarrow 2^a \text{ posición} \\
400 & _ & \bullet \longleftarrow 3^a \text{ posición} \\
8{,}000 & _ & \bullet \longleftarrow 4^a \text{ posición}
\end{array}$$

es el 8421 de nuestro sistema decimal.

¿Cómo representamos 1995 en el sistema maya?

0.13. Los Números Primos

Hoy vamos a realizar una caminata hasta una colina que se halla del otro lado del río, en frente de la meseta y en las primeras estribuciones de la cordillera. Comenzamos a caminar muy temprano en la mañana, bajando por el camino que sale del pueblo y pasando al otro lado del río. Luego iniciamos el ascenso, dando un rodeo en zig-zag por la falda del cerro, hasta una cima coronada de árboles de eucalipto, para luego seguir una travesía por el borde de la montaña hasta la parte más alta.

Después de caminar por más de una hora, nos sentamos a descansar en una explanada en donde hay unas grandes rocas que nos sirven de asiento.

Desde aquí se tiene una vista prodigiosa de La Mesa y sus alrededores. El pueblo se divisa en la parte de abajo con sus blancas casas de oscuros techos de teja enmohecida. Más allá en la parte alta, como un ave pronta a levantar el vuelo, se alza la torre de la iglesia con su blanca cúpula.

Esta experiencia de poder contemplar un paisaje tan agradable se puede comparar a la experiencia que produce el razonamiento matemático, en la interpretación de las cosas de la naturaleza. El paisaje nos produce un placer, porque descubrimos otro aspecto del pueblo que nos conocíamos. De la misma manera, si descubrimos un hecho nuevo en el conjunto de los números naturales, podemos sentir un disfrute similar. Es como una sensación de entendimiento y de comprensión que sirve de estímulo a nuestra mente.

Los números naturales son objetos matemáticos que usamos para contar. Pero ellos son tan interesantes, que aún algunos matemáticos dicen, que Dios los creó y el hombre los descubrió.

El hombre en la antiguedad, guardaba una actitud de respeto y reverencia hacia los números y muchas veces los llegaron a vincular con propiedades mágicas.

Por ejemplo los matemáticos de la escuela de Pitágoras decían que los números impares eran masculinos y los pares femeninos, pues los pares siempre contienen a otros números, así como las mujeres pueden crear otro ser. El número 5 era el número del matrimonio, pues 5=2+3 es la suma del primer número femenino (el dos) y el primer número masculino (el tres). El número 7 se consideraba de buena suerte, quizás por ser la suma de dos mujeres y un hombre. El número 7, junto con el 3 y el 40 aparecen muchas veces en la Biblia, pues constituyen números místicos para los primeros hombres.

Hay otros números interesantes que son los llamados **números perfectos**. Un número es perfecto, si es igual a la suma de sus divisores menores que él. Por ejemplo 6 es perfecto, pues

$$6 = 3 + 2 + 1$$

También existen los llamados **números triángulares** que son la suma de los puntos dentro de un triángulo isósceles. Por ejemplo $3, 6, 10, 15, \ldots$, etc. son números triángulares, pues corresponden a los triángulos

Los números más resaltantes dentro del conjunto de los números naturales, son los **números primos**. Un número es primo, si no es igual a uno, y sus únicos divisores son 1 y él mismo. Así pues los primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...etc.

Todo número que no es primo (ni el uno), se llama **compuesto**. Es un hecho muy conocido que todo número compuesto es un producto de números primos.A este resultado se le conoce con el nombre de Teorema Fundamental de la Aritmética. Por ejemplo $528 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11$.

El matemático griego Euclides, fue el primero en demostrar que los números primos son infinitos.

La demostración es un prodigio de sencillez y belleza de razonamiento: si suponemos que hay sólo un número finito de primos, digamos $p_1, \ldots, p_s$, entonces el número $p_1 \cdots p_s + 1$ no es primo, pues es diferente de los anteriores. Luego debe ser un número compuesto. Si $n = p_1 \cdots p_s + 1$ es compuesto, debe ser igual a un producto de primos entre los $p_1, \ldots, p_s$. Pero ningún primo p_i puede dividir al número n. Luego hemos llegado a una contradicción, la cual viene de suponer que hay sólo un número finito de primos.

La forma en que aparecen los primos, dentro de los enteros, es muy misteriosa, y hasta el presente no se ha podido hallar una fórmula que genere todos los números primos y sólo ellos.

Existen muchos problemas famosos o **conjeturas** sobre los primos. Por ejemplo se sabe que hay **primos gemelos** como 11 y 13, 17 y 19, 71 y 73. Pregunta: ¿Existen infinitos primos gemelos?

0.14. El gran Libro del Universo

Después de saciar nuestro apetito con la comida que traíamos en nuestros morrales, nos dedicamos a contemplar largamente el amplio valle que se muestra ante nosotros desde estas alturas. El río serpentea por entre las rocas y retrata las nubes en sus animadas aguas, que van jugando a lo largo del cauce.

Cuando ya empieza a morir la tarde, los débiles rayos del sol iluminan el cielo con ocres y anaranjados y las montañas se visten con sus mejores galas. En esa hora tan poética del crepúsculo, nuestros pensamientos se elevan por encima de todas las cosas y los hombres. Sentimos que estamos muy cerca de Dios, que las cosas creadas por El nos pertenecen y a la vez pertenecemos a ellas. Somos una pequeña parte dentro del Universo, pero en este momento parecieramos penetrar en algunos de sus secretos.

Tenemos muchas maneras de entender y penetrar en la naturaleza, como ocurre cuando apreciamos la literatura, la música, la pintura, etc. Pero el acercamiento más exacto y razonable hacia la realidad del Universo es a través de la Matemática. El gran libro del Universo está escrito en lenguaje Matemático, que es un lenguaje Universal, como el de la música, el de la pintura.

Este lenguaje ha sido creado por los hombres de todas las épocas y de todos los países. La mayoría de los resultados obtenidos en Matemáticas son de una validez a prueba del tiempo. Permanecen como verdades eternas por los siglos de los siglos. Cuando estudiamos un teorema de geometría plana, estamos oyendo la voz de Euclides, quien habita otra región del tiempo y el espacio: más de dos mil años hacia atrás.

Lo tenemos a nuestro lado guiándonos con su razonamiento claro, sencillo y a la vez rigurosos, en la demostración de algún hecho geométrico.

Mucha de la matemática que se hace hoy en día no tiene aplicación directa en la vida diaria, pero esto no le quita su importancia. Cuando el geómetra griego Apolonio estudiaba las propiedades de las elipses, hace miles de años, no lo hacia con intención de resolver algún problema concreto. Sin embargo 1800 años más tarde el astrónomo Kepler, descubre que los planetas se mueven en torno al sol siguiendo una trayectoria elíptica.

Aún la matemática más abstracta como la Teoría de Grupos, los espacios de dimensión infinita y la Geometría de Riemann ha tenido aplicaciones en casos tan importantes como el estudio de las propiedades de los átomos y la estructura de la materia.

Si el hombre no contara con la matemática no habría sido posible lograr los grandes avances de la ciencia y la tecnología. No habría satelites artificiales, ni viajes al espacio. Tampoco tendríamos las computadoras que tanto han influido en el denominado progreso del mundo moderno.

La Matemática continuará avanzando, mientras el hombre exista. Su poder de atracción sobre la mente humana, continuará sonando como una suave melodía que no termina nunca, pues como decia Sylvester en el siglo pasado: la matemática es la música de la razón.

0.15. El Túnel

Hoy es jueves. Cristóbal y José irán temprano a visitar una aldea llamada San Rafael, situada al otro lado de la montaña. José va a recoger una oveja que un viejo amigo le regaló el mes pasado, cuando éste se encontraba de visita en La Mesa. Parado enfrente de la casa, el Jeep está listo para partir.

Rosalba, la esposa de José, los despide desde la puerta con unas tazas de café humeante para auyentar el frío de la mañana. Cristóbal toma la negra bebida con bastante deleite, mientras José va colocando cosas en el compartimiento trasero, o la tolva, del Jeep: dos pesados bultos de papa, una carga de café y algunas panelas de caña, envueltas en hojas secas de cambur.

Ya todo está listo para iniciar el viaje el cual dura 2 horas aproximadamente. Se suben al carro y se despiden de Rosalba. Ya el carro comienza a rodar por entre las verdes matas de café que rodean la casa y se pierde en la primera curva del camino al entrar en la neblina.

Después de pasar los últimos muros de piedra, Cristóbal se sumerge en un pozo de reflexiones. Su mente se traslada a las elevadas cimas del pensamiento en donde la razón ilumina todas las cosas.

- El hombre ha podido vencer a la naturaleza, gracias a su capacidad de pensar, de razonar e interpretar correctamente las fuerzas vitales del Universo. La Matemática: he aquí la herramienta más poderosa usada por los hombres que cambian la forma del paisaje. Sin la Matemática: ¿cómo sería la Ingeniería? Seguramente los caminos serían inservibles, largos y muy poco seguros. Los túneles no existirián.

Mientras tanto el Jeep se mueve alborotadamente de un lado trepando con dificultad el estrecho camino de escasamente dos metros de ancho. Es una vía de tierra revestida de lajas que se desprenden de los taludes y que sepentea a través de faldas de imponentes montañas, salvando profundos valles y oscuros precipicios. En cada recodo del camino el carro se estremece en medio del crepitar de hierros y blancas nubes de humo, olorosas a aceite y a gasolina, vomitadas por el escape del motor.

Después de ascenderen Jeep convulsionadamente por más de una hora, al fin alcanzaron el punto más alto de la travesía sobre una cima yerma desde la cual se divisa el amplio valle que se extiende al otro lado de la cordillera. Allí se detuvieron para descansar un poco y respirar el aire fresco de aquel páramo. La vista se pierde en las cumbres azules más lejanas que bordean el horizonte. El aire es limpio y de una transparencia irreal.

- Que bueno sería contar con un túnel que atravesara estas montañas-, dijo Cristóbal, para evitarnos tantos rodeos.

Luego agregó mas seriamente

- Al menos un túnel de 100 métros de largo en la parte más alta cerca de la cima, nos servirá para acortar el camino. Sería algo muy bello y útil.

A José le pareció muy graciosa la idea del Profesor, y al mismo tiempo imposible de realizar.

En tono jocoso le respondió a su amigo

- Que tal le parece esto: si una cuadrilla de obreros comienzan a cavar el túnel de un lado de la montaña, y la otra por el lado opuesto, quizás no llegan a unirse en la mitad. Esto sería un total enredo que llevaría la construcción del túnel al fracaso.

- Esto no puede suceder - respondió Cristóbal-, si usamos la trigonometría correctamente. Cuando se cava el túnel por ambos lados, siguiendo una línea recta, entonces las dos excavaciones se unen en el centro: no hay forma de desviarse.

- Muy bien -, dijo José sonriendo, pero ¿cómo hace Ud. para trazar una línea recta dentro de la montaña?

Cristóbal meditó unos minutos, como tratando de recordar algo escondido en su mente. Luego sacó una hoja de su libreta en donde hizo unos dibujos. Después dijo pausadamente

- Te explicare la forma inteligente de cavar un túnel correctamente. Antes de comenzar a cavar hay que hacer algunos mediciones de ángulos. Veamos el dibujo

Si se quiere perforar la montaña entre los puntos A y B, entonces se eligen tres puntos de referencia D, M y C de tal forma que ellos sean los vértices de un triángulo rectángulo.

Sobre los puntos D y C estaran ubicados los controladores de las cuadrillas de obreros que iran excavando. Los que cavan por el lado A, lo harán siempre en la dirección que les indique el controlador C, que será aquella que forme un ángulo α con $\overline{MC}$.

Igualmente los del lado B cavaran en una dirección que forme un ángulo β con $\overline{DM}$, controlados desde D. De esta forma los dos extremos del túnel se unen.

Estas aplicaciones sencillas de la geometría, ya se conocían desde la época de los griegos hace más de 2000 años. ¿Te imaginas otra forma de hacer esto sin la Matemática?

Llegaron a la pequeña aldea y se quedaron en ella hasta el día siguiente pues, se hizo muy tarde para regresar.

0.16. Bueyes en Paralelo

El viaje de retorno a La Mesa fue muy rico en cuanto a experiencias matemáticas se refiere. Los viajeros pudieron apreciar el paisaje fértil de la alta montaña, en donde predominan los cultivos de trigo que cubren las laderas y faldas de los cerros. Mas abajo los verdes sembradíos de papa en ordenadas hileras y los de ajos, de tonos más azules, que tapizan las planicies de las mesetas y se deslizan lentamente hasta el cauce de los revoltosos ríos.

Se detuvieron en un recodo del camino a contemplar con curiosidad las formas geométricas tan variadas que surgían ante sus ojos. En primer lugar llamó su atención los muros de piedra, que van dibujando rectángulos, triángulos, trapecios y otras figuras geométricas, al dividir los campos de cultivo. También las terrazas en donde se cultiva el trigo, limitadas por líneas curvas paralelas que siguen las ondulaciones de los cerros. La geometría reina por todas partes, demostrando la presencia humana en la configuración del paisaje.

Entre las aplicaciones más sencillas y útiles de la geometría se encuentran las líneas paralelas. Ellas aparecen en la construcción de caminos, puentes, casas y edificios. En la agricultura también son de utilidad cuando se prepara el terreno para cultivar.

José y Cristóbal han visto a una yunta de bueyes arando en una parcela rectángular. Ya se aproximan hacia el agricultor quien sostiene el arado en una mano y la garrocha en la otra. Los bueyes de color negro halan con fuerza el arado de madera de cedro que va hundiendose lentamente para sacar piedras que se revuelven en la tierra húmeda olorosa a bosta. Cristóbal queda maravillado por la manera tan precisa como el arado va abriendo surcos en paralelo.

-Hoy a aprender geometría viva de este noble agricultor -, le dice Cristóbal a José.

- Buenos días maestro -, saluda Cristóbal al hombre, quien ha detenido la yunta para hablar con los visitantes,- ¿Cómo hace Ud. para abrir los surcos en paralelo?

- En primer lugar hay que ser un buen gañán -, contesta el agricultor sonriendo-. Estos bueyes ya conocen el oficio, pues los he enseñado a no volver a caer en el surco, cuando suben o bajan. Ellos van moviendose hacia adelante muy derechitos pues saben mantenerse a una distancia constante de la línea del arado. De esta manera se forman los surcos en paralelo.

- Muy interesante -, dice Cristóbal, quien luego pregunta: -¿Por qué se hacen los surcos en paralelo?

- Bueno ,- dice como buscando algo en el fondo de su mente-, cuando se siembran las semillas sobre líneas paralelas las futuras plantas se distribuyen de una manera muy uniforme todas separadas entre si a una misma distancia, sin dejar huecos de por medio.

Los dos visitantes oían todas las explicaciones con atención. Cristóbal siempre habia enseñado geometría a sus estudiantes dentro de un salón de clases en la Universidad. El poder acercarse a la geometría en medio de un campo de arado era una experiencia nueva, dentro de las aplicaciones de la Matemática.

Después de atravesar un pequeño arroyo, nuestros amigos se dirigieron hacia una montaña cubierta de terrazas para el cultivo.

- Así como hay líneas paralelas -, decia Cristóbal, también hay planos paralelos en el espacio. Estos planos paralelos, que son las terrazas, se usan y se usaban desde la antiguedad por los indios de los andes para cultivar la tierra. Cuando se tiene cierta inclinación en un terreno, entonces el agua de lluvia al descender con mucha velocidad, por efecto de la pendiente, arrastra consigo la capa de tierra fértil produciendo la erosión. Mediante el uso de las terrazas, se crean estos planos horizontales en donde el agua corre lentamente y además se queda atrapada en los surcos, dándole humedad al terreno. La palabra Andes viene de andén que quiere decir terraza.

- Muy bien -, dijo José aprovechando el final de la explicación-, pero debemos continuar nuestro viaje que se está haciendo tarde. Mañana tendrá ud. tiempo para explicar todo esto a sus alumnos de La Mesa.

Cristóbal continuo el viaje muy callado pensando en líneas y planos en el espacio.

- Esta es la dinámica de la ciencia -, pensó-. Observar, experimentar y luego ir sacando conclusiones teóricas.

0.17. La Torre de la Iglesia

Euclides fue uno de los matemáticos griegos, que más contribuyeron al desarrollo de la geometría. El fue el autor de **Los Elementos**, un libro de geometría, en donde aparece por primera vez el método deductivo dentro de la matemática. El método deductivo es una forma de razonamiento en donde se demuestran proposiciones geométricas, usando otras proposiciones más simples llamadas axiomas o postulados.

Un ejemplo de postulado, que aparece en Los Elementos, es el siguiente: "Dos lineas paralelas distintas no se cortan; esto es, no tienen ningún punto en común".

Usando este postulado, se puede probar un resultado sobre líneas paralelas el cual poseé múltiples aplicaciones prácticas. Este establece "Cuando dos rectas paralelas L y L' se cortan con una tercera recta oblicua M, entonces el ángulo α es igual al ángulo β".

Un postulado es como una pequeña semilla que produce un árbol robusto de frondosas ramas llenas de flores. La esencia del postulado fluye como la savia por las ramas y cada flor representa una realización prodigiosa de su contenido. La geometría Euclideana es un bosque gracioso en donde nos acercamos a contemplar sus flores, como pájaros curiosos atrapados por la belleza de sus colores.

Cristóbal está sentado en un banco de la plaza, exponiendo ante sus jóvenes alumnos de La Mesa, quienes se entregan abstraídamente a cada una de las observaciones que hace el maestro.

Es una mañana radiante de sol, muy adecuada para dedicarse al noble ejercicio de la geometría. Las formas a esta hora del día se perfilan nitidamente cuando la luz resbala con precisión por las aristas de los cuerpos sólidos. La iglesia del pueblo con su fachada rematada en triángulo, su campanario rectangular y su cúpula esférica pródiga en formas geométricas interesantes que se revelan ante el hombre observador.

- Les daré una muestra de cómo medir la altura del campanario -, dijo Cristóbal, sin necesidad de subirme a él; sólo usaré una vara, la luz del sol y el pequeño teorema que les acabo de explicar.

Cristóbal toma la vara en cuestión y la mide; tiene $1,8$ m. Luego la pone en el suelo, parada verticalmente, y mide la sombra arrojada; esta mide 50 cm. Luego mide la longitud de la sombra arrojada por el campanario de la iglesia, la cual mide 6 m.

Ahora toma su cuaderno y hace unos dibujos en donde va marcando con letras las líneas y los ángulos.

Las líneas L_1 y L_2 son paralelas y cortan a la línea S, del suelo, oblicuamente. Por el teorema, los ángulos β y β' son iguales. De esta forma se tiene que α y α' son también iguales y por lo tanto los dos triángulos son semejantes.

Se tiene entonces la siguiente relación de semejanza

$$\frac{0{,}5 \text{ m}}{6 \text{ m}} = \frac{1{,}8 \text{ m}}{a}$$

donde a es la altura del companario. Luego

$$a = \frac{1{,}8 \text{ m } \times 6 \text{ m}}{0{,}5 \text{ m}} = 21{,}6 \text{ m}$$

- Y la altura del campanario es de 21.6 m. -, dice Cristóbal, muy satisfecho con la solución obtenida.

Lo interesante acá -, continuó, es ver como un conocimiento teórico, producto del razonamiento humano, nos ha permitido obtener un conocimiento de algo nuevo, como lo es la altura del campanario, sin necesidad de realizar la medición de éste.

Todos los estudiantes quedaron contentos con las explicaciones del Profesor.

Solamente uno de ellos; el más terco de todos, llamado Abraham, dijo que aquello no era una gran cosa, pues cualquier albañil se puede subir a la torre de la iglesia y con una simple plomada pudiera haber medido la altura. Entonces la geometría no era indispensable para hacer mediciones; siempre podemos realizar cualquier medida directamente, usando cuerdas, reglas, rayos de luz o cualquier otro artificio.

A lo cual Cristóbal refutó, diciendo que él podía medir algo en donde nadie podia llegar, a excepción del Diablo, como lo era el centro de la tierra. Pero dejemos esto para otro día.

0.18. El Cóndor

El Cóndor, un ave que casi se ha extinguido, ha volado hoy sobre La Mesa. Desplegando sus enormes alas oscuras, se lanza desde los riscos montañosos en majestuoso vuelo, elevándose a las nubes más altas, en donde queda suspendida; casi en equilibrio con el viento, para luego bajar serenamente a posarse en alguna piedra. El vuelo del cóndor es ágil, preciso y muy elegante; todas las trayectorias descritas son el resultado de hábiles instintos. El ave conoce de la fuerza del viento, de la gravedad y de su propio impulso. Calcula distancias resolviendo serios problemas de geometría. Es la geometría misma convertida en ave maravillosa.

- ¡Quién pudiera tener el vuelo del cóndor para remontarse en el espacio azul! -, dice Cristóbal con gran anhelo-. ¡Quién pudiera subir hasta las cumbres, más altas y atravesar los profundos desfiladeros, cruzar el espacio en todas las direcciones, palpar el aire inmóvil que envuelve las nubes!

La visita inesperada de este cóndor solitario ha despertado la curiosidad de los jóvenes por las alturas, por conocer ese mundo de montañas y crestas elevados que limitan con el cielo; como el pico El Venado que se observa en toda su grandiosidad desde cualquier lugar de La Mesa. Una joven llamada Aura le ha preguntado al Profesor:

- ¿Cómo se puede medir la altura de una montaña sin necesidad de subir hasta la cima?

- Esto se puede hacer conociendo La Trigonometría -, responde Cristóbal-, de la misma forma como el cóndor planea su vuelo.

La Trigonometría es el arte de medir los ángulos, como ya les he dicho. Esta ciencia es una de las más antiguas dentro de la matemática. Los egipcios y babilonios usaron los ángulos para ubicar los astros en el cielo. Ellos dividieron la circunferencia en 360 ángulos, cada ángulo de éstos mide un grado.

- ¿Por qué 360? -, pregunta Aura ¿Qué hay de especial con respecto a este número ?

- Muchas cosas tiene el número 360 que lo hace especial -, responde Cristóbal-, es un número muy bueno pues se puede dividir entre una gran cantidad de enteros. Observa que 360 es el producto de 6 por 60. Los babilonios usaban un sistema de numeración en base 60, llamado **sexagesimal**. Por otro lado el calendario babilonio contaba de 360 días.

El sistema de medición de los ángulos es también un sistema sexagesimal. Cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto se divide en 60 segundos. Así pues medimos los ángulos hoy en día como lo hacían los babilonios hace miles de años.

- Muy interesante -, dice Aura-, ahora por favor; díganos como podemos calcular longitudes usando ángulos.

- Cristóbal levanta la cabeza y observa el cóndor nuevamente en el cénit, que con sus poderosas alas extendidas, va describiendo un círculo perfecto de 360° alrededor del sol. Luego se pierde de vista al entrar en el borde de una nube.

- La relación entre ángulos y lados de un triángulo se aprecia muy bien en la sombra proyectada sobre el piso, por una pared. En las primeras horas de la mañana, cuando los rayos del sol son casi horizontales, entonces la sombra es grande y larga. A medida que el sol asciende, la sombra se va haciendo más pequeña, hasta desaparecer casi completamente al mediodía.

En el triángulo formado por la pared, la sombra y el rayo de sol que toca el borde de la pared, estamos viendo una relación interesante entre ángulo y longitud de uno de los lados. Cuando el ángulo α es pequeño, entonces la longitud de la sombra l es grande. A medida que α crece, l va disminuyendo hasta hacerse 0.

Para establecer con más precisión esta relación supondremos ahora que α es un ángulo centrado en el origen de un círculo de radio c.

El punto P se mueve como un cóndor sobre la circunferencia de radio c, de tal forma que α va variando. En cualquier posición de P, siempre se forma un triángulo rectángulo de lados a, b, c y por el Teorema de Pitágoras se tiene la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{2}$$

Para cada valor de α se definen entonces las **razones trigonométricas seno y coseno**

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{y} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c}$$

Existe una relación muy interesante entre seno y coseno. Usando la ecuación (2) y las correspondientes definiciones, se deduce

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Si se tiene un triángulo rectángulo de lados a, b, c, entonces basta conocer uno de sus ángulos agudos y cualquiera de los lados, para calcular los lados restantes.

Por ejemplo, si conocemos α y a, podemos hallar b y c mediante las relaciones

$$c = a\cos\alpha \qquad \text{y} \qquad b = c\operatorname{sen}\alpha$$

Si ahora tenemos un triángulo cualquiera (no necesariamente rectángulo), entonces el problema de calcular los dos lados restantes, a partir de **uno** de los ángulos y **un** lado no se puede resolver. Pero si conocemos **dos** ángulos y **un** lado entonces si podemos hallar la longitud de los lados restantes.

Por ejemplo en el triángulo de la figura se puede hallar la longitud de a, usando el lado b y los ángulos α y β.

Dividiendo el triángulo anterior en dos triángulos rectángulos, tenemos la figura

Donde el segmento x satisface el par de relaciones

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{b} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{x}{a}$$

o sea

$$x = b\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen}\beta$$

De donde obtenemos la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \tag{3}$$

Podemos hallar una fórmula similar para c, usando los ángulos γ y α y el lado a. Para hacer esto, sea h el lado que va desde el vértice correspondiente a β, hasta la prolongación del lado b.

De acuerdo con la figura anterior tendremos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{c} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\gamma = \frac{h}{a}$$

Luego

$$h = c\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen} r,$$

de donde

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{4}$$

Podemos entonces combinar las fórmulas (3) y (4) en una sóla expresión

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{5}$$

fórmula esta que se conoce con el nombre de **Ley de los Senos**.

- Disculpénme por haber alargado tanto mi exposición -, dice Cristóbal-, pero estos conocimientos teóricos que estamos generando, nos serán de mucha utilidad en el futuro. Ellos son las herramientas básicas necesarias para resolver cualquier problema sobre triángulos. Les sugiero que tomemos un descanso de unos 15 minutos, para luego continuar con un problema muy divertido.

Al caer la tarde, el cielo hacia el oriente se ha despejado completamente de nubes, mostrando en toda su majestuosidad al pico El Venado, el cual domina el amplio panorama. Su cumbre rocosa se transforma en un crisol de colores, donde se funden los rayos dorados que se alargan por el atardecer.

- ¡El cóndor se ha ido! -, exclama Aura, señalando hacia el cielo turquesa, con un cierto aire de tristeza.

- Mañana continuaremos con nuestra lección de geometría -, dice Cristóbal, quien ha sentido el llamado de La Naturaleza, dejándose cautivar por la suave brisa que baja de la cordillera y hace ondear los rubios cabellos de Aura.

0.19. El Venado

La montaña ha cambiado muy poco en miles de años. Es una sierra azul que rompe el horizonte, dividiendo el espacio entre cielo y tierra. Su cuerpo de reptil dormido va desde el borde del pueblo hasta el blanco turbante de nubes que coronan sus cimas.

Ella es un estremecimiento de planos que se quiebran, se separan y se retuercen, al ritmo palpitante del planeta, uniéndose unos con otros caprichosamente para formar pliegues, elevaciones y concavidades de piedras tapizadas de frondosa vegetación.

Sus colores cambian progidiosamente durante el día. En la mañana es el azul transparente de las ondas del mar y el verde líquido de la esmeralda. Al mediodía es el amarillo limón y el verde perenne de las frondas de ceibos en cuyo manto se destacan los reflejos plateados de los yagrumos. Luego en la tarde, es el oro cansado del crepúsculo que va cabalgando sobre el lomo de los cerros. En el ocaso es sólo una sucesión lírica de triángulos y rombos púrpuras, que la fina neblina va dibujando con paciencia en sus empinadas faldas.

La montaña es fuente de vida. De allí surgen torrentes de cristalinas aguas que se deslizan entre rocas para ir hasta las lagunas. En su vientre frondoso anidan pájaros de toda clase que alegran la existencia de los hombres del campo. Entre sus brazos poderosos pastan los mansos rebaños de ganado que alimentan a todo el pueblo.

Cristóbal la contempla a plenitud en esta hora de la mañana, desde el altozano del pueblo. A su lado, un grupo de jóvenes con rostros resplandecientes se prepara, para plantear algunas curiosidades matemáticas que sus padres no fueron capaces de explicar.

- Para comenzar hoy -, dice Cristóbal-, veremos cómo podemos calcular la altura de una montaña cualquiera.

Pregunta Aura: ¿A qué altura se encuentra el pico El Venado? ¿Conoce alguno de ustedesla respuesta?

Inmediatamente, se lanzan toda clase de conjeturas, pero no se vislumbra con claridad la respuesta a la pregunta. Cristóbal toma entonces una hoja de papel y comienza a hacer anotaciones, estableciendo una metodología de trabajo.

En primer lugar harían un par de mediciones de ángulos en dos puntos de la meseta, separados 3 km entre sí

Con estas mediciones se procede a calcular la distancia c, desde el punto A hasta el punto V, correspondiente a la cima del Venado.

El ángulo β es igual a la diferencia de γ menos α. Para hallar c usamos la ley del seno

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{3{,}000\ \mathrm{m}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{c} \tag{6}$$

Las medidas calculadas por Cristóbal y el grupo de jóvenes fueron las siguientes

$$\alpha = 40^\circ \qquad \text{y} \qquad \gamma = 60^\circ,$$

luego $\beta = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$.

Con estos valores, calculamos el valor de c utilizando para ello la ecuación (6). Esto es

$$\begin{aligned} c &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \times 3{,}000 \\ &= \frac{0{,}6428}{0{,}3420} \times 3{,}000 \\ &= 5{,}638 \end{aligned}$$

Finalmente para calcular la altura del pico, igual a h en el dibujo, usamos la relación trigonométrica

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{h}{c},$$

de donde

$$\begin{aligned} h &= \operatorname{sen} 60^\circ \times 5{,}638 \\ &= 0{,}8660 \times 5{,}638 \\ &= 4882 \end{aligned}$$

Luego el pico El Venado tiene una altura de 4882 sobre la altura de la meseta.

.

0.20. La Plaza

La Plaza Bolívar de La Mesa es un cuadrado grande en donde coviven los árboles y la geometría. Ella se puede cruzar de una esquina a otra en línea recta, siguiendo las diagonales del cuadrado, o bien desde el punto medio de uno de sus lados al extremo opuesto siguiendo líneas paralelas a los lados.

Las líneas en diagonal dividen a la plaza en 4 triángulos isósceles de igual área. Las líneas que parten de los lados la dividen en 4 cuadrados de la misma área.

El área de cada triángulo es entonces igual al área de cada cuadrado: un sencillo teorema de geometría que conocen todos los niños de La Mesa.

La plaza está dividida en 8 triángulos isósceles de verde yerba muy bien nivelada, cada uno de ellos demarcado cuidadosamente por hileras de flores. En el interior de cada uno de ellos crecen apretados cipreses de copas esféricas y parabólicas muy bien podadas. Todo ha sido colocado sabiamente, bajo las reglas claras y sencillas de la geometría de Euclides. Nada se escapa a este orden lógico.

En el centro de la plaza, al lado del pedestal rectangular en donde descansa el busto del héroe, Cristóbal, Clara, Aura, Luz y Abraham se dedican a contemplar todo con mucho interés, concentrándose en el aspecto esencial de su geometría. La mirada de ellos va creando y recreando formas, asociaciones entre figuras y relaciones entre distancias. El cuadrado, al ser dividido por líneas genera polígonos y estrellas muy interesantes. Se pueden diseñar nuevas plazas al jugar con todos estos seccionamientos. Cristóbal se da cuenta de ello y propone a sus amigos crear nuevos trazados de la plaza. Las proposiciones no se hacen esperar.

Clara sugiere lo siguiente:

- Si cada lado del cuadrado se divide en dos partes iguales, entonces uniendo estos puntos se obtiene un cuadrado interno. (puntos 1, 2, 3, 4)

Luego a cada triángulo formado se le halla su centro (puntos 5, 6, 7, 8). Si unimos todos los puntos 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4 y 8 en sucesión, se obtiene un polígono de ocho lados, llamado **octógono**.

Abraham propone una segunda posibilidad, mediante la cual se obtiene una plaza hexagonal o de 6 lados iguales. Caminar alrededor de una plaza de 6 esquinas es muy agradable; no hay que cambiar de dirección 90° en cada recodo, lo cual es incómodo, apenas hay que torcer 60° la marcha.

En primer lugar, en el cuadrado se toman los puntos medios de dos lados opuestos, digamos A y B.

Luego dibujamos un par de círculos de radio igual a la distancia $\overline{CB}$ y con centros en A y B.

Luego tomamos el punto medio de los segmentos AC y CB y a través de ellos trazamos dos rectas perpendiculares a la recta AB.

Estas rectas se cortan con las dos circunferencias en los cuatro puntos E, F, G, H.

Si la plaza tiene 80 mts. de lado, entonces la distancia desde B al centro del cuadrado es de 40 mts. Luego la distancia entre B y F es de 40 mts, por ser BC y BF radios de la misma circunferencia. También se observa que la distancia desde E a F es 40 mts.

Si ahora unimos en sucesión los puntos F, B, G, H, A y E obtenemos un hexágono regular.

- ¿Por qué es un hexágono regular? -, pregunta Aura.

- Porque tiene 6 lados y todos tienen la misma longitud de 40 mts. responde Abraham.

Aura nos propone una tercera solución muy interesante:

Si cada lado se divide en 4 partes iguales se tienen los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 8.

Si unimos en sucesión los puntos 1, 3, 5, 7 y luego los puntos 2, 4, 6, y 8, obtenemos una estrella de ocho picos. Además tenemos un octógono dentro de esta estrella.

- Ya hemos visto como diseñar plazas de 4, 6 y 8 lados -, dice Cristóbal- ¿Podría alguién indicarnos como se construye una de 5 lados?

0.21. La Palma y el Meridiano

Un grupo de jóvenes están sentados en la plaza Bolívar de La Mesa en compañía de Cristóbal. A esta hora del mediodía repican las 12 campanadas de la iglesia.

Cristóbal se dirige a una palmera muy alta situada en una esquina de la plaza y se queda observando la base de la palmera. Da vueltas alrededor del robusto tronco, mirando siempre hacia abajo, como buscando algo. Ahora saca una cinta métrica de su bolsillo y se agacha a medir la sombra proyectada en el suelo.

La joven Clara se le acerca y lo interroga

- ¿Qué cosa está midiendo profesor?

Cristóbal sonriendo le dice

- Nada, Clara, solamente voy a calcular la longitud de un meridiano terrestre. Un meridiano terrestre es una línea recta imaginaria que pasa por ambos polos de la tierra. La geometría de la esfera es distinta a la del plano. Si se tiene dos puntos diferentes sobre ella entonces la distancia más corta entre ellos es una “linea” sobre la esfera, que en realidad no es recta sino una circunferencia. Estas lineas se les llama circulos máximos o meridianos.

A lo cual interrumpe Sol

- Profesor, explíquenos que es lo que esta haciendo -, ¿cómo puede calcular el Meridiano Terrestre con tan sólo eso?

Esta bien,- dice Cristóbal-, les contaré una historia muy interesante sobre una aplicación de la geometría en la geografía. Pero primero debo decirles algo sobre astronomía. El día 21 de Marzo, es el día en el cual los rayos del sol llegan al ecuador de La Tierra con la menor inclinación posible. Vean la sombra que arroja la palmera todos los días para que se den cuenta de este hecho tan interesante.

- Una vez, estando en San Fernando de Atabapo, a orillas del Orinoco,- continuó el profesor- usando una palmera como esta, en un día 21 de Marzo, calculé el ángulo de los rayos del sol en aquel lugar, lo cual dió $6°45'31''$ a las 12 del mediodía.

Exactamente un año más tarde, estando en Maracay, usando la sombra de una antena de radio, calcule el ángulo de inclinación de los rayos solares lo cual me dió $1°0'0''$.

Ahora bien, San Fernando de Atabapo está a 640 km al sur de Maracay. Con esta información puedo calcular el diamétro de la tierra. Veamos el diagrama en donde el punto M corresponde a la ciudad de Maracay y S a San Fernando de Atabapo y l es el arco comprendido entre ambos.

El ángulo central que forma el arco l, es igual a la diferencia de los dos ángulos, luego

$$\begin{aligned} \varphi &= 6°45'31'' - 1°0'0'' \\ &= 5°45'31'' \end{aligned}$$

Si d es la longitud de un M.T, se tiene entonces la relación

$$\begin{array}{lcl} d & \longrightarrow & 360^\circ \\ 640 \text{ km} & \longrightarrow & 5,75861^\circ \end{array}$$

de donde

$$\begin{aligned} d &= \frac{360^\circ \times 640 \text{ km}}{5,75861^\circ} \\ &= 40{,}009 \text{ km} \end{aligned}$$

- Luego el M.T mide 40,009 km de longitud -, dijo Cristóbal muy complacido. Además usando esta información puedo hallar la distancia desde La Mesa hasta el centro de La Tierra, sin necesidad de asarme en las cavernas del diablo. Esta distancia que es el radio terrestre la calculamos mediante la fórmula

$$d = 2\pi r,$$

donde d es la longitud de la circunferencia terrestre y r es el radio terrestre. Luego tenemos

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{2\pi} \\ &= \frac{40{,}009 \text{ km}}{2\pi} \\ &= 6{,}367 \text{ km} \end{aligned}$$

- El radio terrestre mide 6,367 km -, dijo Cristóbal-. Espero que Abraham tenga ahora más fé en la geometría.

- Por supuesto Profesor -, contestó Abraham un poco turbado.[1]

[1] Debido al achatamiento de La Tierra el radio ecuatorial es de $6{,}378,163$ km y el radio polar es de $6{,}356,777$ km.

0.22. El Mercado

Hoy sábado, los campesinos bajan de las aldeas a traer sus productos al mercado de La Mesa. La plaza vibra con los alegres colores de las flores del páramo junto a las ruanas de roja y negra lana de las vendedoras de frutas y verduras. El sol de la mañana ya comienza a encender los rostros de los campesinos que vinieron cubiertos del aire frío y espeso de la serranía. El alegre bullicio de los vendedores se alarga hasta la últimas casas del pueblo.

Cristóbal observa todo con cierto interés, colocado al lado de la iglesia. Dos hombres discuten sobre precios parados en frente de unos bultos de zanahoria. Más allá una mujer compra dos vasijas de barro cocido. Por todas partes se compra, se vende, se calculan precios, se resta, se suma, $\cdots$, etc. Bajo el alegre cielo de intensos tonos azules continua la algarabía.

- Que interesante es el comercio, piensa Cristóbal -, Sin los números y el álgebra los hombres no podrían cambiar productos entre sí.

En ese momento, Clara que viene de su casa se acerca a charlar con Cristóbal.

- Hola profesor, ¿Qué hace aquí parado tan temprano? ¿Esta calculando algo importante en este mercado? ¿No le perturba el espíritu, tanta confusión y bullaranga a su alrededor?

- No, cuando veo esto, vienen a mi mente imágenes lejanas de los árabes comerciando en Bagdad o Córdoba. Los árabes fueron grandes matemáticos que desarrollaron el álgebra durante la Edad Media. Gracias a su mentalidad abierta, consiguieron aplicar la matemática a la resolución de muchos problemas de la vida real. Por ejemplo en el comercio, en la astronomía, en la medición de La Tierra, en la arquitectura, $\cdots$, etc, los árabes usaron con bastante éxito el álgebra.-

- ¿Y qué es el álgebra, pregunta Clara?

El álgebra es el arte de resolver ecuaciones; de multiplicar, factorizar y simplificar expresiones numéricas. Cuando se desea calcular algo, ese algo lo designamos por x, la incógnita. Luego el algebrista construye una ecuación en x y la resuelve.

- Veamos un ejemplo concreto, de algo muy curioso que acabo de presenciar- Dijo Cristóbal. Aquel campesino ha traido al mercado papas y zanahorias. Su hijo ha contado las papas junto con las zanahorias dando un total de 100. Cada papa vale 3 Bolívares y cada zanahoria vale 2. El campesino las ha vendido todas por 260 Bolívares. Luego le pregunta al hijo ¿Cuántas papas habían? El hijo que sabe álgebra responde: habían 60 papas y 40 zanahorias. ¿Cómo obtuvo la respuesta?

Si x es el número de papas y z el número de zanahorias, se tiene que $x+z=100$. Las cantidades de dinero obtenidas al vender papa y zanahoria son $3x$ y $2z$ respectivamente. Luego tenemos una ecuación

$$3x+2z=260$$

Sustituyendo la z por $100-x$, nos queda

$$3x+2(100-x)=260 \tag{7}$$

Haciendo operaciones, obtenemos el resultado $x=60$ y $z=40$.

Una ecuación del tipo (7) se llama ecuación lineal. Hay problemas más complicados que conducen a otro tipo de ecuaciones. Por ejemplo José compra cierto número de kilos de arroz por 1800 Bs. Si hubiese comprado 10 kilos menos, por la misma cantidad de dinero, cada kilo le hubiese costado 2 Bolívares más ¿Cuántos kilos de arroz compró?

Hacemos x el número de kilos de arroz comprado. Luego el precio de cada kilo de arroz es $1800/x$. Si compra 10 kilos menos, el precio de cada kilo es $1800/(x-10)$. Luego se tiene la ecuación

$$\frac{1800}{x}=\frac{1800}{x-10}-2$$

Haciendo operaciones, llegamos a la **ecuación cuadrática**

$$x^2-10x-9{,}000=0$$

la cual se resuelve, usando la fórmula de la ecuación de segundo grado. Luego

$$x=\frac{10\pm\sqrt{36{,}100}}{2}$$

esto es $x=100$.

Por lo tanto José compró 100 kilos de arroz.

Los árabes dominaron el arte de la resolución de ecuaciones de segundo, tercero y hasta cuarto grado. En el siglo XIX se demostró que no habia fórmulas para resolver ecuaciones de grado mayor o igual a 5.

Cristóbal y Clara vuelven la mirada hacia el mercado, donde las voces de los vendedores se lanzan al cielo como pájaros de alas multicolores relumbrando al sol del mediodía. La plaza de La Mesa cada sábado, se convierte en un aula al aire libre en donde se aprende el álgebra y la aritmética.

0.23. Loros en sucesión

El tiempo ha transcurrido tan placenteramente para Cristóbal, que no desea pensar en la partida. Todavía no ha tenido noticias del mecánico que está reparando su Jeep, y sin embargo esto no le preocupa. Su mente ha estado muy ocupada en las clases de matemáticas.

El hecho de redescubrir la matemática en aquel lugar tan apartado, rodeado de aquellas personas humildes y sencillas, le ha dado la posibilidad de vivir de nuevo en otra dimensión. Antes, sólo enseñaba para recibir un sueldo mensual. Ahora, enseña sentirse bien consigo mismo y sus estudiantes. He descubierto nuevos horizontes-, pensó- y mi vida ha tomado un significado mucho mas profundo, por la trascendencia de mi misión.

Cristóbal medita todo esto, sentado solo en casa de Rafael y mirando al paisaje por la ventana. De repente ve una bandada de loros que pasa volando por encima del pueblo, en alegre algarabía. Esto lo saca de sus profundos pensamientos. Entonces Rosa y Rafael se sientan a su lado, y la conversación no se hace esperar.

-Mire Cristóbal los loros tan endiablados que tenemos aquí en La Mesa-, dice Rafael. Estos van a comerse todas la guayabas del patio de la Iglesia. Estos majaderos no respetan ni las cosas de Dios!

Cristóbal sonriendo le responde: Aún de los loros más perversos, se puede aprender algo de Matemáticas.

- La naturaleza nos plantea nuevas ideas todos los días con sus infinitas formas de expresarse. El vuelo de esos loros en hilera forman una sucesión interesante que nos esta diciendo algo.

Los números se pueden agrupar de muchas maneras en **sucesiones**. Hay sucesiones **finitas** e **infinitas**. Por ejemplo la sucesión

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ldots$$

es una sucesión infinita conocida con el nombre **sucesión armónica**. Ella tiene infinitos términos, no se pueden escribir todos, obviamente, pero podemos hallar tantos como nos plazca. No debemos sentirnos aterrorizados por tener que usar el concepto de infinito, lo importante es que seamos capaces de producir cualquier término de ella.

Cada término de la sucesión ocupa un lugar especial con relación a los otros. Así pues el 1 es el primer término, el $\frac{1}{2}$ el segundo, $\cdots$, y así sucesivamente. En general el término $n-$ésimo (o que ocupa la posición n) es $\frac{1}{n}$. El término $n-$ésimo de cualquier sucesión, lo denotamos por a_n. Así pues, definimos la sucesión armónica en forma abreviada, como

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad n \geq 1$$

Mediante esta notación tan cómoda podemos crear muchas sucesiones interesantes. Por ejemplo

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \qquad n \geq 1$$

es la sucesión

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ldots$$

Esta última sucesión es una **sucesión geométrica**, en donde todos los términos se generan a partir del primero por multiplicación de este por una constante o razón fija.

Tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= \frac{1}{2} \cdot a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2}\cdot a_2 \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{1}{2}\cdot a_{n-1} \end{aligned}$$

Cuando se tiene una progresión geométrica, es posible calcular la suma de todos los términos desde el primero hasta el término a_n. Dicha suma que llamaremos S_n viene dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Para calcular el valor de S_n, usamos el pequeño truco

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n - S_n &= a_{n+1} - \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2} - 1\right) S_n &= a_{n+1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_{n+1} - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - 2a_{n+1} \end{aligned}$$

o sea

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \qquad n \geq 1$$

¿Qué pasa cuando n es muy grande?, pregunta Rosa con interés.

Buena pregunta dice Cristóbal. Cuando n aumenta mucho, entonces S_n se acerca a 1. Por ejemplo, si $n = 1000$, entonces $\frac{1}{2^{1000}}$ es un número insignificante, casi cero, entonces S_n es casi igual a uno. Los matemáticos usamos una notación muy conveniente para describir toda esta situación en un sólo símbolo. Es la notación de límites

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = 1$$

lo cual dice "el límite de S_n cuando n tiende a infinito es igual a 1".

0.24. Fracciones Continuas

La conversación sobre sucesiones ha despertado mucho interés entre los jóvenes, que han ido llegando a la casa de Rafael. Clara hace muchas preguntas a Cristóbal, quien trata de responder de la mejor forma posible. Todos prestan atención al profesor, quien se pregunta a si mismo en voz alta.

- ¿Qué son los límites de las sucesiones? ¿Es algo que está en la naturaleza, pero que no vemos ni tocamos? ¿Cómo podemos llegar hasta el límite, si hay que pasar a través de un número infinito de términos? ¿Será siempre un número racional, el límite de una sucesión de números racionales?

- En primer lugar, dice Cristóbal, el límite es algo que esta muy cerca, que se aproxima mucho, a los últimos términos de la sucesión. No podemos hablar del último término de una sucesión infinita, ni de los últimos términos -corrige- pero es claro que tenemos una idea muy clara de ellos: son todos casi iguales al límite.

Por ejemplo la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$. A medida que n aumenta, a_n se hace muy pequeño, casi 0. Veamos algunos términos grandes en la siguiente tabla

n	a_n
1	1
10	0,1
100	0,01
1,000	0,001
10,000	0,0001

Como a_n se aproxima a 0 cuando n crece mucho, sin límites, diremos que a_n **converge** a 0 y lo denotamos

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

El límite de una sucesión permite aproximar números racionales mediante sucesiones. Por ejemplo la sucesión

$$\frac{2n+1}{n}$$

converge a 2, como se ve en la tabla.

n	a_n
1	3
10	2,1
100	2,01
1,000	2,001
10,000	2,0001

Antonio interrumpe la exposición para hacer una observación muy interesante: los límites siempre son parte del conjunto de los números racionales. Luego no hemos obtenido ningún beneficio de ellos, salvo complicar las cosas.

Que cosa tan curiosa -pensó Cristóbal- nunca alguien me habia planteado esto, que parece ser tan natural, tan evidente. En todos los años que he enseñado límites ningún estudiante ha hecho tal pregunta. ¿Será que mi forma de explicar las cosas ha cambiado? ¿O acaso es que estos jóvenes han desarrollado un sentido especial para la matemática del cual carecen los jóvenes de la Universidad?

Falso - dice Cristóbal- veremos que hay sucesiones de números racionales cuyo límite es un número irracional, como por ejemplo $\sqrt{2}$ ó el número de oro φ. Para demostrar esto necesitamos conocer primero las fracciones continuas.

Una **fracción continua** es una fracción del tipo

$$\theta = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

donde los a_i son números enteros positivos. Es claro que la fracción continua θ es un número racional. Por ejemplo

$$\theta = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}$$

es igual a $\dfrac{38}{11}$.

Que sucede cuando una fracción continua tiene infinitos términos, por ejemplo

$$\theta = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

donde la sucesión de 1 y 2 se prolonga sin límite. En este caso, podemos conocer el valor de esta fracción continua mediante el siguiente artificio

$$\theta = 1 + \frac{1}{1+\theta}$$

de donde

$$\theta + \theta^2 = 1 + \theta + 1$$

o bien

$$\theta^2 = 2$$

y por lo tanto $\theta = \sqrt{2}$.

Luego $\sqrt{2}$ se puede obtener como el límite de una sucesión de racionales.

Si hacemos

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 1, \\
\theta_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\
\theta_3 &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} \\
\theta_4 &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}, \cdots \text{ etc}
\end{aligned}$$

tendremos que $\sqrt{2} = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \theta_n$.

De la misma forma se demuestra que el número de oro φ, el cual es igual a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, se obtiene de la fracción continua infinita

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

0.25. Los Números Reales

Continuando con esta discusión sobre sucesiones de números racionales que convergen a irracionales, Cristóbal va a hablar acerca de uno de los conjuntos numéricos más importantes: Los números reales.

El mismo se pregunta

- ¿Qué son los números irracionales entonces? Sabemos que ellos aparecen en geometría, como por ejemplo $\sqrt{2}$, el cual es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1. ¿Podremos crear un gran conjunto de números que contenga tanto a los racionales como a estos irracionales?

La respuesta la da él mismo

- Los números irracionales son simplemente límites de sucesiones de números racionales. Sabemos que también los racionales son límites de sucesiones de números racionales. Luego podemos considerar el conjunto de **todos** estos límites y lo llamaremos el conjunto de los **números reales**.-

Este conjunto contiene por lo tanto a todos los números racionales. Un **número irracional**, lo podremos definir entonces como un número real, el cual no es racional.

- Si α y β son un par de números reales ¿Cómo hallamos la suma y el producto de ellos? - pregunta Clara.

- Muy buena pregunta Clara - responde Cristóbal - creo que vamos avanzando muy rápidamente. Descansemos un poco antes de continuar. El hombre tardo miles de años en llegar a entender los números reales. Nosotros ya casi lo logramos en tan sólo una tarde.

Los jóvenes tomaron un descanso. Rosa les ha dado a todos almojábanas con café. Nos sentamos en la mesa del patio, debajo de la enramada a tomar este refrigerio. Desde aquí se divisa el muro de blancas piedras que separa la casa de Rafael, del solar del vecino. La bandada de loros cruzó el cielo nuevamente.

Cristóbal muy sereno, continuó su explicación:

- Los números reales se pueden sumar y multiplicar de la misma forma que los racionales.

Si $\alpha = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n$ y $\beta = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n$, entonces lo más natural es definir:

$$\alpha + \beta = \lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

$$\alpha \cdot \beta = \lim_{n \longrightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$$

Además se puede verificar que estas operaciones satisfacen muchas propiedades que ya se tenian para los números racionales. Por ejemplo si α y β son números reales, entonces $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (Propiedad conmutativa para la suma), también $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (Propiedad conmutativa para el producto) y otras más que se pueden demostrar.

En realidad son tantas propiedades que sería demasiado tediosos enunciarlas todas. Sin embargo se puede tomar una cantidad mínima de ellas y obtener todas las otras como consecuencia lógica de ellas.

Cuando un número real es raíz o solución de algún polinomio $p(x)$, con coeficientes racionales, entonces diremos que el número es **algebraico**.

Por ejemplo $\sqrt{2}$ es algebraico, pues es raíz del polinomio $p(x) = x^2 - 2$. Todo número que se pueda construir en geometría usando regla y compás es algebraico (esto es difícil de demostrar).

Los números reales que no son algebraico, se llaman **trascendentes**. Por ejemplo π es trascendente (esto también es difícil de demostrar). Esto es no podemos construir con regla y compás un segmento rectilíneo de longitud π.

Para los matemáticos griegos esto fue motivo de gran preocupación. Si no se puede construir π con estos métodos, entonces no se puede construir un cuadrado de área igual al área de un círculo de radio R, con R racional. Este problema se llama la cuadratura del círculo y no fue resuelto sino hasta finales del siglo XIX cuando en 1882, Lindemann probó que π no es algebraico.

0.26. La recta real

Hoy visitamos el trapiche de La Mesa. Está situado en medio de un oscuro cañaveral que ondula sus espigas al viento. Lo circundan las enormes copas de los ceibos, los apamates y los bucares. El edificio es de una construcción bastante sencilla, formado por unas columnas de ladrillos rojos que soportan un viejo tejado en donde los zamuros han desprendido algunas tejas. El torreón sobresale por encima del conjunto, como un guardián celoso de la dulce y dorada miel.

Aquí dentro del trapiche, Cristóbal y los jóvenes se divierten con la plática amena de los peones que baten la miel con largas cucharas de palo.

En una mesa, una joven empaca cuidadosamente las panelas en bultos de 24. Después de tomar unos vasos de jugo de caña recién molida, dejamos el bullicio del trapiche y nos sentamos todos debajo de un bucare a conversar. Cristóbal inicia el diálogo con algunas preguuntas:

- Los números reales: ¿Existen en la naturaleza o son una creación de la mente humana? Si ya existián en la naturaleza ¿Se nos revelan ante nosotros tal cuál como son? ¿Hay algo más perfecto en el Universo que el hombre no ha podido apreciar o descubrir? ¿Cuánto nos falta todavia por aprender?

Todas estas preguntas inquietantes, las hace a la Naturaleza inmensa; sin esperar respueta. El sabe que no hay hombre capaz de responder a todas estas interrogantes, en este momento. Habrá que esperar muchos siglos para ello.

Con los números reales en su poder el hombre ha logrado algo trascendental en la matemática, como lo es la unión de los números con la geometría. Cada número real es ahora un punto de una recta y cada punto de la recta es un número real. Una **correspondencia biyectiva** entre ambos conjuntos.

Si cada número real se representa por un punto sobre una recta, entonces no hay huecos en la recta. Podemos pasar de un punto a otro **continuamente**, sin vacíos o interrupciones. Esta propiedad de **continuidad de los números** los hace ver más reales que los números racionales. La propiedad de continuidad está en el tiempo y en el espacio. Por eso se llaman **números reales**.

El espacio es un continuo. Para ir de un lugar a otro se hace en una trayectoria continua, sin interrupciones. Igualmente el tiempo transcurre en una continuidad, como el fluir de las aguas de un río o el movimiento de las nubes de humo que salen de la chimenea del trapiche.

La propiedad de continuidad se expresa en términos de sucesiones. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales y es convergente, entonces su límite es otro número real. Tenemos entonces que la recta es un **conjunto completo**, nada falta ni sobra. Los números reales los denotamos por $I\!R$.

Un intervalo cerrado de números reales con extremos a y b, es un conjunto de números reales; denotado por $[a, b]$ y que se define mediante

$$[a, b] = \{x \in I\!R \quad | \quad a \leq x \leq b\}$$

Estos intervalos son equivalentes a los segmentos de rectas del espacio. Ellos tienen continuidad en si mismos.

Este intervalo, no importa cuan pequeño sea, contiene una infinitud de números reales. Es una recta infinita, pero en pequeña escala. Además dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$, no necesariamente de la misma longitud, se pueden poner en correspondencia de la forma siguiente

A todo punto x de $[a, b]$ se le asocia el punto y de $[c, d]$. Entonces esto establece una correspondencia biunívoca o biyectiva entre puntos de $[a, b]$ y puntos de $[c, d]$. Luego $[a, b]$ y $[c, d]$ tienen la misma "cantidad" de números reales. Asombroso ¿Verdad?

0.27. Las Coordenadas

Sólo el agua y el viento conocen la historia de La Mesa. Nadie en el pueblo ha oido acerca de su fundación. No se conocen sus primeros pobladores. ¿Quiénes desafiaron por vez primera las altas montañas de niebla y frailejón para caer después sobre esta meseta? ¿De dónde venían esos hombres?

El viento de Agosto que viene de muy lejos sopla con mucha fuerza, como queriendo arrancar el trigo. Es el mismo viento que brama furiosamente por entre los árboles quebrando sus ramas y abatiendo las aves. Cristóbal lee con curiosidad aquel viejo libro de historia que narra hechos sangrientos de conquistas. Una civilización de hombres libres que han aprendido a vivir con la naturaleza y a respetarla, cae de rodillas ante el fiero invasor. El caballo y la cruz en contra del indio, su flauta y su espíritu.

Una página amarillenta con un mapa, cae del libro arrancada por el viento y llama la atención de Cristóbal. Este la sostiene entre sus manos. Es un mapa de los primeros colonizadores de esta región.

¿Cómo nació la cartografía? ¿Cómo el hombre puede ubicar las ciudades y los ríos por medio de números?

Volvamos la mirada hacia Europa a comienzos del siglo $XVII$. En el año de 1628, René Déscartes, matemático francés se muda a una casa muy tranquila en Amsterdam para dedicarse durante 20 años a buscar la verdad del conocimiento profundo, la existencia de Dios y la estructura física del Universo. Ya antes habia conocido el mundo a su alrededor como soldado en varias campañas. En su retiro crearía su obra maestra de matemáticas conocida como La Geometría.

Esta obra surgió de un sueño que tuvo cuando era soldado. En ese sueño maravilloso de líneas y esferas surgió un nuevo método de razonamiento de la matemática, un método para interpretar todo el Universo físico en términos de la geometría, el álgebra y los números.

Curiosamente, otro matemático francés llamado Pierre de Fermat, llegó a las mismas conclusiones sobre geometría de Déscartes trabajando en forma independiente.

Mediante esta nueva Geometría se estudian las propiedades de las figuras geométricas usando el álgebra de los números. Para ello se crean los sistemas de coordenadas, que son muy semejantes a la red cuadriculada de líneas paralelas que cubre el mapa del libro.

Un **sistema de coordenadas cartesiano** es un artificio matemático para ubicar cualquier punto en el plano. Para ello se dispone de dos ejes perpendiculares entre si que se cortan en un punto llamado el origen de coordenadas.

A cada punto del plano se le asocian un par de números reales x e y, llamados la **abscisa y la ordenada** respectivamente. La abscisa mide la distancia desde el punto P al eje Y. La ordenada mide la distancia desde P hasta el eje X.

Con este sistema, a cada punto del plano le corresponde sólo un par de números, y a cada par de númros se le asocia un punto.

Por ejemplo, para ubicar el punto $P(2, 3)$ con nuestro sistema de coordenadas, hacemos una pequeña travesía en un velero.

Partimos del punto 0 y navegamos 2 unidades hacia la derecha (el oeste). Luego paramos y navegamos 3 unidades hacia arriba (el norte). Entonces habremos alcanzado el punto P.

Cristóbal pone el libro de lado y abandona sus meditaciones sobre el origen de aquel pueblo, actualmente poblado de hombres multiraciales. El viento ha cesado. Los pájaros cantan de nuevo, bajo las ramas protectoras de un cínaro.

0.28. La nueva Geometría

Nadie tiene noticias sobre el Jeep de Cristóbal. Parece ser que la reparación se prolongará por algún tiempo más. La vida transcurre plácidamente en La Mesa con las animadas reuniones de jóvenes deseosos de continuar su largo y maravilloso vuelo en el país de las matemáticas. Se les ha abierto ante sus ojos un mundo nunca visto por ellos, y quieren entregarse de lleno a él; a experimentarlo y a conocerlo.

Hoy el grupo está sentado alrededor de una gran mesa en el patio en casa de José y Rosalba, al aire libre debajo de una enramada. Cristóbal ha querido enseñarles hoy un poco más de la geometría de las coordenadas: La nueva geometría descubierta por Déscartes y Fermat, llamada **Geometría Analítica**.

Conociamos las rectas, las circunferencias, las secciones cónicas y otras curvas ¿Cómo las expresamos en términos de relaciones numéricas? - pregunta Cristóbal.

Comenzamos con la figura más sencilla de todas: la línea recta. Pues bien una recta como se puede definir. ¿Cuál es la propiedad más resaltante que la diferencia de las otras curvas? Cuando se tienen dos puntos en el plano, digamos P y Q, podemos ir de P hasta Q, siguiendo muchos caminos, pero el camino más corto de todos; el de menor longitud es una línea recta L.

Veamos como obtenemos una ecuación para la recta L, que pasa por P y Q. Si Z es un punto arbitrario de esta recta, se tiene la figura

En este caso diremos que P, Q y Z son **tres puntos alineados**.

Supongamos que los puntos dados P y Q tienen coordenadas conocidas, por ejemplo $P(1,2)$ y $Q(7,6)$. Entonces el punto Z tiene coordenadas desconocidas $Z(x,y)$.

Trazando por P una paralela al eje X se obtienen los puntos T y S, debajo de Z y Q respectivamente.

Entonces los triángulos QPS y ZPT son semejantes y por lo tanto sus lados correspondientes son proporcionales. Así pues tenemos

$$\frac{ZT}{PT} = \frac{QS}{PS}$$

lo cual se expresa en términos de las coordenadas

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{6-2}{7-1} = \frac{2}{3}$$

- Detengamonos un momento, dice Cristóbal, para remarcar algo muy importante. Ese valor $2/3$ se obtuvo con las coordenadas de P y de Q, pero si hubiesemos tomado otro par de puntos distintos, digamos P' y Q' y obtenemos S', entonces se tiene

$$\frac{Q'S'}{P'S'} = \frac{2}{3}$$

Así pues $2/3$ es una cantidad muy especial asociada a la recta L, y la llamaremos **la pendiente**.

Interviene Sol

- ¿Ese nombre de pendiente tiene algo que ver con la pendiente o declive de un cerro?

- Claro que si, responde Cristóbal, pero antes de ver esto ¿Qué significado geométrico tiene la pendiente? ¿Qué información nos da sobre la recta? ¿Por qué es importante conocerla?

La pendiente $\frac{2}{3}$ se interpreta muy fácil en términos de movimiento. Si se tiene un punto cualquiera sobre la recta $M(a, b)$, entonces si partiendo de M nos movemos 3 unidades a la derecha y luego 2 unidades hacia arriba, estaremos llegando a otro punto de la recta. ¿Interesante verdad?

Practiquemos un poco más, dice Cristóbal, dibujen una recta que pase por el punto $P(3, 10)$ y que tenga pendiente $\frac{1}{2}$. Vean que fácil es este método de la geometría analítica para representar rectas.

0.29. Don Isidro

Es un hombre de más allá de la neblina. Su maciza figura de anchas espaldas es parte del paisaje de aquellos páramos. Don Isidro baja al pueblo todos los viernes por la mañana con los primeros rayos del sol. De rostro sereno, sonrisa franca y calculados movimientos al andar, inspira respeto a todos los que le conocen.

El pelo gris muy liso, cae sobre el rostro quemado por el inclemente sol de los páramos. Unos ojos pequeños debajo de las cejas pobladas miran con interés y alegría, dando cierto toque de dulzura a su rostro de duras aristas. Siempre sonríe al contar pausadamente alguna historia sobre la meseta que le ha sido narrada por su padre o su abuela. Cultiva el trigo en las tierras de sus antepasados desde que era niño.

Don Isidro vive aislado en su pequeña casa de la montaña, rodeada de altos pinos que desafian los vientos helados de la coordillera. Conoce bien los delgados senderos que cruzan las montañas y que se pierden entre la niebla de la tarde. Don Isidro, quien siente respeto por los espíritus que habitan en el fondo de las lagunas, sabe orientarse entre la bruma y nunca se ha perdido en estos montes.

En el pueblo todos lo respetan por su edad y sabiduría. Conoce el poder de muchas hierbas maravillosas que han curado a enfermos en mal estado, lo cual le ha ganado merecida reputación de médico, sin ser doctor. Los campesinos consultan sus opiniones, antes de comenzar a sembrar. El sabe en que años habrá más lluvia o más sequía. En fin es un hombre que siente las vibraciones provenientes de lo más profundo de su tierra y sabe interpretarlas.

Un día Cristóbal conoce a Don Isidro en la bodega del pueblo. Hablan del trigo, de la caña y del café. Cristóbal oye al venerable maestro con admiración y respeto, fascinado por los conocimientos que este ha atesorado sobre agricultura, medicina, historia y astronomía. Cada observación que hace Cristóbal a las palabras de Don Isidro obtienen respuesta inmediata en forma sencilla y pedagógica.

- ¿Cómo ha podido llegar a conocer tan bien las plantas, sus ciclos vitales, las lluvias y la influencia de la luna? se pregunta Cristóbal -.

Don Isidro no ha salido nunca de estas montañas, salvo uno o dos viajes a la ciudad a visitar un sobrino. Nunca hizo estudios avanzados, más allá de la primaria. Sin embargo ha recogido la sabiduría de muchos años de experiencia, transmitidos de generación en generación en su familia. Tiene dos hijos que se fueron a la Capital hace años y con ellos se rompió la larga tradición. Pero el espera tenerlos algún día de regreso, para que se ocupen de la tierra y vuelvan a cultivar el trigo.

Cristóbal se asombra de la intuición de Don Isidro para la geometría, cuando le habla de sus habilidades como constructor.

- Yo he hecho casas de adobe y de tierra pisada aquí en el pueblo-, afirma con cierto orgullo. El secreto de la construcción es saber levantar los muros bien rectos en los tapiales, usando la plomada y el nivel. Para armar bien el entramado del techo y pegar las tejas hay que saber usar las líneas paralelas. Cuando todo sale bien derechito, entonces la casa será fuerte y resistente.

También Don Isidro tiene habilidad para resolver problemas matemáticos.

Un día - dice Don Isidro - me invitaron a una finca que tenía una vaquera con un depósito de agua al lado. El dueño quería saber cuantos litros de agua cabían en aquel tanque, pero no se podia hacer el cálculo de esto tomando las medidas, pues tenia forma muy irregular. Entonces le dije al dueño que me prestara su reloj y una cubeta de 10 litros. El tanque en ese momento estaba completamente vacío.

Me dirijí con el reloj y la cubeta hacia la llave del agua - dice con voz taimada - abrí la llave y conté el tiempo que tardó en llenarse la cubeta de 10 litros. Fueron 12 segundos. Dejé la llave abierta y después de tres horas y media el tanque se llenó completamente. De acuerdo a mis cálculos, aquel tanque contenia 10.500 litros.

Muy bien, la respuesta es correcta! - exclamó Cristóbal. Dejeme decirle que acaba Ud. de darme un buen ejemplo de una función.

¿Una función? - pregunto Don Isidro.

- Exactamente, una función es un tipo de relación entre dos cantidades numéricas. En este caso hay dos cantidades, por una parte el tiempo que permanece abierta la llave del agua y por otro lado el volumen de agua que se va acumulando en el tanque. Lo segundo depende de lo primero. Hay una relación funcional entre el tiempo y el volumen. Son **dos variables** relacionadas. Si hacemos t igual a la primera variable y V a la segunda variable, se tiene que cada minuto caen al tanque 50 litros de agua. Luego se tendrá la fórmula

$$V(t) = 50 \cdot t$$

El volumen se expresa en litros y el tiempo en minutos. De acuerdo a ésta fórmula, se tiene que cuando $t = 210$, $V = 10{,}500$ litros.

Podemos **representar gráficamente** esta función, usando un sistema de coordenadas, en donde se usa el eje horizontal para representar t y el eje vertical para representar V.

Tenemos entonces un gráfico de volumen de agua versus tiempo

.

0.30. Parábolas y Papagayos

Hoy el cielo se ha vestido de vivos colores con los papagayos de los jóvenes y niños volando sobre La Mesa. El viento juguetón del mes de Agosto eleva las cometas en sostenido vuelo, hasta casi tocar el firmamento, para luego caer en un vacío, de donde salen describiendo círculos, hasta volver a remontarse.

Los hay de diversas formas geométricas, desde el más sencillo de aspecto rectangular, hasta los hexagonales y octogonales. También los hay voluminosos de forma cúbica, de cilindro y de paralelepípedo, sin las tapas de la base. Las posibilidades de forma sólo estan limitadas por la imaginación.

Cuando se tiene un papagayo volando alto, iniciamos un contacto directo con el viento. Cualquier leve variación la sentimos en la mano y entonces halamos el pabilo, lo pulsamos, nos movemos hacia atrás o hacemos alguna otra maniobra. Es agradable esta conversación íntima con el viento, se siente como si uno volara encima del papagayo.

Cuando hay poca brisa el papagayo se mueve perezosamente flotando sobre el aire y entonces el pabilo cuelga de él, formando una curva en forma de barriga. Esta curva es una parábola. Más precisamente es una parábola convexa. Si ahora miramos el viejo arco, debajo del cual pasa el camino a La Mesa, tendremos una parábola concava.

Cristóbal dice

- Una parabola se puede definir como una curva con la propiedad de que todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz -

- Esta definición me parece confusa - dice Clara - ¿Podría explicar eso de otra forma?

Cristóbal se queda un rato pensativo y luego responde:

- Voy a construir una parábola delante de ustedes aquí en el piso.

Luego traza una recta en el piso con su navaja y toma un pedazo largo de pabilo, lo amarra por un extremo a un palito de madera y luego lo clava en el piso.

- Aquella línea será la **directriz** - dice - el punto donde esta clavado el palito es el **Foco**.

Luego empieza a caminar del foco hacia la directriz. En el punto medio se detiene y hace una marca con la letra V.

- Este es un punto de la parábola, pues está a la misma distancia del foco que a la directriz.

Para hallar otro punto, me muevo hacia un lado con la cuerda bien tensa y voy marcando los puntos donde la distancia al foco es igual a la distancia a la directriz. Uniendo todos estos puntos obtendré parte de la parábola. No se puede hallar toda pues la longitud de la parábola es infinita.

Si el punto donde está la V (**el vértice de la parábola**) es el origen del sistema de coordenadas entonces la parábola tiene ecuación

$$y = ax^2$$

donde a es una constante.

0.31. El Molino

Al borde de una quebrada que se desvía del río, se encuentra una vieja casa de paredes de tapia y planta cuadrada. Esta casa de una habitación con una sóla puerta, se halla en una explanada al este de la meseta. Es el molino de trigo.

La quebrada que pasa por debajo de esta mueve una rueda de madera que hace girar un eje vertical, el cual se acopla a una gran piedra circular en la parte de arriba. Esta piedra gira sobre otra identica pero que permanece fija y entre ambos se muele el trigo, que luego cae sobre una caja cuadrada de madera.

La luz de afuera se resbala por una pequeña ventana cuadrada e ilumina débilmente el interior en donde se destacan los sacos de trigo apilados en una pared y la gran rueda en el centro. La blanca harina surge constantemente entre los dientes de estas sólidas piedras que vibran sin cesar. Debajo el río pasa murmurando y el movimiento de las piedras y las paletas de la rueda chapoteando en el agua produce una sinfonía de graves matices que le da al conjunto un cierto aire de solemnidad.

Un hombre de baja estatura, sombrero de paja y piel morena se mueve en el interior, cantando una vieja canción y controlando el mecanismo. Va colocando la harina en bolsas de papel. Es Miguel el molinero quien sonríe al hablar mostrando sus blancos dientes debajo del bigote cubierto de harina. Cristóbal se ha acercado al molino a satisfacer su curiosidad y ya comienza ha hablar con Miguel sobre el molino.

- Este molino es muy antiguo -, dice el molinero - debe tener más de doscientos años, pero aún funciona muy bien. Gracias a él la gente de La Mesa siempre cuenta con harina. No usa combustible y por lo tanto no contamina el ambiente, la energía que utiliza proviene del agua. No le quita nada a la naturaleza ni la perjudica. Es grandioso.

Muy interesado, Cristóbal le pregunta que cantidad de harina produce en un día.

- Eso depende - dice el molinero,- de la calidad del trigo y de la rapidez con que gira la piedra. Cuando la semilla es grande y firme entonces se produce más harina. La velocidad del agua no siempre es la misma, a ciertas horas la quebrada trae más agua y entonces la piedra gira velozmente. A veces se produce más trigo y a veces menos.

Podría decirme - pregunta Cristóbal - ¿Qué cantidad de trigo se produce exactamente a las 12 del mediodía?

- Es muy difícil de calcular - responde el molinero, pero es una pregunta interesante y que nunca me la habia hecho nadie. Lamentablemente no conozco la respuesta. Quizás Ud. que es un matemático, pueda saber esto.

Cada momento se esta produciendo harina, pero a cada instante se produce algo. Si tomamos un periodo de tiempo muy corto, por ejemplo un segundo, entonces cada segundo se produce un poquito de harina. Como el molino produce más a ciertas horas, entonces este poquito no es constante durante el día, esta variando con el tiempo.

Nos interesa conocer estas pequeñas variaciones de la producción a lo largo del día. Esta información puede ser de utilidad más adelante para mejorar la producción.

Podría preguntar entonces - Apunta Cristóbal - ¿Qué cantidad se produce por segundo, cuando son las 12 del mediodía?

Miguel se queda mirando la rueda y encoge los hombros sin saber que responder.

- Este es un problema de **derivadas** - se responde Cristóbal a sí mismo.

- ¿Qué son las derivadas? - pregunta el molinero. Esto suena como algo sabroso ¿Es acaso algún tipo de torta? ¿O quizás una fruta?

- No, no - dice Cristóbal riendose - las derivadas son funciones que se obtienen de otra función. Por ejemplo aquí tenemos que la producción de trigo en este molino es una función del tiempo. Llamemos esta función $f(t)$, donde t es el tiempo que transcurre durante el día. Cuando $t = 0$ son las doce de la noche y cuando $t = 24$ son las doce de la noche del día siguiente.

Supongamos que esta función de producción tiene el gráfico siguiente

Entonces el promedio producido entre el tiempo t_1 y t_2, cercanos a las 12, es igual a

$$M(t_1, t_2) = \frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Acerquemos un poco más el gráfico

Sabemos que la **pendiente de la recta** L, que pasa por los puntos $(t_1, f(t_1))$ y $(t_2, f(t_2))$ es igual a $M(t_1, t_2)$. Cuando t_1 y t_2 se aproximan a 12, y por lo tanto la distancia entre ellos se hace muy pequeña, entonces esta pendiente es muy similar a las **pendientes de la recta tangente** en $t = 12$.

Esta pendiente es la cantidad producida en un tiempo t, dividida entre t cuando t es casi 0. La pendiente se llama la **derivada de** $f(t)$ **en** $t = 12$ y es igual al límite.

$$\lim_{t_2 \longrightarrow t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La derivada es el promedio de producción instantáneo en un tiempo dado t. Ella puede cambiar para cada valor de t.

Cristóbal y Miguel salen del molino a tomar el sol de la mañana. Una yunta de bueyes se empina sobre un cerro, preparando la tierra para recibir la semilla. Una mariposa de alas amarillas se posa en el hombro de Cristóbal, buscando protegerse del sol. A lo lejos se oye el bramar del río corriendo entre las rocas. Todo es movimiento en la Naturaleza. El paisaje esta cambiando continuamente. Las derivadas son la expresión matemática de este cambio.

0.32. La Partida

Todo lo que comienza, en la vida de los hombres y mujeres, debe llegar a un final. El Jeep de Cristóbal ya ha sido reparado, con lo cual se le abren las puertas al mundo de donde vino. Se siente feliz, porque puede volver a ver a sus familiares, amigos y compañeros de rabajo. Pero por otro lado, un poco de tristeza lo invade al tener que abandonar su pequeño paraiso, donde tan bien se sintió. Pero por sobre todos los sentimientos, está su conciencia que reconoce haber cumplido una misión muy importante.

Hoy es el día de la partida. La serranía se cubre de lejanos azules y translucidos tonos violetas que retroceden hacia las blancas nubes de los picos más altos. La mañana fría y despejada, ofrece al viajero los aromas suaves de las flores del café y el canto del río que baña los flancos de la meseta.

Los jóvenes se han acercado hasta la casa de Rafael, a despedir a Cristóbal que se marcha hoy a la ciudad. Su Jeep se encuentra enfrente de la casa, reparado y listo para partir.

Todos muestran su agradecimiento hacia el profesor, por haberlos llevado de la mano en el país de las matemáticas. Fueron horas emocionantes, de contacto directo con las ideas matemáticas. Aprendieron a interpretar mejor los fenómenos de la naturaleza; a apreciar la belleza de la geometría y del espacio; a sondear las aguas serenas de la imaginación que transciende el mundo real. Fue una experiencia única que les cambió la forma de ver el mundo.

Cristóbal les dice antes de partir

- Lo más importante en la vida es entender lo que sucede alrededor de nosotros, de esta manera podremos vivir en armonía con la Naturaleza. Conozcan este mundo mejor, usando las matemáticas. Sean buenos observadores y mejores pensadores. Busquen la belleza del universo en los números y la geometría.

Ya el Jeep inicia la marcha de regreso a la ciudad en medio de los saludos de despedida. La vista de todos se quedó prendida del carro que remontaba lentamente el estrecho camino. Cada vez se fue haciendo más pequeño hasta perderse en un recodo en donde habían unos bucares, más allá de la neblina fina que acaricia la montaña.

Personajes

Cristóbal,
Rosa,
Rafael,
Rosalba,
José,
Clara,
Abraham,
Antonio,
Luz,
Sol,
Horacio,
Jóvenes