Matemática

Orientaciones para el Trabajo Pedagógico

2006

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Javier Sota Nadal

VICEMINISTRO DE GESTION PEDAGÓGICA
Idel Vexler Talledo

VICEMINISTRA DE GESTIÓN INSTITUCIONAL
Helenn Chávez Depaz

SECRETARIO GENERAL
Pedro Patrón Bedoya

DIRECTOR NACIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y SUPERIOR TECNOLÓGICA
Guillermo Molinari Palomino

JEFE DE LA UNIDAD DE DESARROLLO CURRICULAR Y RECURSOS EDUCATIVOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
César Puerta Villagaray

ORIENTACIONES PARA EL TRABAJO PEDAGÓGICO DE MATEMÁTICA

REDACCION DEL DOCUMENTO	:	Marcos Díaz Abanto
REVISIÓN GENERAL	:	Wilson Izquierdo González Martín Mendoza Bolo
CORRECCIÓN DE ESTILO	:	Federico Ortiz Agurto
DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN	:	Teresa Serpa Vivanco
IMPRESO POR	:	Fimart S.A.C Av. del Río 111-Pueblo Libre
TIRAJE	:	11 000 ejemplares Segunda Edición 2006

Programa de Mejoramiento de la Calidad de la Educación Secundaria
Convenio 1237 - MED - BID

Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú
Nº 2006-0891

CONTENIDO

Presentación

Este documento tiene como objetivo implementar el proceso de aplicación del Diseño Curricular Nacional del área de matemática, en el nivel de Educación Secundaria.

En su elaboración, se ha tenido particular preocupación por el establecimiento de diferentes alternativas de trabajo, aplicables por el profesor, durante el desarrollo de sus sesiones de aprendizaje. Con ese propósito se han incluido actividades que garanticen aprendizajes significativos orientados hacia el desarrollo de capacidades fundamentales como el pensamiento creativo, el pensamiento crítico, la toma de decisiones y la solución de problemas en los alumnos, las mismas que, en matemática, deben lograrse a través de las capacidades de área siguientes:

- Resolución de problemas.
- Razonamiento y demostración, y
- Comunicación matemática.

Las capacidades de área enunciadas, a su vez, se desarrollan mediante capacidades o habilidades específicas, que son las que las operativizan a nivel de estrategias y procesos.

Es evidente que, un docente que tenga como aspiración ser un «buen profesor del área curricular de matemática», debe tener especial interés, tanto por el conocimiento y dominio de sus contenidos, como por las estrategias que hay que desarrollar en el aula para lograr su aprendizaje. En ese sentido, es por todos conocido el hecho de que la matemática como «cuerpo teórico» es producto de la experiencia de la humanidad a lo largo de cuatro o cinco milenios, lo cual no implica que su creación y su utilización, a nivel rudimentario, no se produjera desde el inicio de nuestra civilización.

A partir de esta constatación elemental, se pretende que el alumno reflexione sobre su práctica diaria y desde allí, comience a recorrer todo el edificio de la matemática que hoy conocemos, haciendo uso, fundamentalmente, de su capacidad creativa y de la solución de problemas. Por ello, su contenido incluye reflexiones, ideas y comentarios para enseñar a aprender a pensar, con ese nivel de coherencia lógica que sólo el aprendizaje de la matemática lo hace posible.

También se proponen actividades o «situaciones problema» que pueden trabajarse a partir de comentarios y sugerencias que generen actividades cercanas al entorno de la Institución Educativa y a los intereses de los alumnos. Es evidente que las sugerencias aquí presentadas no agotan todas las posibilidades existentes sobre este particular, pero sí deben estimular y ofrecer condiciones que permitan al docente crear otras situaciones de acuerdo con su realidad.

Finalmente, todo lo que se desarrolla en este documento debe entenderse sólo como «sugerencias» para el desarrollo del trabajo cotidiano y, las adaptaciones o adecuaciones que se hagan de él -cuando sean necesarias- como una más de las muchas posibilidades que ofrece la diversificación como proceso de enriquecimiento y mejoramiento del currículo.

Se espera, así mismo, que este esfuerzo sea útil en el proceso de mejoramiento de la práctica y del estilo pedagógico de los docentes.

CAPÍTULO I

Enfoque del área

1. Acerca de la matemática y el pensamiento lógico-matemático

1.1 Acerca de la definición de matemática

Para los griegos, la matemática era la ciencia de la cantidad y del espacio. Las ciencias de la cantidad y del espacio eran, obviamente, la aritmética y la geometría. Gracias al gran prestigio cultural y científico alcanzado por los griegos, la «Geometría Euclidiana» se constituyó, por mucho tiempo, en el mejor ejemplo de sistema deductivo axiomatizado, tornándose en un modelo de formalización para todos los que hicieron matemática, después de ellos.

Descartes, en el Siglo XVII, decía que la matemática es la ciencia del orden y la medida, mientras que para Gauss, ya en el Siglo XVIII, la matemática era la reina de las ciencias, siendo la aritmética la reina de la matemática, por la predominancia que siempre ha tenido el número y las operaciones con números en la construcción del edificio matemático que hoy conocemos. Por su parte, Eric T. Bell expresó que la matemática es, a la vez, la reina y la sirvienta de las ciencias, en franca alusión a su utilización en la formalización de sus contenidos por ciencias como la economía, la química, la física y hasta la lingüística.

Debido al énfasis creciente del método deductivo en todas las ramas de la matemática, C. S. Peirce en la mitad del Siglo XIX, afirmó que la matemática es la ciencia de llegar a conclusiones necesarias siguiendo el patrón hipótesis -deducción- conclusión. Sin embargo, a inicios del mismo Siglo XIX, David Hilbert definía la matemática como la ciencia que no estudia objetos sino relaciones entre objetos en donde es posible verificar, que se puede reemplazar un objeto por otro siempre y cuando la relación entre ellos no cambie.

El grupo Bourbaki, por su parte, manifiesta que la matemática es la ciencia que estudia las estructuras matemáticas. Desde esta perspectiva, una estructura es entendida como un conjunto de objetos abstractos, definidos axiomáticamente utilizando la lógica y la notación matemática, que se relacionan e interactúan entre sí y que tienen un sentido, dirección o propósito.

La manera de definir la matemática cambia constantemente y, como es de verse, cada generación o cada connotado matemático, desde sus propias perspectivas, han llegado a definirla de acuerdo con el nivel de comprensión que tienen de ella y según su modo particular de hacer matemática. La matemática se ha beneficiado mucho del genio individual, pero es sólo la apropiación y el uso que de ella hacen las personas y la sociedad, los que la han hecho florecer hasta los niveles en que ahora se le conoce. Como modo especial de manejar los números, las magnitudes, los símbolos y las representaciones, es un arte exclusivo de la humanidad y, por las aplicaciones que ella tiene en la vida cotidiana es, a la vez, una ciencia aplicada en cualquiera de sus dimensiones: individual, cultural, humanística y tecnológica.

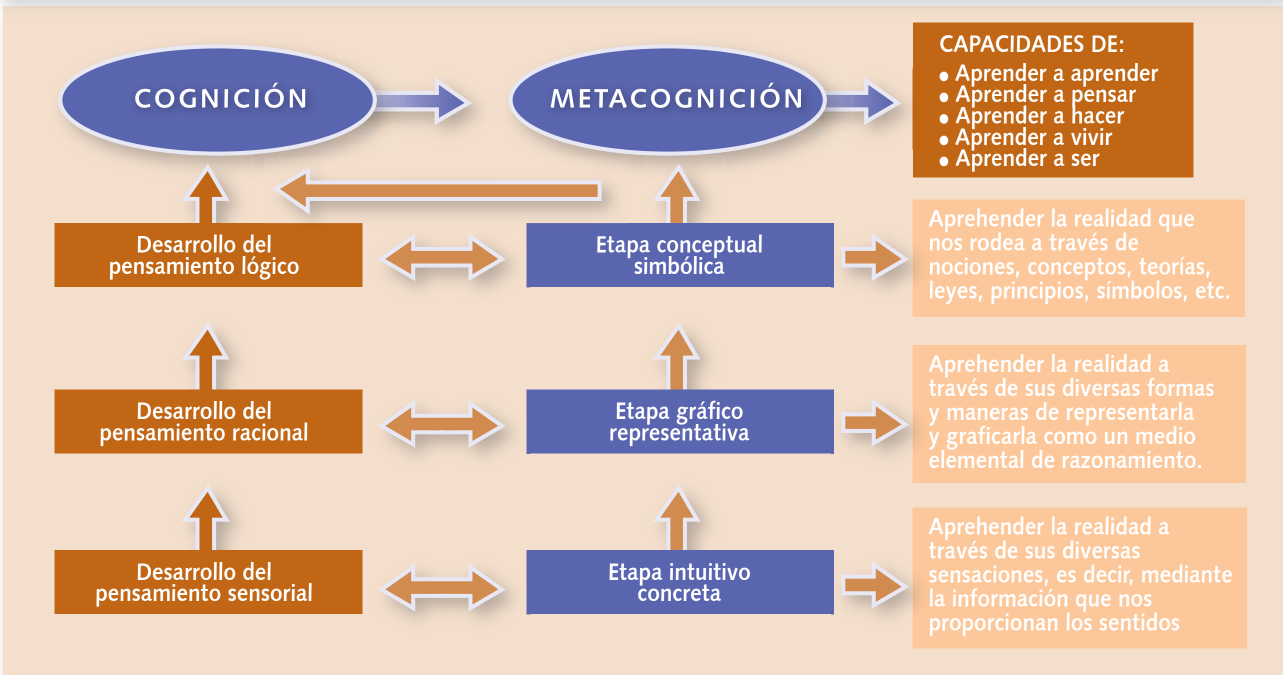
1.2 Acerca del pensamiento lógico-matemático

El pensamiento lógico-matemático es aquella capacidad que nos permite comprender las relaciones que se dan en el mundo circundante y la que nos posibilita cuantificarlas y formalizarlas para entenderlas mejor y poder comunicarlas. Consecuentemente, esta forma de pensamiento se traduce en el uso y manejo de procesos cognitivos tales como: razonar, demostrar, argumentar, interpretar, identificar, relacionar, graficar, calcular, inferir, efectuar algoritmos y modelizar en general y, al igual que cualquier otra forma de desarrollo de pensamiento, es susceptible de aprendizaje. Nadie nace, por ejemplo, con la capacidad de razonar y demostrar, de comunicarse matemáticamente o de resolver problemas. Todo eso se aprende. Sin embargo, este aprendizaje puede ser un proceso fácil o difícil, en la medida del uso que se haga de ciertas herramientas cognitivas.

Es importante dejar establecido que el pensamiento lógico-matemático se construye siguiendo rigurosamente las etapas determinadas para su desarrollo en forma histórica, existiendo una correspondencia biunívoca entre el pensamiento sensorial, que en matemática es de tipo INTUITIVO CONCRETO; el pensamiento racional que es GRÁFICO REPRESENTATIVO en matemática y el pensamiento lógico, que es de naturaleza CONCEPTUAL O SIMBÓLICA.

El siguiente esquema nos muestra ese proceso:

PROCESO DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA



Para aprender nociones abstractas o generalizaciones teóricas de los tipos que abundan en matemática, es necesario que en el cerebro humano se hayan configurado determinadas estructuras mentales que hagan posible su asimilación, acomodación y conservación. Es indispensable, en consecuencia, que el mediador del aprendizaje sea consciente de que, para aprender una estructura matemática, el estudiante debe haber desarrollado una determinada estructura mental que haga posible ese aprendizaje.

De lo contrario, será indispensable realizar las manipulaciones, clasificaciones, construcciones, análisis y agrupaciones necesarias con material objetivo-concreto o con representaciones gráficas para luego abordar las formalizaciones que caracterizan a la matemática. De nada sirve obviar estos procesos. Existe la ventaja, sin embargo, de que el cerebro humano no tiene una edad límite para crear sus estructuras mentales. En matemática, nunca será tarde, entonces, para volver a ser niños y desarrollar nuestra capacidad de aprender a aprender a partir de «hacer cosas». Es importante también, esclarecer algunos aspectos fundamentales acerca del «quehacer matemático» para quienes tienen como función la de ser mediadores en su aprendizaje.

1.3 ¿Y... qué significa "hacer matemática"?

Para responder esta pregunta habría que preguntarse primero: ¿Cómo determinamos que una persona está haciendo matemática? Analicemos los siguientes ejemplos:

Problema: Se quiere saber cuál es la cuota que 35 alumnos tendrían que aportar para realizar un paseo, considerando que el gasto asciende a S/. 420. Para resolver esta situación, presumiblemente se tenga que hacer una división como la siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 420 & 35 \\ \underline{35} & 12 \\ 070 & \\ \underline{70} & \\ 00 & \end{array}$$

Como puede apreciarse, lo que se ha hecho en este caso es construir un modelo numérico del problema, el mismo que no toma en cuenta ni a los estudiantes ni a los nuevos soles que figuran en el enunciado. Para construirlo sólo será necesario analizar la información explícita allí contenida y disponer de un momento para su reflexión y elaboración. Pero, como puede constatarse, el ejercicio ha permitido transformar la situación cotidiana en la que 35 alumnos deben aportar una cuota para financiar los S/. 420 que costaría un paseo, primero en un problema matemático —los datos numéricos y la operación de dividir 420 entre 35— y luego, en un modelo matemático numérico que puede presentarse de diferente manera.

Una forma sería:

$$\begin{array}{ccc} 35 & \longrightarrow & 420 \\ 01 & \longrightarrow & X \end{array}$$

Verbalizándola diría lo siguiente: si 35 alumnos pagan S/. 420 un alumno ¿cuanto pagará? A esto se conoce comunmente como regla de tres simple.

Aproximar $\sqrt{2}$

i) La notación $\sqrt{2}$ se utiliza para representar al número irracional "raíz cuadrada de dos". La sucesión (X_n) dada por la fórmula de recurrencia:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \text{, donde } x_0 = 1 \ ;$$

nos permite aproximar la raíz cuadrada del número a, hasta obtener una buena aproximación de la raíz. Así:

$$\text{Si } a = 2,\ x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{12} + \frac{24}{17}\right)$$

$$\vdots$$

$$\text{Formalmente, } \lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$$

ii) Utilizando el Método de Newton de Aproximaciones Sucesivas, la fórmula de recurrencia se desprende de la ecuación $x^2 - a = 0$, donde si $f(x) = x^2 - a$, entonces:

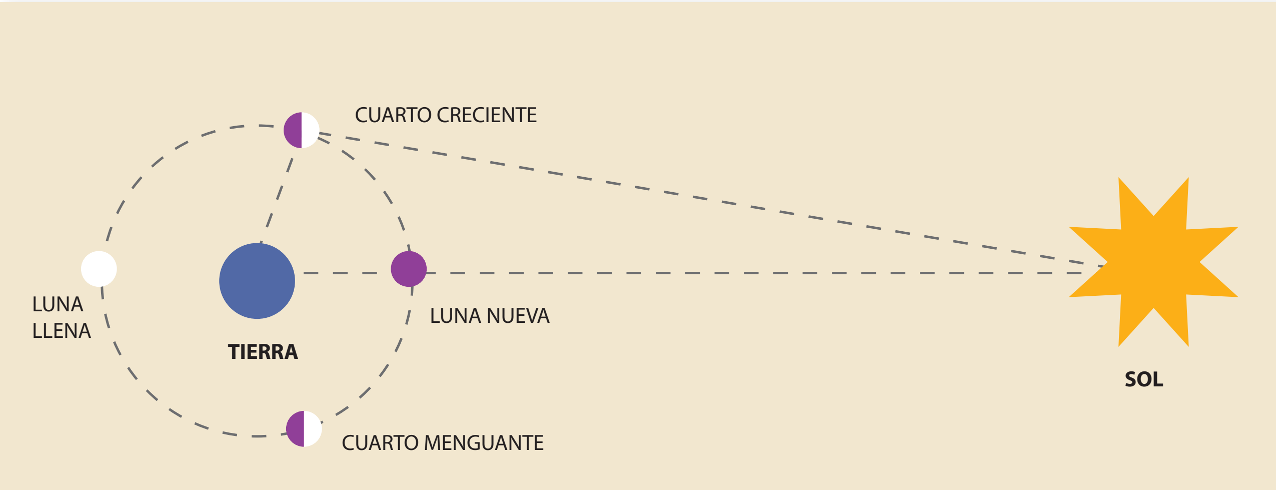
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dado que esta fórmula de recurrencia se puede usar iteradamente, la aproximación va a ser mejor cuanto más grande sea el valor de n, obteniendo de esta manera un algoritmo recursivo.

Formalmente, $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$

Determinar la relación de distancias entre la Tierra, la Luna y el Sol.

Como se sabe, las fases de la Luna se deben a las distintas posiciones relativas que adoptan el Sol, la Tierra y la Luna. También se sabe que el Sol siempre ilumina media esfera lunar, pero desde la Tierra a veces sólo podemos ver una porción de la semiesfera iluminada. La cuestión clave reside en darse cuenta de que, cuando **la Luna está exactamente en cuarto creciente, el ángulo Tierra - Luna - Sol (con vértice en la Luna) tiene que ser recto**, con lo cual el triángulo TLS basado en él será rectángulo.



$$\frac{TL}{TS} = \cos 89°51' = 0{,}00261799 \Rightarrow TS = \frac{TL}{0{,}00261799} \Rightarrow TS = 381{,}97\ TL$$

DATO: Medida del ángulo $\widehat{LTS} = 89{,}85° = 89°51'$

Es decir que el Sol está a 381,97 veces más lejos de nosotros que la Luna. Éste es el procedimiento que utilizó Aristarco para determinar la distancia que existe entre la Tierra y el Sol. Sin embargo, Aristarco asignó al ángulo LTS (Luna - Tierra - Sol) el valor de 87º y no de 89,85º como debería ser, lo que le llevó a cometer un error apreciable: él encontró que la distancia de la Tierra al Sol era 19 veces la distancia de la Tierra a la Luna y no 381,97 veces como es.

Como puede apreciarse, para resolver los problemas se han utilizado "modelos matemáticos". Modelos numéricos para los dos primeros casos y un modelo gráfico para este último, referido al cálculo de la distancia existente entre la Tierra y el Sol, teniendo como referencia la distancia de la Tierra a la Luna. Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos analizar, para trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados que se obtengan, hasta llegar a resolver las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, como una "actividad de modelación".

En cualquier actividad de modelación se pueden identificar, a su vez, tres aspectos importantes:

- *La utilización de matemáticas conocidas, en términos de "saberes previos",*
- *La posibilidad de aprender y de enseñar matemática en forma permanente, y*
- *La necesidad de recrear la matemática conocida hasta crear una matemática nueva, para la vida.*

Utilizar matemática conocida.
Consiste en resolver problemas a partir del manejo de las herramientas matemáticas que uno ya conoce y que sabe cómo utilizar. Por lo general, "la matemática conocida" se utiliza para resolver problemas rutinarios, es decir, también conocidos, de los que abundan en los libros de texto para secundaria y que han sido preparados para ejercitar, afianzar o reforzar ciertas habilidades y destrezas matemáticas ya aprendidas.

Aprender y enseñar matemática.
En contrapartida a lo anterior, con mucha frecuencia las personas suelen encontrarse con problemas que no pueden resolver, debido a que desconocen los algoritmos, las estrategias o los instrumentos matemáticos para ello. Ante tal circunstancia, se busca la información que nos permita resolver adecuadamente dicho problema, es decir, se aprende matemática. Pero, si se da el caso de que esas estrategias y algoritmos son de nuestro dominio y conocimiento, entonces también suele ocurrir que se enseña cómo resolverlo.

Recrear la matemática conocida y crear matemática nueva.
Cuando el estudiante redescubre propiedades, teoremas o algoritmos ya conocidos, debe entenderse que "está creando matemática nueva", en el sentido de que esa matemática resulta nueva para él. Sin embargo, igual se le puede pedir que "invente" problemas y plantee las estrategias y algoritmos que permitan resolverlos, con lo que estará creando realmente matemática.

Caracterizado el quehacer matemático en estas tres actividades, es de comprender que el trabajo pedagógico con él no se reduce sólo a su aprendizaje o su enseñanza, puesto que la maravilla humana que significa la creación de la matemática, así como la sólida estructuración de los conocimientos que la conforman y su constante desarrollo durante siglos, **es valiosa por sí misma más que por la aplicación que hagamos de ella en la vida cotidiana, por su particular eficiencia para generar un tipo especial de pensamiento: el matemático**.

En un sentido amplio, puede decirse que todo aquel que hace matemática, participa de alguna manera en un trabajo creador. En efecto, el que utiliza el conocimiento matemático conocido para resolver un problema de esta misma naturaleza, con frecuencia modifica ligeramente el modelo matemático que tiene que utilizar, al igual que aquel que enseña matemática reformula ciertos componentes de la información, en función de los intereses y necesidades de sus estudiantes o de la propia realidad, creando esa variante, adecuación o contextualización, con lo cual redescubre o crea conocimientos patentados por la humanidad en términos generales.

1.4 Estudio, aprendizaje y enseñanza de la matemática

Por mucho tiempo se ha intentado reducir el trabajo educativo sólo a la interacción profesor-alumno, enfoque mediante el cual se pretende enmarcar a la educación dentro del proceso enseñanza-aprendizaje y de la escuela, como si la sociedad y el ambiente en general en el que se vive, no ejercieran sobre la persona que aprende una influencia muchas veces más determinante y decisiva que la influencia ejercida por la Institución Educativa. Y es que, mientras ésta se encontraba preocupada por trasmitirle al estudiante un conjunto de contenidos curriculares, muchos de ellos completamente desconectados de la realidad circundante, la sociedad y el ambiente siempre lo han estado educando en la vida y para la vida.

Si bien es cierto que en la mayoría de las propuestas curriculares actuales, se ha producido el drástico viraje de la enseñanza de contenidos al desarrollo de capacidades —viraje que alcanza también a la matemática— en el caso particular de ésta, suele ocurrir que los contenidos constituyen un medio casi irremplazable para desarrollar las capacidades de razonar y demostrar, comunicarse matemáticamente y resolver problemas.

Desde esta perspectiva, en matemática puede resultar casi imposible, por ejemplo, resolver un problema de trigonometría si previamente el estudiante no ha tenido información sobre las relaciones que se dan en el triángulo rectángulo, y las conexiones que se producen entre estas relaciones y los ángulos y arcos de una circunferencia de radio 1. Por lo tanto, existirá la necesidad de "estudiar" esos conocimientos como paso previo para resolver problemas de ese tipo, es decir, para resolver problemas de trigonometría hay que aprender trigonometría. Sin embargo, es evidente que, aprendiendo a manejar conocimientos trigonométricos se desarrolla, por ejemplo, fundamentalmente, la capacidad de resolver problemas y, colateralmente, las capacidades de razonar y demostrar así como de comunicarse matemáticamente. Los conocimientos trigonométricos, por lo tanto, no constituirán el propósito del aprendizaje, sino sólo serán uno de los medios que el docente utilizará para desarrollar capacidades en sus estudiantes.

1.5 ¿Hacia una didáctica de la matemática?

La "didáctica" de la matemática tiene como propósito, llegar a describir y caracterizar los procesos cognitivos de aprendizaje, necesarios para desarrollar en los estudiantes, la capacidad de pensar matemáticamente y de hacer matemática en la vida cotidiana, teniendo al docente como mediador de tales procesos.

La didáctica, como una forma de sistematización de experiencias exitosas para aprender y enseñar contenidos matemáticos —medios para desarrollar capacidades— más que una ciencia, es una disciplina tecnológica que contiene prescripciones o sugerencias de "cómo hacer X para lograr Y". Es decir, la didáctica nos sugiere formas, maneras, modos, técnicas, procedimientos, algoritmos, actividades, procesos y otros recursos de carácter instrumental, para mediar o facilitar el desarrollo de capacidades como: aprender a pensar matemáticamente, aprender a aprender, aprender a comunicarse en lenguaje matemático, razonar y demostrar, etc., teniendo como medios fundamentales a los contenidos acumulados históricamente por la ciencia de la matemática.

Ahora bien, tal como se ha podido apreciar en párrafos anteriores, existiendo un contenido de la matemática que ha sido generado por la humanidad en muchos siglos, no es posible "descubrir con cada estudiante esa matemática". Lo que tiene que hacerse es "estudiarla", es decir, informarse sobre lo existente en esa ciencia formal, mediante procesos cognitivos tales como la resolución de problemas. No es posible soslayar el hecho de que la resolución de problemas es una capacidad compleja que permite, a su vez, potenciar y desarrollar otras capacidades de semejante complejidad como la comunicación matemática y el razonamiento o la demostración, entre otras, o la comprensión lectora, la producción de textos escritos, el manejo de información, etc. Por lo tanto, si se pretende identificar una didáctica de la matemática, ésta es, sin lugar a dudas, la resolución de problemas.

1.6 ¿Por qué estudiar matemática?

Por una necesidad individual y social: cada uno debe saber un poco de matemática para resolver, o cuando menos reconocer, los problemas con los que se encuentra mientras convive con los demás. Para vivir adecuadamente y ayudar a los demás a vivir en forma satisfactoria, hay que desarrollar ciertas capacidades que se consideran fundamentales. Sin embargo, como es sabido, la mayor parte de nuestras capacidades las hemos adquirido fuera de la escuela porque ella estuvo preocupada, hasta hace poco, en lograr que aprendiéramos conocimientos. En tal sentido, las necesidades matemáticas que surgen en la Institución Educativa deben estar subordinadas a las necesidades matemáticas de la vida en sociedad.

La matemática hoy en día, forma parte del Proyecto Educativo de cualquier sociedad, puesto que, sobre el conjunto de obras que todos debemos tratar de conocer para convertirnos en personas medianamente informadas o "educadas", es necesario saber algo de matemática. Sin embargo, la pregunta es: ¿qué matemática debe aprenderse hoy para adquirir la cultura básica que nos reclama el interés social y el nuestro propio?

Y, ¿en qué consiste ese algo de matemática que todos debemos saber? Este es, en síntesis, el problema que se tiene que abordar cuando hay que diseñar un currículo de matemática, especialmente, para la Educación Secundaria.

1.7 El desarrollo de capacidades matemáticas mediante el aprendizaje de contenidos matemáticos

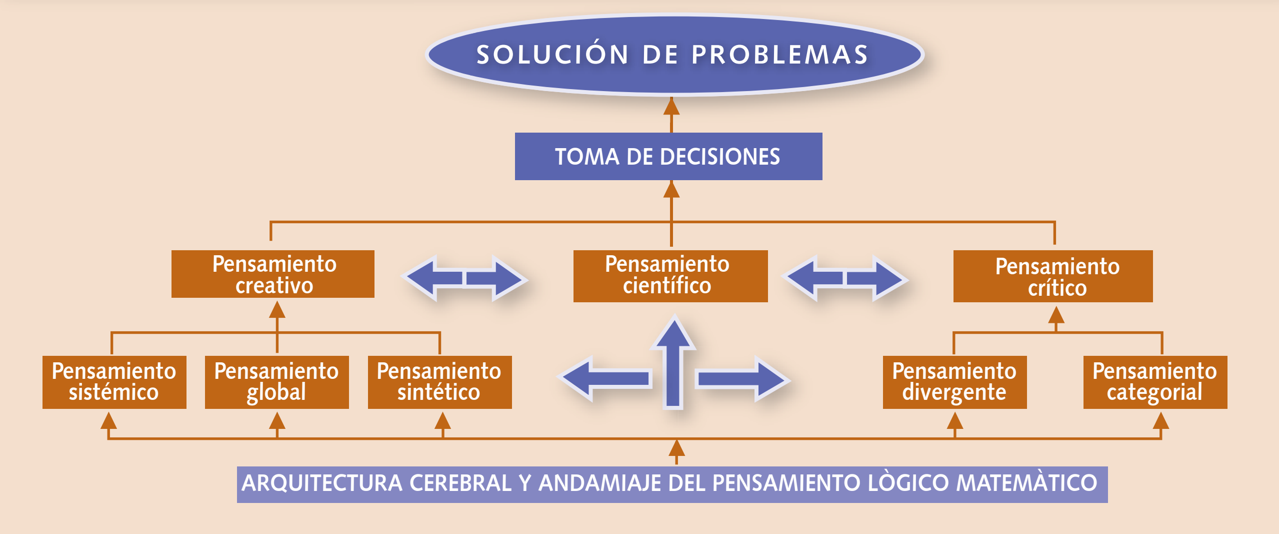
El logro de ciertos aprendizajes de carácter general se puede concretar mediante el desarrollo de capacidades como pensar creativamente y en forma crítica, tomar decisiones y solucionar problemas que, en muchos casos, suelen trascender las fronteras de áreas curriculares concretas como la matemática; ciencia, tecnología y ambiente u otras. Pero, ¿cómo enseñar a los alumnos esas capacidades? ¿Implica ello que los contenidos específicos de cada área no son relevantes para el aprendizaje? Es evidente que no y, más bien al contrario, aunque la búsqueda se oriente hacia el desarrollo de capacidades, el medio para lograrlo es trabajar y desarrollar esas capacidades en estrecha conexión con los contenidos disciplinares de la propia matemática.

Las investigaciones en psicología del aprendizaje y otras ciencias de la educación, han demostrado fehacientemente que el desarrollo de ciertas capacidades generales sólo puede lograrse desde y por cada una de las áreas curriculares previstas en un Diseño Curricular. No se trata, entonces, de renunciar a enseñar esos contenidos, sino de comprender que su selección, organización y el nivel de exigencia con el que se planteen, deben estar subordinados a aspiraciones puntuales como lograr el desarrollo de capacidades. Esta conexión entre el conocimiento de contenidos y el desarrollo de capacidades, debe ser el marco orientador básico del trabajo del docente en el aula.

Esto implica que no sólo hay que asumir una forma de enseñar y aprender, sino también cómo definir los contenidos que deben incluirse en un Diseño Curricular, más aún si éste tiene el carácter de "básico". Esto significa, igualmente, que los contenidos del área curricular, lejos de ser un fin en sí mismos o algo que tienen que justificarse por sí solos, deben concebirse más bien como medios, instrumentos o vehículos para el desarrollo de capacidades en los estudiantes, de modo que se les pueda asignar una razón de ser porque resultan útiles para solucionar problemas de la vida cotidiana o mejorar sus niveles de vida.

El desarrollo de capacidades, aun cuando suele viabilizarse mediante contenidos concretos, requiere de los alumnos algo más que su "dominio" en términos cognoscitivos o teóricos, puesto que, además de aquello, si el estudiante ha logrado desarrollar sus capacidades, debe saber qué hacer con ellos en situaciones de la vida cotidiana. En general, cuanto más duraderos y transferibles sean los resultados de un aprendizaje, más eficaz ha sido su enseñanza. En tal sentido, las capacidades son aprendizajes más perdurables, complejos, versátiles, funcionales, perfectibles y transferibles que cualquier contenido cognoscitivo a través del cual se pueden adquirir. Esto no supone, en absoluto, el abandono de esos contenidos, sino más bien su subordinación al logro de tales aprendizajes, los mismos que, desde cualquier perspectiva de análisis, son de mejor calidad al posibilitarnos aprender para seguir aprendiendo. Queda claro, entonces, que los contenidos matemáticos son un medio para desarrollar capacidades, más que un fin en sí mismos.

CAPACIDADES FUNDAMENTALES Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA



¿Qué enseñar en matemática?

El conocimiento matemático es jerárquico y acumulativo. Partiendo de esta base, es claro que cualquier concepto se basa en otros previos. Así se ha estructurado, históricamente, todo el conocimiento matemático existente. Pero, a la fecha, en esta sociedad del conocimiento en la que nos ha tocado vivir, es ilusorio pensar en querer abarcar por aprendizaje, todo ese "conocimiento matemático existente". Por eso, más que enseñar conocimientos matemáticos, habría que pensar en que los estudiantes aprendan a aprender la matemática. En otros términos, hoy en día es más importante aprender a aprender, es decir aprender cómo se aprende, y aprender a desaprender ciertas cosas, antes que tratar de aprender conocimientos matemáticos en sí.

El profesor, por lo tanto, tendría que partir "enseñando" lo que el estudiante ya sabe, es decir: las capacidades fundamentales de pensar creativamente, poseer un pensamiento crítico, tomar decisiones y solucionar problemas, respetando los ritmos de aprendizaje de cada estudiante y partiendo de lo que realmente sabe hacer mejor, y no de lo que debería saber.

Sin embargo, el qué enseñar no es tan incierto, como pareciera, dentro del marco general de la propuesta curricular establecida, ya que sólo habrá que seleccionar situaciones educativas que planteen problemas con el suficiente grado de dificultad como para que el estudiante trate de resolverlos, es decir, ni demasiado fáciles para que se aburra, ni demasiado difíciles para que no pueda solucionarlos, se espante y huya de ellos.

Además de la complejidad de la estructura lógica de los problemas de matemáticas, hay que tener en cuenta que el contenido de los mismos sea significativo para el estudiante. Se aprende mejor aquello que nos interesa. La motivación por encontrar la solución a las situaciones problemáticas es mayor si éstas tienen alguna relación con su vida cotidiana y sus intereses. Por ello, para conseguir mantener la motivación, se tratará de buscar situaciones cercanas y conectadas a "la realidad de nuestros estudiantes".

¿A quién enseñar?

La heterogeneidad del nivel cognitivo de los estudiantes en una clase, es una situación casi general y permanente. Cuando se pretende enseñar contenidos matemáticos al nivel medio de la clase, por ejemplo, los estudiantes del nivel más bajo no comprenden la explicación, y los del más alto se aburren. Frente a este dilema, ¿a quién nos dirigimos? Esto nos obliga a plantearnos la búsqueda de una metodología más adecuada a cada realidad educativa.

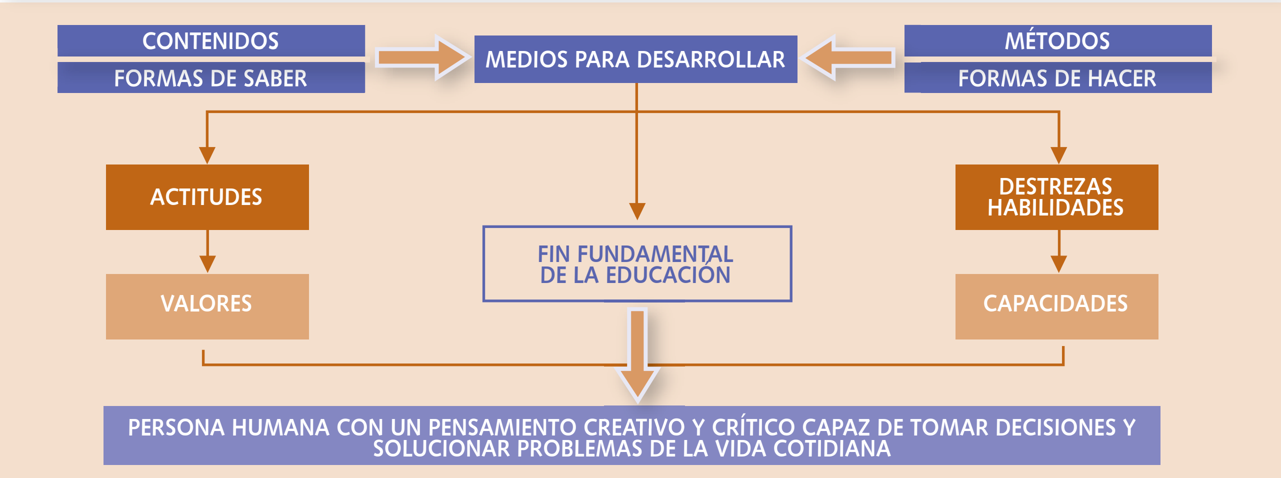
El aprendizaje es un proceso individual que cada estudiante realiza a partir de situaciones de grupo, esto es, en el proceso de su interacción social. Enseñanza individualizada es diferente a "clase particular". En una situación de grupo en la que varios estudiantes trabajen un mismo problema, cada uno adquirirá un conocimiento distinto, y serán distintos los ritmos de aprendizaje. Pero, lo importante es que todos participen en la resolución del problema planteado y que con esta actividad, avancen en el reacomodó y desarrollo de sus estructuras cognitivas y en el dominio de las capacidades fundamentales.

Lo deseable es que todos avancen lo más posible, y esto sólo se puede conseguir respetando las individualidades dentro de un grupo. No significa que se deje de lado el trabajo individual. Pretendemos llamar la atención sobre abusos de situaciones de enseñanza-aprendizaje de la matemática que son inadecuadas para la formación del pensamiento matemático. Es tan importante, lo que se debe enseñar al estudiante en un momento determinado como el conseguir que participe de modo activo en la búsqueda colectiva de soluciones a las situaciones problemáticas, y observar sus respuestas para obtener el punto de partida real de su conocimiento matemático.

¿Dónde enseñar?

En cualquier lugar se puede establecer una situación educativa propicia para el aprendizaje de la matemática. No nos podemos reducir al espacio del aula, el pupitre y la pizarra. El patio de recreo, las excursiones, el edificio escolar, el hogar, el barrio, el mercado, etc. pueden ser marcos idóneos para plantear y resolver problemas matemáticos relacionados con la vida real. En cambio, el aula es, por lo general, un espacio de sistematización de experiencias y de construcción colectiva de aprendizajes, más que de "enseñanza".

EL PARADIGMA SOCIOCOGNOSCITIVO



¿Cómo facilitar el aprendizaje?

El conocimiento matemático aporta al estudiante, la estructura mental sobre la cual deben asentarse, sólidamente, el resto y la totalidad de sus conocimientos y experiencias de aprendizaje, dentro de éstas, sus capacidades fundamentales de pensar creativamente y en forma crítica, de tomar decisiones y solucionar problemas. Aprender a pensar es, en cierta forma, aprender a pensar matemáticamente.

Cumplir estos objetivos significa que el proceso enseñanza-aprendizaje ha de ser participativo y que no se debe dar predominancia a la transmisión verbal. Según las teorías de David Ausubel y de Edgard Dale, la información verbal es la que menos posibilidades tiene de ser aprendida significativamente. Por eso, aspirar a copar por aprendizaje el conocimiento matemático existente, no es sólo una aspiración ilusoria, sino imposible, dadas las características que la sociedad del conocimiento posee hoy en día.

Desde otra perspectiva de análisis, el conocimiento matemático está formado en su totalidad, por un conjunto de abstracciones y generalizaciones teóricas. Entonces, lo que hay que enseñar a nuestros alumnos es a realizar abstracciones y a generalizar en lugar de tratar de que aprendan ese conjunto infinito de abstracciones y generalizaciones. En eso consiste, básicamente, ENSEÑAR A PENSAR en matemática. La aplicación de cualquier tipo de conocimiento matemático a un número variado de problemas de la vida cotidiana sería otro de los objetivos importantes a lograr. Sin embargo, si enseñar a pensar es de por sí complejo, APRENDER A PENSAR lo es mucho más, porque tiene que ver con la capacidad de tomar decisiones y la de solucionar problemas.

2. La matemática al interior de la Institución Educativa


Entender y usar

La matemática es un asunto de importancia central en nuestras Instituciones Educativas. Al interior de ellas, cuanta matemática aprendan los alumnos, y cuán bien lo hagan, es decir con qué calidad, depende en gran parte de las experiencias que los estudiantes adquieran en el aula y de que éstas les ayuden a convertirse en ciudadanos adecuadamente informados, creativos, críticos y capaces de tomar decisiones y solucionar problemas. En este importante proceso intervendrán:

1. *La cantidad o la calidad de los aprendizaje incluidos en la programación.*
2. *Los medios y materiales usados por los estudiantes en su aprendizaje.*
3. *Las expectativas propias de los estudiantes y la de los profesores, padres y administradores.*

El trabajo pedagógico debe dar énfasis a lo más importante y significativo de la matemática, es decir, a lo que es más aplicable a la vida cotidiana, debiendo basarse en principios didácticos que permitan:

a. Brindar una visión coherente e integral del contenido de la matemática.
b. Promover en los estudiantes nuevos aprendizajes y las capacidades para aprender a pensar.
c. Mejorar la eficiencia y eficacia de los profesores como mediadores del aprendizaje.
d. Mejorar la comprensión y uso de la matemática.
e. Desarrollar un sistema de retroalimentación del aprendizaje sobre la base de la supervisión y la evaluación de los aprendizajes.
f. Posibilitar la utilización de la tecnología en un mundo que, cada vez, es más tecnológico.

Estos principios, como puede apreciarse, señalan cuestiones básicas sobre el trabajo pedagógico que hay que desarrollar en una matemática de calidad, al expresar la dirección y perspectivas que fundamentan el aprendizaje de las capacidades y los otros componentes del currículo y al fomentar un cambio sistemático en la actitud del docente, que se traduzca en la práctica, en una toma de decisiones oportuna y eficaz para solucionar los problemas de los estudiantes en su aprendizaje.

Igualmente, los principios en los que se sustenta el Diseño Curricular Nacional (DCN) de matemática, se encuentran coherentemente articulados con las capacidades, los contenidos, los valores y las actitudes allí considerados, por lo tanto, deben dar direccionalidad al trabajo del aula y al que realice la Institución Educativa en su conjunto.

Las necesidades sociales para acceder al conocimiento matemático, a su vez, nunca fueron tan grandes, a consecuencia de la globalización y el progreso alcanzado en la comunicación, el tratamiento y uso de la información y, el conocimiento científico y tecnológico en general. Sobre eso, se presume que estas necesidades continuarán incrementándose. Estas necesidades incluyen las siguientes:

- **Alfabetización matemática y cultural.** Las decisiones de la vida diaria son cada vez más matemáticas y tecnológicas. Nuestros estudiantes vivirán en un mundo donde predominará el manejo del conocimiento y la información, por lo que requerirán de la inteligencia en sus decisiones, de la originalidad de su pensamiento y de su capacidad para abordar y solucionar problemas con imaginación. La matemática, en esa perspectiva, se constituye en una de las más grandes proezas culturales e intelectuales de la humanidad y, los estudiantes de secundaria, más que nadie, están en la obligación de desarrollar su capacidad de comprensión y manejo de estos espectaculares logros.
- **Matemática para el desempeño laboral.** Así como el conocimiento matemático ha aumentado enormemente —a tono con el avance logrado en el campo del conocimiento y la información en general— también los requerimientos laborales han incluido, dentro de los requisitos necesarios para un desempeño laboral eficiente, un nivel de desarrollo del pensamiento matemático y de la capacidad de resolución de problemas, hecho que obliga a replantear el aprendizaje de esta disciplina desde sus cimientos.

Más importante que poseer conocimientos matemáticos puros, resulta tener capacidades que permitan aprender a aprender y adecuar la información disponible existente, a la solución de problemas de la vida cotidiana y del mundo laboral, campo en el cual pareciera que la matemática gana más terreno cada día. Por ejemplo: no habría sido posible fabricar las computadoras si, previamente, no se hubiera aplicado el sistema binario de numeración de la matemática, como uno de sus lenguajes operativos. En la actualidad, matemática y computación van de la mano. Otro tanto ocurre con el resto de ciencias nuevas y ciencias aplicadas.

3. Propósitos fundamentales del aprendizaje de la matemática en la Educación Secundaria

- **Resolver problemas de la vida cotidiana.** La matemática debe desarrollar en los estudiantes la capacidad para plantear y resolver problemas, si queremos contar en el futuro con ciudadanos productivos. El desarrollo de la capacidad de resolución de problemas es la espina dorsal en la enseñanza de la matemática a nivel secundario, y obliga a que, algo tan evidente, se precise enfatizar. Sin embargo, tan importante como la capacidad de resolver problemas es la de saber plantearlos creativamente.
- **Aprender a razonar matemáticamente.** El trabajo matemático debe permitir al estudiante desarrollar su habilidad para elaborar y comprobar conjeturas, formular contraejemplos, seguir argumentos lógicos, juzgar la validez de un argumento, construir argumentos sencillos válidos, etc. La matemática es una fuente fecunda de raciocinio.
- **Utilizar la matemática como medio de comunicación.** El lenguaje matemático permite expresar ideas diversas, formular enunciados, leyes y principios, y realizar generalizaciones; asimismo permite, reflexionar y clarificar conceptos y relaciones entre objetos, es decir, que el uso y manejo de signos, símbolos y términos para recibir y emitir información matemática, es lo que debe enfatizarse en el trabajo de aprender matemática.
- **Aprender a valorar positivamente la matemática.** Los estudiantes deben saber apreciar el papel que cumple la matemática en el desarrollo científico y tecnológico experimentado en el mundo actual y explorar sus conexiones con las otras áreas y disciplinas del conocimiento. Deben aprender a apreciar, igualmente, el valor de la matemática en el desarrollo de la capacidad de aprender a pensar, siendo el pensamiento matemático en particular, una de las formas más eficientes de hacerlo.

- **Adquirir confianza en las propias capacidades para hacer matemática.** El aprendizaje de la matemática debe permitir a los estudiantes, desarrollar las capacidades de uso de todas sus potencialidades, no sólo para aprender nuevas nociones, conceptos y algoritmos, sino para dar sentido y direccionalidad a sus intervenciones en la solución de las situaciones problemáticas que les plantee la vida cotidiana en el ambiente al que pertenecen.

"La matemática se aprende y se enseña pero tambien se crea y se utiliza."

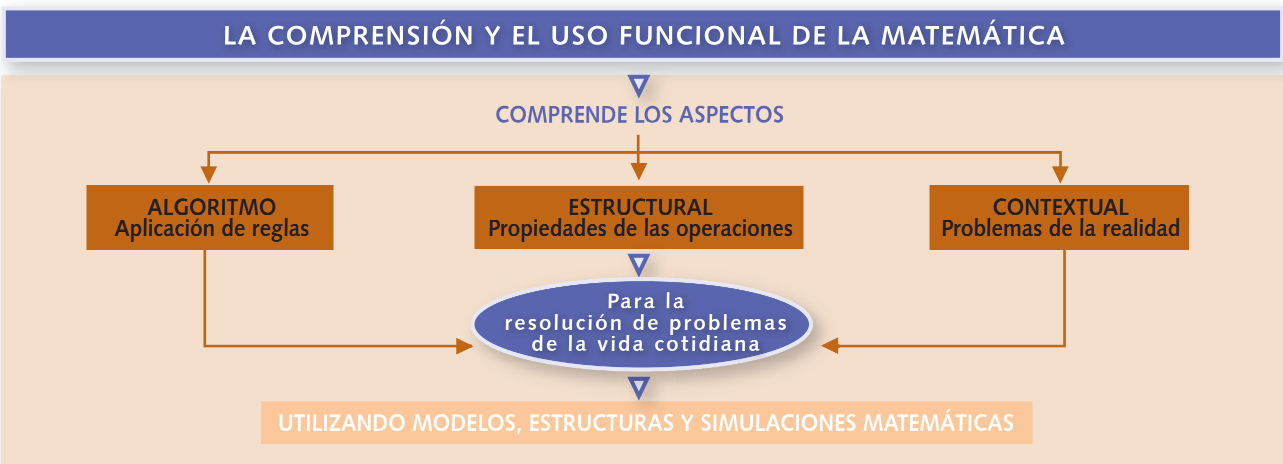
4. En torno al aprendizaje de la matemática

Para que el aprendizaje de la matemática sea una tarea de mediación gratificante para el profesor y, de adquisición de capacidades, conocimientos y valores para el estudiante, es necesario que su comprensión y —fundamentalmente— su manejo, tengan un propósito funcional, tanto en los aspectos algorítmico, estructural, como de contexto, que le permitan resolver problemas en la vida cotidiana, haciendo uso, principalmente, de modelos, estructuras y simulaciones.

En el esquema que se presenta más adelante, deberemos tener en cuenta los siguientes conceptos:

Comprensión o entendimiento de la matemática. Es un proceso que se va adquiriendo o desarrollando con el tiempo y con el tipo de experiencias que se tiene. No es un producto, es decir, no es algo que una persona posea o no, desde su nacimiento. Por esta razón los estudiantes deben desarrollar su capacidad de comprensión de la matemática, de acuerdo con su propio nivel de maduración y con el tipo de experiencias que le ofrezca el docente, la Institución Educativa y la propia vida.

Uso funcional de la matemática. "Usar la matemática" significa recopilar, descubrir y recrear información y conocimientos en el curso de una actividad. Este uso se da por la observación, manipulación, experimentación, extrapolación o conexión de la información matemática con un proceso activo de la vida cotidiana, que no es lo mismo que el dominio de conceptos y procedimientos. El uso funcional se da cuando una CAPACIDAD o habilidad matemática se utiliza en situaciones y realidades diversas (diversibilidad), cuando se emplea para solucionar casos variados, sean éstos similares o disímiles entre sí (variabilidad)



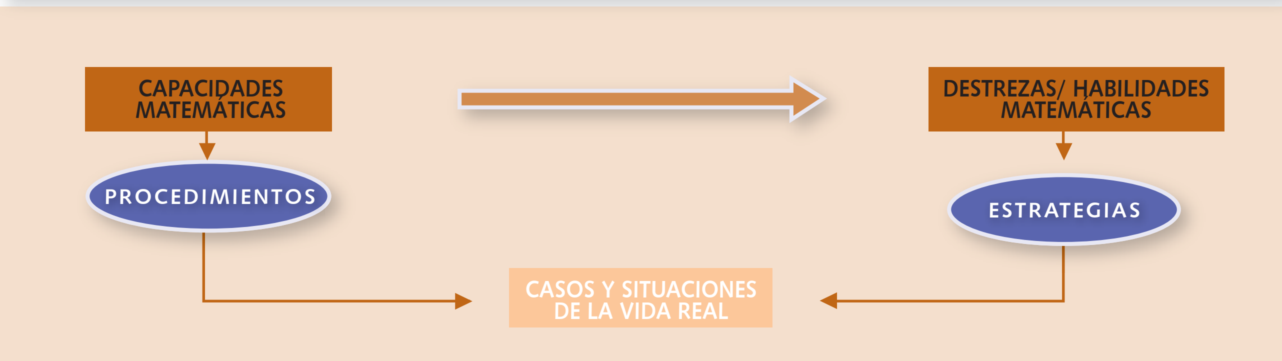
Aspecto algoritmo de la matemática. Se refiere a la comprensión y aplicación de procesos estratégicos y procedimientos. Por ejemplo: resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita, puede hacerse aplicando la fórmula general (regla), completando el cuadrado (procedimiento) o mediante operaciones de cálculo y procesos específicos (algoritmo).

Aspecto estructural de la matemática. Se refiere a la comprensión y manejo de las diferentes estructuras matemáticas y se pone de manifiesto al usar las propiedades de la estructura. En otros términos, es la "visión del bosque sin perder de vista el árbol", es decir, tratando de buscar las conexiones entre la operación que hay que realizar y los diferentes principios, leyes, categorías, conceptos y procedimientos matemáticos.

Aspecto contextual de la matemática. Se refiere a la pertinencia de la aplicación de un concepto o procedimiento, a una situación problemática en particular. Por ejemplo, muchos estudiantes saben multiplicar, pero no saben cuándo ni dónde utilizar ese conocimiento y el algoritmo respectivo, para solucionar problemas concretos en la realidad de la que forman parte. Este aspecto, como es fácil de inferir, es el menos trabajado por los docentes y muchos problemas que se plantean, no están vinculados a la realidad de los alumnos.

Con frecuencia, por ejemplo, se plantean al estudiante problemas de este tipo: "Si una camisa me costó S/. 30 ¿cuánto pagaré por 20 camisas? La respuesta, sin contextualizar el problema, obviamente resulta de multiplicar 30 x 20. Pero, ¿acaso no tendría que considerarse el hecho de que en 20 camisas hay más de docena y media y que el precio de una camisa al por mayor, es decir, por docena, es menor a S/. 30? Eso lo sabe cualquier persona adulta y hasta los niños de los primeros grados de primaria. Entonces, ¿por qué no contextualizar el problema en la realidad con este tipo de datos?

USO FUNCIONAL DE LA MATEMÁTICA



5. Organización del área

Todos los esfuerzos en el terreno del aprendizaje de la matemática han de centrarse en conseguir que los estudiantes desarrollen sus potencialidades para adquirir confianza en sus propias capacidades de usarla, valorarla y utilizarla como medio de comunicación, para resolver problemas de la vida cotidiana y razonar matemáticamente.

Enfoque del área

En tal perspectiva, el área curricular de matemática en Educación Secundaria se ha estructurado en función de tres capacidades de área y tres componentes, los cuales se describen a continuación.

Capacidades de área

I. **Resolución de problemas.** "...Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no había previamente camino alguno, es encontrar la forma de salir de una dificultad de donde otros no pueden salir, es encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir un fin deseado que no es alcanzable de forma inmediata, si no es utilizando los medios adecuados..." (G.Polya en Krulik y Reys 1980, p1).

Un problema en matemática puede definirse como una situación —a la que se enfrenta un individuo o un grupo— para la cual no se vislumbra un camino aparente u obvio que conduzca hacia su solución. Por tal razón, la resolución de problemas debe apreciarse como la razón de ser del quehacer matemático, un medio poderoso de desarrollar el conocimiento matemático y un logro indispensable para una educación que pretenda ser de calidad. El elemento crucial asociado con el desempeño eficaz en matemática es, precisamente, el que los adolescentes desarrollen diversas estrategias que les permitan resolver problemas donde muestren cierto grado de independencia y creatividad.

Los contextos de los problemas pueden variar desde las experiencias familiares o escolares, del estudiante a las aplicaciones científicas o del mundo laboral. Los problemas significativos deberán integrar múltiples temas e involucrar matemáticas significativas, lo cual implica que se ha de tomar como punto de partida lo que el estudiante ya sabe. A fin de que la comprensión de los estudiantes sea más profunda y duradera, se han de proponer problemas cuya resolución les posibilite conectar ideas matemáticas. Así, pueden ver conexiones matemáticas en la interacción entre contenidos matemáticos, en contextos que relacionan la matemática con otras áreas y con sus propios intereses y experiencias. De este modo se posibilita además que se den cuenta de la utilidad de la matemática.

Mediante la resolución de problemas, se crean ambientes de aprendizaje que permiten la formación de sujetos autónomos, críticos, capaces de preguntarse por los hechos, las interpretaciones y las explicaciones. Los estudiantes adquieren formas de pensar, hábitos de perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones no familiares que les servirán fuera de la clase. Resolver problemas posibilita el desarrollo de capacidades complejas y procesos cognitivos de orden superior que permiten una diversidad de transferencias y aplicaciones a otras situaciones y áreas; y en consecuencia, proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo. De allí que, resolver problemas se constituye en el eje principal del trabajo en matemática.

Si bien es cierto que la elaboración de estrategias personales de resolución de problemas, crea en los alumnos confianza en sus posibilidades de hacer matemática, estimulando su autonomía y expresando el grado de comprensión de sus conocimientos, plantear problemas desarrolla su creatividad en un grado que resulta insospechado todavía. Hasta la fecha se ha estado insistiendo en la solución de problemas conocidos en los libros de matemática, para los que hay, también, soluciones y algoritmos conocidos para resolverlos. Por lo tanto, resultará tanto más edificante, que el alumno se ejercite tanto en solucionar problemas, como en plantearlos y descubrir los algoritmos de solución respectivos.

Sin embargo, se puede afirmar que un verdadero problema en matemática, puede definirse como una situación que es nueva para el individuo a quien se pide resolverlo y, muchas veces, los problemas existentes en los libros son totalmente desconocidos para los alumnos. Un estudiante que resuelve problemas en forma eficiente estará preparado para aplicar y buscar nueva información que le ayude a resolver un problema cuando en el primer o segundo intento falla una estrategia determinada.

Al resolver problemas en matemática, los alumnos desarrollan diversas formas de pensar, actitudes de perseverancia y curiosidad, y confianza en situaciones no rutinarias que les serán útiles fuera de la clase. Un experto en resolver problemas tiene éxito en la vida diaria y en el trabajo. La elaboración de estrategias personales de resolución de problemas, crea en los alumnos confianza en sus posibilidades de hacer matemática, pues se asienta sobre los conocimientos que ellos pueden controlar y reflejar para:

- *Construir nuevo conocimiento matemático a través del trabajo con problemas.*
- *Desarrollar una disposición para formular, representar, abstraer y generalizar en situaciones dentro y fuera de la matemática.*
- *Aplicar una amplia variedad de estrategias para resolver problemas y adaptar las estrategias a nuevas situaciones.*
- *Reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.*

II. Razonamiento y demostración. Para comprender la matemática es esencial saber razonar, capacidad que potenciamos desarrollando ideas, explorando fenómenos, justificando resultados y usando conjeturas matemáticas en todos los componentes o aspectos del área. El razonamiento y la demostración proporcionan modos efectivos y eficientes para desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos.

Razonar y pensar analíticamente implica percibir patrones, estructuras o regularidades, tanto en situaciones del mundo real como en objetos simbólicos; ser capaz de preguntarse si esos patrones son accidentales o si hay razones para que aparezcan; poder formular conjeturas y demostrarlas. Una demostración matemática es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y de justificación.

Las exigencias a los estudiantes en lo que se refiere a la capacidad de razonamiento y demostración varían en función de su nivel de desarrollo cognitivo.

Los estudiantes de 11 a 13 años, por ejemplo, deben utilizar los razonamientos inductivo y deductivo para formular argumentos matemáticos y aun cuando en estas edades, el argumento matemático carece del rigor y formalismo asociados a una demostración matemática, comparte muchas de sus características importantes tales como formular una conjetura plausible, comprobarla y presentar el razonamiento asociado para que sea evaluado por otros. De tercero a quinto de secundaria, los estudiantes deben comprender que el hecho de disponer de muchos ejemplos que cumplen con una conjetura puede sugerir que la conjetura es verdadera, pero no la demuestra, mientras que un contraejemplo prueba que una conjetura es falsa. Por esa razón, los estudiantes de los últimos grados de secundaria deben reconocer la validez y eficiencia de las demostraciones deductivas para establecer resultados.

El razonamiento y la demostración no pueden enseñarse, por ejemplo, en una simple unidad de lógica o haciendo demostraciones en geometría, sino que deben ser una parte consistente de las experiencias de aprendizaje durante toda la Educación Secundaria. Razonar matemáticamente debe llegar a ser un hábito mental, y como todo hábito ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos.

El razonamiento y la demostración son partes integrantes del quehacer matemático y se hallan conectados a los demás procesos cognitivos, unívocamente. Los estudiantes desarrollan este tipo de habilidades al formular y analizar conjeturas, al argumentar sus conclusiones lógicas, al debatir las que presentan sus compañeros o cuando justifican sus apreciaciones. Conforme avanzan en sus años de escolaridad, sus argumentos se tornan más sofisticados y ganan en coherencia interna y rigor matemático. Este proceso acompaña a la persona toda su vida, por lo que es conveniente ejercitarlo sistemáticamente a lo largo de toda la Educación Básica.

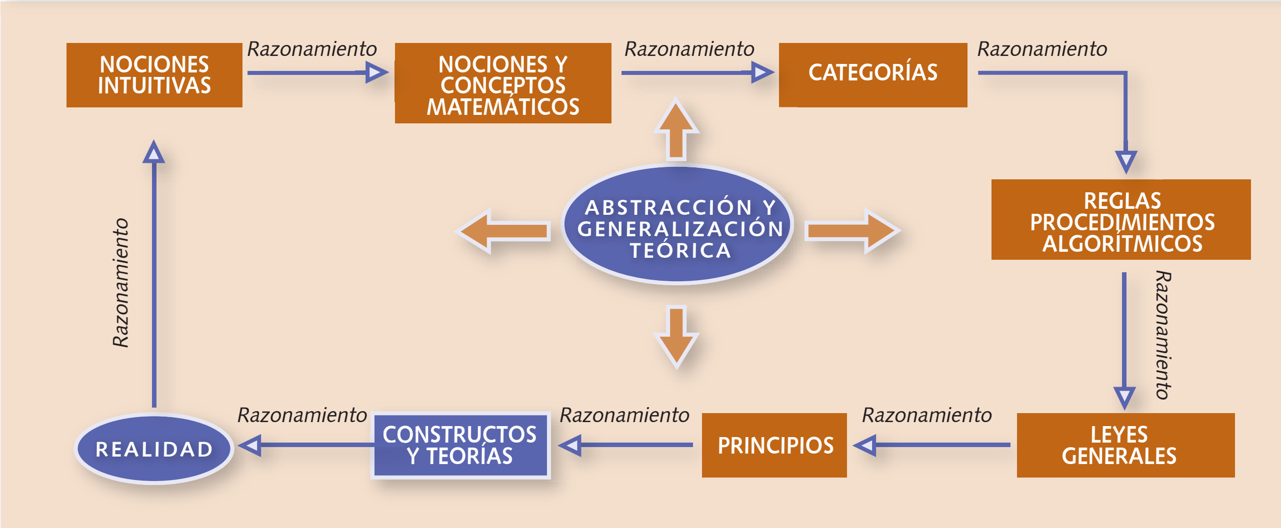
Desde esta misma perspectiva, es incorrecto separar los procesos, como lamentablemente está ocurriendo en algunos colegios al crear un curso de “razonamiento matemático”, el cual, en realidad, pretende que el estudiante se “adiestre” en la solución de ejercicios típicos de los exámenes de admisión a las universidades e institutos, sacrificando así la creatividad y el desarrollo del pensamiento matemático.

También resulta evidente, que el razonamiento y la demostración se encuentran ligados a los componentes del área. Por ejemplo, los estudiantes usan el razonamiento para resolver problemas de diferente tipo y naturaleza y no sólo para abordar problemas numéricos, del mismo modo que utilizan la demostración para argumentar y justificar las soluciones encontradas. También la emplean cuando elaboran algoritmos y quieren demostrar la validez de un procedimiento, cuando hacen generalizaciones para patrones o cuando explican el significado de sus gráficos y otras formas de representación.

Para desarrollar esta capacidad resulta fundamental:

- *Reconocer a la capacidad de razonamiento y demostración, como uno de los elementos que más ha contribuido en el desarrollo y la solidez de la matemática.*
- *Hacer e investigar conjeturas matemáticas.*
- *Desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticas.*
- *Seleccionar y usar varios tipos de razonamiento y métodos apropiados de demostraciones.*

EL RAZONAMIENTO COMO CAPACIDAD DE ABSTRACCIÓN Y GENERALIZACIÓN TEÓRICA



En el esquema, los conceptos forman una parte sustancial del edificio teórico de la matemática y, al reflejar lo que es esencial en una clase determinada de "objetos", constituyen el punto de partida y los elementos en base a los cuales se estructura como disciplina científica formal. Sin los conceptos matemáticos no habría teoría matemática. Los conceptos se relacionan entre sí a través de conectivos y cuantificadores para dar origen a los enunciados, los constructos, los principios, las leyes y las teorías. Son básicos por ejemplo, los conceptos primitivos que no se definen. "Conjunto" es por ejemplo, un concepto primitivo en la teoría de conjuntos, lo mismo que "punto" lo es en la geometría y "número" en la teoría del número.

Sin embargo, es bueno dejar esclarecido que un concepto no es equivalente a una noción. Las nociones a veces suelen ser intuitivas. En cambio los conceptos no. La noción intuitiva de conjunto por ejemplo es equivalente a "grupo", "colección", "montón", etc. Sin embargo, como concepto primitivo que no se define, puede estar referido a un grupo de elementos, a un elemento (unitario) o a ninguno (vacío o nulo).

Los conceptos no se aprenden por repetición, se deben comprender, conectar con los conocimientos previos y considerarlos en una estructura que les dé sentido. Los conceptos irán creciendo y se desarrollarán en el tiempo, como parte del proceso de aprendizaje y uso de cada uno, es decir, se enriquecen y fortalecen en la práctica.

Dentro del campo conceptual aparecen otros de menor nivel de generalidad y alcance, como los datos, las variables, los indicadores, los parámetros y los rangos, que generalmente se memorizan y se reconocen o identifican dentro de un conjunto dado de información. Como todos sabemos, en matemática es importante hacer uso de ciertos términos y símbolos para denotar o representar ideas o relaciones matemáticas, además de los conceptos.

III. Comunicación matemática. La comunicación matemática es una de las capacidades del área que adquiere un significado especial en la educación matemática porque permite expresar, compartir y aclarar las ideas, las cuales llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión, análisis y reajuste, entre otros. El proceso de comunicación ayuda también a dar significado y permanencia a las ideas y a hacerlas públicas.

Escuchar las explicaciones de los demás da oportunidades para desarrollar la comprensión. Las conversaciones en las que se exploran las ideas matemáticas desde diversas perspectivas, ayudan a compartir lo que se piensa y a hacer conexiones matemáticas entre tales ideas.

Comprender implica hacer conexiones. Esta capacidad contribuye también al desarrollo de un lenguaje para expresar las ideas matemáticas, y a apreciar la necesidad de la precisión en este lenguaje. Los estudiantes que tienen oportunidades, estímulo y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemática, se benefician doblemente: comunican para aprender matemática, y aprenden a comunicar matemáticamente.

Debido a que la matemática se expresa mediante símbolos, la comunicación oral y escrita de las ideas matemáticas es una parte importante de la educación matemática. Según se va avanzando en los grados de escolaridad, la comunicación aumenta sus niveles de complejidad.

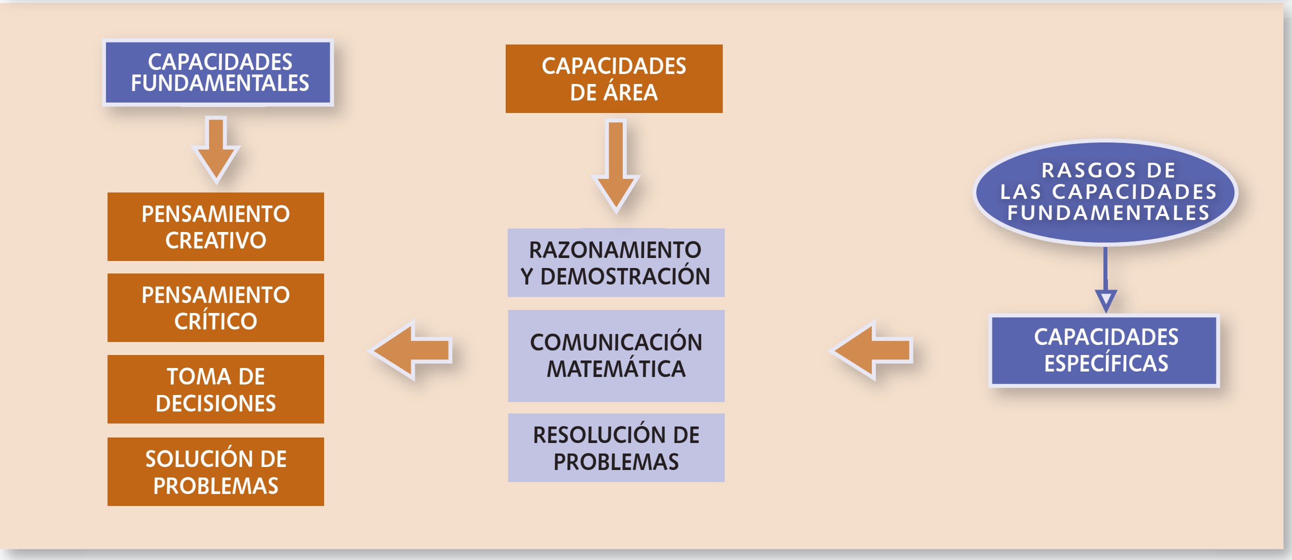
Es necesario tener presente la autonomía del lenguaje matemático en relación con el lenguaje cotidiano. Por ejemplo el término "igual" en lenguaje matemático significa que dos expresiones diferentes designan a un mismo objeto matemático; así en la igualdad "3+4 = 9-2", tanto "3+4" como "9-2" representan el número "7", y por ello decimos que "3+4 igual 9-2"; mientras que en el lenguaje castellano que utilizamos a diario, "igual" significa "parecido", "familiar".

Para entender y utilizar las ideas matemáticas es fundamental la forma en que se representen. Muchas de las representaciones que hoy nos parecen naturales, tales como los números expresados en el sistema decimal o en el binario, las fracciones, las expresiones algebraicas y las ecuaciones, las gráficas y las hojas de cálculo, son el resultado de un proceso cultural desarrollado a lo largo de muchos años. El **término representación** se refiere tanto al proceso como al producto (resultado), esto es, al acto de captar un concepto matemático o una relación en una forma determinada y a la forma en sí misma, por ejemplo, el estudiante que escribe su edad usando sus propios símbolos usa una representación. Por otra parte, el **término** se aplica a los procesos y a los productos observables externamente y, también, a los que tienen lugar "internamente", en la mente de los que están haciendo matemática. Sin embargo, es importante considerar que los estudiantes que hablan una lengua originaria y no tienen al castellano como lengua materna, necesitan ayuda adicional para comprender y comunicar sus ideas matemáticas. Las formas de representación, como los diagramas, las gráficas y las expresiones simbólicas, no deben considerarse como fines del aprendizaje, en sí mismos, por tratarse de formas de comunicación matemática y no de capacidades ni contenidos. En su defecto, deben tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticas, para comunicar enfoques, argumentos y conocimientos, para reconocer conexiones entre conceptos matemáticos y para aplicar la matemática a problemas reales.

La lectura del lenguaje matemático ayuda a los estudiantes a desarrollar sus habilidades para formular argumentos convincentes y para representar ideas matemáticas en forma verbal, gráfica o simbólica. Hace referencia también, a la capacidad de obtener y cruzar información proveniente de diferentes fuentes (textos, mapas, gráficos, etc.) para:

- *Organizar y consolidar su pensamiento matemático para comunicar.*
- *Expresar ideas matemáticas en forma coherente y clara a sus pares, profesores y otros.*
- *Extender su conocimiento matemático junto al pensamiento y estrategias de otras áreas.*
- *Usar el lenguaje matemático como un medio económico y preciso de expresión.*

PROCESO DE INTEGRACIÓN DE CAPACIDADES



Componentes del área

I. **Números, relaciones y funciones.** La primera parte de este componente se refiere al conocimiento y las capacidades específicas relativas a contar, a los números y a la aritmética, así como a una forma de comprender los conjuntos numéricos y sus estructuras. Incluye los conceptos y algoritmos de la aritmética elemental y las características de las clases de números que intervienen en los inicios de la teoría de números.

El punto central de esta primera parte del componente es el desarrollo del sentido numérico: la habilidad para descomponer números de forma natural, utilizar ciertos números como 100 o ½ como referentes, usar las relaciones entre las operaciones aritméticas para resolver problemas, comprender el sistema de numeración decimal, estimar, dar sentido a los números y reconocer las magnitudes relativa y absoluta de los números.

Históricamente, el número ha sido la piedra angular de los currículos de matemática, tanto internacionalmente como en nuestro país. Los principios que rigen la resolución de ecuaciones en álgebra coinciden con las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos. En geometría y medida, los atributos se describen con números. El análisis de datos conlleva a dar sentido a los números. A través de la resolución de problemas, los estudiantes pueden explorar y consolidar sus conocimientos sobre los números. El razonamiento matemático de los más pequeños es más probable que se dé en relación a situaciones numéricas, y sus primeras representaciones probablemente sean de números.

Las investigaciones han demostrado que el aprendizaje relativo a números y operaciones con números es un proceso complejo para los estudiantes de cualquier nivel: Por ello, en este componente la comprensión del número y las operaciones con ellos, así como el desarrollo del sentido numérico y la consecución de mayor grado de fluidez en el cálculo aritmético, constituyen también una prioridad en la educación matemática desarrollada en Secundaria, nivel en el cual los estudiantes alcanzarán una más rica comprensión de ellos: es decir, lo que son, la característica de que pueden representarse con numerales o rectas numéricas, cómo se relacionan unos con otros, cómo están inmersos en sistemas que poseen estructuras y propiedades, y cómo utilizar números y operaciones para resolver problemas.

La segunda parte de este componente se centra en las relaciones entre cantidades, —incluyendo las funciones— las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio. Las relaciones funcionales pueden expresarse usando la notación simbólica, lo que permite expresar sucintamente ideas matemáticas complejas y analizar el cambio con eficacia. Actualmente, el trabajo en muchas áreas se apoya en los métodos e ideas del álgebra. Por ejemplo, las redes de distribución y comunicación, las leyes de la física, los modelos de población y los resultados estadísticos pueden expresarse en el lenguaje simbólico algebraico. Mucho del énfasis simbólico y estructural en el álgebra puede construirse sobre la extensa experiencia numérica de los estudiantes.

Trabajar con relaciones y funciones es más que manipular símbolos. Los estudiantes necesitan comprender sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de los símbolos y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones. Hoy, los ordenadores y las calculadoras pueden dibujar gráficas de funciones, realizar operaciones con símbolos y hacer al instante cálculos sobre columnas de datos. Los estudiantes necesitan ahora aprender cómo interpretar las representaciones tecnológicas y cómo usar la tecnología con eficacia y prudencia.

En razón de todo lo expuesto, la educación matemática referida a este componente enfatizará el desarrollo de actividades que posibiliten que los estudiantes:

- *Comprendan los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos.*
- *Comprendan los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras.*
- *Calculen con fluidez y hagan estimaciones razonables.*
- *Comprendan patrones, relaciones y funciones.*
- *Representen y analicen situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.*
- *Usen modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.*
- *Analicen el cambio en contextos diversos.*

II. Geometría y medida. En lo que concierne al aprendizaje de la Geometría en Educación Secundaria, los estudiantes deben aprender sobre las formas y estructuras geométricas y cómo analizar sus características y relaciones. Asimismo, los estudiantes deben tener la oportunidad de vivir experiencias para una adecuada construcción del espacio, mediante exploraciones, investigaciones y discusiones que les ayuden a familiarizarse con la localización y las transformaciones, lo cual les permitirá comprender no sólo el mundo que les rodea sino también otros contenidos de matemática, o temas relativos a otras áreas.

La visualización espacial, esto es, construir y manipular mentalmente representaciones de objetos de dos y tres dimensiones y percibir un objeto desde perspectivas diferentes, es un aspecto importante del pensamiento geométrico. La geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de la capacidad específica de argumentar, debiendo culminarse en la Educación Secundaria con el fortalecimiento de la capacidad de realizar demostraciones sólidas, lógicas y coherentes. La construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial ofrecen vías para interpretar y describir entornos físicos y pueden constituir herramientas importantes en la resolución de problemas.

Las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otros componentes de la matemática y en situaciones del mundo real; por eso, debería integrarse, cuando sea posible, con todas las áreas curriculares. Resulta evidente que la geometría, por el lado que se la analice, es más que hacer definiciones, ya que permite describir relaciones, razonar y demostrar. La idea de construir el conocimiento geométrico a partir del pensamiento informal, para desde allí alcanzar el pensamiento formal y simbolizado que lo caracteriza, está de acuerdo con las teorías actuales de la psicología cognitiva del aprendizaje.

La tecnología desempeña también un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Herramientas como un programa informático de "Geometría Dinámica", capacitan para modelizar una gran variedad de figuras de dos dimensiones y para tener una experiencia interactiva con ellas. Usando tecnología, los alumnos pueden generar muchos ejemplos como un medio de establecer y explorar conjeturas, pero es importante que se den cuenta de que generar muchos ejemplos de un determinado fenómeno no constituye una demostración. La visualización y el razonamiento espacial se enriquecen mediante la interacción con animaciones de ordenador y en otros contextos tecnológicos.

En la segunda parte del componente que se refiere a "medida", se ha de tener presente que "medir" es asignar un valor numérico a un atributo de un objeto; por ejemplo, a la longitud de un lápiz. A niveles más complejos, la medición supone la asignación de un número a una característica de una situación; tal es el caso, por ejemplo, del índice de precios al consumidor. Se debe hacer hincapié principalmente en la comprensión de qué es un atributo medible y en llegar a familiarizarse con las unidades y procesos usados en la toma de medidas.

El estudio de la medida es importante debido a su práctica y presencia constantes en muchos aspectos de la vida diaria. Ofrece también la oportunidad de aprender y aplicar otros tópicos de la matemática, como las operaciones con números, las ideas geométricas, los conceptos estadísticos y la noción de función. Resalta las conexiones dentro de la matemática y entre ésta y otras áreas como las ciencias sociales, las ciencias naturales, el arte y la educación física.

La medición se presta especialmente al uso de materiales concretos. De hecho, es improbable que los estudiantes puedan llegar a tener un entendimiento profundo de ella sin manipular materiales, sin hacer comparaciones físicamente y sin utilizar instrumentos de medida. Los conceptos relativos a la medida deberían crecer en complejidad y amplitud a través de los diferentes grados de la secundaria. Sin embargo, el énfasis debería ser mayor en los primeros grados más que en los superiores.

En todos los ciclos y niveles de la Educación Secundaria se enfatizará el desarrollo de actividades que posibiliten que los estudiantes:

- *Analicen las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollen razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.*
- *Localicen y describan relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.*
- *Apliquen transformaciones y usen la simetría para analizar situaciones matemáticas.*
- *Utilicen la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.*
- *Precisen los atributos mensurables de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medida.*
- *Apliquen técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas.*

III. Estadística y probabilidad. En este componente se recomienda que los estudiantes formulen preguntas que puedan contestarse mediante datos y que afronten lo que esto requiere: la recopilación de los datos y su acertado uso. Deberían aprender a recoger datos, organizar los propios y los ajenos, y representarlos en gráficos y diagramas que resulten útiles para responder a las preguntas. Incluye también el aprendizaje de algunos métodos para analizar los datos y algunas formas de hacer inferencias y obtener conclusiones a partir de ellas. También se abordan los conceptos y las aplicaciones básicas de la Probabilidad.

Es abrumador el número de datos disponibles para ayudar a tomar decisiones en los negocios, la política, la investigación y la vida cotidiana. Las encuestas sobre consumo orientan el desarrollo y el estudio de mercado de los productos. Los sondeos de opinión contribuyen a definir estrategias en las campañas políticas. Los experimentos se usan para valorar la seguridad y eficacia de nuevos tratamientos médicos. Las estadísticas se manipulan frecuentemente con objeto de influir en la opinión pública o sobrevalorar la calidad y eficacia de los productos comerciales. Los estudiantes necesitan saber analizar datos y otros aspectos relativos a la probabilidad para poder razonar estadísticamente. Interpretar datos estadísticos y manejar adecuadamente la idea de probabilidad de ocurrencia de un evento, son capacidades necesarias para llegar a ser ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes.

Para comprender las ideas estadísticas fundamentales, los estudiantes deben trabajar directamente con datos. El énfasis del trabajo con datos ayuda a que los estudiantes encuentren nuevas ideas y procedimientos según progresan en su escolaridad. El análisis de datos y la estadística permiten, a profesores y estudiantes, establecer conexiones importantes entre ideas y procedimientos de los otros componentes del área (Número, relaciones y funciones; geometría y medida). Trabajar con el análisis de datos y con la probabilidad favorece una forma natural de conectar la matemática con otras áreas del currículo y con las experiencias de la vida cotidiana.

Los procesos inherentes al análisis de datos y la estadística servirán a los estudiantes en el trabajo y en la vida. Algunas de las cosas que los alumnos aprenden en la Institución Educativa les parecerán predeterminadas y acotadas por reglas. Sin embargo, al realizar análisis de datos y actividades de estadística, los estudiantes pueden también aprender que las soluciones a algunos problemas dependen de las hipótesis que se establezcan y del grado de incertidumbre de las mismas. No siempre es intuitivo el tipo de razonamiento que se utiliza en Probabilidad y Estadística y, si no se incluye como contenido básico en el currículo, no lo desarrollarán necesariamente los alumnos.

En todos los ciclos y niveles de la Educación Secundaria se enfatizará el desarrollo de actividades que posibiliten que los estudiantes:

- *Formulen preguntas que puedan abordarse con datos y recojan, organicen y representen datos relevantes para responderlas.*
- *Seleccionen y utilicen los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos.*
- *Desarrollen y evalúen inferencias y predicciones basadas en datos.*
- *Comprendan y apliquen conceptos básicos de probabilidad.*

Contenidos básicos y aprendizajes esperados en el área de matemática

Los contenidos básicos del área de matemática son los mismos que se encuentran considerados en el Diseño Curricular Nacional 2005. En base a ellos, y tomando como objeto de aprendizaje a las capacidades específicas, se formulan los "aprendizajes esperados", que son los logros que se pretenden alcanzar en las sesiones de aprendizaje. Su formulación se detalla en el siguiente esquema:

ESQUEMA DEL PROCESO PARA FORMULAR UN APRENDIZAJE ESPERADO

CAPACIDAD ESPECÍFICA + CONTENIDO DIVERSIFICADO = APRENDIZAJE ESPERADO

Ejemplos:	*Aplica criterios de divisibilidad al resolver problemas*	*(1° grado)*
	Define y aplica sus propiedades al operar con números irracionales	*(2° grado)*
	Construye figuras congruentes y semejantes usando regla y compás y, otras herramientas.	*(3° grado)*
	Aplica fórmulas para el área y volumen de pirámides y conos.	*(4° grado)*
	Representa la mejor recta de ajuste de un conjunto de datos.	*(5° grado)*
	Representa y resuelve ecuaciones con una variable usando símbolos y gráficos.	*(1° grado)*

CAPÍTULO II

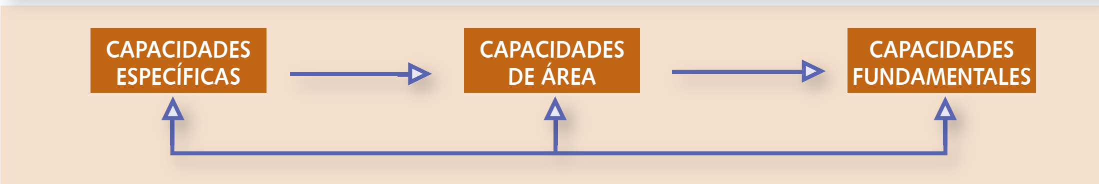
Programación de los aprendizajes

1. Desarrollo de capacidades y selección de contenidos

1.1 Desarrollo de capacidades

Mediante el área curricular de matemática, se pretende que los estudiantes de Secundaria interpreten, formulen y resuelvan problemas utilizando: modelos, procedimientos, estrategias, algoritmos y técnicas de cálculo, estimación y medida, conteo, graficación, etc., tanto al investigar como al conjeturar, demostrar, abstraer y generalizar. Se pretende, igualmente, que manejen en forma adecuada las nociones de conjunto, relación, función, sistemas numéricos, geometría, medición estadística y probabilidades, no sólo en la clase de matemática, sino en la vida cotidiana y que, sobre todo, desarrollen al máximo sus capacidades de razonamiento y demostración, y de comunicación matemática, así como, la de solución de problemas. El logro de las capacidades de área enunciadas, debe posibilitar, el logro de las capacidades fundamentales: pensamiento creativo, pensamiento crítico, toma de decisiones y solución de problemas, que se enuncian en el DCN, teniendo siempre presente que los contenidos constituyen los medios —no los fines— para lograrlas. Al mismo nivel que el desarrollo de capacidades se halla el desarrollo a través de las actitudes (conductas observables).

FLUJO COGNITIVO EN EL APRENDIZAJE DE CAPACIDADES



1.2 Selección de contenidos

El Proyecto Curricular de Centro Educativo (PCC), resultado del proceso de diversificación (adecuación y contextualización) del DCN, en función de las instancias locales y de los intereses y necesidades de los estudiantes, es el referente para la selección de los contenidos de aprendizaje a ser trabajados en el aula de clase. Para ello, deben determinarse las actividades de la unidad, módulo o proyecto de aprendizaje en el que participará el grado y el área de matemática, identificando los contenidos de aprendizaje a ser trabajados en cada una de ellas.

Desde la perspectiva de la "etnomatemática" podría darse la posibilidad de que en el área se aborden algunas formas particulares de comprensión y uso de la matemática, propios de alguna comunidad local o una etnia determinada, como equivalentes a las que existen en la matemática convencional, sencillamente, porque tiene que haberla. Por lo tanto, la diversificación consistirá, fundamentalmente, en la realización de tareas de CONTEXTUALIZACIÓN, o sea, aquel proceso de ejecutar o plantear ejercicios y problemas en base a situaciones y ejemplos propios de cada localidad.

2. Diversificación curricular

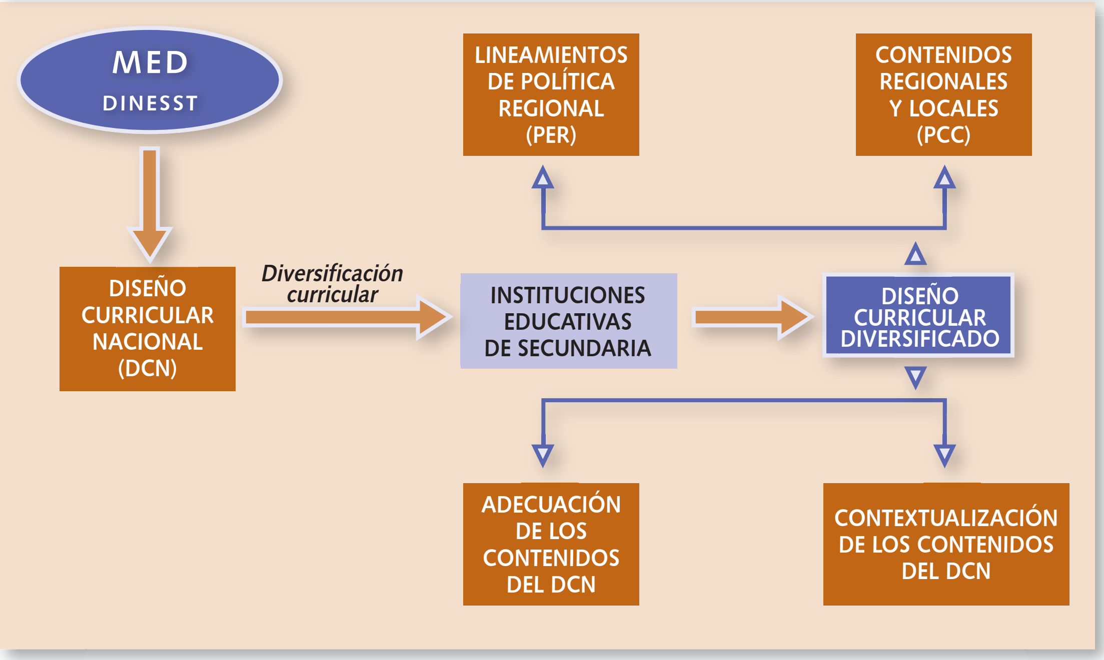
Al realizar la programación curricular y elaborar las unidades didácticas (unidades, proyectos o módulos de aprendizaje) hay que seleccionar y organizar aquellos contenidos que sean relevantes y formativos, no por su valor intrínseco en sí, sino como medios para el desarrollo de las capacidades propuestas, a fin de garantizar que den respuesta a los retos personales y sociales que plantea la vida y, sobre todo, para adecuarlos y contextualizarlos a la realidad en que se aplicarán. Por esa razón, será menester tener en cuenta los siguientes criterios básicos al llevar a cabo esta tarea:

- **Relación lógica.** Los contenidos seleccionados, antes de constituirse en una unidad didáctica, deben organizarse con sentido de afinidad, complementariedad, inclusión, integralidad y espiralidad entre sí, a fin de posibilitar su programación en secuencias lógicas que faciliten los procesos de asimilación, acomodación y encadenamiento con otros aprendizajes, por parte de los alumnos.

- **Articulación y pertinencia.** Los contenidos seleccionados han de abordarse, en lo posible, como un todo integrado y no como temas aislados. Las conexiones entre ellos deben constituir una característica visible. Sólo en situaciones especiales algunos contenidos pueden ser estudiados en forma aislada, ya sea por las condiciones peculiares de los estudiantes o por su grado de dificultad. Pero, se buscará siempre, que todos los contenidos sean pertinentes, es decir, que estén debidamente adecuados, dosificados y contextualizados a la realidad de los estudiantes.

- **Temporalidad.** Es necesario prever el tiempo real y efectivo que tomará desarrollar un contenido. Estimar el tiempo aproximado en horas pedagógicas es una práctica sensata. Por ejemplo, si matemática tiene seis horas a la semana y se ha previsto que el desarrollo de una unidad tomará 24 horas de clase, no es lo mismo decir 24 horas que 4 semanas. En la práctica, hay semanas en las que se pierden horas de clase porque hay feriados o alguna actividad con suspensión de labores, y eso debe tenerse en cuenta.

PROCESO DE DIVERSIFICACIÓN CURRICULAR

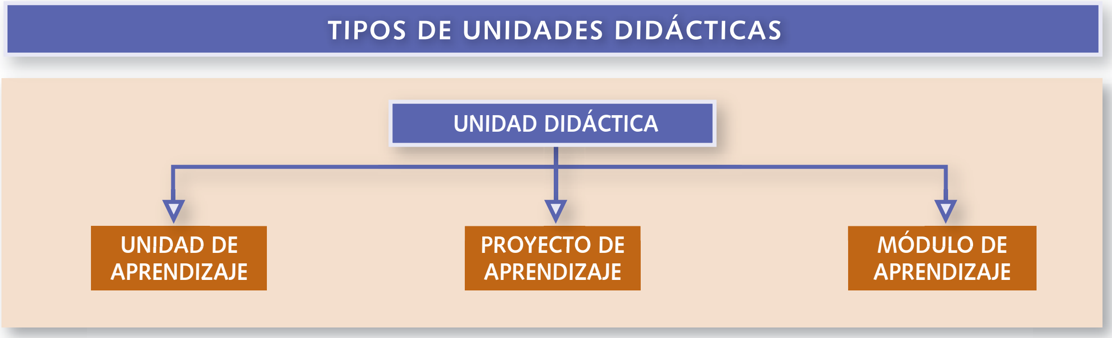


En matemática el proceso de diversificación curricular debe traducirse en una tarea de contextualización de los contenidos, más que en la introducción de "contenidos propios de la región o de la localidad". Contextualizar un contenido implica adecuar los datos a casos y situaciones locales, no es lo mismo, por ejemplo, hablar de jornales en la Sierra y la Selva, como equivalente a los de la Costa. Otro tanto ocurre con los precios de los productos.

3. Diseño de unidades didácticas

La programación curricular en Educación Secundaria se realiza mediante unidades didácticas. Éstas pueden ser de tres tipos:

- Unidad de aprendizaje
- Proyecto de aprendizaje
- Módulo de aprendizaje



Todas, deben orientarse al logro de CAPACIDADES y deben programarse a partir de APRENDIZAJES ESPERADOS. Es posible que éstos se hallen previstos en el PCC o que se encuentren en los libros de texto. Sin embargo, será necesario revisarlos y concordarlos con los intereses y las necesidades de los estudiantes para el contexto en que se dan.

Las unidades didácticas permiten al docente organizar su trabajo con sus estudiantes para posibilitar que ellos se apropien de los conocimientos matemáticos como un todo integrado, reconociendo su relevancia y su utilidad, tanto para comprobar cómo una idea matemática ayuda a entender otras, y cómo puede utilizarse para resolver problemas, describir y modelar fenómenos del mundo real.

La unidad de aprendizaje es, sin duda, el tipo de unidad didáctica con el que se encuentran más familiarizados los docentes de cualquier nivel. Son menos frecuentes en su uso los "módulos de aprendizaje" y los "proyectos". Estos últimos, es decir los proyectos de aprendizaje, son poco aplicados en la práctica pedagógica de los docentes, sin embargo, podría decirse que su versatilidad y eficiencia es superior a cualquier forma convencional de programación curricular. Al ejecutar un proyecto, los alumnos no sólo participan en la planificación de la actividad que ya de por sí es importante, sino que, al ejecutarla, inician un proceso de investigación-acción cuya sistematización de experiencias, es un rico filón de producción de conocimientos y de significatividad de los aprendizajes.

3.1 Las unidades de aprendizaje

Constituyen una forma de programación curricular en la que las actividades de aprendizaje del área se organizan en torno a un tema eje que opera como elemento articulador, motivador o generador de las experiencias, los conocimientos y las actitudes previstas para un período de tiempo determinado. Las técnicas de su elaboración son conocidas por los docentes, variando en este caso, sólo en el hecho de tener que realizar esa organización en función del desarrollo de capacidades, a partir de los aprendizajes esperados que se estimen para cada una de las sesiones de aprendizaje que contenga la unidad. Sin embargo, es conveniente tener en cuenta al tiempo de elaborarlas los siguientes aspectos:

- **Diagnóstico.** Indagar sobre la realidad socioeconómica de los estudiantes, el tiempo disponible para la realización de las tareas en casa, el conocimiento matemático que poseen, el número de alumnos de la clase y el horario del área, porque son determinantes para el planeamiento de aprendizaje.

Por ejemplo, será importante tener en cuenta:

La realidad socioeconómica de los estudiantes, así como sus intereses y metas, que resultan esenciales en la elección del tema a tratar y de la metodología a utilizar para desarrollarlo.

El nivel de conocimiento matemático, que permitirá establecer y dosificar los contenidos, así como el énfasis necesario y el número de ejercicios a ser propuestos.

El horario de trabajo, mañana o tarde, inicio o final de la jornada, determinan la dinámica con la que deberá desarrollarse la sesión. No es lo mismo trabajar a la primera hora de la mañana que a la última, ocurriendo a la inversa en la tarde.

El número de alumnos conduce a la formación de grupos de trabajo, con más o menos elementos, facilitando la orientación de los trabajos.

La disponibilidad de los estudiantes para las tareas en casa, implica la delimitación de las metas. Los estudiantes que trabajan, por lo general, tienen más facilidad para enfrentar situaciones aplicadas a su trabajo que aquellos que no trabajan; en contrapartida, no disponen del tiempo suficiente para el estudio. En este caso es más conveniente que el trabajo sea hecho solamente en el aula de clase.

Elección del tema eje o motivador. Para desarrollar una capacidad y los contenidos de aprendizaje de una unidad de aprendizaje, se elige un tema, un problema o un valor que servirá de marco para entender y usar la matemática. El profesor puede elegir el tema eje o proponer temas y problemas para que los estudiantes elijan el que más se acomode a sus intereses.

La elección por los alumnos del tema eje tiene ventajas y desventajas. Una ventaja es que se sienten partícipes activos en el proceso. Por el contrario una desventaja puede ser que el tema no sea adecuado para tratar determinados contenidos o puede ser muy complejo, exigiendo un tiempo adicional. Sea cual fuese la forma, el tema o problema adoptado debe estar en sintonía con el conocimiento y las expectativas de los estudiantes.

CARACTERÍSTICAS POR TIPOS DE UNIDADES DIDÁCTICAS

UNIDAD DE APRENDIZAJE	PROYECTO DE APRENDIZAJE	MÓDULO DE APRENDIZAJE
¿QUÉ ES?	¿QUÉ ES?	¿QUÉ ES?
▪ Es una forma de programación, en la que las actividades del área o áreas giran en torno a un aprendizaje “eje” (contenidos, valores, actitudes o capacidades). ▪ Desarrolla contenidos propios de un área o en articulación con otras áreas. ▪ Su diseño es responsabilidad del docente. ▪ Los estudiantes participan indistintamente en todas las activIdades.	▪ Es una secuencia de actividades que surge de una necesidad, interés o problema concreto en el aula o fuera de ella, y que tendrá como resultado un producto o servicio concreto. ▪ Un proyecto puede programarse para trabajar contenidos de un área o de varias áreas interrelacionadas, pero siempre está orientado a solucionar un problema existente. ▪ Los estudiantes participan en la programación, en la toma de decisiones y en la sistematización de las experiencias.	▪ Es también una forma de programación en la que se desarrollan contenidos afines y específicos de alguna área en particular. ▪ Los contenidos no se articulan con otras áreas y se desarrollan en forma independiente como módulos. ▪ Atiende necesidades específicas, como retroalimentación, prerrequisitos, demandas de los interesados, etc. ▪ Su diseño puede o no estar a cargo de un solo docente.

UNIDAD DE APRENDIZAJE	PROYECTO DE APRENDIZAJE	MÓDULO DE APRENDIZAJE
ELEMENTOS	ELEMENTOS	ELEMENTOS
▪ Justificación. ▪ Propósitos que se persigue. ▪ Aprendizajes esperados. ▪ Estrategias metodológicas (¿qué hacer?, ¿cómo hacer?, ¿para qué hacer? etc.) ▪ Recursos (¿qué medios o materiales emplearemos? ▪ Indicadores de evaluación. ▪ Tiempo.	▪ Propósito del proyecto (¿qué queremos hacer?) ▪ Finalidad (¿para qué lo haremos?) ▪ Aprendizajes esperados (¿qué aprendizajes involucra?) ▪ Actividades (¿cómo lo haremos?) ▪ Recursos (¿con qué lo haremos?) ▪ Tiempo (¿cuándo lo haremos?) ▪ Evaluación (¿cómo sabremos si logramos los propósitos?)	▪ Justificación. ▪ Propósitos, finalidad o justificación. ▪ Estrategias metodológicas. ▪ Aprendizajes esperados. ▪ Recursos. ▪ Tiempo o cronograma. ▪ Indicadores de evaluación.

Desarrollo de los contenidos de aprendizaje.

La unidad de aprendizaje debe dar oportunidad para que los alumnos, en cada una de las sesiones previstas, trabajen individualmente, en pequeños grupos o en grupos grandes, porque en cada uno de esos modos de trabajo se pueden desarrollar diferentes capacidades.

Es necesario también que, al menos la introducción de cada una de las nuevas sesiones previstas en la unidad, sean hechas a través de situaciones de aprendizaje problemáticas que induzcan a los alumnos a la exploración y formulación de conjeturas, poniéndolos en situación de participar, de descubrir y de jugar en un clima de libertad y sin tensión.

Igualmente, resulta de particular importancia que los estudiantes trabajen no solamente interpretando las situaciones que se presentan, sino también construyendo y organizando los contenidos involucrados en esas situaciones.

Una situación de aprendizaje se define como un conjunto de interacciones —entre el estudiante y su objeto de aprendizaje, entre los mismos estudiantes, entre el estudiante y el profesor o entre el profesor y el estudiante— que el profesor planifica de manera secuencial y coherente para promover aprendizajes significativos en sus alumnos.

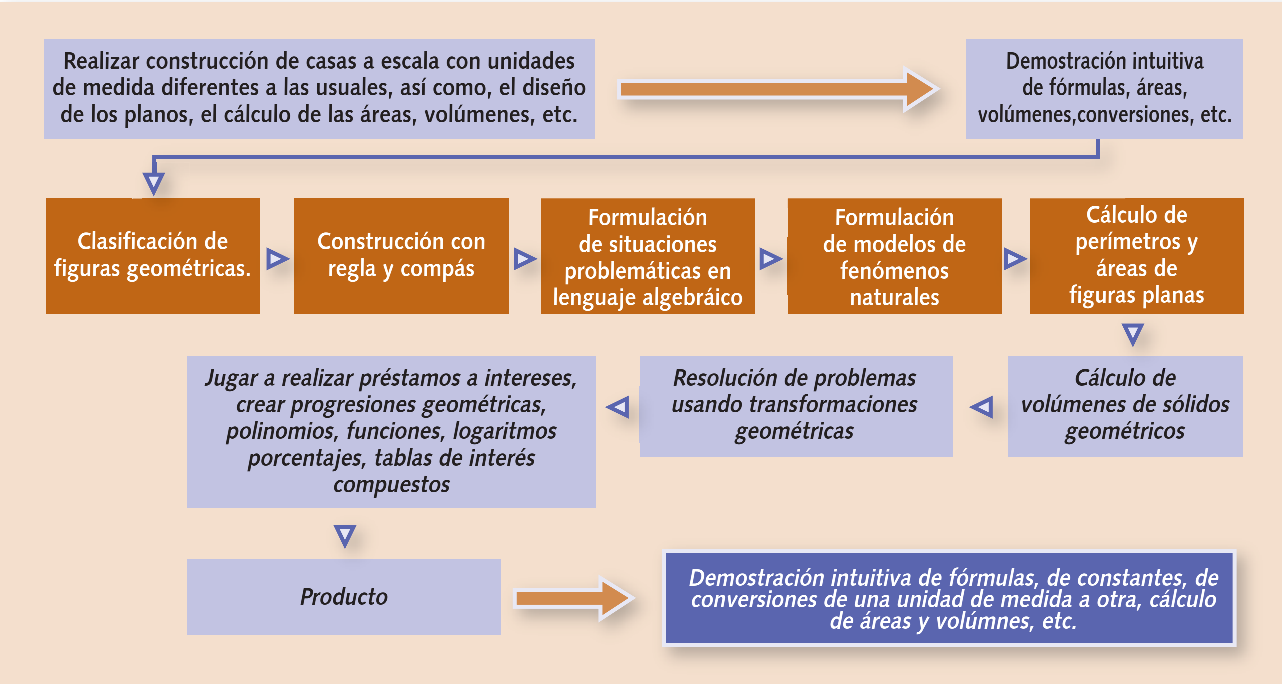
Programación de situaciones de aprendizaje.

Las investigaciones en psicología del aprendizaje y didáctica de la matemática nos indican que, cuando se presentan a los jóvenes situaciones de desafío que tienen sentido para ellos, desarrollan una variedad de estrategias en sus razonamientos para solucionarlas, utilizando el conocimiento que ya tienen. Esto implica que hay que proporcionar a los alumnos situaciones adecuadas al desarrollo de problemas matemáticos reales, porque esos problemas les dan la oportunidad para reflexionar y reorganizar sus formas de pensar.

Gracias a estas investigaciones ahora sabemos que, los cuerpos de conocimientos, procedimientos, destrezas y habilidades mejor asimilados y acomodados en nuestro andamiaje conceptual, son los que están ricamente relacionados entre sí y con el entorno. Además, se sabe que las ideas nuevas no son aceptadas por el alumno hasta que ellas sean tan fuertes que, provoquen por sí mismas, la reorganización de todo el material cognitivo asimilado existente. Debemos entonces, buscar o desarrollar modos de enseñar que contribuyan a que los aprendizajes perduren y se reacomoden hasta formar una nueva estructura conceptual.

En suma, en vez de agobiar a los alumnos con múltiples contenidos desconectados, hay que discriminar a los conceptos esenciales para comprender cada uno de los sistemas matemáticos elegidos para su aprendizaje. Para eso, algunos temas que ya estaban en el currículo pasan a ser prioritarios, otros no son relevantes y otros deben ser incluidos. Hoy en día, por ejemplo, la estadística y la probabilidad tienen una gran importancia y no pueden faltar en ningún currículo orientado al desarrollo de la capacidad de pensar.

- **Actividades creativas de aprendizaje.** Las actividades de aprendizaje se pueden abordar a través de estrategias como la modelación, la resolución de problemas, el método de proyectos, la aplicación de una encuesta, la construcción de formas y figuras geométricas, planas o sólidas, el diseño de un plano o la elaboración de un mapa, entre otros. El profesor de matemática debe conocer y aplicar muchas estrategias para el trabajo con sus alumnos, conociendo el hecho de que hay estrategias que se acomodan unas mejor que otras, a ciertas actividades. En el esquema siguiente se presenta un diagrama de flujos de este proceso:



Estrategias para planificar situaciones de aprendizaje.

Cualquiera que sea la forma que adopte una unidad didáctica -unidad de aprendizaje, proyecto o módulo- su contenido estará siempre referido a situaciones o actividades que favorezcan el logro de los APRENDIZAJES ESPERADOS previstos, los mismos que, a su vez, deben garantizar el logro de las capacidades -específicas, de área y fundamentales -que se consideran en el DCN y las que surjan de la diversificación curricular. Sin embargo, justamente para poder identificar y definir mejor esos aprendizajes esperados, es necesario tener en cuenta algunos factores o procesos que los regulan o favorecen. Ése es el caso, por ejemplo, de:

- **La experimentación.** Porque permite aprendizajes por descubrimiento y por construcción individual y grupal, que resultan siendo, por lo general, de tipo significativo. Los estudiantes deben tener la oportunidad de expresar sus conocimientos previos y sus propias experiencias, para construir, sobre esa base, sus nuevas experiencias.

- **La observación.** Porque permite centrar la atención en un objeto o en una situación determinada para obtener información, permitiendo identificar la misma situación y la descripción de sus elementos, así como, los cambios producidos en ella.
- **La manipulación.** Porque cumple un papel crucial en la configuración de las estructuras mentales que posibilitarán o dificultarán, más tarde o más temprano, los aprendizajes de aspectos abstractos o generalizaciones. Si un estudiante de secundaria carece de este prerrequisito, es decir, no puede asimilar abstracciones, se le tiene que proporcionar experiencias intuitivo concretas que hagan posible la configuración de sus propias estructuras mentales.
- **El establecimiento de relaciones o conexiones.** Porque para la construcción de una noción o un concepto, es necesario clasificar nuestras experiencias y percepciones a partir del establecimiento de conexiones o relaciones entre las características comunes y no comunes de dos o más objetos, contenidos matemáticos o actividades en general.
- **Las rutas algorítmicas específicas.** Muchos temas matemáticos requieren del desarrollo de técnicas específicas, así como de hábitos y acciones mentales predeterminadas.

  Los algoritmos como “formas de cómo hacer”, cumplen un papel importante e insustituible en el aprendizaje de la matemática.
- **Las estrategias heurísticas (genéricas o específicas).** El objeto de la heurística, en general, son los modos, medios o maneras más eficaces para la resolución de problemas, que aborda en forma independiente del contenido y sin garantizar, necesariamente, una solución única. Como se sabe, en la base del descubrimiento está el hacer conjeturas y buscar la prueba o refutación de ellas, en un proceso cíclico que debe promover un pensamiento flexible y divergente.

  Cualquier contraejemplo de una conjetura obliga a un nuevo planteamiento o al uso de una nueva estrategia de resolución, por eso, en la Educación Secundaria es fundamental la resolución de problemas.

Ejemplo de Unidad Didáctica

UNIDAD DE APRENDIZAJE

UNA FOTOGRAFÍA DE MI LOCALIDAD

Grado:TERCER GRADO

CAPACIDADES DE ÁREA

1. Resolución de problemas.
2. Razonamiento y demostración.
3. Comunicación matemática.

CAPACIDADES ESPECÍFICAS

1. Analiza.
2. Formula/elabora.
3. Representa.
4. Discrimina.
5. Utiliza/aplica.
6. Interpreta/infiere

CONTENIDOS DIVERSIFICADOS DE APRENDIZAJE. Duración: 18 horas

1. Intervalos acotados y no acotados.
2. Números racionales, decimales, porcentajes y proporcionalidad.
3. Variables estadísticas.
4. Población y muestra.
5. Frecuencia relativa y acumulada.
6. Representación gráfica de distribuciones: histogramas.
7. Medidas de tendencia central: media, mediana, moda.

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN
1. Identifica e interpreta intervalos acotados y no acotados. 2. Discrimina números racionales y decimales, y relaciona los conceptos de proporcionalidad y porcentaje. 3. Interpreta variables estadísticas y las utiliza para organizar información. 4. Analiza los conceptos estadísticos de población y muestra. 5. Interpreta el significado de las frecuencias relativas y acumuladas. 6. Elabora histogramas, pictogramas y otras gráficas, para representar distribuciones de frecuencias y otros datos estadísticos. 7. Elabora tablas estadísticas e interpreta las medidas de tendencia central.	1. Identifica intervalos acotados y no acotados y los interpreta en un informe breve. 2. Discrimina números racionales y decimales y opera con ellos para resolver ejercicios de proporcionalidad y porcentaje. 3. Elabora una tabla estadística en base a un mínimo de dos variables estadísticas. 4. Determina muestras estadísticas que correspondan a poblaciones finitas. 5. Determina la frecuencia relativa y acumulada de los datos que procesa en una tabla. 6. Grafica mediante histogramas, pictogramas y otros gráficos diversos distribuciones de frecuencias. 7. Elabora una tabla estadística e interpreta el significado de las medidas de tendencia central en un informe breve.

TEMAS TRANSVERSALES DIVERSIFICADOS:

"Conciencia ciudadana. Diversidad étnica y cultural".

BIBLIOGRAFÍA

1. CORBALÁN, R; et al (1998). La matemática aplicada a la vida cotidiana. Editorial Graó, Barcelona. España.
2. FERNÁNDEZ, José A. (2000). Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos. CISS PRAXIS, Educación. Barcelona. España.
3. GARDNER, Martín (1983). Matemática para divertirse. Alianza Editorial. Madrid.
4. MONEREO, Carles (2001). Ser estratégico y autónomo. Unidades didácticas de enseñanza estratégica. Editorial Graó, Barcelona. España.
5. RIERA, Gonzalo (1998). Matemática Aplicada. Ministerio de Educación de Chile. ZIG-ZAG.

RESUMEN

Los estudiantes desarrollarán las capacidades de resolución de problemas; razonamiento y demostración, y comunicación matemática en torno a operaciones con datos demográficos, económicos y políticos que involucran a su localidad.

APRECIACIÓN GLOBAL DE LA UNIDAD

Los estudiantes toman conciencia de su rol y de sus capacidades como ciudadanos y consumidores matemáticamente informados a través del estudio activo de su localidad. La unidad consiste en cuatro sesiones de aprendizaje en cada una de las cuales utilizan figuras y datos obtenidos de fuentes locales.

SESIÓN DE APRENDIZAJE 1

¿Qué sabemos?

Se expone en un panel de anuncios gráficos variada información sobre la comunidad. Los estudiantes recogerán datos existentes, actuales o pasados, sobre temas de interés (población, ingreso —sueldos y salarios— vivienda, presupuesto, impuestos; elecciones, empleo, turismo, artesanía,

etc.). Luego procesan y analizan la información recogida y la presentan usando alguno de los siguientes organizadores visuales: pictograma, gráfico lineal, gráfico de barras simples o de doble barra, o gráfico circular.
Los estudiantes también escriben párrafos descriptivos que resumen la información numérica. Para informar los resultados, los estudiantes aplican habilidades al resolver problemas y utilizan operaciones con números naturales, racionales y decimales para expresar y comparar los datos en sus diferentes formas.

SESIÓN DE APRENDIZAJE 2

¿Cuál es tu opinión?

Incluye el diseño, ejecución y análisis de una encuesta en la que los estudiantes usarán técnicas apropiadas de investigación de opinión. Los estudiantes deciden el tema de investigación basado en los problemas críticos de la localidad. Los estudiantes usan el razonamiento inductivo para hacer las inferencias sobre los datos recolectados.

SESIÓN DE APRENDIZAJE 3

¿Creer o no creer?

Usando los datos recogidos en la sesión de aprendizaje 1 y 2, los estudiantes escriben condicionales (si-entonces), conjunciones y disyunciones utilizando las proposiciones obtenidas sobre su localidad. Luego por grupos diseñan y producen un cartel para demostrar el uso exacto o engañoso de los datos. En un trabajo colectivo juzgan si el razonamiento utilizado es válido o no.

SESIÓN DE APRENDIZAJE 4

Encuentro multicultural

Los estudiantes utilizan las operaciones con fracciones a través del uso de la proporcionalidad para determinar recetas para un número de personas distinto a la que indica la receta original. Después de estudiar la población local, los estudiantes reflexionan sobre la diversidad cultural y étnica de su localidad. Luego coleccionan las recetas de platos típicos de la familia y amigos. Convierten las recetas para la mitad, doble, triple, etc. del número de personas indicadas en la receta original. Pueden concluir la sesión de aprendizaje con la elaboración de un tríptico de recetas de platos típicos o con una feria gastronómica.

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

Días antes de comenzar la unidad, los estudiantes coleccionan avisos y publicidad de periódicos sobre empleo, vivienda o negocios y, si fuera posible, información del INEI sobre la localidad, distrito, provincia o país.
Después que los estudiantes comparten los materiales recogidos, discuten en grupos de 4 ó 5 y determinan:

1. *¿Qué información es importante o sería útil para ellos y para los ciudadanos de su localidad?*
2. *¿Qué información no es cuestionada? ¿Qué información podría ser engañosa?*
3. *Si hay algún foráneo, indagan qué piensa o sabe sobre la localidad (el distrito o la provincia) y qué piensa de la información reunida.*

Los estudiantes usan diferentes capacidades matemáticas para realizar cálculos y recolectar datos, resolver problemas, razonar y graficar hasta llegar a crear una fotografía real de su comunidad.

Apreciación global
Los estudiantes descubren varias aplicaciones y usos de los números naturales y decimales, tales como redondear y estimar números naturales y decimales y aplicar estas habilidades a la solución de problemas, evaluar las expresiones variables, aplicar el orden de las operaciones y descubrir la relación entre el número expresado en forma usual y la notación científica. Igualmente, exploran la forma exponencial y las leyes de exponentes, junto con las propiedades de los números reales.

Preocupaciones especiales
Se introducen muchos conceptos básicos y prácticas en esta unidad. Los estudiantes han podido olvidar algunos de los procesos introducidos en los grados anteriores (redondeo, estimación, las operaciones con decimales). Después de cada sesión, exponer un cartel con los conceptos y procedimientos más importantes trabajados.

Tablero de anuncios
En un panel se exponen noticias, deportes, artículos comerciales, anuncios y todos los trabajos de cada grupo. También los artículos que elaboran en forma individual.

4. La sesión de aprendizaje

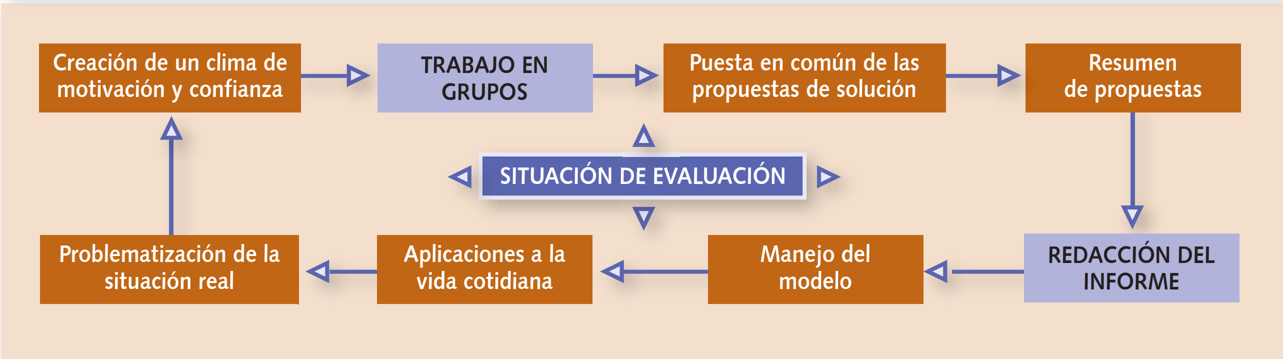
La sesión de aprendizaje es, sin duda, el instrumento de microplanificación curricular con el que deberían de estar más familiarizados los docentes de cualquier nivel, por cuanto éste constituye el instrumento cotidiano de organización y previsión pedagógica de la práctica docente y su uso debería estar generalizado. Sin embargo, es presumible que esto no sea así. Son pocas las Instituciones Educativas en donde se exige al docente contar con este instrumento antes de ingresar a desarrollar una sesión de aprendizaje en el aula e igualmente son pocos los docentes que cumplen esta tarea a cabalidad.

Esta situación, sin embargo, no significa necesariamente que el docente no planifique sus sesiones de aprendizaje o que trabaje a la deriva, sino que el trabajo que realiza en ese sentido no es tan sistemático como debería de ser. En las acciones de monitoreo, por ejemplo, se ha verificado que la planificación de sesiones de aprendizaje no es una práctica usual ni generalizada en el qué hacer docente. Normalmente, los docentes elaboran sus unidades de aprendizaje, quincenales o mensuales, y se auxilian con un diario de clases o un cuaderno en el que esbozan lo que tienen que hacer en sus aulas. Pero, si se desea que la calidad de la educación que se desarrolla en cada Institución Educativa se mejore sustantivamente, existe la necesidad de diseñar las sesiones de aprendizaje.

Es obvio que para cada sesión de aprendizaje no se tiene que levantar un diagnóstico. Se cuenta para este fin con el diagnóstico que se formuló para elaborar las unidades de aprendizaje. Sin embargo, antes de iniciar una sesión de aprendizaje en el aula será conveniente tener en cuenta lo siguiente:

- **Creación de un clima de motivación y confianza.** Establecer un clima de motivación y confianza es de vital importancia para precisar el contexto e identificar los intereses de los educandos. Esto se puede lograr conversando sobre el tema elegido, estableciendo el nexo entre el tema y los intereses de los educandos, así como, precisando las posibles aplicaciones que el contenido matemático a desarrollar podría llegar a tener en la vida cotidiana.
- **Problematización de una situación real.** Es importante llamar la atención sobre la situación elegida para luego problematizarla. Tal acción implica que, en colaboración con los estudiantes, se determinarán los componentes fundamentales y los demás elementos de la situación, precisando las variables que intervienen en ella y las relaciones que podrían existir entre tales variables. El establecimiento de algunos indicadores, ayuda también en este propósito.

DIAGRAMA DE FLUJOS DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE QUE SE PUEDEN PROGRAMAR EN EL AULA



- **Trabajo en grupos.** Constituir grupos de cuatro a seis alumnos para luego proponer las reglas de juego, incentivar la discusión de la situación motivo de análisis y controlar que en la discusión participen todos los integrantes del grupo, es una tarea que no se puede soslayar. Igualmente, orientar e impulsar para que cada grupo intente aproximarse a la solución de la situación problemática en estudio, es algo que debe promoverse durante una sesión de aprendizaje.
- **Puesta en común de las propuestas de solución.** Concluidos los debates grupales, éstos exponen sus aproximaciones de solución obtenidas. El docente interviene en cada una de esas aproximaciones tratando de extraer lo relevante de cada aproximación e incentivando una profundización de las opiniones, pueden sugerir aclaraciones y simplificaciones que conduzcan a una aproximación consensual de las soluciones. Sin embargo, es bueno aclarar que a una solución no se llega por mayoría ni por consenso, sino a base de razonamientos consistentes.
- **Resumen de las propuestas.** A continuación el docente conduce el trabajo hasta llegar a un resumen que englobe todas las intervenciones y que deje clara la situación problemática en estudio. Los alumnos proponen alternativas para encontrar relaciones entre los componentes que intervienen en la situación. El profesor sugiere la observación de las relaciones hasta lograr que los alumnos encuentren "la mejor" alternativa de solución de la situación.

- **Redacción del informe.** Los alumnos se organizan para elaborar un informe sobre la situación estudiada. El informe debe contener: El enunciado de la situación, la determinación de sus componentes y variables, las relaciones existentes entre esas variables y componentes, los procesos seguidos para obtener las conclusiones y las alternativas de solución existentes de la situación en estudio, además de un "modelo" de la situación.

Situación de evaluación

- **Manejo del modelo.** Precisado el modelo de la situación en estudio, el profesor propone algunos ejemplos de otras situaciones con el mismo modelo o con algunas variaciones de ese modelo. Los alumnos trabajan las situaciones explicitando la semejanza o no del modelo y explicando los procesos seguidos.
- **Aplicaciones a la vida cotidiana.** Los alumnos inventan situaciones diferentes que correspondan al mismo modelo. El profesor motiva o estimula a los alumnos para que las situaciones que inventen se aproximen cada vez más a la vida cotidiana. El profesor propone situaciones de la vida diaria para que los alumnos las analicen, tratando de determinar el modelo que corresponde a cada una, y resuelvan aquellas cuyo modelo lo permite.
- **Situación de evaluación.** Es importante identificar contenidos que presentan dificultades para ser aprendidos. Determinar el grado de comprensión de los conceptos, el grado de aplicación de los procedimientos y observar las capacidades y actitudes desarrolladas por cada estudiante, son las tareas más importantes que deben promoverse para lograr que tengan confianza en sí mismos, mejoren su interés por la matemática, perseveren y flexibilicen sus maneras de aprender y argumentar.

  Es bueno aclarar que las capacidades presentan ciertos niveles de desarrollo y de consolidación. La capacidad específica de pensar con originalidad y fluidez imaginativa para plantear problemas referidos a operaciones con números, de un estudiante de quinto grado de Secundaria, es poco probable que se dé con iguales características, por ejemplo, en un estudiante de primer grado. En este último será mucho más "gruesa", menos acabada, menos refinada, etc, que en la de aquel que ya está por concluir la Secundaria. Por un lado, el grado de conocimiento sobre los conjuntos de números en el alumno de 1° grado, sólo alcanza hasta los números racionales, en cambio en el de 5° grado llega hasta el conjunto de los números reales e incluso hasta los números complejos.

Ejemplos de sesiones de aprendizaje

SESIÓN DE APRENDIZAJE 1

¿QUÉ SABEMOS DE NUESTRA LOCALIDAD?

1. Recoge y organiza datos de organismos públicos locales, provinciales, departamentales o nacionales.
2. Utiliza medida o escala para elaborar sus gráficos.
3. Elabora pictogramas, gráficos de datos lineales, de una y dos barras, circulares.
4. Halla la media, mediana, moda y rango para describir datos.
6. Usa fracciones, porcentajes y decimales para expresar y comparar datos.
7. Redondea números y usa notación científica para describir y graficar datos.
8. Interpreta datos y utiliza apropiadamente la estadística para comunicar información a partir de datos.

TIEMPO

5 horas de clase (225 minutos). La recolección de datos y preparación de los gráficos se realiza dentro y fuera de las cinco horas programadas.

MATERIALES

Papel bond, milimetrado, panel, tarjetas de cartulina de varios colores, chinches. Si fuera posible, una publicación local o provincial que incluya un perfil del pueblo y datos del censo, elecciones, educación o salud, obtenida de antemano por el profesor.

INTRODUCCIÓN DE LA SESIÓN

1. El profesor resume la discusión de la actividad, utilizada en la motivación de la unidad.
2. El profesor presenta al aula una lista de temas o preguntas relacionadas con la localidad (distrito, provincia o departamento) que les gustaría o sobre las que les sería más fácil encontrar la información.
3. Los estudiantes categorizan los temas o preguntas de mayor interés (población, ingreso -sueldos y salarios-, vivienda, presupuesto, impuestos, votación y elecciones, empleo, turismo, artesanía, etc.).

FACILITANDO LA SESIÓN

1. El profesor y los estudiantes determinan los temas a investigar: no menos de 4 temas.
2. El profesor organiza a los estudiantes en grupos de 2 a 4 integrantes. Asigna uno de los temas anteriores, asegurándose que cada tema sea escogido por lo menos una vez. Los datos recogidos servirán para contestar las preguntas acerca del tema asignado y para elaborar un pictograma, un gráfico lineal, de una o dos barras, o gráficos circulares para ilustrar los datos.
3. El profesor elabora una lista de las oficinas públicas y privadas, publicaciones, textos, bibliotecas o direcciones web donde puedan recoger los datos sobre los temas a investigar.
4. Los estudiantes conocen el tema de la investigación, las preguntas a ser contestadas, los tipos de gráficos y los datos que necesita el grupo, así como las posibles fuentes.
5. El profesor explica que cada gráfico será acompañado por un comentario corto que resuma los datos que utilizan medidas de tendencia central como la media, mediana o moda. Enfatiza que los datos pueden resumirse usando comparaciones expresadas como fracciones o expresiones decimales.
6. Los estudiantes recogen y organizan los datos, construyen sus gráficos y escriben sus comentarios. El profesor supervisa el trabajo y verifica el progreso del grupo. Les indica a los estudiantes que expresen los números «grandes» o las expresiones decimales redondeadas en notación científica.

RESUMIENDO LOS RESULTADOS

Cada grupo prepara un informe de su trabajo y elabora un cartel final de sus gráficos y de sus comentarios para presentarlos en el panel de anuncios titulado: "Una fotografía de mi localidad". Cada grupo expone sus datos en un informe oral de no más de 3 minutos. Los estudiantes resumen las diferencias sobre la verdad de los hechos de su localidad y sus percepciones originales.

EXTENDIENDO LOS RESULTADOS

Los alumnos presentan el panel de anuncios en el colegio o en un edificio público de la localidad e invitan a una autoridad para analizar la información del panel y discutir la estadística del pueblo.

EVALUANDO LA SESIÓN

El profesor verifica los gráficos de los estudiantes y los comentarios sobre la corrección de los datos matemáticos, el uso apropiado de las escalas, y la elección apropiada de los gráficos. Cada estudiante escribe un ensayo corto que resume algún hallazgo importante sobre la localidad en cada categoría seleccionada.

SESIÓN DE APRENDIZAJE 2

¿CUÁL ES TU OPINIÓN?

1. Organiza, formula y dirige una encuesta para obtener información sobre un problema de la localidad.
2. Usa técnicas apropiadas de muestreo.
3. Redacta un informe sobre los resultados de la encuesta usando tablas y gráficos de frecuencia.
4. Usa el razonamiento inductivo y deductivo para hacer las predicciones sobre los resultados.

TIEMPO

4 horas de clase (180 minutos).

MATERIALES

Recortes de periódicos y revistas de publicidad de las últimas 4 semanas, acceso a teléfono o acceso a máquina de escribir, computador y fotocopiadora.

INTRODUCCIÓN DE LA SESIÓN

1. El profesor organiza una discusión sobre los posibles aspectos de una encuesta. Usan la información de la sesión de aprendizaje 1, y/o la información reciente de los periódicos y publicidad sobre los problemas de interés de la localidad, provincia, departamento o del país.
2. Juntos, desarrollan una lista de posibles preguntas de la encuesta de opinión que pueden contestarse con SÍ o NO, que trata de los temas sugeridos. Los estudiantes prueban las preguntas con 2 ó 3 adultos para determinar qué preguntas revelan «temas controversiales» y/o respuestas emocionales. Preguntas tales como: ¿Confía en las decisiones del juez? ¿Tiene televisor en su casa? ¿Consume Inca kola? ¿Escucha algún espacio de noticias? ¿El alcalde resuelve los problemas vecinales?, etc.

   Así como preguntas con más de dos opciones:

   ¿Cómo califica la seguridad ciudadana: buena, regular, mala?
   ¿Cómo califica la gestión del alcalde: muy eficiente, eficiente, regular, deficiente, muy deficiente?

FACILITANDO LA LECCIÓN

1. En grupos de 4 ó 5 los estudiantes escogen las preguntas que provocaron el mayor interés de los consultados. Después que cada grupo informa sus resultados, los estudiantes llegan a un acuerdo general sobre el problema que se investigará y las preguntas a ser planteadas.
2. Los grupos discuten los procedimientos de la muestra. Justifican los métodos sugeridos.
3. Los estudiantes desarrollan un formulario de la encuesta de opinión a ser rellenado por cada entrevistado. La encuesta debe incluir un espacio para el nombre del entrevistado o un número de identificación. Los estudiantes completan las preguntas a ser formuladas y diseñan el formulario de las preguntas para que los entrevistados puedan indicar su respuesta fácilmente y para que los resultados sean fáciles de procesar. El aula decide si los entrevistados serán identificados por cada subgrupo. Dependiendo del problema a ser investigado, los estudiantes pueden comparar respuestas de varones respecto de las mujeres; los que tienen niños en edad escolar con los que no los tienen; los residentes antiguos vs. los recientes.
4. Los estudiantes establecen el tiempo en que se debe ejecutar la encuesta. Luego hacen un resumen de los resultados. Por grupos, deciden el mejor procedimiento de contar y organizar los datos. Sugieren tablas de frecuencia y un tipo de gráfico para reportar los datos.
5. Cada grupo utiliza el razonamiento inductivo para escribir predicciones sobre los resultados del problema estudiado, basadas en los datos de la encuesta.

RESUMIENDO LOS RESULTADOS

Cada grupo presenta un informe oral de los resultados de la encuesta, muestra sus tablas y gráficos. Su informe deberá incluir predicciones y sus justificaciones sobre el tema.

EXTENDIENDO LOS RESULTADOS

Los estudiantes escriben un artículo para el periódico mural o revista del colegio explicando la encuesta de opinión, sus resultados y sus predicciones. Si el tiempo lo permite repiten la investigación de opinión con las mejoras en su metodología y/o las preguntas en las cuales basaron su experiencia.

EVALUANDO LA SESIÓN

Los estudiantes escriben un informe del análisis crítico de las preguntas de la encuesta, de los métodos del muestreo y del valor predictivo de los resultados. El informe incluyen las sugerencias para la mejora de la actividad.

SESIÓN DE APRENDIZAJE 3

¿CREER O NO CREER?

1. Escribe enunciados condicionales sobre los datos.
2. Diseña carteles usando enunciados condicionales.
3. Determina si los argumentos basados en enunciados condicionales son válidos.
4. Da contraejemplos para demostrar enunciados condicionales falsos.
5. Formula conjeturas y evalúa argumentos.

TIEMPO 4 horas de clase (180 minutos).

MATERIALES

Anuncios periodísticos o revistas deportivas, de modas, de aficiones (hobbys), panel y chinches.

INTRODUCCIÓN DE LA SESIÓN

1. Los estudiantes buscan anuncios de periódicos y revistas y escriben enunciados condicionales de la forma: "si, ..., entonces"; basados en los anuncios o en publicidad. Por ejemplo, un anuncio de pantalones jeans que presenta a un joven rodeado por mujeres bonitas podría traducirse con el condicional: "si llevas puesto el jean JK, atraerás a muchas mujeres bonitas". Los estudiantes presentan uno o dos anuncios con sus enunciados condicionales respectivos. Además, escriben e ilustran anuncios utilizando los datos de las lecciones anteriores sobre su pueblo.
2. Los estudiantes analizan que un enunciado condicional es falso si puede encontrar un contraejemplo que satisfaga la hipótesis pero no la conclusión del enunciado. Dan contraejemplos de enunciados condicionales.

FACILITANDO LA SESIÓN

1. Los estudiantes usan los datos de las sesiones de aprendizaje 1 y 2 para escribir enunciados condicionales acerca de su pueblo o ciudad, provincia, departamento, país o mundo. De estos enunciados identifican aquellos que corresponden a carteles de publicidad que desarrollan e ilustran su localidad. Después de la explicación de la actividad introductoria los estudiantes escriben algunos enunciados que reflejan la realidad y otros que son falsos, reflexionando sobre la validez o no validez de los argumentos.
2. Los estudiantes forman "compañías de publicidad" de 2 a 4 integrantes que escogerán un eslogan para la ilustración. El profesor explica a los grupos que compartirán sus carteles y tendrán una oportunidad para juzgar si los otros carteles muestran enunciados verdaderos o falsos, si muestran argumentos válidos o inválidos. En trabajo colaborativo los estudiantes clasifican los carteles.
3. Los carteles puestos alrededor del salón de clase permiten que los estudiantes juzguen si cada cartel presenta un enunciado o argumento exacto o engañoso. Para cada cartel, escriben el condicional a partir del anuncio. Además explican por qué el anuncio del cartel es exacto (válido) o engañoso (inválido). Escriben un contraejemplo para demostrar que el condicional es falso.

RESUMIENDO LOS RESULTADOS

Los estudiantes buscan ponerse de acuerdo y determinan si el cartel es un retrato exacto o no de la comunidad. Justifican sus razonamientos sobre los carteles e identifican los carteles verdaderos (fidedignos) en el panel de anuncios que describe información sobre su localidad.

EXTENDIENDO LOS RESULTADOS

Los estudiantes invitan a representantes de otras aulas para compartir sus inquietudes sobre la localidad y usan su capacidad de razonamiento deductivo para formular críticas a los materiales.

EVALUANDO LA SESIÓN

El profesor verifica los trabajos de cada grupo para valorar la comprensión y aplicación de las técnicas del razonamiento deductivo.

SESIÓN DE APRENDIZAJE 4

ENCUENTRO MULTICULTURAL

1. Comprende y reflexiona sobre la herencia étnica y cultural de su comunidad.
2. Colecciona recetas que reflejan la diversidad cultural de su comunidad.
3. Usa las operaciones y fracciones (números racionales) para convertir las recetas a la mitad, al doble, y al triple la cantidad propuesta inicialmente.
4. Resuelve problemas con números racionales aplicando la proporcionalidad.

TIEMPO 3 horas de clase. (135 minutos)

MATERIALES

Libros de cocina, recetas de platos típicos. Ingredientes para platos típicos (opcional).

INTRODUCCIÓN DE LA SESIÓN

1. El profesor pregunta a los estudiantes lo que ellos conocen o han descubierto en la sesión 1 acerca de la diversidad cultural y étnica. Indaga si hubo alguna migración reciente en la localidad, si hay organizaciones especiales que reflejan los diversos grupos en la localidad.
2. Los estudiantes comparten la información sobre las fiestas patronales, celebraciones o costumbres de su propia experiencia.

FACILITANDO LA SESIÓN

1. Después que se ha identificado la herencia de la diversidad cultural de la localidad cada estudiante expone una receta de un plato típico. Si el aula no representa un verdadero cuadro de la diversidad de la localidad, algunos estudiantes elaboran recetas de platos típicos de grupos no representados en el aula y que son parte de la localidad.
2. Después de reunir varias recetas, los estudiantes en grupos representan una parte étnica o cultural de la localidad. Cada miembro de grupo realiza las conversiones de cada receta para la mitad, el doble y el triple de la cantidad de personas.
3. Cada grupo escoge una receta para preparar un plato típico y el aula organiza una feria gastronómica. Cada grupo presenta recetas para alimentar a 6, 8, 10, 15, 20 y 40 personas.

RESUMIENDO LOS RESULTADOS

Como un producto final, el aula presentará pulcramente ilustradas, las recetas escogidas en un tríptico que será distribuido en el día de la feria gastronómica. Los platos típicos son preparados en la casa o en la Institución Educativa. La feria gastronómica se prepara como un acontecimiento especial después de las clases.

EXTENDIENDO LOS RESULTADOS

1. Los estudiantes invitan a otras aulas, o los padres, o al colegio entero a la feria gastronómica.
2. Elaboran un libro de recetas de comidas de la localidad y lo ponen a disposición de la biblioteca local o lo venden para obtener dinero para una actividad escolar posterior.
3. El delegado del aula expone las ventajas de una carrera de chef y su relación con la matemática utilizada en las recetas y la elaboración del tríptico.

EVALUANDO LA SESIÓN

El profesor supervisa la conversión de las recetas que trabajan los grupos de estudiantes. Los cálculos que realizaron los estudiantes, así como el tríptico y el libro de recetas sirven para evaluar la aplicación práctica de las operaciones con fracciones.

CAPÍTULO III

Orientaciones para el aprendizaje

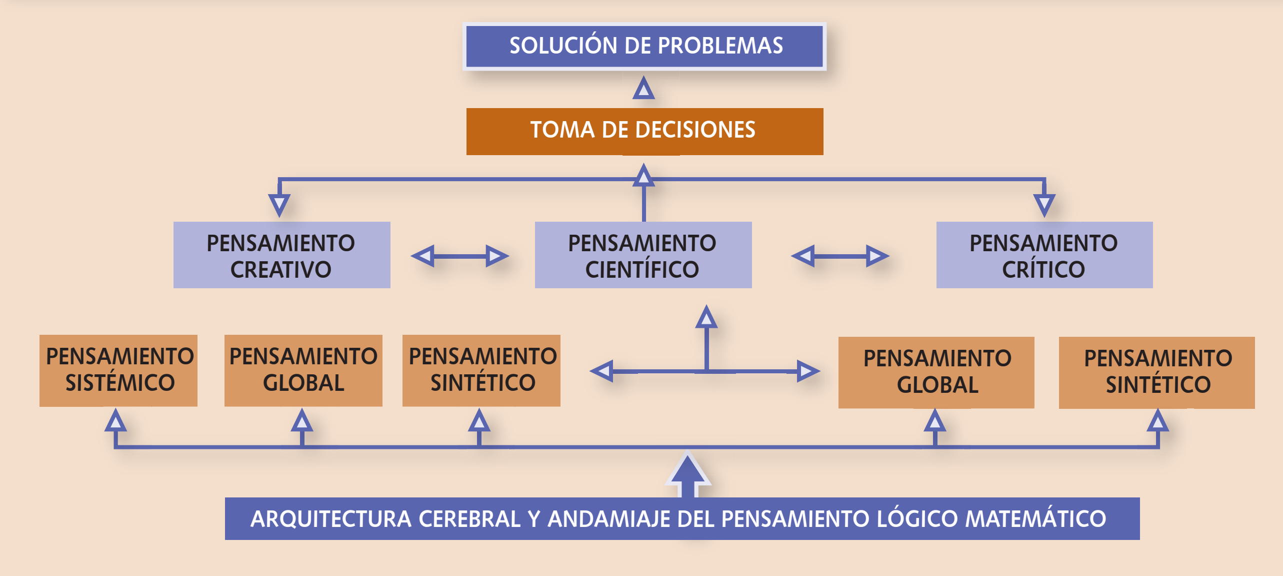
1. Consideraciones generales

El trabajo en el aula es un acto complejo cuya eficiencia y eficacia depende, en gran parte, de las personas que intervienen en el proceso y, también, en cierta medida, de las condiciones y factores ambientales locales. Podría afirmarse que la enseñanza es eficiente, si y sólo si, son eficientes los profesores. De modo similar, habría un buen aprendizaje si hay buenos alumnos. Sin embargo, al margen de estas disquisiciones, es necesario dejar en claro que la principal tarea del profesor de matemática, en el nivel secundario, es enseñar a pensar.

En el esquema siguiente se puede apreciar cómo la capacidad de resolución de problemas (capacidad de área en matemática) requiere del desarrollo previo de los pensamientos sistémico, global, sintético, divergente, etc., y, obviamente, del pensamiento creativo, del pensamiento crítico y de la toma de decisiones.

Gracias a los aportes que la neurociencia ha hecho a la educación, ahora es posible saber casi con certeza, cómo se produce un aprendizaje. Una primera constatación es saber que aprendemos de diferente manera porque poseemos -identificadas hasta la fecha- nueve tipos de inteligencia. Por eso hay estudiantes muy hábiles para la matemática en tanto otros lo son para el lenguaje, las ciencias naturales, la pintura, las relaciones de los objetos en el espacio, la música o los deportes, sin que esto signifique que alguno, en particular, es más inteligente que el otro. Sin embargo, en cualquiera de los casos, está verificado que aprendemos mediante los sentidos. Lo que percibimos, incluso por intuición intelectual, llega hasta nuestro cerebro y allí se convierte en un impulso eléctrico o señal nerviosa. Esta señal es "captada" por una neurona y trasmitida a otra estableciéndose una "red". Cada neurona tiene un axón y muchas terminaciones llamadas dentritas. Cuando la señal conducida a través del axón llega a las dendritas y de allí pasa a las dendritas de otra neurona, se produce una sinapsis o unión de dendritas y es, justamente allí, cuando ocurre el aprendizaje. Si no hay sinapsis no hay aprendizaje y las sinapsis ocurren cuando se logra "conectar" una señal nueva con una que ya se tenía establecida (conocimiento previo) o cuando se logra establecer una red completamente nueva. Cada vez que pensamos ocurren incontables sinapsis.

MATEMÁTICA Y DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE PENSAR



La matemática ha sido siempre un medio eficiente y eficaz para aprender a pensar. Cada aprendizaje matemático es una cognición. Si sobre eso, reflexionamos sobre cómo hemos aprendido matemática, estaríamos llegando a aprendizajes mucho más complejos como las metacogniciones. Entonces, la matemática sirve también para aprender a aprender, porque equivocándonos, por ejemplo, aprendemos más de lo que aprenderíamos acertando. El pensamiento matemático es una forma del pensamiento científico, pero éste, a su vez, se interrelaciona con el pensamiento creativo y con el pensamiento crítico. No habría pensamiento matemático si éste no fuera, también, creativo y crítico. Sin embargo, para que todos estos pensamientos se integren, es necesario desarrollar las formas de pensamiento subyacentes tales como: el pensamiento sistémico, el pensamiento global, el pensamiento sintético, el pensamiento divergente y el pensamiento categorial, entre otros.

Al margen de lo manifestado, todos sabemos que la enseñanza es importante, pero el aprendizaje es un proceso intencional y de carácter decisional: **¡aprende la persona que quiere aprender!** Además, hasta donde se sabe, no existe método o estrategia alguna que permita lograr que una persona aprenda si no quiere aprender. Sin embargo, es evidente que un proceso participativo de aprendizaje, es preferible a otro meramente receptivo, pasivo, asimétrico o unilateral. De hecho, en una situación ideal, el profesor sería solamente una especie de partera espiritual; es decir, el que ayuda a dar a luz, el que da la oportunidad a los alumnos de descubrir por sí mismos las cosas a ser aprendidas. Este ideal es difícilmente alcanzado en la práctica, sobre todo, por falta de tiempo. Con todo, igualmente un ideal puede guiarnos indicándonos la dirección a seguir. Quizá nadie haya podido encontrar la Estrella Polar, pero muchas personas encontraron el rumbo y llegaron a su destino, guiándose por ella.

El aprendizaje consta en parte de «información» y en parte, de «know-how», que no es otra cosa que la destreza o habilidad para trabajar con informaciones y para usarlas con un propósito dado. También puede ser descrito como un «compendio de actitudes mentales apropiadas» y, en última instancia, como la habilidad para trabajar metódicamente. En matemática, «know-how» es la habilidad para resolver problemas, construir demostraciones y examinar críticamente soluciones y demostraciones. Y es justamente por eso, que es mucho más importante que la simple adquisición de informaciones.

2. Estilos de enseñanza

Los profesores tienen sus propios estilos de enseñanza. No hay dos profesores que tengan el mismo estilo y que, en consecuencia, enseñen igual. Ese estilo, a su vez, según una investigación realizada por Juan Ansión y Fanny Cano, para el Proyecto "Escuela, Ecología y Comunidad Campesina" (1991), es copiado de los profesores que más impresionaron en ese sentido, al profesor durante su escolaridad. Pero, como cada profesor busca personalizar y configurar su propio estilo, lo que hace, según la investigación citada, es integrar en uno nuevo, varios estilos que le impactaron positivamente, para después adecuarlo a sus propias características personales y, finalmente, incorporarlo a su propia práctica, como suyo. La teoría de Alberto Bandura en torno al "aprendizaje por modelos", en este caso, se verifica casi a cabalidad.

Si usted no está conforme con los resultados de esa investigación, haga una metacognición sobre su propio estilo. ¿Cómo se originó éste? ¿Ud. lo construyó de la nada? Posiblemente no. De lo contrario, haga una pequeña encuesta entre sus compañeros. Se sorprenderá con los resultados.

Sólo en la enseñanza de la matemática en secundaria, se puede encontrar infinidad de estilos. Hay de los docentes que enseñan con mucho rigor y con muchos ejercicios y prácticas, hasta aquellos que dictan los teoremas de un libro, para que el alumno los aprenda de memoria. ¿Quién no se acuerda de su profesor de matemática en secundaria? Sin embargo, la práctica pedagógica debe renovarse constantemente, y los estilos, también. Los tiempos actuales necesitan de profesores que valoren el esfuerzo personal de sus alumnos, para lo que es fundamental el trabajo de investigación que éstos puedan realizar, junto con la aplicación de las técnicas metodológicas y algorítmicas con las que el profesor les irá apoyando. Es bueno saber que tal trabajo de facilitación puede dinamizarse con las actividades siguientes:

- *La relación frecuente de referentes no simbólicos con los conceptos, de manera que se promueva la multivariedad de representaciones.*
- *El progreso desde la intuición hasta el conocimiento matemático, con itinerarios diversos que faciliten el seguimiento de las actividades, según los ritmos y las capacidades personales.*
- *La comunicación como elemento clave que ayuda a superar dificultades individuales y que colabora en la construcción de los conceptos.*
- *Fomento de actitudes positivas en relación con el trabajo, basado en presentaciones próximas, significativas y atractivas.*
- *Trabajo grupal cooperativo con promoción de valores globales de aprendizaje.*
- *Integración con la realidad cotidiana, no sólo como referente fundamental fenomenológico, sino también como manera de valorar la relación con el medio. Esto se puede hacer por medio de situaciones de aprendizaje como las siguientes:*

  Presentar a los alumnos, sin importar su edad, ***propuestas de trabajos personales o grupales****, que les permitan organizarse en grupos flexibles y dinámicos.*

  Organizar para los alumnos, ***trabajos en grupos, de investigación o de "laboratorio"****, en los que se desarrollen técnicas como el guión de trabajo o la "ficha tutorial", con reflexiones que se van incorporando sucesivamente en los momentos que se consideran convenientes, para cultivar tanto capacidades, destrezas y habilidades de tipo procedimental como la práctica de valores, la comunicación horizontal y democrática, la cooperación, la socialización, etc.*

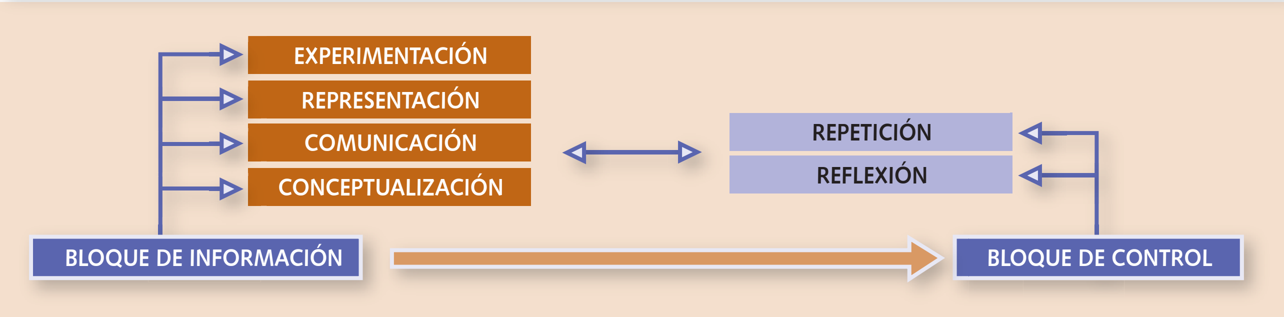
- **Resolución de problemas.** Con este tipo de actividades el propósito no es concluir los procesos asociados; más bien se procura promoverlos como objetivos, por medio de la analogía, el análisis de los enunciados, el uso de los diversos lenguajes de la matemática y una mejora en la capacidad de resolución de problemas, la cual se convierte en "método de trabajo" en diversas ocasiones.

  Desarrollar **trabajos de elaboración de modelos y construcción,** por ser uno de los aspectos más importantes del trabajo matemático. En este caso, se parte de elementos sencillos y se va hacia el descubrimiento de propiedades, o bien, se procura el análisis de situaciones simples (regularidades) para de allí pasar al análisis de congruencia, simetría y otros de similar o mayor complejidad.
- **Trabajo de reflexión histórica.** Se promueve con unidades en las que se combina el conocimiento de realidades (por medio de cómics, explicaciones verbales, búsqueda de información etc.) y la "repetición de experiencias históricas" al estilo del laboratorio.
- **Trabajo de lenguaje-comunicación.** En muchas actividades se propone el diálogo y la confrontación de ideas y teorías, como método de superación de conflictos y obstáculos epistemológicos.
- **Elementos de síntesis colectiva.** Que deben facilitar la reflexión y la consolidación de los elementos factuales y de procedimientos. Se hacen tanto por medio de esquemas como de pequeñas unidades preparadas para eso. En tanto sea posible, el proceso de trabajo en las diversas actividades se orientará en forma de laboratorio, proponiendo dos bloques en seis fases (Fortuny, 1990), que se presentan a continuación.

- **Bloque de información:** Experimentación, representación, comunicación y conceptualización.
- **Bloque de control:** Repetición y reflexión, hacia una nueva experimentación.

En la primera fase del bloque de información, se promueven elementos de motivación que permitan llegar a observar una situación concreta, de preferencia, ligada a un contexto real. Después se proponen situaciones de representación del fenómeno, es decir de sistematización de la experiencia, para luego pasar a la fase de comunicación de los resultados en grupos, para arribar a la conceptualización final. Cualquiera de las fases puede ser objeto de repetición.

EL TRABAJO EN FORMA DE LABORATORIO DE FORTUNY



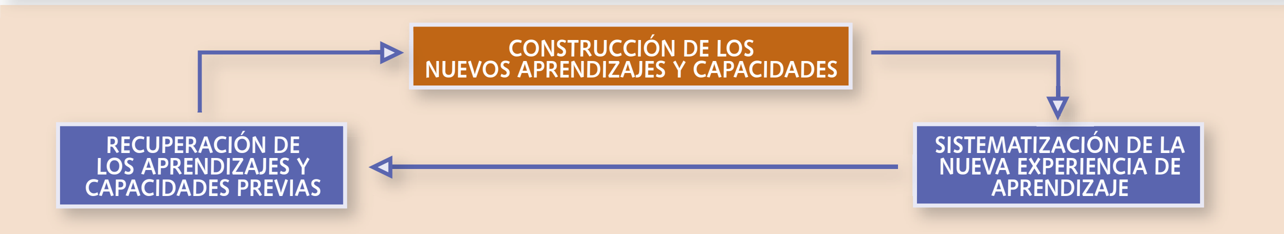
Es posible que algunos docentes no consideren atractivo trabajar con seis fases y dos bloques. Se presenta para ellos, entonces, dos modelos de aprendizaje básicos. Uno es el propuesto por Fortuny y el otro basado en los tres momentos siguientes.

a. **RECUPERACIÓN DE APRENDIZAJES Y CAPACIDADES PREVIAS.** En este momento el profesor indaga y verifica, con las técnicas que prefiera, lo que saben los alumnos acerca del "aprendizaje esperado" que piensa desarrollar en la sesión. También en este momento, motiva y crea el clima apropiado de trabajo.

b. **CONSTRUCCIÓN DE LOS NUEVOS APRENDIZAJES Y CAPACIDADES.** Sobre la base de los aprendizajes previos recuperados en el momento anterior, se construye en un proceso de creación colectiva y democrática, el nuevo aprendizaje, utilizando diversas estrategias y técnicas.

c. **SISTEMATIZACIÓN DE LA NUEVA EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE.** Éste es el momento en que se organiza el aprendizaje mediante alguna técnica de asimilación cognoscitiva o de tipo metacognitivo. El resultado de este momento debe ser la adquisición de un aprendizaje significativo, que permita al educando, iniciar su práctica transformadora de la realidad en que vive.

SECUENCIA DE APRENDIZAJE



3. Actitud frente al error

El borrador es un instrumento que sirve para desaparecer los errores e impedir que el profesor tome conocimiento de ellos. Debemos, por tanto, "desaparecer" el borrador de algunas actividades de matemática, esto es, adoptando el uso exclusivo de lapicero y orientando a los alumnos en cuanto a los procedimientos ante el error, sin hacer borrones para esconder el error, **concientizándolos de que es importante detectar el error, no para desaparecerlo, sino para repararlo.**

Detectadas las causas, el profesor propondrá un conjunto de actividades pertinentes y bien dosificadas. Así los alumnos se irán fortaleciendo en su práctica diaria de resolver operaciones elementales y en los contenidos consiguientes.

Sin embargo, el régimen de tareas diarias deberá ser cumplido sin disculpas como: yo no sabía, yo no conseguí, yo trabajo, yo ayudo en mi casa, no tuve tiempo, etc. Si un estudiante no realiza su tarea, deberá cumplir con ella de todas maneras.

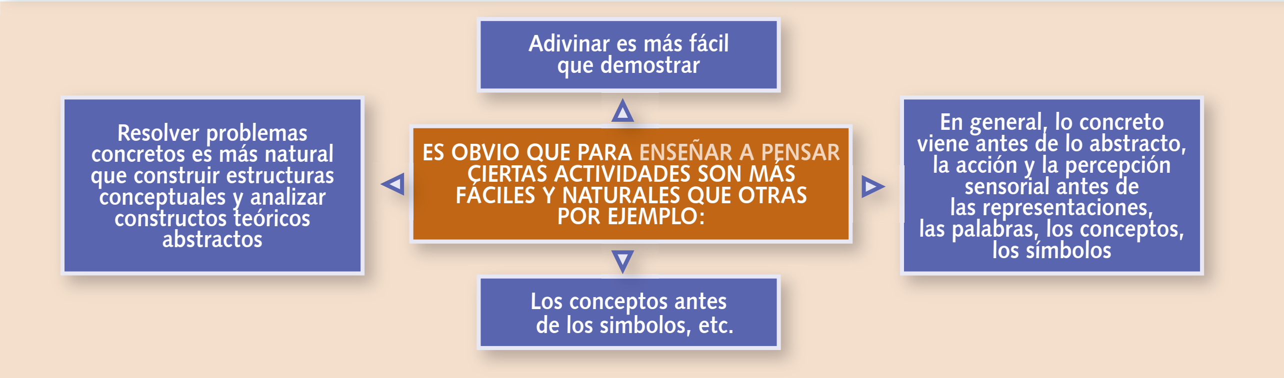
4. Estrategias metodológicas sugeridas

4.1 Desarrollo de capacidades

"Para que el alumno aprenda en forma eficaz **debe descubrir, por sí solo,** cuanto sea posible acerca del área curricular motivo de aprendizaje". Dadas las circunstancias actuales, es preferible esta fórmula basada en el principio del aprendizaje participativo por ser, además, el más antiguo (puede ser encontrado en Sócrates) y el menos controvertido. La matemática no es un deporte para espectadores ya que no puede ser apreciada y aprendida sin participación activa, de modo que el principio de aprendizaje activo es particularmente importante para todos los profesores de matemática —y para los que no lo son, también— tanto más, si se piensa enseñar a pensar con ella.

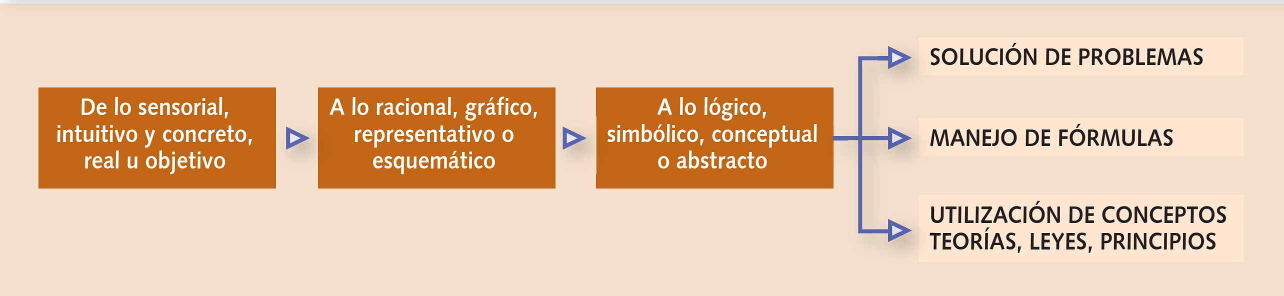
Y, ya que el alumno debe aprender no receptivamente sino por su propio esfuerzo, comencemos en el lugar donde el esfuerzo es menor y el resultado más comprensible. Para ello, el alumno debe familiarizarse inicialmente con lo intuitivo concreto (materiales educativos, objetos reales, el ambiente), posteriormente con lo gráfico representativo (etiquetas, esquemas, gráficos), para llegar finalmente a lo abstracto; es decir, a lo conceptual y simbólico (leyes, principios, teorías, conceptos, fórmulas).

COMO ENSEÑAR A PENSAR DESDE LA MATEMÁTICA



Este procedimiento debe conducir —inequívocamente— a la resolución de problemas, que es la actividad matemática más próxima al desarrollo del pensamiento lógico. Tendremos un problema siempre que busquemos los medios para alcanzar un objetivo. De modo similar, cuando tenemos un deseo que no podemos satisfacer inmediatamente, pensamos en los medios que lo hagan posible e, igualmente, se tiene allí un problema. La mayor parte de nuestra actividad pensante que no sea, simplemente, soñar despierto, se ocupa de aquello que deseamos y de los medios para obtenerlos, es decir, de problemas.

PARA APRENDER A PENSAR EN MATEMÁTICA HAY QUE PASAR:

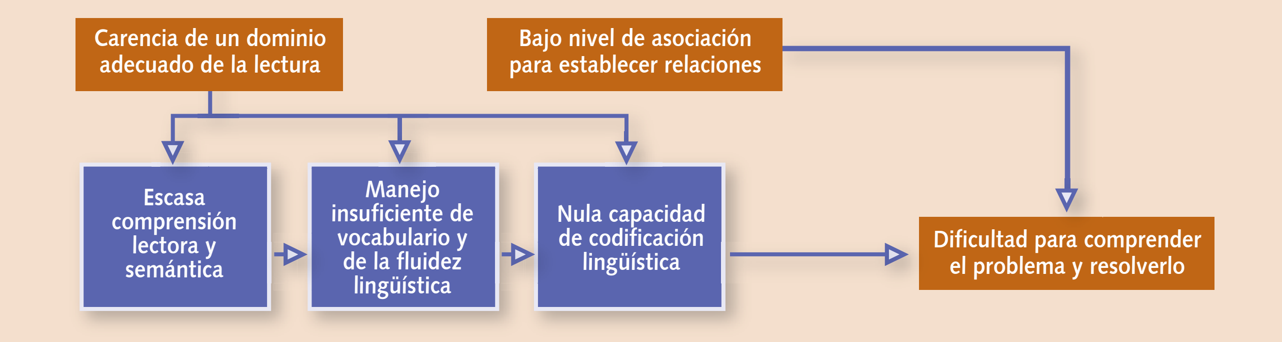


El aprendizaje de la capacidad de pensar —adecuadamente, con coherencia, con lógica, etc.— podría decirse que es la aspiración más importante en el área curricular de matemática. Para aprender a pensar, resulta obvio, no hay mejor ejercicio mental que el resolver problemas. Por eso, la capacidad de resolver problemas y el de plantearlos, también, deben tener un énfasis especial en el trabajo con los estudiantes.

En cualquier análisis que se haga de esta situación, siempre aparecen dos causas principales que dificultan el desarrollo de esta capacidad: una de ellas es la dificultad que encuentran los estudiantes en la comprensión del contenido del problema, y la otra es aquella que deriva de la carencia de un pensamiento matemático.

En primer lugar, los estudiantes no tienen dominio adecuado de la lectura, especialmente de la comprensión lectora, ni del vocabulario o fluidez léxica, menos de la capacidad de codificación lingüística o del desarrollo gramatical, por lo tanto, su nivel de asociación y de establecimiento de relaciones no es aceptable, hecho que se traduce en la escasa capacidad de comprensión de los contenidos de los problemas.

FLUJOS DE LAS DIFICULTADES PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS



En el libro *Enseñar con Estrategias* de Julio Gallego Codes, se proponen algunos procedimientos o estrategias que permiten desarrollar el pensamiento matemático. Sobre este aspecto se dice lo siguiente:

"Leemos o hacemos que nuestros alumnos lean textos sobre granjas, transportes, distancias, medidas, frutas, dinero, etc. Les decimos que lean esos textos como preparación para hacer una actividad: montar una granja, cargar frutas en camiones, comprar o vender... A continuación les proponemos un problema que verse, justamente, sobre el contenido del texto anteriormente leído. Lograremos algunas cosas: que se sitúen a resolver el problema en un contexto apropiado; que la comprensión de los términos les sea más asequible; que la codificación de datos y cuestiones que leyeron la hagan con una predisposición para resolver algo, etc."

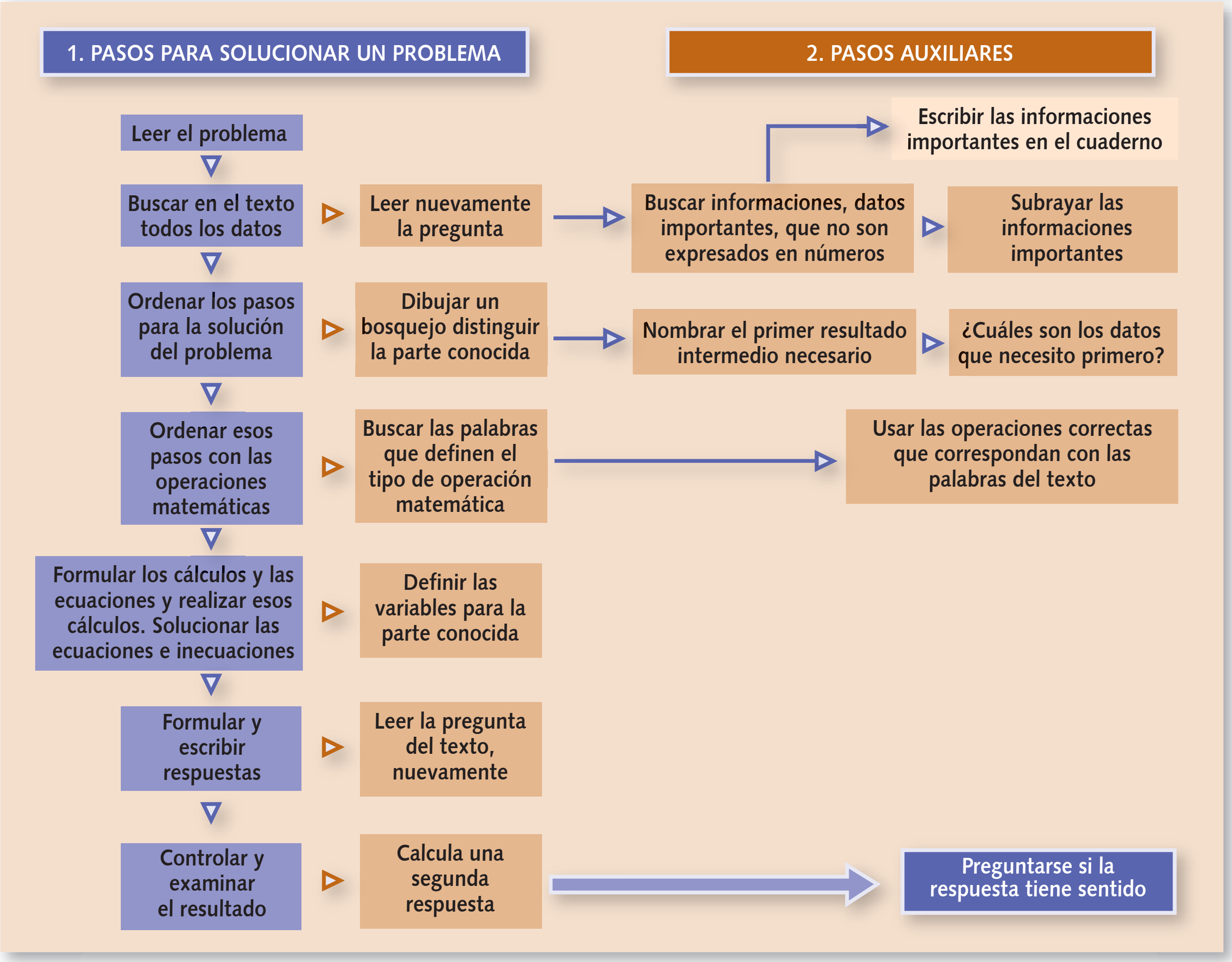
"Entregamos a nuestros alumnos la mitad de una cuartilla. Les decimos que nos escriban un problema sobre medidas, o sobre fracciones, sobre un zoo, una viña, un barco, etc., pero antes deben haber leído un texto que le suministremos sobre uno de esos temas. Añadiremos que el que escriba el mejor problema lo pondrá en la pizarra de clase para que todos lo resuelvan en sus cuadernos".

Esta sugerencia que al parecer es muy elemental, es una estrategia con la que se logrará, creatividad, originalidad, agudeza numérica, matemática, desarrollo del pensamiento lógico y una gran motivación. En ambos casos, los alumnos o alumnas se convierten en sujetos más activos y cognitivos y trabajan el pensamiento matemático.

Muchas veces, los problemas cotidianos conducen a problemas matemáticos simples, pero; el profesor con un poco de habilidad, puede hacer más fácil y natural al alumno, el paso de la abstracción teórica existente entre el problema cotidiano y el problema matemático. Y, como los problemas de todos los días son el centro de nuestro pensamiento cotidiano, se puede esperar que los problemas matemáticos estén en el centro del aprendizaje-enseñanza de la matemática.

En todos los tiempos, el planteo y la resolución de problemas, ha sido la espina dorsal de la matemática. Esa costumbre se sabe que viene desde la época del Papiro Rhind. En ese sentido, la obra *Elementos* de Euclides puede ser considerada como una proeza pedagógica: dividir el gran tema de la geometría en problemas manejables didácticamente. Con este antecedente, en la Educación Secundaria la resolución de problemas, también debe ser la espina dorsal del trabajo educativo, por obvias razones. Ciertamente, que también deben presentarse en el nivel secundario: demostraciones matemáticas, la idea de un sistema axiomático y, tal vez, una mirada a la filosofía subyacente de las demostraciones y las estructuras matemáticas. Mientras estos asuntos estén más distantes del pensamiento habitual, no podrán ser apreciados o igualmente comprendidos por los alumnos, de allí la necesidad de iniciarlos en ellos.

INICIACIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO POR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



- **Clasificación de los problemas.** Hay problemas y problemas, y toda una suerte de diferencias entre problemas. Sin embargo, la diferencia más importante para el profesor es la que existe entre los problemas de rutina y aquellos que no lo son. El problema que no se resuelve por rutina exige cierto grado de creación y originalidad por parte del alumno, mientras que el problema de rutina no exige nada de eso.

  Es verificable que el problema resuelto sin rutina, tiene más posibilidades de contribuir al desarrollo intelectual del alumno, mientras que los problemas rutinarios no tienen ninguna. La línea de demarcación entre esos dos tipos de problemas puede no ser precisa, sin embargo, los casos extremos son claramente reconocibles.

  La necesidad de ser didácticos y ágiles en este documento, permite sólo realizar una descripción muy sucinta sobre los dos tipos de problemas rutinarios existentes: el problema que exige tan solamente la aplicación de una regla bien conocida y el problema que no es sino una simple cuestión de vocabulario.

En el primer caso, un problema puede ser resuelto aplicando directa y mecánicamente una regla, que el alumno no tendrá ninguna dificultad en verbalizar y ejecutar, la misma que será operada "debajo de la nariz del profesor" o "como una parte del manual". No hay ninguna originalidad en ello, ni mucho menos aplicación de alguna forma de imaginación y creatividad, tampoco constituye ningún desafío a la inteligencia. En consecuencia, lo que se puede obtener de tal problema es, apenas cierta habilidad para manejar reglas, o sea, un pedacito aislado e insignificante del conocimiento mecánico.

- **La elección de los problemas.** La resolución de un problema no rutinario puede exigir mucho esfuerzo del alumno; sin embargo, él no hará tal esfuerzo si no tiene razones para eso y si no está motivado adecuadamente. Pero, en este caso, la mejor motivación es el mismo problema, razón por la cual, debemos tener bastante cuidado en la elección de problemas interesantes y desplegar mucha inteligencia para tornarlos atractivos.

  Para comenzar, el problema debe tener sentido y tener un propósito, además de estar relacionado de modo natural con cosas familiares y servir a un fin comprensible para el alumno. Si para él, el problema parece no tener relación con lo que le es habitual, la afirmación del profesor de que el problema será útil más tarde no es sino una pobre compensación. Un profesor que asistió a una conferencia relató la siguiente observación de uno de sus alumnos de 15 años: "Hasta ahora sé resolver todos los problemas, más no veo ninguna razón del mundo para hacerlo".

  No solamente la elección sino también la presentación del problema merece nuestra atención. Una buena presentación evidencia relaciones con cosas familiares. El principio de la enseñanza activa sugiere, en ese sentido, un pequeño truco muy útil: comenzar no por el enunciado completo del problema, sino por sugestiones apropiadas y dejar a los alumnos el cuidado de una formulación definitiva.

- **Conducir al descubrimiento.** La idea debe nacer en la mente del alumno y el profesor debe actuar como partero. La metáfora es antigua -ella se debe a Sócrates- pero no obsoleta. Si encaramos el desarrollo de la inteligencia del alumno como el objetivo principal -o uno de los más importantes- de la enseñanza a nivel secundario y el trabajo del alumno como el más importante -o uno de los más importantes- para conseguir este objetivo, entonces la principal preocupación del profesor debería ser la de conducir al alumno a descubrir la solución por sí mismo. Y la primerísima cosa, cuando se trata de ayudar al alumno, es no ayudarlo demás: él debe hacer lo máximo posible por sí solo. El profesor debe evitar una interferencia excesiva en el nacimiento natural de una idea.

  Sin metáforas: al ayudar al alumno, el profesor debe dar solamente una ayuda interior, esto es: sugestiones que podrían haber nacido en la mente del propio alumno, y evitar una ayuda exterior, esto es: evitar dar porciones de solución que no tengan relación con lo que pasa en la mente del alumno. Es más importante dar una ayuda "inferior", pero eso no quiere decir que sea fácil hacerlo eficazmente, ya que ello exige de parte del profesor un buen conocimiento tanto del problema cuanto del alumno. Y lo primero que se debe tener en cuenta es que, cuando se trata de ayudar al alumno, no hay que ayudarlo demás.

5. El juego y el aprendizaje de la matemática

El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña física, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo del pensamiento matemático.

Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamientos admitidos como válidos en el campo. Cuando la teoría es elemental, éstos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien pronto, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca de los elementos iniciales y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados con respecto a su enunciado.

¿Se pueden utilizar los juegos matemáticos con provecho en el aprendizaje de la matemática? ¿De qué forma? ¿Qué juegos? ¿Qué metas pueden alcanzarse a través de los juegos? Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión. Para eso se han hecho y ése es el cometido básico que desempeñan. Por eso es natural que haya mucho recelo de su empleo en la enseñanza.

Más bien, ese mismo elemento de pasatiempo y diversión que el juego tiene, esencialmente, debería ser un motivo más para utilizarlo generosamente. ¿Por qué no paliar la mortal seriedad de muchas de nuestras clases con un sonrisa? Si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el "rollo" cotidiano, un elemento de diversión, incluso, aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra área, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían positivamente.

Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones matemáticas se prestan igualmente al aprovechamiento didáctico. Muchos son solamente charadas y acertijos ingeniosos. Muchos otros se basan en la confusión intencionada del enunciado, dejando una impresión de mera tomadura de pelo. En otros casos la solución da la impresión de haber llegado por revelación divina que no cabe fácilmente en un esquema de pensamiento que puede conducir a un método. Pero, hay juegos que de forma natural, resultan asequibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas.

La heurística

La heurística, como método de cognición, consiste en un conjunto de caminos, formas, modos, medios, procedimientos, técnicas y maneras para llegar al descubrimiento y la invención. Se ocupa, por lo tanto, de la resolución de problemas, es decir, de esas etapas que se presentan naturalmente con frecuencia y que tienen alguna probabilidad de conducirnos a la solución. No es un género de estudio muy usual; aunque Descartes y Leibniz ya habían meditado sobre ello (Leibniz llamaba heurística al "arte de la invención").

Sin embargo, en la perspectiva de enseñar a pensar, las ideas más simples de la heurística serían las más importantes para el profesor, él mismo podría, aplicando esta manera de desarrollar el pensamiento y de conocer, extraerlas de su propio caudal de experiencias, empleando simplemente su sentido común, a pesar de que Descartes haya observado que "el sentido común o buen sentido" no sea el más común de los sentidos.

He aquí una sugerencia sobre el tratamiento de problemas diarios que, tal vez, parezca absolutamente trivial a simple vista.

> ***Enfrente su problema si quiere resolverlo o pregúntese:*** *¿qué es lo que quiero, realmente? Cuando sepa la respuesta y si ella está clara, examine todo lo que se encuentra a su disposición y lo que usted podría utilizar en situaciones similares posteriores. Luego, pregúntese otra vez: ¿qué es lo que tengo? Después de haber examinado durante un tiempo todo lo que tuviera posibilidad de ser usado, puede volver a la primera cuestión y ampliarla: ¿qué es lo que quiero? ¿cómo podré obtenerlo? ¿dónde podré obtenerlo?, etc. Interrogándose así, podrá aproximarse a la solución del problema.*

Pareciera trivial detenerse a observar que los problemas cotidianos presentan ciertas analogías con los problemas matemáticos. Sin embargo, si el profesor intenta dar una ayuda "interior" a un alumno interesado sobre un problema matemático, puede hacerlo con provecho, utilizando las preguntas precedentes o mediante preguntas paralelas, pero; expresándolas en términos matemáticos.

El profesor igualmente puede preguntar: ¿qué quiere usted? ¿cuál es la incógnita? Si el objetivo de la investigación de la incógnita estuviera suficientemente claro para el alumno, el profesor podrá continuar: ¿qué tiene usted, cuales son los datos, cuál es la condición?, etc. Si el alumno diera respuestas suficientemente claras también a estas cuestiones, el profesor podrá volver a su pregunta inicial y desarrollará: ¿qué quiere obtener? ¿cuál es la incógnita ¿cómo puede obtener esta incógnita? ¿con qué datos puede determinar este tipo de incógnita? Es obvio que estas preguntas tienen bastante posibilidad de movilizar en la mente del alumno, los pensamientos y conocimientos apropiados hasta conducirlo a la solución.

Estas preguntas son ejemplos de aplicación de la heurística en forma práctica y con buen sentido. El profesor puede utilizarlas, de arranque, en los casos donde ellas fácilmente sugieran la idea correcta del alumno. Después, él podrá utilizarlas cada vez más, tan frecuentemente cuanto el discernimiento y el tacto lo permitan. Con el tiempo el alumno podrá comprender el método y usar, él mismo, estas preguntas, aprenderá, así, a dirigir su atención a los puntos esenciales cuando se encuentre delante de un problema. De este modo, adquirirá el hábito del pensamiento metódico que es el mayor beneficio a ser extraído de las aulas de matemática.

DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los problemas deben ser formativos y deben permitir desarrollar una o más capacidades en el alumno. No solo deben constituir un refuerzo del aprendizaje, sino que deben abrir perspectivas nuevas de aprender a aprender

Los problemas deben ser significativos con respecto al tema donde están propuestos. Nada más pernicioso en este sentido, que caer en la trivialidad de los problemas que terminan por anular la iniciativa, el interés y la inventiva del alumno.

Los problemas deberán ser debidamente graduados de menor a mayor dificultad. Muchas veces adoptan un carácter secuencial de tal modo que la solución de uno de ellos permite abordar otro de mayor complejidad.

En algún momento es conveniente, también, plantear problemas cuya resolución es dudosa.

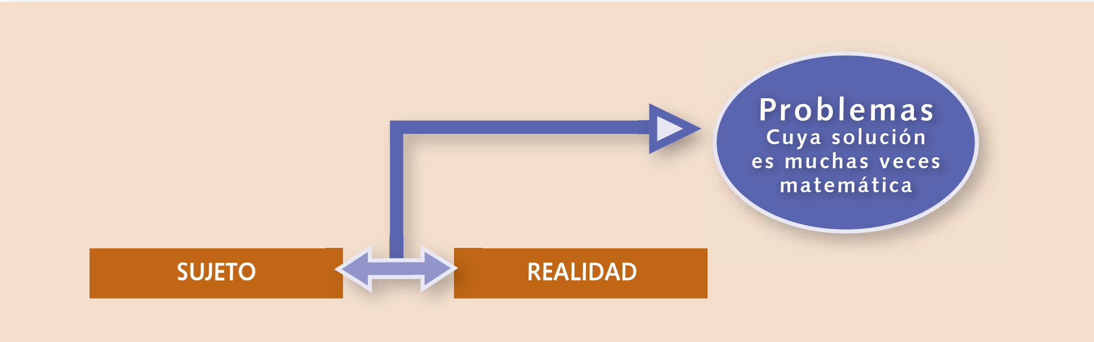
Los problemas deben versar en lo posible, sobre datos y asuntos conectados con su realidad, con su medio ambiente. Hay tantas formas sugerentes de elaborar problemas para los aspectos operacionales como para otros de carácter eminentemente teórico.

6. Importancia de la resolución de problemas

6.1 Apreciaciones famosas sobre la importancia de la resolución de problemas

La resolución de problemas es considerada en la actualidad, la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de la matemática en el mundo que les rodea.

- *El párrafo 243 del Informe Cockroft señala en su punto quinto que la enseñanza de las matemáticas debe considerar la "resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria".*
- *El Concejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que "el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas".*
- *En el libro de Hofsdadter, Gödel, Escher y Bach, se dice que "las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones".*
- *Santaló (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que "enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas".*
- *En una conferencia pronunciada en 1968, George Polya decía: "Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden, incluso, considerarse como la parte más esencial de la educación matemática".*
- *Miguel de Guzmán (1984) comenta que "lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas, es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativos a entes con poco significado, si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas".*



7. El arte de resolver problemas de Polya

George Polya, considera 4 etapas en el proceso de resolución de problemas. Dicho proceso se inicia, siempre, en la comprensión del enunciado o contenido del problema. Si no se entiende un problema ¿Cómo se lo puede resolver? Luego debe concebirse una estrategia o plan para resolverlo.

El siguiente paso es ejecutar metódica y sistemáticamente el plan, hasta llegar a la solución. Finalmente, debe examinarse su consistencia. En todos estos pasos, será necesario actuar con una visión retrospectiva, es decir, tratando de lograr metacogniciones.

PRIMERO: Comprenda el problema

¿Y qué significa comprender un problema? Para comprender un problema será necesario responder estas preguntas básicas:

¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

SEGUNDO: Conciba un plan

Encuentre la relación entre los datos y las incógnitas. De no encontrar una relación inmediata, considere problemas auxiliares. Obtenga finalmente un plan de solución que puede lograrse si, previamente, se ha tomado en cuenta los siguientes aspectos:

¿Se ha encontrado con un problema semejante? o ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar. He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones. Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición, descarte la otra parte. ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí? ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado todas las nociones esenciales concernientes al problema?

■ TERCERO: Ejecute el plan

Ejecutar un plan consiste en implementarlo y desarrollarlo según lo previsto, sin embargo, es importante tener en cuenta las siguientes consideraciones:

Al ejecutar su plan de la solución compruebe cada uno de los pasos. ¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?

■ CUARTO: Examine la solución obtenida

Estos preceptos son, entonces, descompuestos hasta el nivel "molecular" en las páginas siguientes. Ahí se sugieren estrategias individuales que podrían ser utilizadas en momentos apropiados.

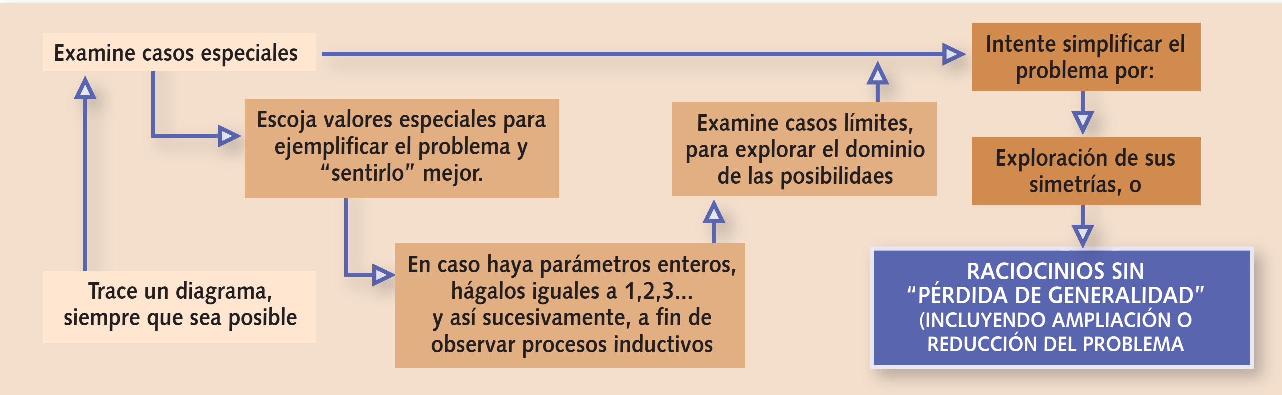
Visión retrospectiva. *¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?*

Posteriormente otros investigadores desarrollaron las ideas de Polya, de varias maneras. A. H. Schoenfeld, por ejemplo, hizo una tabulación interesante de los **principios heurísticos más frecuentemente usados** en matemática en el nivel de Educación Secundaria, cuyos pasos se presentan a continuación:

LOS TRES PASOS DE A.H. SCHOENFELD PARA SOLUCIONAR UN PROBLEMA

ANÁLISIS → EXPLORACIÓN → VERIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN

■ **Análisis.** El análisis de un problema se lleva a cabo a través de los siguientes pasos:



■ **Exploración.** Para la exploración, a su vez, se consideran los pasos siguientes:

1. **Considere problemas esencialmente equivalentes:**
   a) Sustituyendo las condiciones por condiciones equivalentes.
   b) Recombinando los elementos del problema de maneras diferentes.
   c) Introduciendo elementos auxiliares.
   d) Reformulando el problema por:
      i) Cambio de perspectiva o notación.
      ii) Consideración a razonamientos por contradicción o contraposición.
      iii) Suposición de que usted tiene una solución y de la que debe hallar sus propiedades.

2. **Considere problemas ligeramente modificados:**
   a) Escoja sus objetivos (obtenga el cumplimiento parcial de las condiciones).
   b) Afloje una condición y ensáyela, luego reimpóngala.
   c) Descomponga el dominio del problema y trabaje caso por caso.
3. **Considere problemas ampliamente modificados:**
   a) Construya un problema análogo con menos variables.
   b) Mantenga todas las variables fijas, menos una, a fin de determinar la influencia de ella.
   c) Intente explorar problemas relacionados cualesquiera que tengan:
      i) Forma semejante.
      ii) Datos semejantes.
      iii) Conclusiones semejantes.

- **Verificación de la Solución.** Finalmente verifique el resultado, las operaciones, los procedimientos aplicados, etc. Si es satisfactorio todo ello, ha logrado resolver con éxito un problema.

PERO, ¡RECUERDE!: *Cuando trabaje con problemas relacionados más fáciles, usted debería intentar explorar tanto el resultado como el método de solución en el problema principal.*

8. Diseño de actividades de clase

(Desde la perspectiva de solución de problemas)

Las actividades o tareas que el docente proponga deberán tener al estudiante como protagonista, él deberá inventar la solución de un problema, elaborar un código de representación, descubrir dónde hay un error en un procedimiento o proponer y llevar a cabo un plan de acción para probar una hipótesis. La resolución de la tarea involucra procedimientos que el estudiante elegirá para tratar de alcanzar el éxito.

En la puesta en marcha del procedimiento utilizará algunas alternativas, luego las abandonará por otras, sin que cada secuencia de acciones sea conocida por él, al comienzo de la tarea. Él irá eligiendo cada secuencia de acciones, sustituyendo las adoptadas hasta descubrir la solución. Los aspectos de invención y descubrimiento surgen entonces en el interjuego entre las teorías que va armando -que lo acercan al objetivo que persigue- y las secuencias de acciones implementadas, llamadas también estrategias de resolución.

En el colegio hay que proporcionar a los alumnos actividades adecuadas al desarrollo de problemas matemáticos reales, porque esos problemas les dan la oportunidad para reflexionar y reorganizar sus formas de pensar. Ahora sabemos también que las capacidades, las destrezas y las habilidades, así como los conocimientos y los valores, bien aprehendidos, son los que están ricamente relacionados entre sí o con experiencias previas. Además, sabemos que las ideas nuevas no son aceptadas por el alumno hasta que ellas son tan fuertes que provocan la reorganización del material existente en un nuevo sistema que mantiene juntos la nueva idea y las antiguas, transformadas.

Es necesario también, que al menos la introducción de cada nuevo tema sea hecha a través de situaciones problemáticas que induzcan a los alumnos a la exploración y formulación de conjeturas, poniéndolos en situación de participar, de descubrir y de jugar en un clima de libertad y sin tensión. Además es importante que ellos trabajen no solamente interpretando las situaciones que se presentan, sino también construyendo y organizando los contenidos matemáticos involucrados en esas situaciones.

Entonces, el material de aprendizaje para un determinado tema debe comenzar con una situación que contenga varias informaciones y con una invitación a considerar otras informaciones que pueden ser encontradas a partir de las dadas. Al realizar las actividades consideradas, varios errores y conceptos equivocados pueden aparecer y, de ese modo, el profesor puede ayudar a los alumnos a corregirlos y resolverlos poniendo de manifiesto esos errores a través de discusiones.

Debemos considerar también que un ambiente de respeto mutuo, donde ellos se sientan libres para explorar ideas matemáticas, hacer preguntas, discutir sus ideas y cometer errores, es importante para aprender más y mejor. Además, la utilización del lenguaje escrito y oral ayuda a clarificar el pensamiento.

En una clase de matemática, en cualquier nivel, debe haber oportunidad para:

- *Discusión entre profesores y alumnos y entre los mismos alumnos.*
- *Trabajo práctico apropiado.*
- *Consolidación y práctica de las habilidades, destrezas y rutinas fundamentales.*
- *Resolución de problemas (incluyendo la aplicación de la matemática en las situaciones cotidianas).*
- *Trabajo apropiado de investigación.*
- *Exposición del profesor, que debe ser: motivadora, de soporte y fundamentación, de conclusión, etc.*

- **Diseño de una sesión de aprendizaje.** Para diseñar una sesión de aprendizaje debemos considerar, desde la perspectiva de la solución de problemas, las siguientes fases:

1. ***Fase de inicio:*** *en este momento se deben presentar situaciones de aprendizaje como: las de motivación, las de una situación problemática, las de exposición de conocimientos previos, las de comprensión inicial del problema o tema, las de recuperación de la información.*
2. ***Fase de experimentación:*** *corresponde a situaciones como indagación; establecimiento de relaciones entre conocimientos previos y problemática planteada; organización del trabajo, temas y subtemas; organización de los alumnos para realizar el trabajo; observación de fenómenos; búsqueda bibliográfica; comparación y análisis de datos; ordenación de hechos, etc.*
3. ***Fase de objetivación:*** *corresponde a situaciones de aprendizaje tales como: procesamiento de la información; clasificación y síntesis de datos; generalización de patrones, demostración de propiedades, comprobación de un problema o algoritmo, demostración de un teorema; situación de análisis y síntesis; situación de representación de fenómenos.*
4. ***Fase de aplicación:*** *en esta etapa se dan: la inferencia de fenómenos y las situaciones de transferencia por extrapolación (utilización de conceptos y procedimientos en situaciones problemáticas parecidas a las estudiadas).*
5. ***Fase de evaluación:*** *participación y cumplimiento de tareas; producción y conocimiento matemático; producción de un trabajo en grupo; extensión y aplicación de conocimientos.*

FASES BÁSICAS DE UNA SESIÓN DE APRENDIZAJE

9. Uso de medios y materiales

- **La calculadora.** La calculadora y la computadora están influyendo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Ya no es necesario ejecutar muchas de las rutinas de cálculo, donde se emplea tanto tiempo, pudiendo entonces con esa ayuda hacer que nuestros alumnos se dediquen a los procesos mentales matemáticos y a su vinculación con los problemas reales. En ese sentido, por lo menos se debería utilizar la calculadora, siempre que fuera posible, de modo que los alumnos puedan explorar, investigar y verificar sus hallazgos con independencia.

  La Educación Secundaria debe adaptarse a la vida actual, modernizarse y adecuar a los alumnos a la sociedad en que viven, en la cual van a luchar por la vida y, a la cual tienen que transformar. Para hacerlo, es esencial saber manejar los instrumentos que la tecnología ha puesto al servicio de ella. En segundo lugar, el uso de los instrumentos tecnológicos -como una calculadora u otra máquina- libera al alumno de largas, aburridas e innecesarias tareas, dejándole más tiempo para mejorar su capacidad de pensar.

  Cuando el alumno ya domina con eficiencia las operaciones y sus reglas, cuando los cálculos numéricos son solamente auxiliares en el estudio de otras teorías, cuando se quiere evitar una innecesaria pérdida de tiempo con cálculos prolongados, es hora de que el alumno utilice la calculadora. Con ello se ganará, en capacidad para investigar relaciones entre los números, aproximaciones y, sobre todo, resolver problemas que no podrían hacerse actualmente sin el uso de la calculadora.

  Un corolario de ese razonamiento parece inevitable y está siendo, de hecho, defendido como norma a ser adoptada: deben ser abolidas las tablas complicadas y los cálculos manuales extensos. Sin embargo, memorizar las tablas y las reglas de cálculo aritmético, cuando se es joven y se tiene buena memoria, es adquirir una habilidad más en términos de automatismos como lo son los actos mecánicos de andar en bicicleta, que no molestan en nada, pero que pueden ser útiles en varias ocasiones. Eso, sin hablar del aspecto educativo, como una forma de disciplina mental, en el orden y en la atención indispensables a esas operaciones, las cuales pueden llegar a constituirse en hábitos de trabajo cuando son transferidas a otras situaciones.

- **La computadora.** Un mito común, asociado con el uso de las computadoras en las aulas, es que éstas harán nuestra enseñanza y el aprendizaje de nuestros estudiantes más fáciles. Ese mito se basa en la suposición de que la computadora enseñará por nosotros. Pero, de hecho, enseñar con computadoras requiere mucho más trabajo. Requiere conocimiento y habilidad en el uso de una herramienta nueva y, en ocasiones, improvisar y desarrollar maneras nuevas de trabajar con esta herramienta en el aula.

  Particularmente, debido al ritmo de crecimiento de esta tecnología, los otros materiales de enseñanza de apoyo no han podido mantenerse a dicho ritmo. En consecuencia, la enseñanza utilizando tecnologías nuevas requiere mucho esfuerzo por parte del profesor. En lo que concierne a los estudiantes, mucha gente presume que todos los estudiantes disfrutarán y aprenderán mejor con computadoras. Pero, hay algunos estudiantes que se sienten incómodos o tienen una actitud negativa hacia aquéllas.

  Los estudiantes acostumbrados a depender del profesor o de otros para comenzar a resolver un problema de matemática, podrían no apreciar la oportunidad de trabajar independientemente y sin supervisión durante un intervalo de tiempo. Por tanto, aprender a utilizar una computadora presenta desafíos nuevos para ellos. Las computadoras y las calculadoras, en general pueden considerarse como herramientas para ahorrar tiempo y para que nos ayuden a automatizar y realizar tareas repetitivas y tediosas. Esto significa que las computadoras y las calculadoras permiten que los estudiantes concentren sus esfuerzos en razonar y en la resolución de problemas. Pero, primero hay que disponer de ellas y luego, hay que saber manejarlas. Aprender su manejo puede darse siempre que tengamos acceso a una de ellas.

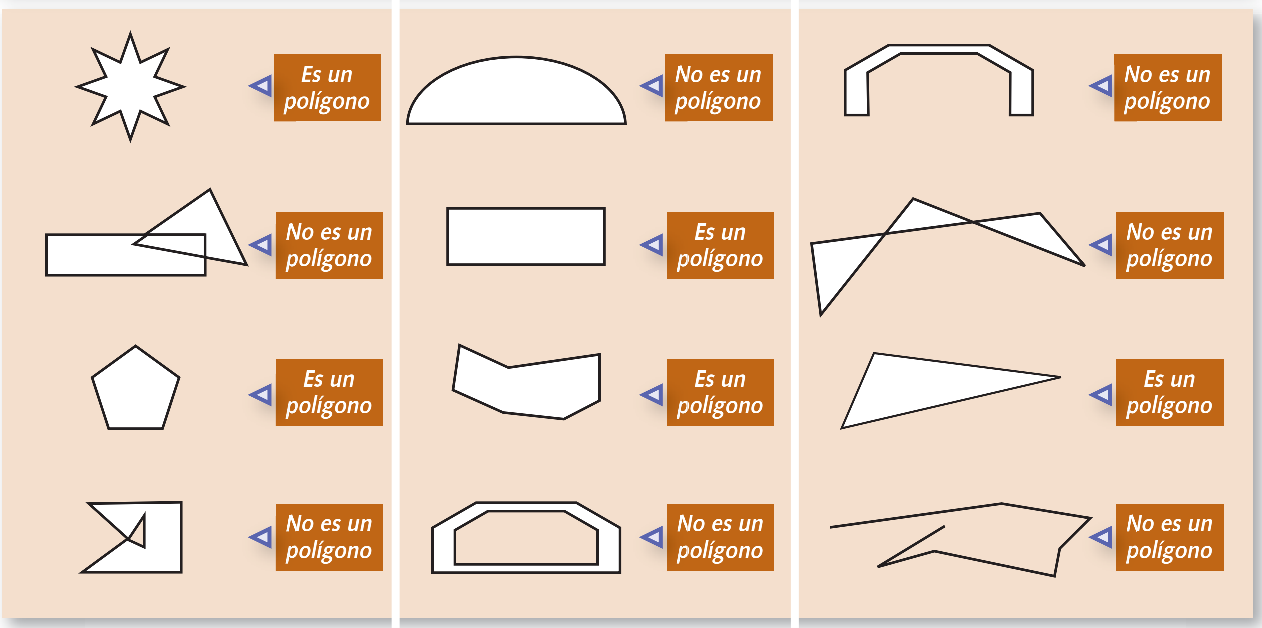
Las computadoras y las calculadoras permiten acceder a otras áreas de la matemática. Las hojas electrónicas de cálculo y los paquetes estadísticos, por ejemplo, hacen posible explorar relaciones matemáticas de múltiples maneras: gráficamente, utilizando tablas y algebraicamente. Agreguemos a esto que, actualmente, se puede encontrar en el mercado, software que permite desarrollar habilidades y conceptos matemáticos a través de la exploración y de actividades interactivas, así como la manipulación y visualización de conceptos que son difíciles de lograr con materiales concretos de tipo no tecnológico.

10. Estrategias metodológicas basadas en la resolución de problemas

En el proyecto de aprendizaje ROMPECABEZAS Y PAPIROFLEXIA, se ha considerado el aprendizaje esperado:

- **Elabora y analiza definiciones y características de figuras geométricas.**
  Para que los estudiantes describan, elaboren y analicen las definiciones de polígono, conjunto convexo y polígono convexo, primero, en forma individual, analizan los cuadros; después en grupos de 4 ó 5 reflexionan sobre sus opiniones. Finalmente elaboran sus definiciones.

¿QUÉ ES UN POLÍGONO?



Los estudiantes del tercer grado de Secundaria en años anteriores han trabajado con polígonos simples como triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc. Saben que un polígono tiene vértices, lados y ángulos. ¿Qué elementos y partes tiene un polígono?

El profesor puede formular preguntas como las siguientes: En un polígono ¿qué son un vértice, un lado?. ¿Dos lados siempre se cortan? ¿Cuantos puntos en común tienen los lados que se cortan? ¿Cómo se llaman los lados que se cortan? ¿El número de lados y ángulos son diferentes? ¿Línea poligonal y polígono son lo mismo? ¿Hay líneas poligonales abiertas y poligonales cerradas? ¿Qué relación hay entre ellas?

Hay que cultivar el proceso de hacer definiciones describiendo los rasgos que caracterizan un objeto o modelo y lo distinguen de otros que quizás se parecen. Muchos conceptos se presentan en forma de red.

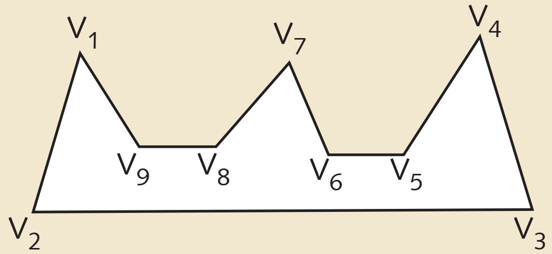
Alfredo extrae del libro de matemática del primer grado la definición de polígono:

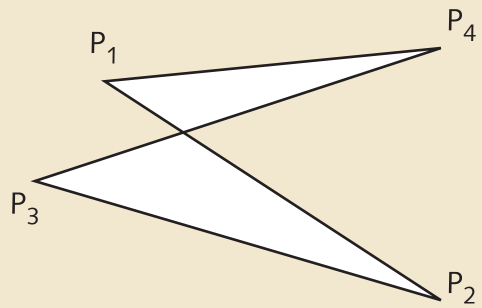
Una línea poligonal cerrada está formada por:

- un número finito de segmentos,
- unidos unos a continuación de otros, y sin que dos segmentos estén alineados.

Un polígono es una línea poligonal cerrada.

Jorge Luis elabora estas figuras y comenta:

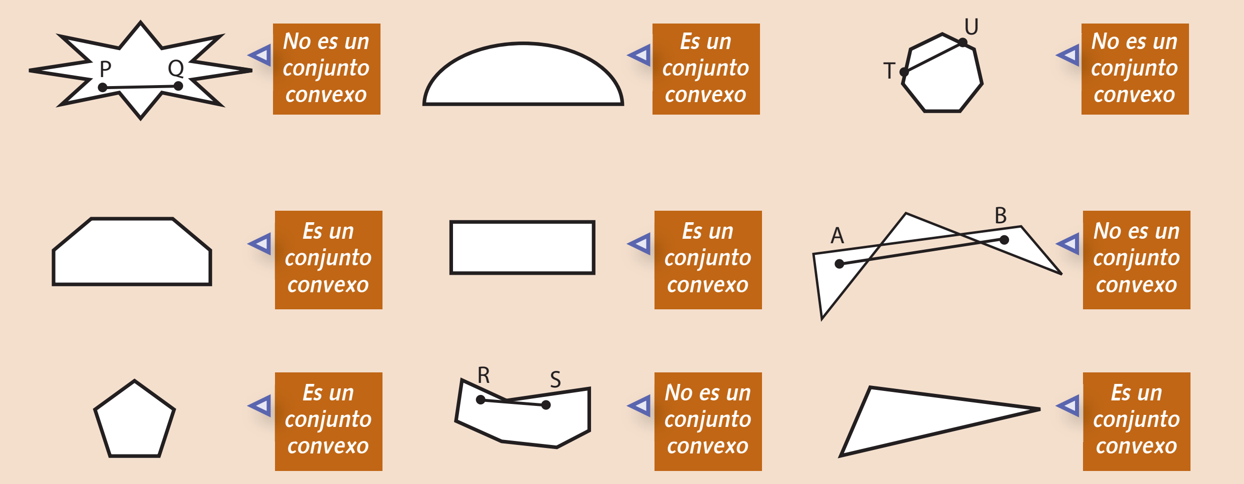




En la primera figura los segmentos están alineados. Y la figura es un polígono. Que los segmentos no estén alineados sólo vale para aquellos que son consecutivos. En la segunda figura los segmentos se cortan, pero no en sus extremos. No es un polígono, pero sin embargo verifica la definición del libro.

Ahora, estás en condiciones de dar tu propia definición. Adelante.

¿QUÉ ES UN CONJUNTO CONVEXO?



Al unir dos puntos en un conjunto convexo ¿cómo está el segmento cuyos extremos son los dos puntos? ¿Incluido en el conjunto? ¿O una parte «sale» del conjunto?

Lo estudiantes, en grupos de 4 ó 5 elaboran una definición de polígono convexo. Combinan los conceptos de polígono y conjunto convexo.

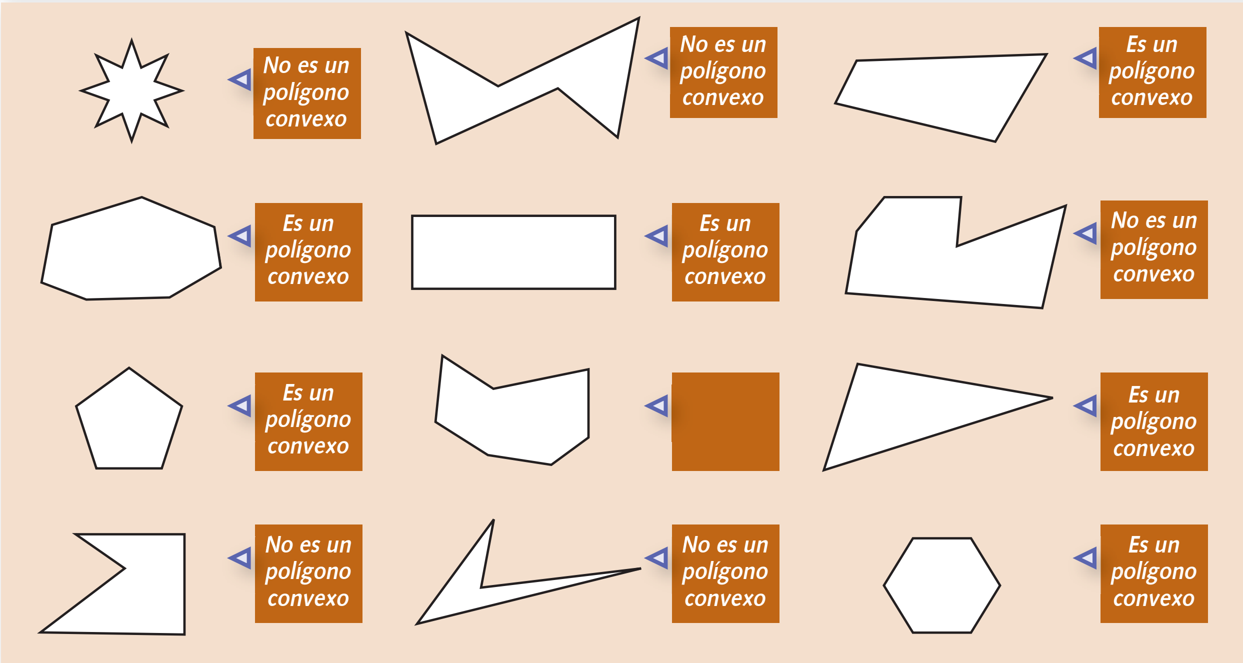
Analizan las definiciones propuestas por el profesor:

Conjunto convexo:

Definición 1: Un conjunto A es convexo, si para cada dos puntos P y Q del conjunto, el segmento está contenido en el conjunto A.

Definición 2: Un conjunto es convexo, si nunca hay que salir del conjunto para tomar un atajo.

¿QUÉ ES UN POLÍGONO CONVEXO?



Polígono convexo:

Definición 1: Un polígono P es convexo si el segmento determinado por cualquier par de puntos del polígono está contenido en el interior del polígono.

Definición 2: Un polígono es convexo si cada uno de los ángulos es menor que 180°.

Compara estas definiciones con las que han elaborado los diferentes grupos.

Los estudiantes reflexionan sobre la idea de que un polígono convexo no es un conjunto convexo. El interior de un polígono convexo, sí es un conjunto convexo. Rigurosamente abordan los conceptos de estos objetos matemáticos.

Finalmente, responde a las preguntas:

- ¿Es una recta un conjunto convexo? ¿Por qué?
- ¿Es convexo un conjunto formado sólo por dos puntos P y Q? ¿Por qué?
- ¿Es un rectángulo un conjunto convexo? ¿Por qué?
- ¿Es una circunferencia un conjunto convexo? ¿Por qué?

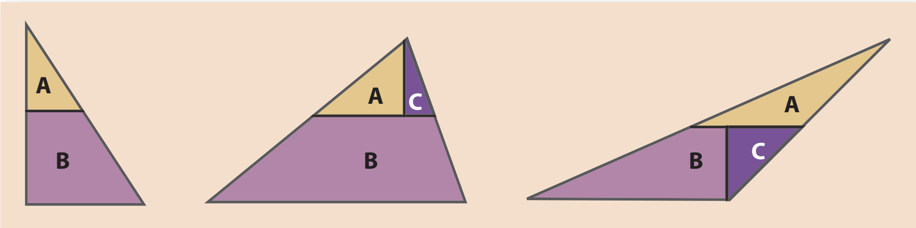
- Si le quitamos un punto a una recta, ¿será convexo el conjunto resultante? ¿Por qué?
- Si le quitamos un punto a un plano, ¿será convexo el conjunto resultante? ¿Por qué?

En el proyecto de aprendizaje ROMPECABEZAS Y PAPIROFLEXIA se ha considerado el aprendizaje esperado:

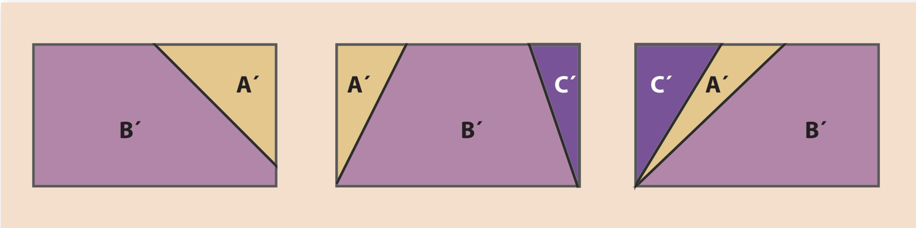
Utiliza regla y compás para realizar construcciones geométricas y demostrar conjeturas.

SITUACIÓN 1. Transformación de triángulos en rectángulos

Un triángulo puede ser: rectángulo, acutángulo u obtusángulo.



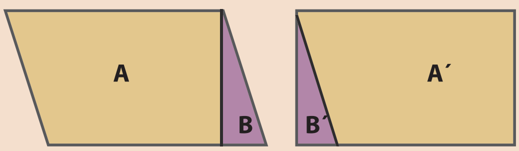
Estos triángulos tienen la misma base y la misma altura. Luego tienen la misma área.
Significa que a los tres triángulos podemos transformarlos en un rectángulo de la misma base y la mitad de altura.



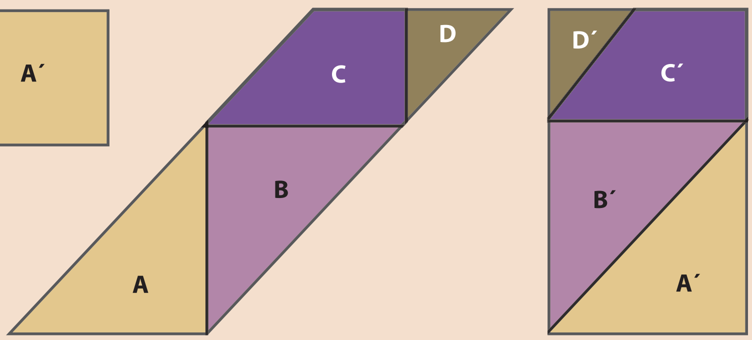
Cada triángulo ha sido transformado en un rectángulo, usando polígonos de la misma forma y tamaño.

SITUACIÓN 2. Transformación de un romboide en un rectángulo

Un romboide puede ser transformado en un rectángulo.

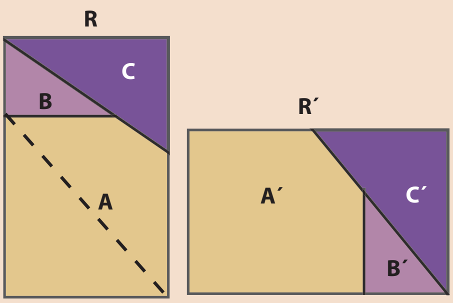


R = A U B y R′ = A′ U B′
Además, A y A′, B y B′, tienen la misma forma y el mismo tamaño

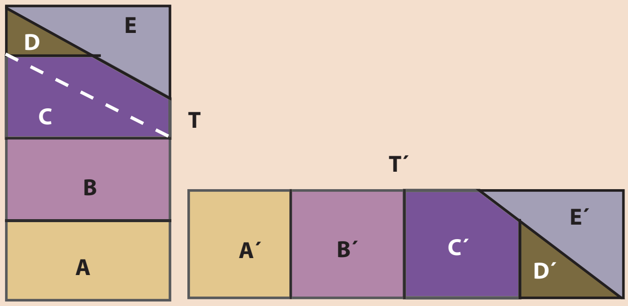


SITUACIÓN 3. Transformación de un rectángulo en otro de diferente altura

Un rectángulo puede ser transformado en otro cuya altura se determina de antemano.



R = A U B U C y R′ = A′ U B′U C′
Además, A y A′, B y B′, C y C′, tienen la misma forma y el mismo tamaño



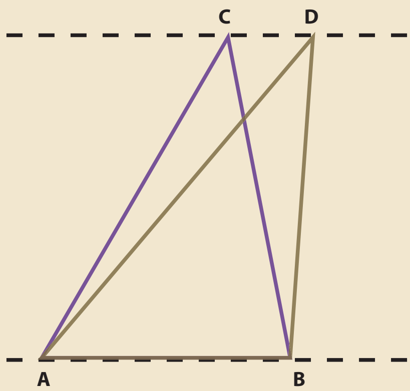
T = A U B U C U D U E y T′ = A′ U B′ U C′ U D′ U E′
Además, A y A′, B y B′, C y C′, D y D′, E y E′, tienen la misma forma y el mismo tamaño

Triángulos entre dos paralelas

Si tienes un segmento en una de las rectas paralelas y dos punto en la otra recta. ¿Te has preguntado cómo son las áreas de los dos triángulos?

¿Cómo son las áreas de los triángulos D ABC y D ABD?
Tienen la misma base. ¿Tienen la misma altura? ....
Luego, las áreas son iguales.

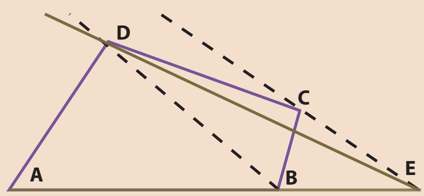
¿Cómo generalizarías sobre los triángulos cuya base está contenida en una paralela y el vértice opuesto a la base está en la otra paralela?



SITUACIÓN 4. Transformación de un cuadrilátero en un triángulo

Sea el cuadrilátero ☐ABCD:

¿Cómo son los triángulos Δ DBC y Δ DBE?
Tienen la misma .... y la misma ....
Luego, tienen la misma ....
Por lo tanto, Área ABCD = Área (Δ ABC) + Área (Δ DBC)
Área ABCD = Área (Δ ABC) + Área (Δ DBE)
Área ABCD = Área (Δ AED).



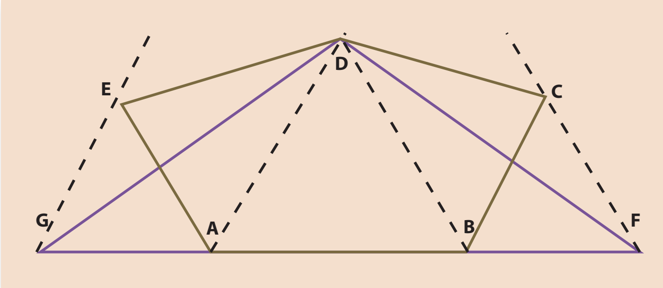
Trazamos el segmento $\overline{DB}$
Construimos la paralela a $\overline{DB}$ por C.
Prolongamos $\overline{AB}$ hasta encontrar a la paralela $\overline{CE}$ en E.

SITUACIÓN 5. Transformación de un pentágono en un triángulo

Sea el pentágono ABCDE:

Explica por qué:

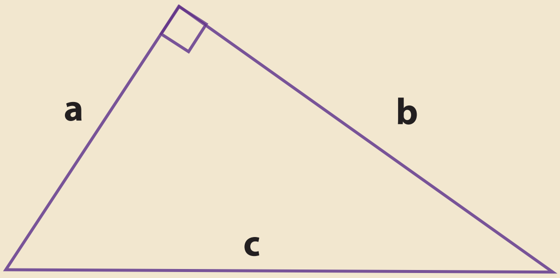
Área ⬠ ABCDE = Área △ GFD



Teorema de Pitágoras

Éste es uno de los teoremas más antiguos y más famosos de la Matemática, data de aproximadamente 500 a. c. y afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, tal que a, b y c son respectivamente, las longitudes de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Este teorema ha sido demostrado por muchos matemáticos, 300 a. c. lo hizo Euclides.



Según una leyenda, cuando Pitágoras descubrió el teorema, quedó tan alborozado que ordenó que fuesen sacrificados bueyes.

¿Qué hizo Euclides?

En cada lado del triángulo construyó un cuadrado, como se muestra en la figura de al lado.

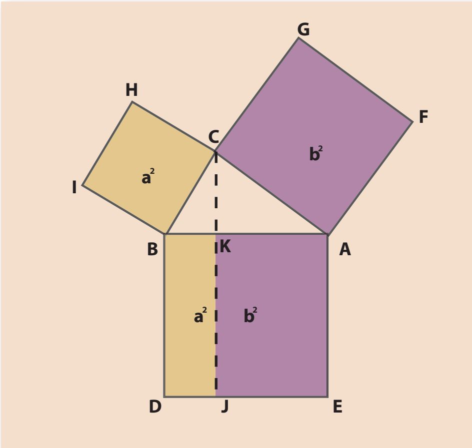
Del vértice C bajó una perpendicular al lado, $\overline{AB}$ hasta $\overline{DE}$

$a^2 + b^2 = c^2$

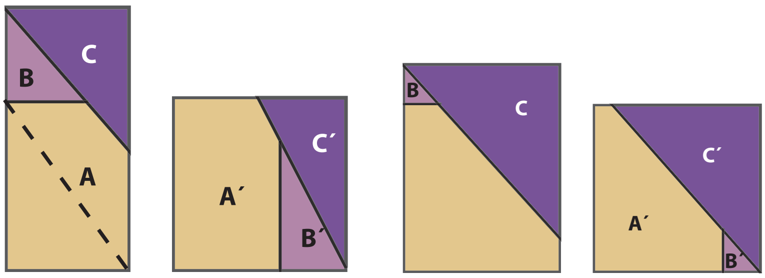
Es posible que algunos obtengan esta solución:

El área del cuadrado mayor BDEA es igual a la suma de los rectángulos BKJD y AKJE.

A(BDEA) = A(BDJK) + A(KJEA)



Se muestra que el rectángulo BKJD tiene la misma área que el cuadrado BCHI, y que el rectángulo KJEA tiene la misma área que el cuadrado AFGC.

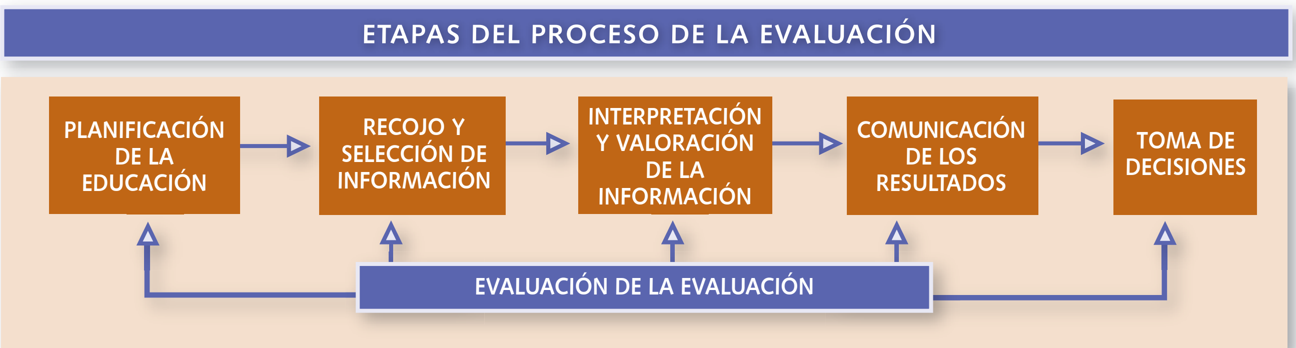


CAPÍTULO IV

Orientaciones para la evaluación

1. Cómo evaluar el aprendizaje

La evaluación en el área de matemática debe contribuir a saber cómo y cuánta matemática aprenden los estudiantes. Desde esta perspectiva, la evaluación se concibe como la posibilidad de "... obtener información sobre los logros de aprendizaje de los alumnos, con el objeto de identificar los problemas y sus causas, para poder generar distintas estrategias que aporten soluciones para cada una de las dificultades". Resulta evidente, en consecuencia, que la evaluación es un proceso. Como tal, se desarrolla a través de "etapas". Éstas, se presentan en el esquema siguiente:



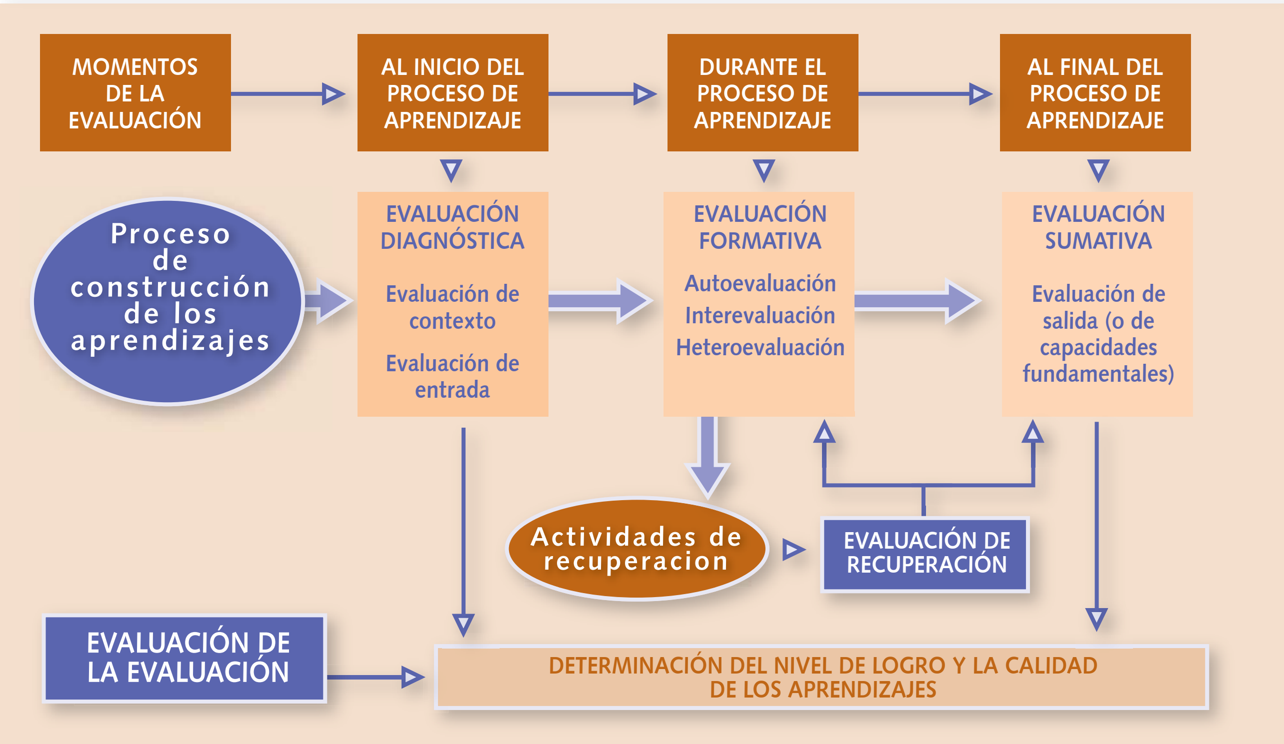
Una evaluación, siempre, debe ser algo más que un examen. Una evaluación debe ser un proceso continuo dinámico y con frecuencia, informal. La "informalidad" de la evaluación se manifiesta, por ejemplo, en afirmaciones de los profesores como las siguientes: parece que Luis tiene problemas con la representación gráfica de funciones, o Ana demostró tener mucha intuición cuando resolvía esos problemas de ecuaciones exponenciales. La evaluación debe ser algo más que el establecimiento de conclusiones definitivas. La evaluación debe ser cíclica, por naturaleza, es decir, un proceso de observación, conjeturas y reformulación constante de juicios sobre estructuras conceptuales de los alumnos.

Examinar para calificar es una de las formas más comunes de evaluar. Pero la evaluación es una tarea más amplia y más compleja, diseñada para hallar qué saben los estudiantes y cómo piensan acerca de la matemática. La evaluación debe originar una biografía del aprendizaje de los alumnos y una base para mejorar la calidad de la docencia. En efecto, la evaluación no tiene razón de ser a menos que sea para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Existen muchas técnicas de evaluación: baterías de tests, cuestionarios con preguntas dicotómicas (verdadero, falso), de opción múltiple, de respuesta corta, de discusión, abiertas, de laguna, de completamiento, de desempeño, etc; así como, entrevistas estructuradas o libres; trabajos en casa; proyectos, escenificaciones y exposiciones en clase, entre otras. Sin embargo, de todas estas técnicas, algunas son más adecuadas que otras para lograr que los estudiantes desarrollen su capacidad de pensar (creativa y críticamente), de tomar decisiones y solucionar problemas de la vida cotidiana.

Sea cual sea el objetivo de la evaluación, ésta no debe apoyarse jamás en un sólo instrumento o en una sola técnica. Tampoco debe hacerse en un solo momento, en una sola etapa o sobre la base de un único instrumento. Si bien es cierto que el proceso de evaluación es complejo, éste no tiene por que ser difícil ni imposible. El esquema siguiente nos muestra cómo debe llevarse, adecuadamente, este proceso.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

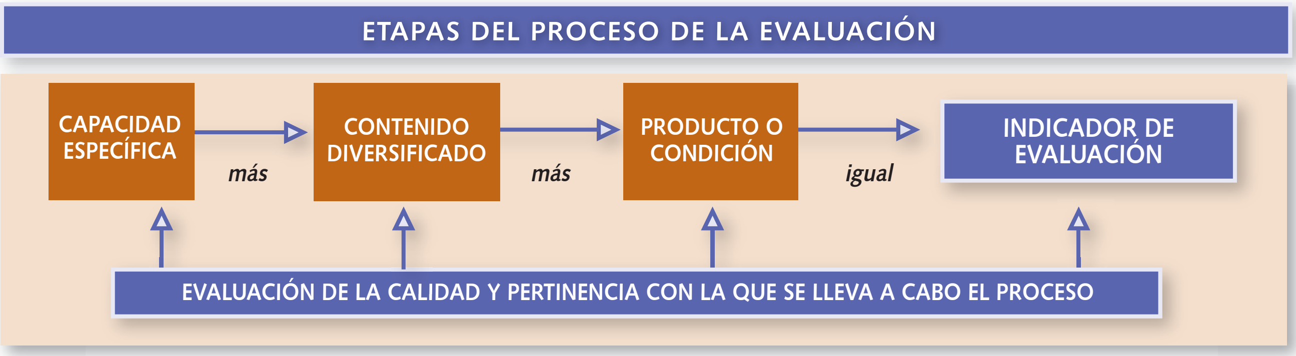


2. Organización de la evaluación

Para tener evidencias del aprendizaje de las capacidades, previstas en el DCN, por parte de los estudiantes, se requiere ORGANIZAR y ejecutar en forma sistemática las etapas que comprende la EVALUACIÓN. Sin embargo, en la práctica, la tarea se concreta en el acto de definir con claridad y precisión los indicadores respectivos, por constituir éstos la base para la elección de los instrumentos y para la elaboración de los reactivos correspondientes, a partir de cada uno de los aprendizajes esperados motivo de evaluación.

Un aprendizaje esperado es un enunciado o "constructo" que define el tipo de logro que se espera alcanzar al término de una sesión de aprendizaje, en los estudiantes. Cuando se trata de evaluar capacidades, se construye relacionando una o más capacidades específicas con un contenido básico o diversificado. Los indicadores, en cambio, son los componentes que permiten organizar la evaluación, por cuanto constituyen la guía que permitirá diseñar o formular los diferentes procedimientos, técnicas, instrumentos y los demás elementos del proceso.

Por ejemplo, si un indicador está definido en términos de observación, exigirá la elaboración de las fichas de destrezas, habilidades y procesos que habrá que verificar por observación, así como los procedimientos y estrategias correspondientes para llevar a cabo esa tarea. En otros términos, cualquier evaluación se organiza en función de los indicadores previstos. Un indicador se construye relacionando una o más capacidades específicas (las consideradas en el aprendizaje esperado) con un contenido básico o diversificado, más un producto o resultado que permita verificar en qué medida y con qué calidad fue logrado el aprendizaje. En algunos casos, este componente o parte del indicador puede ser una situación o condición en que debe lograrse el aprendizaje esperado. En el esquema siguiente puede apreciarse este proceso:



La evaluación de calidad del proceso permitirá, como en toda evaluación de la evaluación, definir si hay coherencia entre la capacidad específica prevista en el aprendizaje esperado y la que se considera en el indicador de evaluación, si el contenido básico o diversificado también es el mismo o fue necesario desagregarlo en elementos más específicos, si el producto o resultado permite verificar objetivamente lo que se espera como logro de aprendizaje o si la situación o condiciones en que debe producirse la evaluación es pertinente o adecuada. No debe ocurrir que se considere en el aprendizaje esperado una capacidad específica y en el indicador aparezca otra diferente que no tiene nada que ver con aquella. En cualquier caso, entre aprendizaje esperado e indicador de evaluación debe haber una coherencia que sea observable.

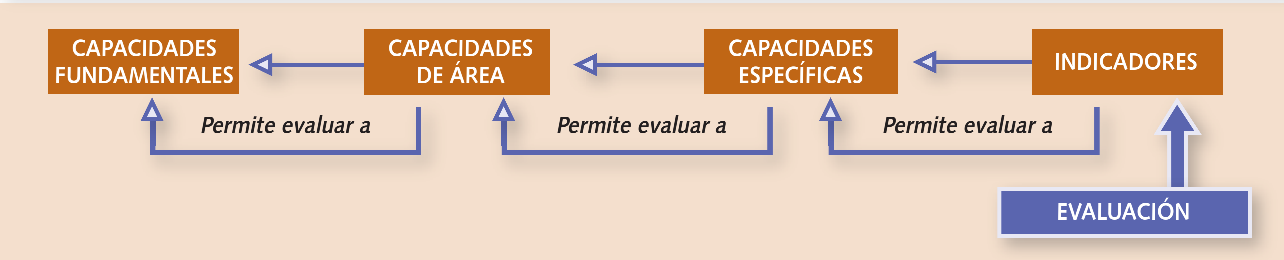
3. Indicadores de evaluación

Un indicador de evaluación -como su nombre mismo lo expresa- debe precisar o señalar (indicar) algo que se desea verificar. Los indicadores nos permiten establecer indicios en relación a los logros de aprendizaje del área, los contenidos básicos presentados y las actitudes a evaluar.

Puesto que el currículo de secundaria está diseñado en función de capacidades, los indicadores estarán orientados a posibilitar la evaluación de éstas, desde las fundamentales: pensamiento creativo, pensamiento crítico, toma de decisiones y solución de problemas, hasta las capacidades de área, que en matemática son tres y las capacidades específicas, cuya cantidad no está definida.

La evaluación de las capacidades específicas nos debe llevar a la evaluación de las capacidades de área y, de allí, en el sentido inverso al de una cascada, a la evaluación de las capacidades fundamentales. Resulta evidente que, evaluar directamente las capacidades fundamentales, por su amplitud e implicancias no es sistemático ni metódico, al requerirse siempre para cualquier forma de evaluación, de indicadores específicos, precisos y finos.

INTERDEPENDENCIA DE CAPACIDADES Y ROL DE LOS INDICADORES EN SU EVALUACIÓN



Es obvio que existe una interdependencia entre las capacidades del DCN, sin embargo, los indicadores no se definen exactamente para evaluar las capacidades de área ni las capacidades fundamentales, sino para evaluar las capacidades específicas, porque al hacerlo se estarán evaluando las primeras. En tal perspectiva, a continuación, se tratará de esclarecer en qué consisten cada una de las capacidades de área previstas para matemática.

- **Razonamiento y demostración:** En sus aspectos más generales, el razonamiento y la demostración, como actividades mentales superiores, son inherentes al quehacer matemático y a las capacidades fundamentales de pensar creativa y críticamente, tomar decisiones y resolver problemas. De modo específico, están íntimamente relacionados con los contenidos básicos del área, por ejemplo, los estudiantes "razonan y demuestran" cuando generalizan patrones, cuando explican gráficos u otras formas de representación o simbolismo, cuando fundamentan su decisión de utilizar tal algoritmo en lugar de otro o cuando justifican un procedimiento específico.

  Para evaluar el desarrollo de la capacidad de razonamiento y demostración, por lo tanto, será fundamental:

- Reconocer el razonamiento y la demostración como partes esenciales del quehacer matemático.
- Formular, crear y analizar conjeturas matemáticas sobre el aprendizaje de esta capacidad y validarlas.
- Desarrollar argumentos que demuestren objetivamente que lo anterior es válido y se puede probar.
- Que los estudiantes razonen y usen varios tipos de razonamiento y demostración en tareas comunes.

- **Comunicación matemática:** El desarrollo de la capacidad para interpretar, comprender y trasmitir información utilizando expresiones matemáticas en forma precisa y coherente, es de vital importancia en una sociedad del conocimiento, como la nuestra. Disciplinas que antes eran descriptivas y literales, ahora se han matematizado, como es el caso de la lingüística o la semiótica, en tanto otras, simplemente, han formalizado su lenguaje, es decir se han vuelto disciplinas matemáticas, como es el caso de econometría o la demografía.

  Desde otra perspectiva, hablar o escribir en lenguaje formalizado, permitirá que los estudiantes desarrollen mejor su capacidad de comunicación en general. A su vez, la lectura del lenguaje matemático contribuye a desarrollar habilidades para formular argumentos convincentes y para presentar las ideas en forma esquemática, gráfica o simbólica.

  Es bueno recordar entonces que, para evaluar la capacidad de comunicación matemática, es necesario:

- Organizar y consolidar “formas de pensamiento matemático para comunicar”, en los estudiantes.
- Expresar las ideas matemáticas con coherencia y claridad.
- Lograr extender el conocimiento matemático y el pensamiento matemático al quehacer cotidiano.
- Poder verificar que el lenguaje matemático es utilizado como un medio preciso de expresión.

- **Resolución de problemas:** La resolución de problemas es un medio poderoso para desarrollar la capacidad de pensar y un logro indispensable cuando se trata de una buena educación. Un estudiante que resuelve problemas matemáticos en forma rápida y eficiente, está preparado para aplicar esa experiencia en la resolución de problemas nuevos de la vida cotidiana, con la misma eficiencia y eficacia.

  Es evidente que la elaboración de estrategias personales de resolución de problemas, crea en los alumnos mayor confianza en sus propias posibilidades, al permitirles controlar ese tipo de situaciones. En ese sentido, para evaluar el desarrollo de esta capacidad será necesario:

- Hacer verificable la construcción de nuevos conocimientos matemáticos a través del trabajo con problemas.
- Desarrollar en los estudiantes la disposición de identificar, formular, representar, abstraer y generalizar situaciones comunes en forma de problemas matemáticos.
- Verificar la aplicación de estrategias y la adaptación de estrategias conocidas para la solución de problemas, a nuevas situaciones.
- Poder verificar que el estudiante controla y refleja su pensamiento matemático en todos sus actos.

- **Construcción de indicadores de evaluación.** Sabiendo en qué consiste cada una de las capacidades de área, para formular un indicador de evaluación, lo que se necesita es seleccionar la capacidad específica que se desea evaluar; luego, se seleccionará el contenido básico y la actitud correspondiente a uno de los valores trabajados. Con esos tres componentes: capacidad específica, contenido básico y actitud, se puede construir los indicadores que sean necesarios, adicionando a estos componentes un producto o resultado, o una situación o condición en que debe llevarse a cabo la verificación del aprendizaje logrado. Es recomendable elaborar indicadores para evaluar capacidades y actitudes por separado, por corresponder también a tipos de aprendizaje diferentes. No es lo mismo un aprendizaje cognitivo como lo es la capacidad, que un aprendizaje afectivo como lo es una actitud.

En el caso de las capacidades, como ya se ha explicitado en párrafos anteriores, el indicador se elabora relacionando la capacidad específica con el contenido básico o diversificado más un resultado, un producto o una situación en la que se verificará el aprendizaje. Y en el caso de las actitudes, el indicador se elaborará relacionando la actitud prevista para la sesión de aprendizaje más una situación en la cual la actitud sea observable o verificable dicha actitud.

Ejemplo:

Si en 2º grado de Secundaria se desea evaluar la capacidad de área "comunicación matemática", lo primero que hay que hacer es seleccionar la capacidad específica que para este caso es "identificar". Luego se determinará en qué tipo de contenido básico el alumno identificará y qué es lo que identificará. Para este ejemplo, se elige el contenido básico "Funciones. Tablas y gráficos". A su vez, la actitud será: "responsabilidad y sentido de cooperación".

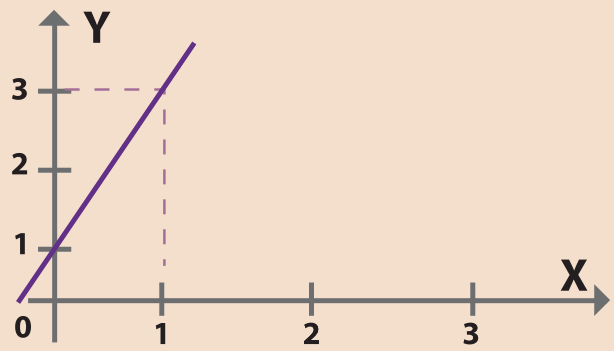
Ahora bien, de acuerdo con la información presentada hasta este momento, el indicador de evaluación estaría casi explícito y podría ser el siguiente: "Identifica tablas y gráficos de funciones". Pero, como es fácil advertir, el contenido "tablas y gráficos de funciones" es muy amplio, por lo que se tendría que precisar, tanto en lo que respecta al contenido básico mismo como a la parte que tiene que ver con la actitud. Por lo tanto, al precisar qué es lo que debe identificar en una función o un tabla, el indicador podría quedar formulado del modo siguiente:

"Identifica la gráfica correspondiente a una función dada, por su expresión analítica".

Una vez que se cuenta con el indicador, se determinará la técnica para luego elaborar el o los instrumentos con los que se evaluará. No hay que olvidar que lo que se va a evaluar es capacidades y no contenidos. En tal sentido la capacidad de área es "comunicación matemática", que para este caso se traduciría en "interpretar gráficos y expresiones simbólicas". Pero como el contenido básico "Funciones: Tablas y gráficos" es el medio para evaluar dicha capacidad, podría elegirse una prueba escrita, siendo uno de los ítems el siguiente:

"La siguiente gráfica, representa una función real" ¿Cuál es la expresión analítica de dicha función?

A. $y = 3x - 1$ B. $y = 3x + 1$
C. $y = 3x$ D. $y = -3x$



Observamos que el ítem ha sido elaborado para una prueba escrita, tipo "objetiva" con cuatro opciones de respuesta, o sea que se trata de una prueba de opción múltiple.

CONSTRUCCIÓN DE UN INDICADOR DE EVALUACIÓN DE ACTITUDES

Demuestra sentido de responsabilidad y cooperación → Al analizar expresiones analíticas de funciones e identificar sus gráficas correspondientes.

ACTITUD → SITUACIÓN EN LA CUAL LA ACTITUD SEA OBSERVABLE O VERIFICABLE

Si se desearía elaborar un instrumento para evaluar este indicador de evaluación de actitudes, éste sería una "lista de cotejo" o una ficha de observación cuyos ítems podrían ser los siguientes:

- ¿Demuestra sentido de responsabilidad al realizar sus tareas? ( ) SÍ ( ) No
- ¿Ayuda a sus compañeros a resolver sus tareas?
  ( ) Frecuentemente ( ) Esporádicamente ( ) Casi nunca

INDICADORES DE EVALUACIÓN POR CICLOS

Presentamos a modo de ejemplos, los siguientes indicadores de evaluación.

PRIMER GRADO

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN	COMUNICACIÓN MATEMÁTICA	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
• Identifica conjuntos. • Distingue entre "pertenencia" e "inclusión". • Utiliza las expresiones "para todo x", "para algunos x", y sus negaciones. • Utiliza gráficas para representar expresiones matemáticas. • Comprende las ideas de "correspondencia y "función". Da ejemplos y contraejemplos.	• Lee números decimales. • Escribe números decimales. • Representa números naturales "grandes" (miles de millón), en notación desarrollada y científica. **Números naturales.** • Representa números naturales "grandes" en notación desarrollada y científica.	• Resuelve y enuncia problemas con conjuntos. • Formula y resuelve problemas de adición, sustracción, multiplicación y división con naturales. • Formula y resuelve problemas de adición, sustracción, multiplicación y división con enteros. • Formula y resuelve problemas que involucran adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones y decimales (incluyendo porcentajes).

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN	COMUNICACIÓN MATEMÁTICA	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
	• Representa números decimales positivos "pequeños": milésimos, en notación desarrollada y científica. • Representa números decimales positivos "pequeños": millonésimos en notación desarrollada y científica.	
SEGUNDO GRADO		
• Compara números reales. • Ubica números reales en la recta. • Aplica la propiedad distributiva y sus formas equivalentes. • Reconoce relaciones de proporcionalidad directa e inversa. • Identifica monomios y polinomios. • Reconoce el grado de un polinomio. • Identifica variaciones.	• Identifica fracciones en la recta numérica. • Identifica decimales en la recta numérica. • Representa números en notación científica y los usa en situaciones problemáticas. • Reconoce números irracionales. • Identifica funciones. • Reconoce y grafica funciones cuadráticas. • Describe ángulos determinados por la intersección de rectas y las relaciones entre ellos.	• Formula problemas que involucran enteros (o fracciones y decimales). • Resuelve problemas que involucran enteros (fracciones y decimales). • Formula situaciones problemáticas que requieran para su solución operaciones con números decimales. • Resuelve situaciones problemáticas que requieran para su solución operaciones con números decimales. • Formula situaciones problemáticas que requieran para su solución magnitudes directa o inversamente proporcionales.
TERCER GRADO		
• Identifica proposiciones. • Propone conjeturas. • Utiliza cuantificadores y sus negaciones. • Propone ejemplos y contraejemplos. • Identifica progresiones aritméticas y geométricas. • Clasifica ángulos según sus medidas.	• Construye proposiciones utilizando conectivos lógicos. • Traduce un enunciado literal al lenguaje algebraico. • Identifica números reales en la recta numérica. • Identifica gráficas de funciones. • Identifica puntos, rectas, segmentos, rayos y semirrectas.	• Formula problemas que requieran para su solución operaciones con números reales. • Usa conectivos lógicos. • Realiza operaciones con intervalos. • Resuelve inecuaciones de primer grado y segundo grado en una variable. • Resuelve inecuaciones polinómicas. • Resuelve inecuaciones con valor absoluto.
CUARTO GRADO		
• Identifica triángulos semejantes y sus propiedades. • Reconoce las líneas notables de un triángulo. • Identifica poliedros regulares. • Utiliza el teorema de las tres perpendiculares. • Identifica prismas y pirámides. • Identifica cilindros y conos. • Reconoce superficies esféricas.	• Grafica funciones reales de variable real. • Interpreta gráficas de funciones. • Interpreta la expresión del Binomio de Newton.	• Calcula áreas de regiones poligonales y de regiones circulares. • Resuelve problemas de regiones poligonales y circulares. • Determina rectas y planos en el espacio. • Resuelve problemas que involucran rectas paralelas y perpendiculares. • Calcula áreas de superficies cilíndricas y esféricas.
QUINTO GRADO		
• Identifica y ubica ángulos en posición normal. • Reconoce las identidades trigonométricas y las de suma y diferencia de dos ángulos. • Reconoce las identidades trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad.	• Grafica funciones: exponenciales y logarítmicas. • Representa gráficamente funciones trigonométricas. • Deduce las razones trigonométricas de ángulos notables.	• Calcula razones trigonométricas. • Convierte la medida de un ángulo de un sistema a otro. • Calcula razones trigonométricas de un ángulo agudo. • Calcula razones trigonométricas de ángulos en posición normal. • Aplica la ley de senos y cosenos en la resolución de triángulos.

- **La situación de evaluación.** La situación de evaluación se define como el período en el cual se produce intencionalmente un proceso de interacción entre el docente y el estudiante o entre los mismos estudiantes, con el propósito de recoger información sobre los aprendizajes alcanzados por éstos, para cuyo fin se emplean los procedimientos, las técnicas y los instrumentos de evaluación que sean pertinentes y necesarios.

  El aprendizaje de la matemática, debe propiciar en el alumno:

  - Sólida formación,
  - Capacidad para interpretar, formular y resolver situaciones problemáticas
  - Capacidad para investigar,
  - Habilidades para utilizar materiales (material manipulable, calculadoras y computadora) y,
  - Actitud para trabajar en equipo.

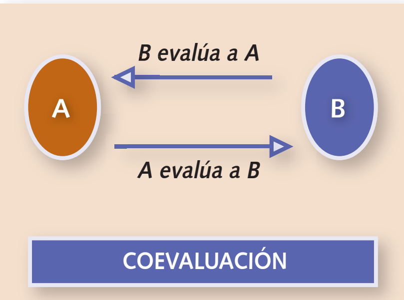
4. Procedimientos de evaluación

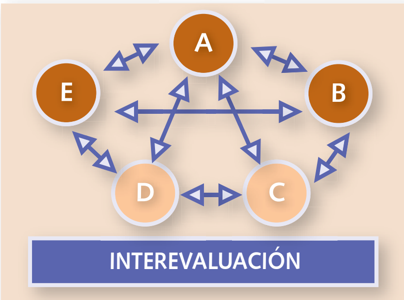
Los procedimientos de evaluación son las formas o modos que se seleccionan para recoger información de los niveles de logro de las capacidades previstas, por parte de los estudiantes. En algunos casos, estas formas o maneras de recoger información son de carácter socializado o grupal. El proceso de socialización de la evaluación, resulta casi siempre de carácter fundamental, cuando se le emplea como medio de formación y de consolidación de los aprendizajes, no sólo porque permite la auto comunicación de la información obtenida, sino también, porque al participar en ella los mismos participantes se educan y se forman.

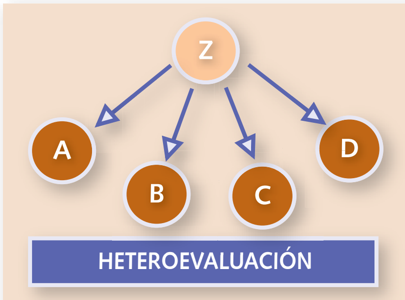
La autoevaluación, la coevaluación (por pares) y la interevaluación, por ejemplo en el caso del aprendizaje de valores y actitudes, son procedimientos que permiten lograr un doble propósito: obtener datos referidos a la evaluación y, formar paralelamente a los que participan en ella, en la práctica de la actitud crítica, la actitud democrática, la solidaridad, etc., sin dejar de lado la capacidad de razonar, fundamentar y demostrar que sus opiniones son correctas o justas.

Son procedimientos de evaluación:

1. Las intervenciones escritas.
2. Las intervenciones orales.
3. Las asignaciones.
4. Los trabajos de investigación.
5. La heteroevaluación.
6. La autoevaluación.
7. La coevaluación.
8. La interevaluación.
9. La carpeta de evaluación.
10. El sociodrama, y otros.







- **Los procedimientos suelen apoyarse en determinadas técnicas.** Estas vendrían a ser en el proceso de evaluación, algo así como procedimientos específicos que permiten llevar a cabo, con más precisión, la medición o la apreciación, de algún aspecto motivo de evaluación. Por ello, las técnicas dan origen a apreciaciones, juicios o valoraciones basadas en percepciones discriminativas finas y elaboradas de parte del profesional que realiza la evaluación. Son ejemplos de técnicas de evaluación:

- La observación sistemática, basada en una ficha específica de observación de actitudes.
- La entrevista, en función de una ficha de entrevista concreta, para identificar temores o fobias.
- La exposición de un tema específico para verificar desempeño, capacidad de fundamentación, etc.
- La escala de actitudes, etc.

5. Instrumentos de evaluación

Se traducen, por lo general, en formularios, fichas, encuestas, pruebas, test u otros de esa misma naturaleza, con los cuales se recoge o capta información para evaluar. Cualquier instrumento de evaluación requiere para su elaboración, de actividades de diseño previo. Es importante en ese sentido, por ejemplo, elaborar instrumentos en base a una tabla de especificaciones o en función de un diseño predeterminado. Una tabla de especificaciones, no es otra cosa que una matriz en la cual se consideran los aspectos motivo de evaluación y el peso o distribución de las preguntas que para cada caso se ha previsto. Los diseños axiales, son tablas de especificaciones en base a ciertos temas que se constituyen en "ejes" de la evaluación y sobre los cuales se enfatizará la acción de evaluación.

Son instrumentos de evaluación:

- Una prueba escrita de tipo objetivo y respuesta cerrada (tipo verdadero falso, de alternativa múltiple, de laguna, de completamiento, etc.).
- Una ficha de observación.
- Una listas de cotejo.
- Una escala de actitudes tipo Lickert.
- La estructura de un mapa conceptual, para llenar con conceptos y conectivos, etc.

En la práctica, cada uno de los procedimientos se traduce en un instrumento. Ejemplo: la observación sistemática como procedimiento requiere, necesariamente, de un instrumento que permita recoger los datos deseados en forma organizada, dicho instrumento puede ser una lista de cotejo o una ficha de observación. Sin embargo, independientemente del procedimiento, la técnica o el instrumento que apliquemos, es importante que cuando trabajemos en evaluación, tengamos cuidado de tener en cuenta los siguientes principios:

- **Validez:** es el grado en que un instrumento realmente mide la variable que pretende evaluar. En nuestro caso, el instrumento debe corresponder a las capacidades que se pretenden evaluar. Con un instrumento diseñado y formulado para evaluar conocimientos, por ejemplo, no es válido evaluar capacidades y, a pesar de que pueda aplicarse la prueba, los resultados no nos dirán nada relevante. En principio, la evaluación de capacidades tiene que ser de tipo PROGRESIVA, porque no se puede concebir que un alumno que ha logrado un nivel B en pensamiento crítico en el 2° trimestre, por ejemplo, en el tercer trimestre retroceda a un nivel C.
- **Confiabilidad:** es el grado en que la aplicación repetida de un instrumento, en situaciones similares, produce iguales resultados en diferentes ocasiones. Una prueba de conocimientos, por ejemplo, si es que es confiable, debe arrojar resultados similares cuando se aplique en condiciones similares. Sin embargo, con mucha frecuencia hemos observado, por ejemplo, que en el 1° trimestre el alumno obtenía buena nota y a fin de año resultaba jalado, con pruebas sobre los mismos contenidos cognoscitivos. Es obvio que, ese detalle es justamente lo que invalida cualquier forma de evaluación de conocimientos porque éstos se olvidan, en tanto, las capacidades se adquieren para siempre.

  Convendría, entonces, preguntarnos: ¿vale la pena trabajar para lograr que nuestros alumnos aprendan conocimientos que más tarde o más temprano se olvidarán? Es evidente que es mucho más seguro, desarrollar CAPACIDADES, porque éstas una vez que se adquieren, no se pierden ni se olvidad. Si de alguna forma adquirimos la capacidad de tomar decisiones, por ejemplo, esta capacidad jamás se olvidará.

  A continuación se presenta una relación de procedimientos e instrumentos aplicables.

- **Observación sistemática:** Ficha de observación, Lista de cotejo, Lista de verificación de capacidades.
- **Intervenciones o situaciones orales de evaluación:** Diálogo, Debate, Examen oral, Exposición
- **Ejercicios prácticos:** Mapa conceptual, Análisis de casos, Proyectos, Diario, Portafolio, Ensayo.
- **Intervenciones escritas:** Pruebas de desarrollo o de desempeño.
- Examen temático.
- Ejercicio interpretativo.
- **Pruebas objetivas:** De completamiento o laguna, De respuesta alternativa (si a entonces no b), De correspondencia o apareamiento, De selección múltiple, De ordenamiento, De dicotomía (verdadero/falso), Escala de actitudes (tipo Lickert), Diferencial semántico, La carpeta o portafolio (legajo de progresos), Webs de interés (donde haya internet), etc.

EJEMPLO DE INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

UNIDAD DIDÁCTICA: UNA FOTOGRAFÍA DE MI LOCALIDAD

Indicadores de evaluación

1. Elabora gráficos (lineales, de barras, de doble barra, circulares) y pictogramas a partir de datos.
2. Interpreta gráficos a partir de datos.
3. Organiza, formula y dirige una encuesta.
4. Elabora y utiliza tablas y gráficos de frecuencia.
5. Utiliza medidas de tendencia central.
6. Utiliza razonamiento inductivo para hacer las predicciones.
7. Escribe enunciados condicionales, disyuntivos y conjuntivos.
8. Formula ejemplos, contraejemplos, conjeturas y argumentos.
9. Redondea, estima, calcula y resuelve problemas con fracciones, decimales, porcentajes y enteros.
10. Resuelve problemas de proporcionalidad.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE

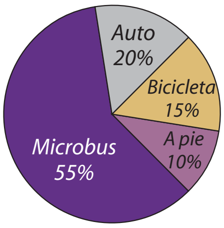
1. Aldo nunca dice la verdad. Ante la pregunta: ¿eres mentiroso? Aldo responde:

A. Sí **B.** No **C.** A veces **D.** Un día sí y el otro no

2. Alejandro lee el anuncio: «Toma diariamente tres vasos de leche y no serás chato». Miguel mide 1,62 m. Por lo tanto:

A. Miguel no tomó diariamente tres vasos de leche.
B. Miguel sólo tomó dos vasos de leche.
C. No sabemos si Miguel tomó leche.
D. A Miguel no le gusta la leche.

3. Los 40 estudiantes del aula usan diversos medios de transporte para llegar al colegio. El siguiente gráfico circular muestra los porcentajes de niños que usan cada medio. ¿Qué cantidad de estudiantes llegan al colegio en bicicleta?



A. 4 niños **B.** 6 niños
C. 8 niños **D.** 22 niños

4. Las tallas (en cm) de un grupo de alumnos de Educación Secundaria son: 165; 171; 154; 165; 161; 166; 169; 158; 173 y 169.

4.1 Determina la media de las tallas.

A. 159 **B.** 160 **C.** 165 **D.** 165,5

4.2 Determina la mediana de las tallas.

A. 165 **B.** 166 **C.** 166,5 **D.** 164

4.3 Determina la moda de las tallas.

A. 162 **B.** 164 **C.** 169 **D.** 172

5. Se tiene las edades de 50 pobladores encuestados, cuyos datos se encuentran en la siguiente tabla. Halla la mediana de las edades.

Edades	N° de pobladores
19	3
22	6
25	9
26	5
27	2

A. 23
B. 24
C. 25
D. 26

6. Javier gastó el fin de semana (viernes, sábado y domingo) un promedio de 85 soles por día. Si el viernes gastó S/. 60 y el sábado gastó S/. 80, ¿cuánto gastó el domingo?

A. S/. 95 A. S/. 105 A. S/. 110 A. S/. 115

7. Luis, Enrique y Alfredo llevaron provisiones para 12 días. Si aumenta una persona. ¿Para cuántos días alcanzarán dichas provisiones?

A. 6 días **B.** 8 días **C.** 9 días **D.** 10 días

8. Se necesita agua mineral para llenar 60 vasos de 0,15 litros cada uno, ¿cuántas botellas de 1,5 litros cada una, habrá que utilizar para llenarlos?

A. 60 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 6

PRUEBA DE DESEMPEÑO

1. En una reunión de un padre con sus dos hijos (mayor y menor) se escucha el diálogo siguiente (una intervención por cada uno):
   - Tú tienes el doble de edad que mi hermano.
   - Tú naciste cuando tu hermano tenía 7 años.
   - Nuestras edades suman 77 años.

   Determina a quién corresponde cada expresión (padre, hijo mayor, hijo menor).
   Enuncia el problema.
2. Mariella, Carmen y Elizabeth son profesoras del colegio «Mundo Feliz». Ellas nacieron en Piura, Huancayo y Lima (no necesariamente en este orden). Cada una expresó dos oraciones.
   Nací en un pueblo de la costa norte del Perú. En Lima presencié el nacimiento de Mariella.
   El Huaylarsh lo aprendí en mi pueblo. Los huancas nunca se rinden.
   Soy limeña mazamorrera. Carmen sólo baila tondero.
   Determina el lugar de nacimiento de cada profesora.
3. Un fundo agrícola tiene 120 hectáreas dedicadas al cultivo de papa, maíz, frijol y camote. 24 hectáreas están sembradas de papa, 30 hectáreas de frijol, 36 hectáreas de maíz y el resto de camote. Elabora un cuadro de barras y otro circular para presentar la información. ¿Cuál medida de tendencia central usarías para interpretar mejor esta situación?
4. Las ventas diarias de una pollería durante una semana son: 800; 1000; 1600; 2400; 1600; 1400 y 1000 soles, respectivamente. ¿Cuál es la media de las ventas diarias? ¿Cuál es la mediana? ¿Cuál es la moda?
5. La receta de cebiche de pescado para 5 personas es: 1 kg de pescado en filete, 1/2 taza de jugo de limón, 1/2 de jugo de naranja agria, 1 cebolla grande cortada a la pluma, 1 ají limo picado, 1 rocoto en rodajas, 1 diente de ajo picado, 1 cucharadita de culantro picado y 1/4 cucharadita de kion rallado, 1/4 de taza de apio picado. ¿Cuál es la receta para 18 personas?

Bibliografía

ALSINA; C. et al, (1996). Enseñar matemáticas. Barcelona. Editorial Graó.

BERTONI, Alicia. et al; (1997). Evaluación, nuevos significados para una práctica compleja. Bogotá, Editorial Norma, Kapeluz.

BIEMBENGUT, M y HEIN, N, (2000). Modelagem matemática no ensino. Sao Paulo, Editorial Contexto.

BLANCA, NARCEA, (1990). Evaluación criterial. Madrid, Gómez Arbeo, S. A. de Ediciones.

CORBALÁN, Fernando. (1995). La Matemática aplicada a la vida cotidiana. Barcelona, Editorial Graó, de Serveis Pedagógics.

CHEVALLARD, Ives et al; (1997). Estudiar Matemáticas. Cuadernos de Educación N.° 22, I.C.E. Universitat Barcelona. Editorial Horsori.

GOÑI, Jesús M. et al; (2000). La evaluación en matemáticas. Aula de Innovación Educativa N.° 93, 94. Barcelona.

ICC (Centro Internacional de Coordinación del TIMMS). (1992). Project Overview, Canadá.

LEON PEREIRA, Teresa, (1997). Indicadores. Un mirador para la educación, Bogotá, Editorial Norma.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIAS, (1985). Las Matemáticas sí cuentan. Subdirección de perfeccionamiento del profesorado, Informe de la Comisión de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las escuelas bajo la presidencia del Dr. W. H. Cockcroft, (Inglaterra y Gales) Edición en castellano.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN, (1996). Propuesta de Tablas de Especificaciones. Buenos Aires, Dirección Nacional de Evaluación.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN, (1995). Recomendaciones metodológicas para la enseñanza. Buenos Aires, Secretaría de Programación y Evaluación Educativa.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. REPÚBLICA DE CHILE, Matemática. Programa de Estudio. Primer Año Medio. Santiago, 1998.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM), U. S. A., (1989). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Edición en Castellano publicada por la Sociedad Matemática Andaluza, 1991.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM), U.S.A., (1999): Principles and Standards for School Mathematics. Discussion Draft. Virginia.