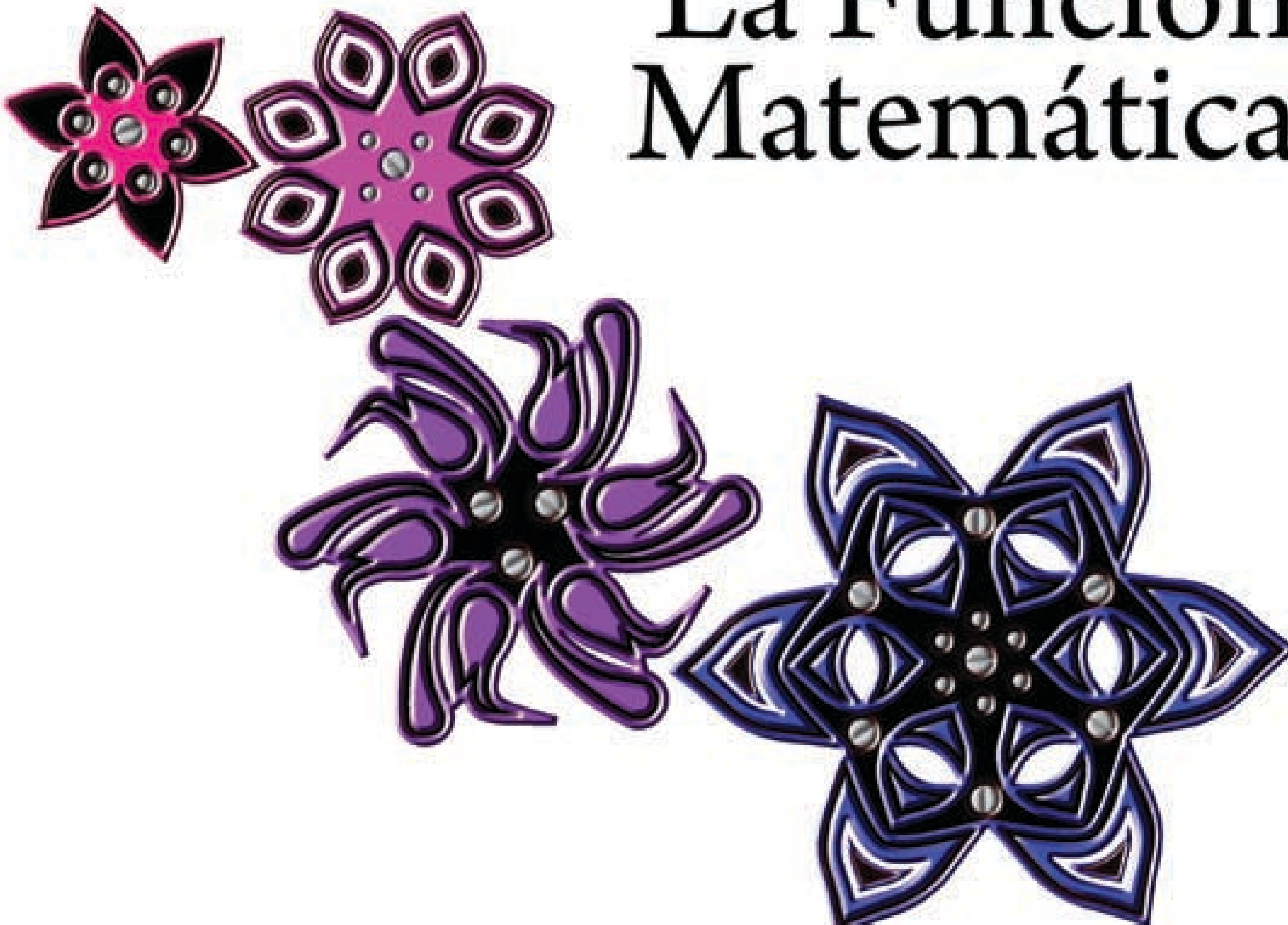
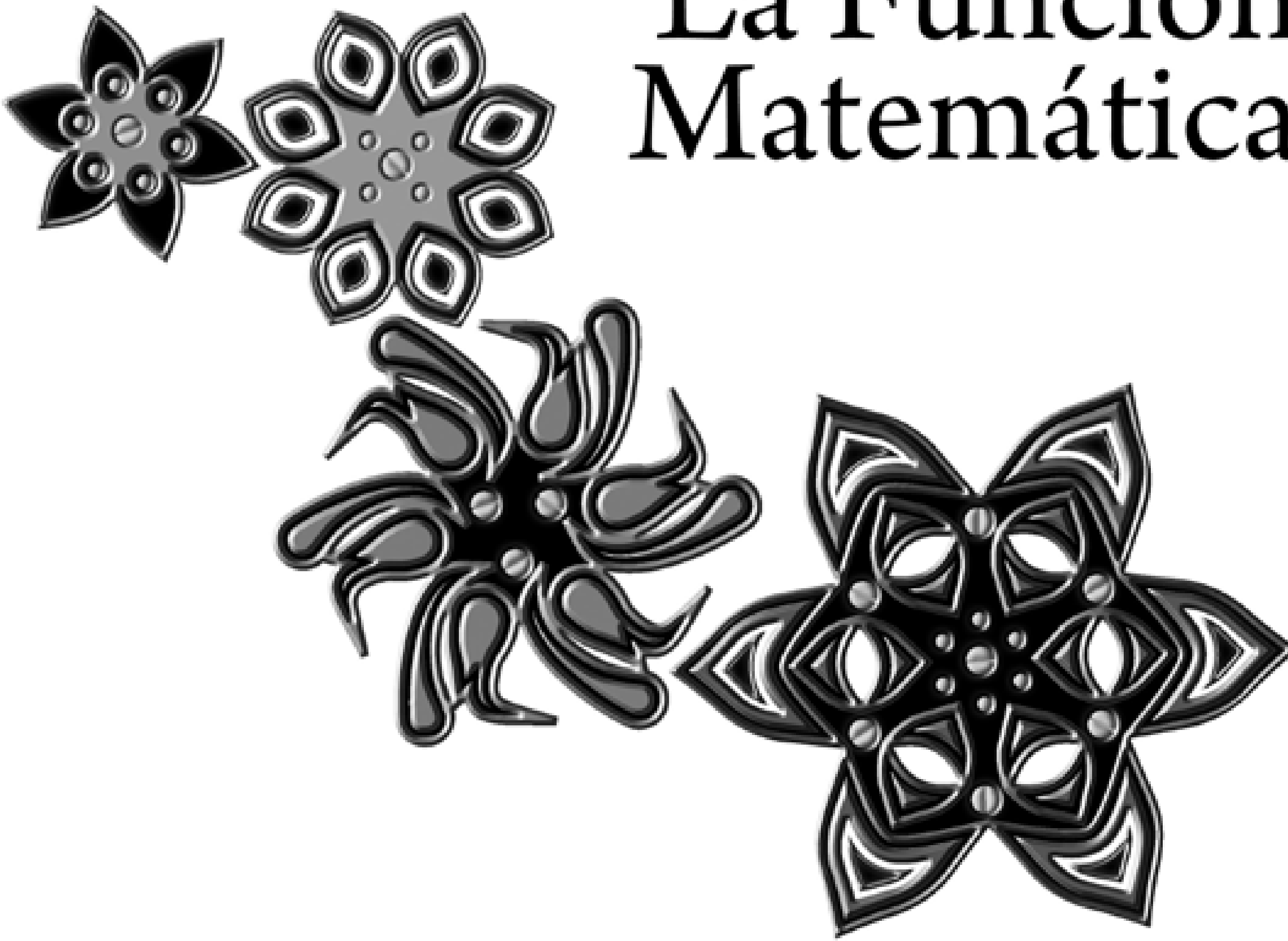
Serie Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 20

La Función Matemática



Serie Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 20

La Función Matemática



por Martín Andonegui Zabala

372.7
And.
Cuaderno Nº 20
La función matemática
Federación Internacional Fe y Alegría,
Enero 2008
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 978-980-7119-06-1
Matemáticas, Funciones

“Como educadores estamos en la obligación de proporcionar instrumentos para que las generaciones futuras sean capaces de analizar y construir criticamente la realidad social que viven, comenzando por la interpretación de lo qué se “dice” y del cómo se “habla” acerca de las cosas que preocupan o inquietan al ser humano.”

María Bethencourt
y Emanuele Amodio

EQUIPO EDITORIAL
Beatriz Borjas y Carlos Guédez

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Cuaderno Nº 20
La función matemática
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría.
*Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

*Diseño y Diagramación: **Nubardo Coy***
*Ilustraciones: **Corina Álvarez***
*Concepto gráfico: **Juan Bravo***
*Corrección de textos: **Carlos Guédez** y **Martín Andonegui***

Edita y distribuye: Federación Internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5631776 / 5632048 5647423.
Fax: (58) (212) 5645096
www.feyalegria.org

Depósito legal: lf 6032008510278
Caracas, Enero 2008

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis - Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) – Corporación Andina de Fomento (CAF)

introducción

A modo de introducción..., nuestro recordatorio

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales…- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, las funciones matemáticas.

1. Una mirada a las situaciones de nuestro entorno: variabilidad y dependencia

Evidentemente, ver las cosas y situaciones de nuestro entorno es algo sencillo: basta con abrir los ojos (y prender alguna luz, si estamos a oscuras…); pero lo interesante es la perspectiva desde la cual nos asomamos y miramos a nuestro mundo. Una de esas posibles perspectivas es la de fijarnos en la ***variación*** de las cosas y situaciones que nos rodean y envuelven (Freudenthal, 1983), tanto en el mundo físico como en el social y cultural; e, incluso, en el mental, propio de cada persona.

Esa mirada nos hace descubrir una gran cantidad de fenómenos que cambian; por ejemplo, a lo largo de un día, nuestras ocupaciones y nuestro humor, la gente que se va encontrando a nuestro alrededor, nuestros sentimientos hacia determinada persona, nuestras expectativas acerca del éxito en nuestras tareas, nuestras ganas de trabajar, nuestro apetito, nuestro cansancio, lo que decimos y el tono en que lo hacemos, lo que pensamos, las posturas de nuestro cuerpo…

También hay otras cosas que varían en nuestro entorno, variación que puede "cuantificarse" de alguna manera; por ejemplo, las temperaturas locales a lo largo de un día, o las temperaturas diarias, extremas o promedio, a lo largo de un año; y también a lo largo de un año, la cantidad diaria de agua de lluvia recogida por m^2, el monto de los ingresos familiares mensuales, las horas diarias de salida y puesta del sol, la valoración poblacional mensual o trimestral referida a la actuación de un gobernante, el tamaño y la forma de la sombra de un objeto según las distintas estaciones y momentos del día, el tiempo de traslado desde la casa al lugar de trabajo, las condiciones climáticas, la estatura y el peso de un niño, o sus conocimientos matemáticos, y un etcétera muy largo.

Finalmente, el propio campo de los objetos matemáticos puede verse como un terreno de objetos variables; por ejemplo, la suma o el producto de dos números, según sean este par de números; el triple o la mitad de una cantidad, según sea ésta; el área de un cuadrado o de un círculo, de acuerdo con la medida de su lado o del radio, respectivamente; la distribución de frecuencias o el histograma que representa las preferencias deportivas de un grupo de jóvenes, según las características de tal grupo; o el cálculo del tiempo que tarda un vehículo en desplazarse entre dos puntos, de acuerdo con la velocidad a la que se mueve.

Como puede apreciarse, la variabilidad de las cosas y de los fenómenos que forman nuestro entorno físico, social y mental, es muy grande. Tanto, que es posible asignar un calificativo a todas estas magnitudes que varían: todas ellas se denominan ***variables*** (muy original, ¿no?). Así, hasta ahora hemos estado hablando de diversas variables: sentimientos, sensaciones, pensamientos, temperaturas, horarios de salida y puesta del sol, número de inasistencias diarias de los alumnos de nuestro centro escolar, número de viviendas construidas anualmente, pesos y estaturas de un niño, distancias recorridas a velocidad constante, área de un cuadrado o de un círculo, longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo…

Pero si la analizamos un poco más a fondo, descubrimos que la variabilidad de un fenómeno o de una magnitud responde a unas condiciones de ***dependencia*** del mismo con respecto a ciertas causas o a ciertas magnitudes acompañantes, que también varían; es decir, hay variables que dependen de otras variables. Las primeras se denominan ***variables dependientes*** y las segundas, ***variables independientes*** (como se ve, seguimos siendo muy originales).

Si hablamos, por ejemplo, de nuestra alegría como variable dependiente, podemos identificar algunas de las causas que la producen (variables independientes); por ejemplo, la aceptación de sí mismo, el amor como motor de nuestra vida, la capacidad de asumir con humor lo que nos acontece, nuestro nivel de tolerancia y de perdón, y otras razones más. Pues bien, los diversos valores de estas variables independientes en un momento dado y el modo peculiar de combinarlas, que es muy propio de cada persona (es una receta personal), pueden determinar el "nivel" de mi alegría en ese momento; pero nos interesa destacar no sólo eso sino que, además, la variación de las variables independientes explica la de la variable dependiente.

El anterior es un ejemplo de variabilidad expresada en términos de ***dependencia causal***: hay fenómenos cuya variación es efecto de la variación de las causas que los producen. Pero muchas veces, la dependencia que describe la variabilidad no se da en esos términos de causa-efecto, sino en términos de ***relación***, de acompañamiento entre variables. Esta relación puede presentarse de diversas maneras.

Una de ellas ocurre cuando una de las variables actúa como si sirviera de testigo, de acompañante, de referencia, de verificador de la variación de la otra variable (sin ser su causa directa, en términos de acción). En estos términos y en esta vida mortal, hay una variable independiente por excelencia: el ***tiempo***.

El tiempo parece "transcurrir" por su cuenta sin que nadie lo empuje ni lo detenga y en su transcurso se hace manifiesta la variación de un sinnúmero de variables; por ejemplo, todas las variables personales, sean físicas o psicológicas; y otras muchas más, como las ya citadas: medidas diariamente a lo largo de un año, las temperaturas extremas, las precipitaciones, las horas de salida y puesta del sol, los niveles máximos de presión atmosférica y de humedad, el número de inasistencias de alumnos a nuestro centro escolar; medidas a lo largo de los meses o de los años, el número de viviendas construidas en un país, el crecimiento en peso o en estatura de un niño…; o, también, la distancia d recorrida por un vehículo que se mueve a una velocidad constante v durante cierto período de tiempo t [$d = vt$].

En todos estos casos, el tiempo no "produce" la variación que se puede observar y medir en cada una de esas variables; no es el factor que la causa en términos de producción física, pero sí acompaña esa variación y le sirve de referencia y control. Por ejemplo, la siguiente tabla de valores relaciona la variable "estatura de un niño", medida mensualmente en centímetros, con la variable tiempo, medida en meses a lo largo de un año:

En.	Febr.	Mar.	Abr.	Mayo	Jun.	Jul.	Ag.	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
127	127	128	129	130	130	131	131	132	133	134	134

Evidentemente, el tiempo no produce la variación en la estatura del niño (ésta depende "causalmente" de los aspectos genéticos, de la alimentación y de las condiciones sanitarias que afectan al niño); pero sí sirve de control y referencia para su variación. Así, decimos que en Enero el niño mide 127 cm, o que la estatura de 133 cm se alcanza en Octubre; es decir, que para cada valor de medida del tiempo, se puede asociar algún valor de la estatura del niño. Y este tipo de relación es suficiente para establecer que, en esta situación, el tiempo actúa como variable independiente con respecto a la variable dependiente estatura del niño.

Otra de las maneras en que la dependencia de una variable con respecto a una segunda se da en términos de relación, de acompañamiento entre variables, es la que acontece cuando existe ***una regla*** o una fórmula que liga ambas variables. Por ejemplo, en una reunión escolar de los alumnos con sus mamás, si por un lado tenemos el conjunto de niños y niñas de un salón de clase y, por otro, el conjunto de sus mamás, la regla o consigna "ser la mamá de" asocia a cada niño o niña con su mamá.

Veamos este caso con más detalle. Si la mamá de Inés es Guadalupe, entonces podríamos representar esta relación –además de verbalmente, al decir sin más "Guadalupe es la mamá de Inés"- algo así como: "mamá de" Inés ⟶ Guadalupe. Esta forma de representación tiene la virtud de destacar los elementos que forman parte de la relación establecida: "mamá de" es la regla o consigna, Inés es la niña, Guadalupe es la mamá de Inés.

En el ejemplo del párrafo anterior, Inés actúa como variable independiente para la regla "ser la mamá de", mientras que Guadalupe es la variable dependiente de la relación. En efecto, Guadalupe sólo aparece, como mamá, cuando la maestra diga el nombre de la niña; en otras palabras, la aparición de Guadalupe "depende de" que sea nombrada la niña; mientras la maestra diga el nombre de otras niñas o de otros niños, Guadalupe no se dará por aludida, pero en cuanto oiga el nombre de su hija Inés se presentará como su mamá. En este ejemplo podemos decir que ***la consigna "es la mamá de" está esperando el nombre de una niña o de un niño (variable independiente) para que se le asocie el nombre de su mamá (variable dependiente)***. Esto incluye, por ejemplo, el caso de que Inés tenga un hermanito en el mismo salón (supongamos que se llama Carlos): también se podrá decir "mamá de" Carlos ⟶ Guadalupe.

Hay muchas reglas o consignas de este tipo que forman parte de nuestras conversaciones, o de las cosas que se escriben y leemos; por ejemplo, las relaciones familiares [ser hermano(a) de, ser abuelo(a) de, etc.], las relaciones del tipo "es la capital de" cuando las aplicamos a ciudades que son capitales de países, o de regiones, departamentos, provincias, municipios… También aparecen en otras muchas situaciones diarias: ser el jefe de (en una relación laboral), ser el siguiente de (en una lista o en una cola), y un etcétera muy largo. Incluso hay acciones que funcionan como consignas; por ejemplo, pulsamos un botón o una palanca y se prende una determinada lámpara, o movemos un botón y van apareciendo distintos canales de televisión o distintas emisoras de radio…

En todas estas situaciones se dice que la regla establece una ***correspondencia*** entre elementos de los dos conjuntos que son afectados por la relación; por ejemplo, entre el conjunto de alumnos y el conjunto de sus mamás, la regla nos dice que Inés y Guadalupe están en correspondencia, así como Carlos y Guadalupe.

Además, en cada uno de estos casos ***identificamos como variable independiente aquel nombre de persona u objeto al que se le aplica la regla, y como variable dependiente, aquel nombre de persona u objeto que resulta de esa aplicación***. Por ejemplo, si Tomás trabaja subordinado a Ángela, decimos "jefe de" Tomás → Ángela; Tomás actúa como variable independiente y Ángela, como variable dependiente. Ojo con este ejemplo: estamos hablando de variables dependientes o independientes en sentido matemático, aun cuando en el terreno laboral sea Tomás quien dependa de Ángela, su jefa.

Estas reglas o fórmulas también funcionan en otras situaciones, tales como las traducciones. Por ejemplo, traducir un texto escrito en quechua al castellano entra en el esquema del que estamos hablando; podría escribirse como regla de esta manera: "Traducir texto en" quechua ⟶ texto en castellano; el texto en quechua se considera como variable independiente, y el texto traducido al castellano, resultado de esa traducción, como variable dependiente: lo que se va a escribir en castellano depende de lo que esté escrito en quechua.

El ejemplo anterior nos introduce en un ámbito muy interesante, el de los diversos lenguajes; tenemos la escritura en signos telegráficos (Morse), en signos para ciegos (Braille), mediante signos manuales y corporales para sordomudos, etc. Traducir textos de un lenguaje a otro se incluye en este ámbito de las relaciones establecidas mediante reglas o consignas.

También podemos destacar aquí la criptografía [del griego: *kriptós*, oculto, y *–grafía*, escritura. **1.** f. Arte de escribir con clave secreta o de un modo enigmático]. Es el arte –y hoy día, una rama de las matemáticas- de la escritura en clave, muy utilizada en el ámbito militar y en el de los negocios, y cada vez que deseamos decir algo que queremos sea captado sólo por el grupo de destinatarios que nos interesa, grupo que debe estar al tanto de las claves de traducción utilizadas. Estas claves pueden consistir en cambiar unas letras por otras, o por números o símbolos, etc.

Por cierto, un caso cotidiano de esta práctica lo tenemos en la elaboración de los mensajes de texto que enviamos por medio de los móviles o celulares. Por ejemplo, pulsar dos veces seguidas la tecla numérica 2 "se traduce" en la letra b; y así para las demás letras. Evidentemente, existe un mecanismo interno en el aparato encargado de estas traducciones.

Y como no podía faltar, las reglas, consignas y fórmulas también están presentes en el propio mundo de los objetos matemáticos. Por ejemplo, la regla de "ser el doble de" puede ir asociando pares de números naturales: "el doble de" 4 ⟶ 8, situación en la que 4 funge de variable independiente, y 8, de variable dependiente; o también, "la mitad de" 8 ⟶ 4, situación en que las variables independiente y dependiente son, ahora, 8 y 4, respectivamente.

En el mundo matemático, estas reglas vienen representadas de diversas maneras. Tomemos el caso sencillo de la suma de dos números naturales; la regla podría denotarse así: "suma de" [sumando 1º] y [sumando 2º]⟶ resultado de la suma. La "regla" de sumar viene dada por las ***tablas*** básicas de la suma y por las normas que rigen los ***algoritmos*** o procedimientos para sumar. Igual ocurre con las demás operaciones aritméticas.

Entre estas últimas, detengámonos por un momento en el caso de las operaciones de sumar, restar y multiplicar. En ellas observamos que la variable dependiente (el resultado de cada una de las operaciones: la suma, la diferencia, el producto, respectivamente) depende de un par de variables independientes (los dos sumandos, el minuendo y el sustraendo, los dos factores, respectivamente). Son, pues, situaciones en las que la variable dependiente depende de más de una variable independiente. Claro que, en algunos casos particulares, esa dependencia puede reducirse a la de una sola variable independiente; esto es lo que ocurre, por ejemplo en las tablas de sumar y de multiplicar, cuando tomamos una tabla en particular. Así, dentro de la tabla de multiplicar del 5, el producto depende de tan sólo del factor variable por el que se va a multiplicar el 5: "multiplicar por 5" el factor 7 ⟶ 35.

También cabe destacar que estas operaciones, con sus reglas particulares (tablas y algoritmos) y sus variables independientes y dependiente, poseen sus propios símbolos de descripción: $a + b = c$, $m - n = p$, $r \times s = t$, respectivamente.

Un caso muy singular representa la operación de división, ya que como se indicó en el Cuaderno Nº 7, de los valores que posean el dividendo y el divisor dependen los valores del cociente y del resto; es decir, cociente y resto son las variables dependientes, mientras que dividendo y divisor actúan como variables independientes.

Vemos, pues, que en el caso de las operaciones aritméticas, la regla de dependencia entre las variables independientes y dependientes viene dada por las tablas y los algoritmos de dichas operaciones. Pero hay otros casos en el terreno matemático en el que esta dependencia se concreta todavía más, tomando el aspecto de verdaderas ***fórmulas*** que relacionan las variables independientes (que pueden ser más de una) con una variable dependiente.

Tal es el caso, por ejemplo, del perímetro p de un cuadrado cuyo lado mida l unidades; en la forma en que venimos describiendo esta relación pondríamos: "multiplicar por 4 la longitud del lado" $l \longrightarrow p$. Pero la forma habitual de indicarlo es: $p = 4l$. De manera similar, para expresar el área A de un rectángulo cuyos lados miden b y h disponemos de la fórmula: $A = bh$.

Con el fin de resumir lo que venimos diciendo acerca de las formas de relacionar las variables dependientes e independientes en el caso de los objetos matemáticos, vamos a construir una tabla en la que se indicarán, para varios de estos objetos, las variables que intervienen y, en los casos en que sea posible, la fórmula que liga las variables:

Objeto matemático	Variable(s) independiente(s)	Variable(s) dependiente(s)	Fórmula
Suma	a, b	$s = a + b$	
Resta	a, b ($a \geq b$)	$d = a - b$	
Multiplicación	a, b	$p = a \times b$	
Un factor	a, p	$b = p/a$	
División	dividendo (D), divisor (d)	cociente (c), resto (r)	
División	divisor (d), cociente (c), resto (r)	dividendo (D)	$D = c \times d + r$
Máximo divisor común	a, b	m.d.c.(a, b)	
Mínimo múltiplo común	a, b	m.m.c.(a, b)	
Simetría axial	figura inicial, eje de simetría	figura simétrica	
Simetría axial	dos figuras	eje de simetría (si existe)	
Perímetro de un polígono de n lados	medidas de los n lados: l_1, l_2, …, l_n	perímetro	$p = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$
Área de un triángulo	b, h	A	$A = 1/2\,(bh)$
Área de un trapecio	A, B, b	altura (h)	$h = 2A\,/\,(B + b)$
Longitud de una circunferencia	r	l	$l = 2\pi r$
Área de un círculo	r	A	$A = \pi\, r^2$
Hipotenusa de un triángulo rectángulo	catetos a y b	hipotenusa c	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Volumen de un cilindro	r, h	V	$V = \pi\, r^2 h$
Mediatriz de un segmento AB	ubicación de A y B	mediatriz	
Bisectriz de un ángulo	ubicación de las dos semirrectas	bisectriz	
Paralela a una recta r por un punto exterior P	ubicación de r y P	recta paralela	
Magnitudes directamente proporcionales	razón (r), valor conocido (x)	valor desconocido (y)	$y = rx$
Media aritmética de n datos	x_1, x_2,…, x_n	$\bar{x}$	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$
Probabilidad de un evento (equiprobable)	espacio muestral	p	p = (# casos favorables) / (# casos posibles)

Bien. Vamos a detenernos un momento con el fin de resumir, a grandes trazos, las ideas expuestas hasta ahora:

1. Existen fenómenos, situaciones, objetos, que muestran variabilidad en los valores o niveles en los que se manifiestan.

2. Esta variabilidad revela una situación de dependencia de ciertas variables (dependientes) con respecto a otras (independientes).

3. La dependencia puede ser causal o de relación; la primera revela situaciones de causa-efecto entre las variables independiente(s) y dependiente.

4. La relación de dependencia no causal puede manifestarse:

   - por la presencia de una variable independiente (por ejemplo, el tiempo) que sirve de referencia para registrar la variación de la variable dependiente;

   - mediante la expresión de una regla o consigna, que establece una correspondencia entre las variables independiente y dependiente; regla que puede expresarse de manera verbal o en forma de algoritmos matemáticos;

   - mediante una fórmula matemática que liga la(s) variable(s) independiente(s) con la variable dependiente.

2. La función matemática

El recorrido anterior nos coloca frente al fenómeno de la variación de ciertas variables de los mundos físico, social y mental, variación que puede interpretarse en términos de dependencia de unas variables con respecto a otras, tal como acaba de describirse. Este fenómeno variación-dependencia tampoco resulta ajeno a la matemática (que, como se ve, está en todo…), disciplina que lo ha tomado como objeto de estudio.

Pues bien, en este terreno, ***el objeto matemático que sirve de pivote para el estudio de los fenómenos de variación-dependencia entre variables se denomina función***.

Obsérvese que ya el término forma parte de nuestro vocabulario habitual; por ejemplo, solemos escuchar: "el aumento del sueldo [variable dependiente] se hará *en función* de la productividad del empleado y de la disponibilidad de recursos de la empresa [variables independientes]", "la decisión de ir de paseo [variable dependiente] se tomará *en función* de las condiciones climatológicas" [variables independientes]; y muchas otras expresiones que el (la) lector(a) puede agregar por su cuenta.

2.1 El concepto de función matemática

No es fácil dar una definición precisa –una sola- del concepto de función ya que, como hemos visto, la dependencia entre variables se manifiesta de diversas maneras: causal o relacional; y dentro de esta última categoría, como relación con una variable de referencia, como regla que establece correspondencias, o como fórmula. Lo mejor es quedarse con esta diversidad: la función puede entenderse –y aceptarse- como la expresión de una dependencia causa-efecto, o como una relación entre variables que puede adoptar la forma de una regla, de una correspondencia entre elementos de al menos dos conjuntos, o de una fórmula. Y dejar que el contexto en el que se utilice sea el factor determinante para definir la función en cada caso.

Desarrollo histórico del concepto de función

El concepto de función –y el propio término que lo designa- son de aparición relativamente tardía en la historia de la matemática. En opinión de Kline (1992), el fenómeno físico cuyo estudio sirve de punto de partida para que empiece a hablarse de relaciones funcionales entre variables (aunque no se utilicen estos términos) es el del movimiento. Ya Galileo (1564-1642) lo estudia y establece algunas relaciones (fórmulas), en el lenguaje de las proporciones, entre las variables espacio recorrido, velocidad, aceleración y tiempo, según sea el tipo de movimiento; cabe agregar que este fenómeno también se estudia a partir de las curvas que lo representan.

La definición más explícita de función dada en el s. XVII, es ésta de Gregory (1667): "Cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable". Por esas mismas fechas, Leibniz (1673) designa como función "cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva". Y Jean Bernoulli (1697): "Cantidad formada, de cualquier manera posible, de variables y constantes". Y nuevamente Leibniz (1714): "Cantidad que depende de una variable" (Kline, o. c., p.449).

Ya avanzado el siglo XVIII, Euler (1748) se refiere a una función como "cualquier expresión analítica [es decir, una fórmula] formada, de modo arbitrario, a partir de una cantidad variable y de constantes" (Id., p. 539). Este es el concepto predominante en ese siglo, aunque también se oyen otras versiones, como ésta del propio Euler (1755): "Si unas cantidades dependen de otras de tal modo que sufren una variación cuando estas últimas varían, entonces se dice que las primeras son funciones de las segundas" (Id., p. 672).

A caballo entre los siglos XVIII y XIX, Lagrange (1797) continúa concibiendo las funciones al estilo predominante hasta ese momento: "Función de una o varias variables: cualquier expresión útil para el cálculo en que dichas variables intervienen de cualquier manera". Y también: "Una función es una combinación de operaciones" (Id., p. 541).

En el siglo XIX se introducen algunas precisiones en los conceptos y en los términos utilizados. Así, Cauchy (1821) escribe: "Se llama variable a una cantidad que se considera tiene que tomar sucesivamente muchos valores diferentes unos de los otros". "Cuando se relacionan cantidades variables entre ellas de modo que estando dado el valor de una de éstas, se puedan determinar los valores de todas las otras, ordinariamente se concibe a estas cantidades diversas expresadas por medio de la que está entre ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son aquellas que uno llama funciones de esta variable" (Id., p. 1254).

Finalmente, Dirichlet (1839) se expresa en términos matemáticos más precisos: "*y* es una función de *x* cuando a cada valor de *x* en un intervalo dado, le corresponde un único valor de *y*. No importa si en todo este intervalo *y* depende de *x* de acuerdo a una ley o más, o si la dependencia de *y* con respecto a *x* puede expresarse por medio de operaciones matemáticas" (Id., p. 1254).

Como puede apreciarse, los intentos por dar un concepto de función presentan la misma diversidad que hallamos en la descripción de la dependencia entre variables. Algunos autores destacan la relación de dependencia o de variación conjunta entre las variables, por encima de su concreción en una fórmula; otros exigen la necesaria presencia de un algoritmo o de una fórmula que permita obtener los valores de la variable dependiente; finalmente, otros insisten en la necesidad de que se puedan precisar estos valores de la variable dependiente, aun cuando la forma de conseguirlo sea arbitraria (empírica) y no responda a una fórmula precisa. También cabe destacar que algunos autores interpretan la expresión "la variable dependiente es función de la variable independiente" como una identificación entre los conceptos y términos "función" y "variable dependiente".

Hasta ahora hemos manejado los fenómenos variación-dependencia entre variables sin mayores restricciones. Y hemos descubierto que, históricamente, ese tipo de fenómenos ha sido estudiado por la matemática mediante la introducción del objeto matemático función. A este respecto, fijémonos por un momento en el concepto presentado por Dirichlet: "*y* es una función de *x* cuando a cada valor de *x* en un intervalo dado, le corresponde un único valor de *y*".

Nota: Al hilo de la observación de Dirichlet, a partir de este momento nos ceñiremos al estudio de las funciones en las que intervengan una variable dependiente y una sola variable independiente, sin que esta restricción afecte a lo esencial de este estudio de las funciones matemáticas.

Aquí, además del uso de cierta notación muy precisa (*y*, *x*, intervalo), se está imponiendo una restricción muy concreta al concepto matemático de función: ***que a cada valor de la variable independiente (x) en un conjunto de valores dado (en un intervalo dado), le corresponda un único valor de la variable dependiente (y)***. En otras palabras, si a algún posible valor de la variable independiente no le corresponde ningún valor de la variable dependiente, o bien, si le corresponde más de un valor de la variable dependiente, la relación de dependencia que estamos estudiando no será una función en sentido matemático.

Bueno, a lo mejor el párrafo anterior nos ha dejado sorprendidos y en el aire… Parece romper el hilo del discurso que traíamos hasta aquí. Y es que se nos está olvidando algo muy importante: todo concepto se expresa mediante algún(os) sistema(s) de representación;

vamos a hablar de este aspecto de las funciones matemáticas y, después, volveremos sobre las afirmaciones del párrafo anterior.

2.2 Notación y sistemas de representación de una función

De entrada, tenemos que adoptar algún sistema básico de representación de una función. Hasta hora hemos hablado de variables independientes y dependientes; esto nos hace suponer que existen sendos conjuntos que contienen los posibles valores de ambos tipos de variables. Así hablaremos del ***conjunto de partida o dominio de la función***; igualmente, del ***conjunto de llegada o codominio de la función***. La regla o forma de hacer corresponder a cada valor de la variable independiente un valor de la variable dependiente representa la función.

Si designamos con las letras A y B los conjuntos de partida y de llegada, respectivamente (el dominio y el codominio de la función), por x e y sendos elementos de esos conjuntos, y por f la función, podemos representar todo lo anterior de la siguiente manera:

$$f: A \longrightarrow B$$

de tal forma que, a nivel de elementos, tenemos:

$$x \longrightarrow y \text{ ó } x \longrightarrow f(x)$$

o también: $f(x) = y$

Expresión que leemos: y es ***imagen*** de x mediante la función f.

En algunas oportunidades –no en todas, como hemos visto–, la regla puede escribirse en términos matemáticos; por ejemplo, tomemos este caso sencillo en que cada número de la columna de la izquierda se relaciona con uno de la derecha:

$$1 \longrightarrow 3$$
$$2 \longrightarrow 6$$
$$3 \longrightarrow 9$$
$$4 \longrightarrow 12$$

El dominio de la función es el conjunto C = {1, 2, 3, 4} y el conjunto de llegada, D = {3, 6, 9, 12}; la función es muy sencilla: es la regla "multiplicar por 3". De este modo escribiremos:

$$f: C \longrightarrow D$$

de tal forma que, a nivel de elementos,

tenemos: $x \longrightarrow y$ ó $x \longrightarrow f(x)$

o también: $x \longrightarrow 3x$ ó $f(x) = 3x$

La última expresión es la más operativa; así, $f(1) = 3 \times 1 = 3$, $f(4) = 3 \times 4 = 12$, etc.

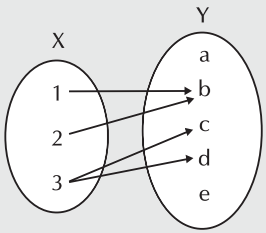
Vayamos ahora a la restricción de la que nos habla Dirichlet: que a cada valor de la variable independiente (x) en un conjunto de valores dado (en un conjunto de partida), le corresponda un único valor de la variable dependiente (y) (en un conjunto de llegada).

Si tomamos el caso de los niños y niñas de un salón de clase (conjunto de partida E) y el grupo completo de sus mamás (conjunto de llegada L), y como regla m "ser la mamá de", podemos escribir: m (Inés) = Guadalupe; y también, m (Carlos) = Guadalupe. Y así sería con cada pareja niño(a) – mamá.

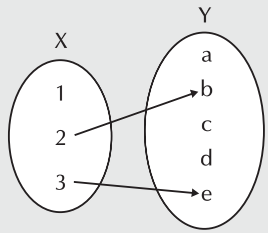
¿La regla m puede calificarse como función? Desde luego, cada niño(a) sólo tiene una mamá, de modo que a cada uno(a) de ellos(as) no le corresponde más de una "imagen"; pero si en el grupo de niños(as) hay alguno(a) cuya mamá murió, entonces ese niño(a) no tiene "imagen" según esta regla, por lo cual m no sería una función; evidentemente, si no hay ningún(a) niño(a) huérfano(a) de mamá, m sí es una función. Y, ojo, no importa si Inés y Carlos tienen la misma imagen, Guadalupe; lo único que importa es que cada niño(a), sin excepción, tenga a su mamá presente.

Supongamos ahora que trabajamos con los mismos conjuntos, pero con la regla h "ser hijo(a) de". Evidentemente, el conjunto de las variables independientes es ahora L y el de las dependientes, E (¿de acuerdo?). Así, se expresará: h (Guadalupe) = Inés [Inés es hija de Guadalupe]; y también, h (Guadalupe) = Carlos [Carlos es hijo de Guadalupe]. Como se aprecia, h no es una función en sentido matemático, ya que al elemento Guadalupe del conjunto de partida le corresponden dos imágenes, Inés y Carlos, en el conjunto de llegada.

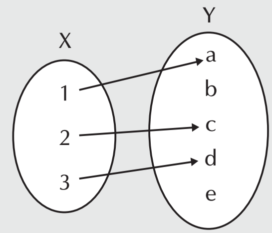
1. Si llevamos estas condiciones a un sistema de representación gráfico, podemos considerar los siguientes 7 casos y preguntar: ¿En qué casos no estamos en presencia de una función?



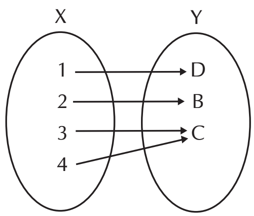
Caso 1



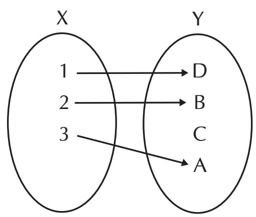
Caso 2



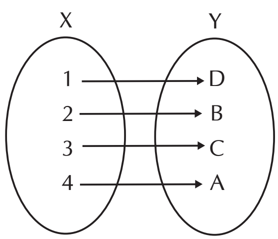
Caso 3



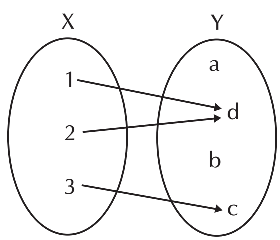
Caso 4



Caso 5



Caso 6



Caso 7

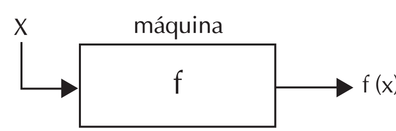
Como puede observarse, las condiciones para que la situación refleje la presencia de una función matemática atañen solamente a los elementos del conjunto de partida; en el conjunto de llegada puede haber elementos que no sean imagen de ninguno del conjunto de partida (casos 3, 5 y 7), o que lo sean de más de un elemento del conjunto de partida (casos 4 y 7), o que se den ambas condiciones simultáneamente (caso 7); pero esto no impide que se esté en presencia de una verdadera función en sentido matemático.

Conviene hacer notar que el conjunto de elementos del conjunto de llegada que son imagen de algún elemento del conjunto de partida, recibe el nombre de ***rango o recorrido de la función***; también se le conoce como ***conjunto imagen***. Las observaciones del párrafo anterior pueden ahora enunciarse diciendo que el rango o conjunto imagen no tiene por qué coincidir con el codominio o conjunto de llegada de la función.

Y vamos a otro punto muy importante: ¿Recuerdan la diversidad de ***sistemas de representación*** que encontramos para el concepto de fracción (Cuaderno Nº 9)? Pues bien, algo similar ocurre en el caso de las funciones. Vamos a ver algunos de estos sistemas mediante los cuales manifestamos la variabilidad y dependencia de determinadas variables dependientes en relación con otras variables independientes.

a. Verbal: Incluye hasta las manifestaciones de nuestros sentimientos o pensamientos; pero hacemos énfasis particularmente en las reglas o consignas: "ser la madre de", "ser la cuarta parte de", "ser el siguiente de", "ser el doble de…, más 3 unidades", etc.

En este sentido, una función se asemeja a una máquina en la cual se introduce un elemento *x* y cuya salida correspondiente es *f (x):*



b. Tablas de valores: Tablas en las que aparecen explícitamente los pares de valores [variable independiente – variable dependiente] que expresan la correspondencia que define determinada función. Como ejemplos nos pueden servir las tablas que recogen diariamente y a lo largo de un año las temperaturas extremas, las precipitaciones, las horas de salida y puesta del sol, los niveles máximos de presión atmosférica y de humedad, el número de inasistencias de alumnos a nuestro centro escolar, etc. O también, las tablas en las que recogemos las estaturas de nuestros alumnos al inicio de un curso escolar, o sus pesos.

He aquí unos ejemplos de funciones representadas mediante tablas de valores:

1) Pesos (en Kg) de los 11 jugadores del equipo de fútbol de la clase:

JL	Mar.	Ant.	Mig.	Laur.	Sant.	Jes.	Osc.	Omar	Raf.	Dan.	Dav.
56,5	59	52,4	61,3	57	49,8	55,8	60,8	55,4	53,9	51,7	59,3

2) Número de víctimas –heridos o muertos- en accidentes de tránsito durante una semana en el país:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
6	9	5	7	11	16	12

3) Impuesto al valor agregado (IVA) pagado en pesos por las compras efectuadas o los servicios solicitados por una familia durante los cuatro fines de semana de un mes (tasa: 12%):

Gastos	237.500	148.650	98.460	196.000
Pagos por IVA	28.500	17.838	11.815,20	23.520

2. En cada uno de los tres casos anteriores:

a) ¿Cuál es la variable independiente?

b) ¿Y la variable dependiente?

c) ¿Cuál es el dominio de cada función?

d) ¿Y el codominio?

Como puede apreciarse, el uso de tablas de valores para representar funciones es muy apropiado para el caso de las llamadas funciones empíricas, aquéllas en las que hay que referirse a valores de la variable dependiente que son recogidos de una forma empírica, es decir, tal como se presentan en la propia realidad.

c. Diagramas de Venn: Son gráficas como las siete que aparecen en el ejercicio **1** que acabamos de proponer. Como se puede apreciar, en estos diagramas se muestran los conjuntos de partida y de llegada con sus respectivos elementos y las correspondencias establecidas entre éstos, representadas por flechas de unión. Esta representación sólo es útil en el caso de que los conjuntos de partida y de llegada contengan pocos elementos.

3. Establezca la relación de correspondencia existente entre las siguientes montañas y los países en que se encuentran (puede hacerlo con flechas pero además, en este caso y para contrastarla con la respuesta al final del Cuaderno, indique como respuesta los pares "letra número" adecuados):

Montañas	Países
a) Chimborazo	1) Venezuela
b) Nevado del Huila	2) Uruguay
c) Aconcagua	3) Perú
d) Ausangate	4) Chile
e) Sajama	5) Brasil
f) Huascarán	6) Colombia
g) Cotopaxi	7) Bolivia
h) Illimani	8) Argentina
i) Monte Pissis	9) Ecuador
	10) Paraguay

4. En el ejemplo anterior:
a) ¿Cuáles son los elementos del conjunto de llegada que no pertenecen al rango de la función?
b) ¿Con qué regla o consigna identificaría la función de este ejemplo?

Comentario 1

El ejemplo anterior nos brinda la oportunidad de apreciar la necesidad de ***definir con precisión el dominio de la función***. Si hubiéramos planteado la consigna general "está ubicada en", aplicada al conjunto de partida {montañas de Suramérica}, no estaríamos en presencia de una función, ya que existen algunas montañas que se consideran “compartidas” por más de un país; tal es el caso, por ejemplo, de Ojos del Salado, Tupungato y Volcán Llullaillaco, los tres entre Chile y Argentina, o el Volcán Parinacota entre Bolivia y Chile, etc. Esto significaría que estos elementos del dominio tendrían más de una imagen, con lo cual esta correspondencia dejaría de ser una función. Como esto no ocurre con el conjunto de montañas señalado en el ejercicio, estamos en presencia de una verdadera función.

d. Gráficas cartesianas: Son gráficas que se construyen a partir de dos ejes de referencia –llamados ejes de coordenadas–, uno horizontal (eje de abscisas) y otro vertical (eje de ordenadas). Habitualmente, en el primero se colocan los valores de la variable independiente como si se tratara de una recta real, ordenados y crecientes de izquierda a derecha; y en el eje vertical se colocan los valores de la variable dependiente, también como si se tratara de una recta real, ordenados y crecientes de abajo hacia arriba. Los valores de ambas variables deben ser, pues, numéricos.

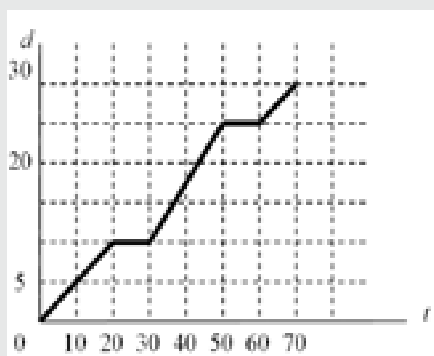
En Cuadernos anteriores ya hemos utilizado gráficas referidas a estos dos tipos de ejes, horizontal y vertical, en los que se ubican los valores de los datos de dos variables diferentes; por ejemplo, las que representan el número de viviendas construidas en un país a lo largo de varios años (histograma) [Ver Cuaderno Nº 17, p. 27], o el número de inasistencias diarias de alumnos a nuestro centro escolar (gráfica de barras) [Ver Cuaderno Nº 17, p. 11].

Pero ahora hay una diferencia de tratamiento con estos datos o valores de las variables, al llevarlos a la gráfica. Así, en referencia a la gráfica de barras, ya no nos interesa levantar una barra completa desde el punto del valor de la variable independiente en el eje horizontal; ahora nos interesa tan sólo marcar el punto de “altura” (ordenada) que está en el extremo superior de la barra. Porque ***la gráfica cartesiana es una gráfica de puntos, de valores de la variable dependiente*** (de ordenadas).

Si la variable independiente es continua –es decir, puede tomar todos los valores comprendidos entre dos extremos, como ocurre en el caso del tiempo- tendremos como gráfica una línea de trazos continuos, formada por la secuencia de puntos (valores) de la variable dependiente que van correspondiendo a la secuencia de puntos (valores) de la variable independiente; en caso contrario, la gráfica se compondrá de puntos aislados. Un ejemplo del primer caso es el de la gráfica de la distancia recorrida por un móvil en un lapso de tiempo determinado; y del segundo caso, el número de alumnos inasistentes a la escuela durante los días de un mes determinado. Evidentemente, el uso de gráficas cartesianas resulta más adecuado para el caso en que la variable independiente sea continua.

He aquí ahora un par de ejemplos de funciones representadas por gráficas cartesianas:

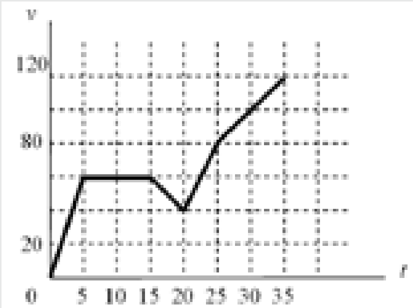
1) En el eje de abscisas colocamos la variable tiempo *t* medida en minutos (en intervalos de 10 m); y en el eje de ordenadas, la variable distancia *d* recorrida por una persona que pasea en bicicleta, medida en km (en intervalos de 5 km).



La gráfica nos “describe” la distancia recorrida en función del tiempo transcurrido; así, vemos que en los 20 primeros minutos se llegan a recorrer 10 km, a una velocidad constante; después, hay un descanso de 10 m; posteriormente, el ciclista avanza 15 km durante 20 minutos, a una velocidad constante, algo mayor que la inicial del paseo (quizá ahora le tocó ir cuesta abajo…); vuelve a descansar otros 10 minutos y, finalmente avanza 5 km en 10 minutos; en total, ha recorrido 30 km en 70 minutos de paseo.

2) Ahora, en el eje de abscisas volvemos a colocar la variable tiempo *t* medida en minutos (en intervalos de 5 m); y en el eje de ordenadas, la variable velocidad *v* que va alcanzando un carro, medida en km/h (en intervalos de 20 km/h).

He aquí la descripción de la variación de la velocidad en función del tiempo transcurrido; vemos que el móvil parte



del reposo y que durante 5 minutos va acelerando de manera constante hasta alcanzar la velocidad de 60 km/h; después, mantiene esa velocidad durante 10 minutos, y en los 5 minutos siguientes desacelera hasta alcanzar una velocidad de 40 km/h; en ese instante vuelve a acelerar de manera constante durante 5 minutos y alcanza la velocidad de 80 km/h; y en los 10 últimos minutos, sigue acelerando con una intensidad constante hasta llegar a la velocidad de 120 km/h.

5. En los dos ejemplos anteriores:

a) ¿Cuáles son los dominios de cada función?
b) ¿Cuáles son los conjuntos de llegada en cada caso?
c) ¿Cuáles son los rangos de cada función?

John Venn (1834-1923) fue un lógico británico que popularizó el uso de diagramas para la explicación y comprensión de las reglas de la lógica y, por ende, de la teoría de conjuntos. En cuanto al calificativo de cartesianas aplicado a ciertas gráficas, proviene del apellido de **René Descartes** (1596-1650), filósofo, matemático y científico francés, cuyos planteamientos tuvieron una gran influencia en el pensamiento occidental posterior. En el caso de las matemáticas, introdujo el sistema de coordenadas que permitió, entre otras cosas, traducir a expresiones algebraicas lo que hasta el momento eran gráficas geométricas de determinadas curvas, con lo que prestó una herramienta importante para su estudio y, en general, para el de las funciones matemáticas.

e. Fórmulas: Son expresiones algebraicas (pueden incluir números y símbolos literales) que expresan la relación existente entre las variables independientes y la variable dependiente. Por ejemplo, para el área A de un cuadrado de acuerdo con la medida l de su lado [$A = l^2$] o para el área A de un círculo con respecto a la medida r de su radio [$A = \pi r^2$]; para la longitud c de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, conocidas las medidas a y b de sus catetos [$c = \sqrt{a^2 + b^2}$], o para la distancia d recorrida por un móvil de acuerdo con la velocidad v que lleva y el tiempo t en que se mueve a esa velocidad de manera constante [$d = v\,t$]. Como puede apreciarse, la representación de una función por medio de fórmulas no es siempre posible.

6. Una persona cuenta un secreto a 6 personas, y cada una de éstas se lo cuenta a otras 6 personas diferentes. Si el chisme se propaga a esta velocidad, a) ¿cuántas personas lo conocen al cabo de tres rondas?; b) ¿y al cabo de n rondas [ésta es la fórmula de la función]?

2.3 Traducciones entre sistemas de representación de una función

Bien; acabamos de toparnos con la diversidad en cuanto a la tarea de representar el concepto de función: existen, al menos, cinco posibles sistemas de representación. A estas alturas del curso, la situación no es nueva; ya la previnimos en el propio Cuaderno nº 1: buscamos construir una matemática que asuma y genere diversidad. En particular, la "diversidad en los sistemas de representación de un concepto es algo tan importante que los autores estiman que una persona llega a dominar un concepto matemático sólo cuando es capaz de:

- identificarlo en cualquiera de sus posibles sistemas de representación;
- representarlo en todos ellos;
- saber pasarlo –"traducirlo"– de cada sistema a todos los demás" (Cuaderno nº 1).

En el Cuaderno nº 9 seguimos esa línea de trabajo al tratar el tema de las fracciones. Y vamos a hacerlo también ahora en el caso de las funciones. Por consiguiente, debemos llegar a alcanzar estas tres competencias:

- identificar una función en cualquiera de sus posibles sistemas de representación;
- representarla en aquellos sistemas que resulten más pertinentes en cada caso;
- saber pasarla –"traducirla"– de cada sistema a los demás.

Ya nos hemos referido a las dos primeras competencias. Vamos a trabajar ahora con la tercera; primero formulamos una lista de enunciados para que el (la) lector(a) intente resolver cada tarea individualmente; y después podrá confrontar su resolución con la que se propone en el texto a continuación. También iremos intercalando algunos comentarios que consideramos de utilidad con el fin de profundizar en el conocimiento de las funciones.

a) Forme la tabla de valores (o el diagrama de Venn) correspondiente a la consigna "ser la capital de" aplicada a los 20 países hispanoparlantes del continente americano.

b) Forme la tabla de valores (o el diagrama de Venn) correspondiente a la consigna "pertenecer al continente" aplicada a los siguientes países: {Puerto Rico, Myanmar, Moldavia, Nueva Zelanda, Bangladesh, Burkina Faso, Australia, Chile, Kenia, Vietnam, Egipto, Eslovenia, Filipinas, Canadá, Islandia} *y continentes*:{África, América, Asia, Europa, Oceanía}.

c) Forme la tabla de valores correspondientes a la consigna "ser el triple de…, más 5 unidades", aplicada a los diez primeros números naturales.

d) Formule la consigna correspondiente a la función que se representa mediante la siguiente tabla de valores:

Ríos	Continentes
Nilo, Zambezee, Congo, Níger	África
Orinoco, Mississippi-Missouri, Bravo, Paraná, Amazonas, Colorado	América
Obi, Yenesei, Amur, Amarillo ó Huang-Ho, Yangzi, Éufrates, Ganges	Asia
Danubio, Volga, Ural, Rhin, Támesis	Europa
	Oceanía

e) Formule la consigna correspondiente a la función que se representa mediante la siguiente tabla de valores numéricos:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	1	2	5	10	17	26	37	50	65

f) Escriba la fórmula de f (n) correspondiente a la tabla anterior.

g) Escriba la fórmula de f (n) correspondiente a la tabla siguiente (derivada de la anterior):

n	1	2	5	10	17	26	37	50	65
$f(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

h) Construya la tabla de valores para los 4 primeros elementos correspondientes a la función: $f(n) = \dfrac{2n+1}{2n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

i) A partir de la regla "un metro de tela cuesta 30 pesos", construya una tabla de valores para seis medidas de la tela, una fórmula que represente la función (utilizamos c *para los costos y* m *para las medidas) y, posteriormente, una gráfica cartesiana de la función.*

j) A partir de la regla "un cuaderno cuesta 20 pesos", construya la gráfica cartesiana de la función.

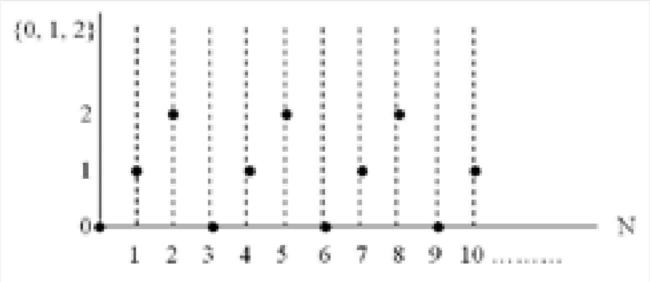
k) Un camión de mudanzas cobra 30 pesos por alquiler y, posteriormente, por el tiempo de trabajo hasta que se vacíe el camión, a razón de 60 pesos por hora. Represente gráficamente la función y calcule el costo de una mudanza que dura 4 horas y 40 minutos.

l) Elabore una tabla de valores y una gráfica cartesiana para representar la función "porcentaje a pagar como impuesto por los ingresos anuales" que se rige por la siguiente regla: Si la persona gana menos de 20.000 pesos al año, no paga nada; si gana desde 20.000 hasta menos de 50.000, paga un porcentaje del 5% de su ingreso; desde 50.000 hasta menos de 100.000, el 10%; desde 100.000 hasta menos de 250.000, el 20%; y si gana desde 250.000 en adelante, el 30%.

m) Dibuje una gráfica cartesiana para representar el costo de una llamada telefónica si el acceso a la línea cuesta 0,5 pesos y cada minuto de conversación cuesta un peso.

n) Para efectos de asignación de la tasa de pago por el servicio de recogida de la basura, las ciudades suelen estar divididas en sectores caracterizados habitualmente por la condición socioeconómica *de sus moradores. Suponga que la ciudad M se considera distribuida en 8 sectores (del sector A al H) y que los dos primeros cancelan la tasa 1, los tres siguientes la tasa 2, y los tres últimos la tasa 3. Represente esta función.*

ñ) Exprese una regla o consigna que corresponda a la siguiente representación gráfica:

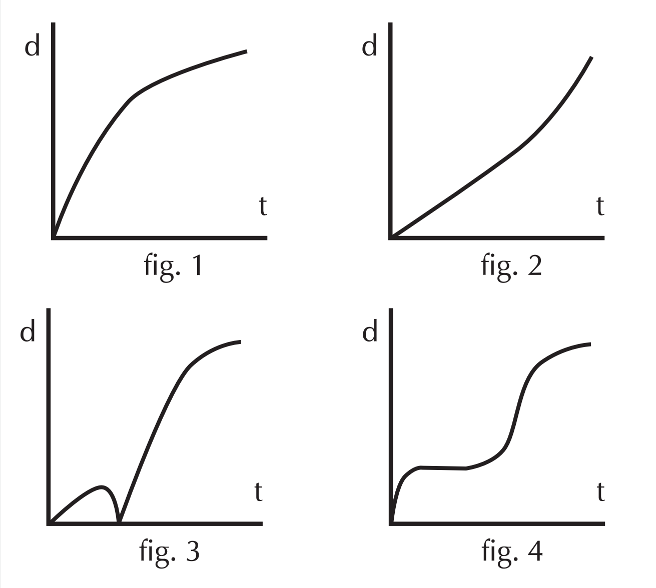


o) Las cuatro figuras que siguen representan cuatro situaciones correspondientes a una misma persona que se desplaza de su casa al trabajo en cuatro días distintos. En los cuatro días tarda el mismo tiempo (t) en recorrer la misma distancia (d). Pero la caminata de cada día tiene una historia diferente; he aquí tres de esas historias, contadas por la propia protagonista:

Día x: Hoy amanecí con flojera y salí caminando con mucha calma, pero a mitad de camino miré el reloj y me di cuenta de que a ese paso iba a llegar tarde así que, progresivamente, fui acelerando la marcha y llegué casi a la carrera.

Día y: Hoy salí muy acelerada y, claro, al poco tiempo tuve que descansar durante un rato y recobrar la respiración. Luego empecé a caminar muy suave, acelerando poco a poco; pero como vi que ya me sentía bien, agarré la marcha inicial y sólo la aflojé hacia el final del recorrido, tanto, que llegué andando muy despacio.

Día z: Hoy sí amanecí bien distraída, porque al ratico de salir me acordé que había olvidado las llaves de mi lugar de trabajo, así que tuve que volver rápidamente a la casa a recogerlas. El resto del recorrido es fácil imaginarlo: casi a la carrera, tanto, que la gente se me quedaba mirando al pasar tan apresurada; sólo pude aflojar la marcha al final y llegué muy cansada.



1. ¿A qué día corresponde cada una de las gráficas?
2. ¿Qué historia podría contar la protagonista, correspondiente a la gráfica que ha quedado libre?

[El ejercicio es una adaptación del primero que se encuentra en esta dirección:
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/02/actipre.html]

p) Un comerciante dispone de azúcar de diferentes precios: 100 kg cuyo costo es de 5 pesos/kg, 60 kg cuyo costo es de 8 pesos/kg y 40 kg cuyo costo es de 4 pesos/kg. Si se mezclan todas estas cantidades, ¿cuál debe ser el precio del kilogramo de mezcla?

q) Un reloj adelanta 12 segundos cada hora. Si lo hemos ajustado hoy a las 6 a.m., ¿qué hora marcará mañana a las 9:30 p.m.?

He aquí algunas respuestas a los ejercicios planteados y algunos comentarios intercalados:

a) Este es un caso de traducción de una representación verbal a una en forma de tabla o diagrama de Venn. La tabla es bastante amplia, y sólo representaremos los dos primeros y los dos últimos países en orden alfabético:

Países	Argentina	Bolivia	...	Uruguay	Venezuela
Capitales	Buenos Aires	La Paz	...	Montevideo	Caracas

Obsérvese que el conjunto de los 20 países forma el conjunto de partida o dominio de la función, y el conjunto de las 20 capitales, el codominio y también el rango de la función.

b) Este es otro caso de traducción de una representación verbal a una en forma de tabla o diagrama de Venn pero, a diferencia del ejemplo anterior, ahora se precisa nombrar explícitamente los elementos de los conjuntos de partida y de llegada. La tabla de valores puede representarse así (análogamente el diagrama):

Países	**Continentes**
Burkina Faso, Kenia, Egipto	África
Puerto Rico, Chile, Canadá	América
Myanmar, Bangladesh, Vietnam, Filipinas	Asia
Moldavia, Eslovenia, Islandia	Europa
Nueva Zelanda, Australia	Oceanía

c) Sigue siendo otro caso de traducción de una representación verbal a una en forma de tabla, sólo que la consigna es de naturaleza operatoria con números naturales.

Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Triple de..., más 5 unidades	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

d) Este ejercicio nos pide pasar de la representación tabular a la verbal, en forma de consigna o regla que establece la correspondencia entre el conjunto de partida (los ríos citados) y el de llegada (los cinco continentes). La consigna puede ser "pertenecer al continente". Obsérvese que aunque no se menciona ningún río de Oceanía, la consigna representa una verdadera función: cada río nombrado pertenece a un solo continente.

e) La regla puede enunciarse así: "elevar al cuadrado y agregar 1 unidad", aplicada a los 9 primeros números naturales.

f) La fórmula de la función es: $f(n) = n^2 + 1$, Dominio = {0, 1, 2,..., 8}

g) La fórmula ahora es: $f(n) = \sqrt{(n - 1)}$, Dominio = {1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65}

Comentario 2

La resolución de los ejercicios anteriores nos sugiere volver a insistir en la necesidad de ***definir con precisión el dominio de cualquier función***, como ya se hizo anteriormente, en el Comentario 1. Por ejemplo, en el ejercicio d), referido a la pertenencia continental de determinados ríos, la precisión del dominio es fundamental, pues si la consigna se refiriera a todos los ríos del mundo, es posible que haya algún(os) río(s) que transite(n) tanto por tierras europeas como asiáticas, en cuyo caso la consigna ya no representaría una función (¿por qué?). En cambio, si el dominio se restringe a los ríos de África, América y Oceanía, la consigna de pertenencia continental sí representa una función.

Análogamente, en los ejercicios f) y g) la precisión del dominio es necesaria para ajustarse a la tabla de valores de la que se parte; desde luego, esa restricción no impide que ambas funciones –las fórmulas– puedan extenderse a más valores y que, incluso, puedan aplicarse a cualquier número natural. Pero, en este caso, esta extensión debe indicarse en el dominio de la función.

Moraleja: ***una función no queda totalmente definida –así se adelante su fórmula– hasta que se haya indicado su dominio.***

h) La tabla de valores es:

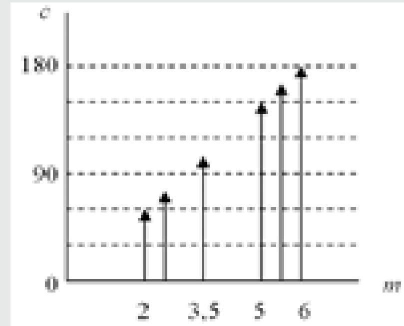
n	1	2	3	4
$f(n)$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{7}$

i) Vamos con la primera tarea; he aquí una tabla de valores (costos en pesos) para ciertas medidas (en metros) de la tela:

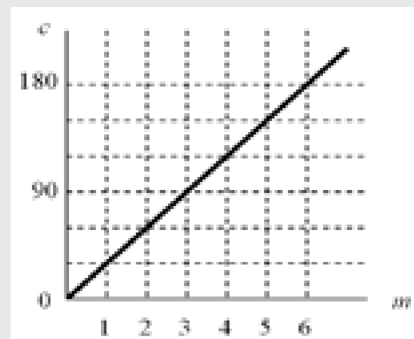
medida	2	2,5	3,5	5	5,5	6
costo	60	75	105	150	165	180

¡Sorpresa! La tabla anterior representa, sencillamente, un caso de proporcionalidad directa (Cuaderno nº 11) entre las variables medida y costo de la tela; precisamente, el valor de 30 pesos/m expresa la razón de esta proporcionalidad directa: cada valor de la variable dependiente se obtiene multiplicando por 30 el valor de la correspondiente medida de la tela. De aquí se deduce que la fórmula que representa esta función será: $c\,(m) = 30m$, o bien, sencillamente, $c = 30m$.

Para construir la gráfica cartesiana, colocamos los valores de medida en el eje de abscisas y los correspondientes valores de los costos, en el de ordenadas:



En la gráfica, las ordenadas correspondientes a cada valor de la abscisa vienen señaladas por los extremos superiores de las flechas verticales. Esos puntos están todos alineados entre sí y con el origen (el punto 0 de medida y 0 de costo), lo que nos sugiere trazar una línea recta que pase por todos ellos. El resultado de este trazado se muestra en la figura siguiente:



Obsérvese que los pares de puntos abscisa-ordenada que aparecen en la tabla de valores están todos incluidos en la recta que representa la función. ¿Por qué hemos podido dibujar una recta continua, y no sólo esos seis puntos? Porque la variable independiente "medida" es una variable continua: en principio, es posible comprar cualquier cantidad de tela y, de hecho, siempre se puede calcular el precio de esa cantidad; es decir, para cualquier valor de la variable independiente (para cualquier abscisa, más allá incluso del valor 6) se puede calcular el correspondiente valor de la variable dependiente (la ordenada correspondiente), lo que marca un punto de la recta que representa la función.

Comentario 3

Cabe destacar que las funciones que responden a ***situaciones de proporcionalidad directa*** tienen la forma ***f (x) = mx***, donde *m* representa, precisamente, la razón de proporcionalidad directa de cada caso. Y hemos visto que, si la variable independiente es continua, ***su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas***.

También podemos inferir que, si conservamos la distribución de los valores de las variables en sus respectivos ejes, cuanto mayor sea el valor de *m*, la recta tenderá a acercarse a una recta vertical. Por ejemplo, imaginemos que estamos hablando de una tela más cara, cuyo precio sea de 180 pesos/metro; a la abscisa 1 metro le correspondería una ordenada de 180 pesos; y al unir este punto con el origen se nos dibujaría una recta casi perpendicular al eje de abscisas. Por esta razón, *m* recibe el nombre de ***pendiente de la recta***, como si se tratara de la pendiente o inclinación de la cuesta representada por la recta. Su cálculo es muy sencillo: se toman dos puntos de la recta y se divide la diferencia de sus ordenadas entre la diferencia de sus abscisas.

Comentario 4

El (La) lector(a) avispado(a) ya se habrá percatado de que los ejercicios f), g) y h) son similares a los propuestos en el Cuaderno nº 19 (Introducción al Álgebra) cuando se hablaba de la representación de patrones o términos generales de una sucesión de números; allá se buscaba la expresión del término general de tales sucesiones, que se designaba como a_n; y ahora podemos ver que en realidad –aunque sin mencionarlo explícitamente– estábamos hablando de funciones *f (n)*.

Además, el ejercicio i) nos muestra cómo la proporcionalidad directa puede entenderse también como la expresión de una función.

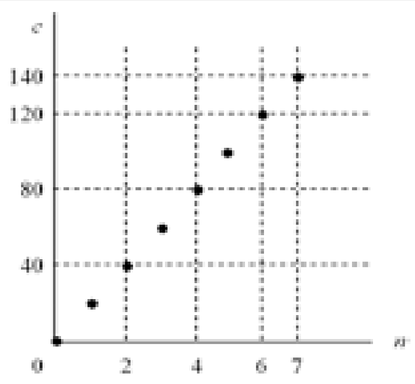
Este par de observaciones nos permite asegurar que ***el estudio de las funciones representa también una vía de acceso al Álgebra*** desde el campo de la Aritmética, ya que también la función se muestra ***como un modo de generalizar*** diversas relaciones que se dan en el campo de la Aritmética.

j) El caso es similar al anterior, puesto que se trata también de una situación de proporcionalidad directa. Para llegar a la gráfica cartesiana resulta conveniente –aunque no se solicite explícitamente en el ejercicio– pasar por alguna tabla de valores y por la fórmula que representa la función.

La tabla puede ser la siguiente (no se necesitan muchos valores; de hecho, bastan dos; e incluso, uno solo que no sea el origen de coordenadas: ¿por qué?):

nº cuadernos	0	2	4	6	7
costo	0	40	80	120	140

Y la fórmula correspondiente: $c(n) = 20n$ (*c* representa el costo, y *n* el número de cuadernos). En cuanto a la gráfica, también será similar a la del ejercicio anterior, con una salvedad notable: ahora la variable independiente es discreta (el número de cuadernos sólo toma valores enteros), de modo que obtendremos la siguiente gráfica, formada sólo por puntos alineados entre sí y con el origen de coordenadas:



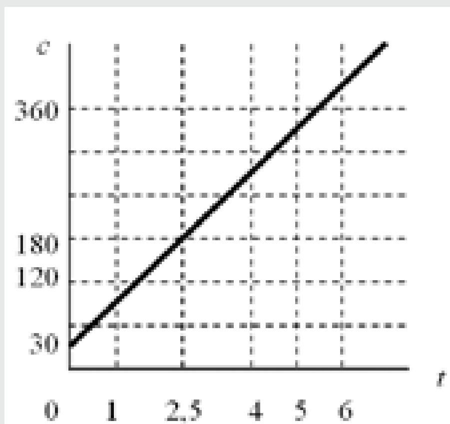
k) Como en el ejercicio anterior, resulta procedente elaborar una tabla de valores y la fórmula de la función, siendo las variables el tiempo *t* (independiente, en horas) y costo *c* de la mudanza (dependiente, en pesos). Para ello, tomamos algunos casos particulares:

tiempo	**costo**
0	Sólo alquilamos el servicio ⟶ pagamos 30 pesos
1 hora	Agregamos 60 pesos por 1 hora ⟶ pagamos 30 + 60 = 90 pesos
2 horas y media	Al alquiler agregamos el costo de 2 horas y media, que es de 150 pesos: 120 por las 2 horas y 30 por la media hora; o bien, 60 x 2,5 ⟶ pagamos 30 + 150 = 180 pesos

Ya se ve cuál es la fórmula para calcular el costo $c(t) = 30 + 60t$, en la que *t* debe estar indicada en horas (admite expresiones decimales o fraccionarias). Una tabla de valores puede ser la siguiente:

tiempo	0	1	2 1/2	3	4	5
costo	30	90	180	210	270	330

Para construir la gráfica cartesiana correspondiente, empezamos por representar los puntos anteriores; pero como la variable independiente es continua (la mudanza puede durar cualquier cantidad de tiempo, y no sólo un número entero de horas), ya sabemos por adelantado que la gráfica será una línea también continua.



Finalmente, para calcular el costo de una mudanza que dura 4 horas y 40 minutos, podemos tomar como referencia que cada minuto cuesta 1 peso (1 hora cuesta 60 pesos), con lo cual el costo total será: 30 (alquiler del camión) + 240 (4 horas) + 40 (40 minutos) = 310 pesos. También podemos aplicar directamente la fórmula de la función para el valor $t = 4\ 2/3$ (40 minutos equivalen a 2/3 de 1 hora); y así: $c(4\ 2/3) = 30 + 60 \times 4\ 2/3 = 30 + 60 \times 14/3 = 30 + 840/3 = 30 + 280 = 310$ pesos.

Comentario 5

Ahora podemos completar el contenido del Comentario 3. La función que hemos representado es $c(t) = 30 + 60t$. Pues bien, las funciones que tienen la forma general $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$, en la que *m* y *b* reciben el nombre de ***parámetros*** (habitualmente suelen ser números), y cuyas variables independientes son continuas, se denominan ***funciones lineales*** y ***su gráfica es una recta***.

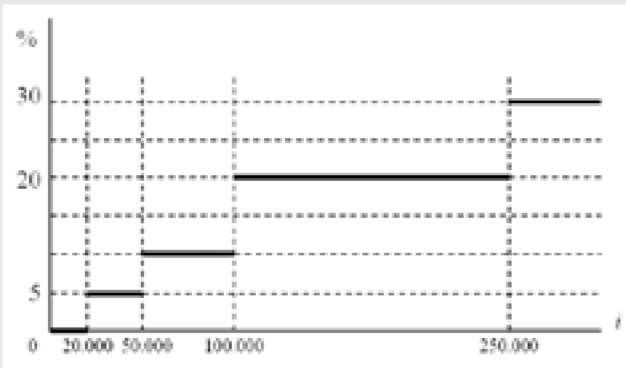
Si el parámetro *b* vale 0, estamos en el caso particular de las funciones que responden a situaciones de proporcionalidad directa $f(x) = mx$ con variable independiente continua, cuya gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas, como ya vimos. Pero si $b \neq 0$, la recta que representa la función lineal no pasa por el origen de coordenadas; es como si la hubiéramos "subido" toda ella. Ahora bien, ¿cuánto vale ese escalón de subida?; precisamente, el valor de *b*; por esta razón, este valor de *b* se denomina la ***ordenada en el origen***.

Hay muchas situaciones en la vida en las que aparecen estas funciones lineales. Por ejemplo, cuando en algunas ciudades tomamos un taxi: hay un costo inicial por disponer del carro; y después pagamos una cantidad variable (aunque a una tasa fija), que depende de los metros recorridos o de los minutos de tiempo invertidos en el traslado (esta cuenta la suele llevar mecánicamente el taxímetro).

l) Esta vez la tabla de valores puede hacerse no para valores aislados de ingreso anual de una persona, sino por intervalos de este ingreso:

ingreso *i*	$i < 20.000$	$20.000 \leq i < 50.000$	$50.000 \leq i < 100.000$	$100.000 \leq i < 250.000$	$i \geq 250.000$
porcentaje	0	5	10	20	30

La gráfica cartesiana, en la que los ingresos actúan como variable independiente y la tasa de porcentaje como variable dependiente, sería así:

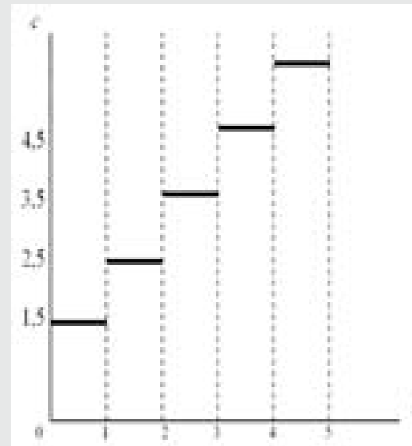


Comentario 6

Las funciones que vienen representadas por gráficas como ésta reciben el nombre de ***funciones escalonadas***. Como se ve, corresponden a funciones cuyo dominio viene dado por intervalos de valores de la variable independiente, que se considera continua.

Cabe observar que hay diversas situaciones de la vida diaria que encajan en el modelo de funciones escalonadas; por ejemplo, las que corresponden al pago de servicios públicos tales como la luz (de acuerdo con el consumo de Kwh), el agua (en función de la cantidad de m^3 consumidos), etc.

m) La representación de la función "costo de una llamada telefónica" en las condiciones indicadas, supone una tarea que integra las situaciones contempladas en los ejercicios k) y l). En efecto, existe un pago previo al consumo de tiempo, más un costo en función de los minutos que dure la llamada, entendiéndose que toda fracción de minuto se cobra igual que si fuera el minuto completo. La gráfica puede ser ésta (*c* para el costo en pesos y *t* para el tiempo en minutos:



Como se puede apreciar, es una función escalonada, pero con una "ordenada en el origen", que en este caso es 1,5.

También aquí cabe recordar que hay situaciones de la vida diaria que encajan en este modelo de función. Por ejemplo, el envío de encomiendas: una tasa fija por pago del servicio de correo, más una tarifa según intervalos de peso o de tamaño de la encomienda; o con el pago acumulado del alquiler de una vivienda o de un local: un pago fijo por motivo de depósito o fianza, más el pago mensual del canon de alquiler por el tiempo que dure el contrato.

n) En este caso, la variable independiente es discreta (hay 8 sectores en la ciudad) y no numérica. Por consiguiente, resulta más procedente representar la función mediante un diagrama de Venn o una tabla de valores; esta última podría ser así:

sectores	A	B	C	D	E	F	G	H
tasa	1	1	2	2	2	3	3	3

Comentario 7

El caso analizado en el ejercicio anterior puede ser considerado como una clasificación: los distintos valores de la variable independiente se organizan en clases, a cada una de las cuales se les asigna un valor de la variable dependiente, bien con una tasa o, de manera general, con un nombre o etiqueta. Así funciona, por ejemplo, la clasificación de los seres en alguno de los tres reinos: mineral, vegetal o animal; dado un ser (variable independiente), la ***función clasificación*** le asigna la etiqueta del reino al cual pertenece.

Y esto "funciona" cuando la variable independiente es discreta (los ejemplos son innumerables) y también cuando es continua. De hecho, las funciones escalonadas son una clase particular de funciones de clasificación, como la que vimos en el ejercicio l). Otra función similar es la que distribuye las zonas de la tierra en diversas franjas etiquetadas como los casquetes polares ártico y antártico, las zonas templadas y la zona tropical; en este ejemplo, la delimitación de estas zonas se hace en función de determinados paralelos de la superficie esférica terrestre (como los trópicos de Cáncer y de Capricornio), y cada una de las franjas presenta un carácter de continuidad sobre el globo terráqueo.

ñ) La observación de la gráfica nos hace ver que: la función es discreta, la variable independiente son los números naturales (los puntos suspensivos después del 10 nos remiten al conjunto N completo), la variable dependiente se reduce al conjunto {0, 1, 2}, y la regla consiste en asignar los valores 0, 1 y 2, sucesivamente y con saltos de tres números, a todos los números naturales. Pensando un poco las cosas, podemos darnos cuenta de que esos tres valores de la variable dependiente pueden ser los restos o residuos de dividir cada número natural entre 3; así, por ejemplo, al dividir 7 : 3, el residuo es 1, al dividir 5 : 3 el residuo es 2, etc.

El hecho de averiguar la regla nos permite obtener la imagen de cualquier otro número natural; por ejemplo, al número 968 le corresponde el valor 2, que es el resto de la división 968 : 3.

o) 1. Las asociaciones día – gráfica son las siguientes: día *x* – fig. 2; día *y* – fig. 4; día *z* – fig. 3.

2. La historia puede ser más o menos ésta: Hoy también salí de casa muy acelerada, pero una miradita al reloj al llegar a la mitad del camino me hizo ver que andaba holgada de tiempo, así que empecé a bajar la marcha poco a poco y llegué a un paso constante pero reposado.

p) El precio del kilogramo de mezcla se calcula dividiendo el costo total de la mercancía entre el número total de kilogramos, que es 200 kg. Ahora bien, el costo total de la mercancía se obtiene mediante la suma de los costos de los diversos tipos de azúcar; así, los 100 kg a 5 pesos/kg cuestan 500 pesos; los 60 kg a 8 pesos/kg cuestan 480 pesos; y los 40 kg a 4 pesos/kg cuestan 160 pesos; el costo total es, pues, de 1.140 pesos. Por consiguiente, el precio del kilogramo de mezcla será de 1.140/200 = 5,70 pesos/kg.

q) El enunciado nos dice que pasada 1 hora, se habrá adelantado en 12 segundos; pasadas 2 horas, en 24 s, etc. Evidentemente, estamos en presencia de una relación de proporcionalidad directa entre las variables "número de horas transcurridas" (n, independiente y continua, ya que puede hablarse de cualquier fracción decimal de una hora) y "adelanto" (a, dependiente, continua y medida en segundos). La fórmula del caso es: $a = 12n$. Según los datos del enunciado, el valor de n es de 39,5 horas (verifíquelo); por consiguiente, el reloj habrá acumulado un adelanto $a = 12 \times 39{,}5 = 474$ segundos = 7 minutos y 54 segundos. El reloj marcará las 9h 37m y 54 s.

3. Algunas funciones notables

3.1 La función lineal y la función escalonada

De ellas ya hemos hablado en el punto anterior. Volvemos a destacar la importancia de la función lineal por su representación cartesiana como recta –lo que nos lleva a inferir que toda recta en el sistema de coordenadas cartesiano representa una función lineal cuya variable independiente es continua- y porque, además, incluye como caso particular las relaciones de proporcionalidad directa estudiadas en Aritmética.

7. Si en la expresión general de la función lineal: $f(x) = mx + b$, el parámetro m vale 0, la función queda reducida a: $f(x) = b$, denominada ***función constante***. ¿Cómo será su representación cartesiana?

8. Si en el anterior ejercicio k) el conductor del camión y los obreros de la mudanza son amigos de la casa y sólo van a cobrar por el alquiler del camión, a) ¿cuánto se tendrá que pagar por la mudanza si ésta dura 4 horas y 40 minutos? b) ¿Y si dura 2 horas y 20 minutos?

Tome sendos recibos de notificación de pago por el servicio de luz y de agua, revise las normas mediante las cuales se establece el monto a pagar por el servicio y construya las correspondientes gráficas cartesianas.

3.2 Las funciones de N en N

Volvamos por un momento a algunos ejercicios resueltos anteriormente. En el ejercicio c) llegábamos a la consigna "el triple de…, más 5 unidades", aplicada a los 10 primeros números naturales. Algo similar ocurría con el ejercicio f), cuya fórmula era: $f(n) = n^2 + 1$, Dominio = {0, 1, 2,…, 8}. Igualmente con el ejercicio j), que nos llevaba a la fórmula $c(n) = 20n$ (c representaba el costo, y n el número de cuadernos).

Como vemos, los elementos del conjunto de partida y de llegada son números naturales. En realidad, podemos extender el dominio señalado en esos tres ejercicios hasta llegar al conjunto N; es decir, ***definir esas funciones para todo número natural***. Y podemos considerar como N el conjunto de llegada, aun cuando el rango de la función no llene todo N (requisito que ya sabemos no es indispensable para que exista la función). De este modo se definen las funciones del tipo $f: N \rightarrow N$, notación a la que se agrega la consigna o fórmula correspondiente. Por ejemplo, para los tres casos anteriores:

caso	notación	lectura
c)	$f: N \rightarrow N \,/\, f(n) = 3n + 5$	f de N en N, tal que f de n es igual a $3n + 5$
f)	$f: N \rightarrow N \,/\, f(n) = n^2 + 1$	f de N en N, tal que f de n es igual a $n^2 + 1$
j)	$c: N \rightarrow N \,/\, c(n) = 20n$	c de N en N, tal que c de n es igual a $20n$

Son numerosos los casos de funciones definidas de N en N; entre ellas están, por ejemplo, cada una de las tablas de multiplicar. En efecto, podemos considerar el caso de la tabla de multiplicar por 5, que a cada número natural le hace corresponder su quíntuplo, y que podríamos representar así: $m_5: N \rightarrow N \,/\, m_5(n) = 5n$.

Comentario 8

Algunas de estas funciones no tienen, como sí ocurre con las anteriores, una fórmula fija para todos los términos de la sucesión, sino que dependen de los valores que se van obteniendo progresivamente. Por ejemplo, en la función cuyo recorrido es {3, 9, 21, 45, 93, …}, es difícil encontrar una fórmula en función de *n*, tal que, al sustituir *n* por 0, 1, 2, …, se vayan obteniendo estos valores. Pero no es difícil encontrar la regla que produce tales números: a partir del 3, cada término posterior se obtiene duplicando el anterior y agregándole 3 unidades (verifíquelo). La "fórmula" de esta función puede escribirse así:

$$f(0) = 3$$
$$f(n) = 2 \times f(n\text{-}1) + 3, \; n = 1, 2, \ldots$$

Las funciones de este tipo reciben el nombre de ***funciones recursivas*** y son muy importantes en matemática como modelos de muchas situaciones que se desarrollan por pasos y en las que el resultado de cada paso depende de los resultados anteriores. Una de las funciones de este tipo más famosas es la que se conoce como ***sucesión de Fibonacci*** (sobrenombre de Leonardo de Pisa, matemático italiano, c.1175-c.1240): {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …}, función recursiva que responde a esta fórmula:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1$$
$$f(n) = f(n\text{-}1) + f(n\text{-}2), \; n = 2, 3, \ldots$$

Si tiene tiempo –y si no, trate de buscarlo, porque vale la pena- asómese a Internet y entre por la puerta "Fibonacci"; encontrará un mundo de resultados sorprendentes relacionados con situaciones inesperadas.

Las funciones de N en N pueden representarse de diversas maneras, como ya hemos visto en varios de los ejercicios anteriores, pero las representaciones más pertinentes serían las que vienen dadas mediante una regla o consigna, o bien mediante una fórmula (cuando la regla permita este tipo de expresión). En cambio, la gráfica cartesiana (una secuencia de puntos aislados en el plano), el diagrama de Venn y la tabla de valores no pueden dar de suyo esa sensación de generalidad, de abarcar todo el dominio, de referirse a todo número natural. Por ello, si se utilizan estos sistemas se requiere agregar unos puntos suspensivos para dar a entender esa referencia a todo N.

9. Tenemos la siguiente distribución numérica:

	0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	
	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21 ……….			

¿En qué fila se encuentra el número 671? Y si las columnas se numeran de izquierda a derecha, de 1 a 7, ¿en cuál de las siete columnas se halla 671?

3.3 La función medida

Aunque la medida es una vieja conocida nuestra, quizá es la primera vez que la denominamos de esta manera, como función. Desde el primer Cuaderno hasta ahora, son muchas las veces en que hemos estado midiendo; por ejemplo, hemos medido (contar es una manera de medir) el número de elementos de un conjunto, la cantidad de decenas o centenas contenidas en un número, las longitudes de los segmentos o las distancias entre dos puntos, las áreas de polígonos y objetos planos, los volúmenes de sólidos, la amplitud de un ángulo, la probabilidad de un evento, el valor de la media de un conjunto de datos… Y también hemos hecho referencia a la medida de otras magnitudes físicas: el tiempo, el peso, la temperatura, la presión atmosférica, la humedad, etc. Pero también hemos sido capaces de medir la relación entre diversas medidas; así ocurría con la relación entre una parte y el todo al que pertenece, con la relación entre las medidas de dos magnitudes, etc.

Como ***función,*** la ***medida*** tiene:

- como ***dominio*** o conjunto de partida, las magnitudes que son susceptibles de ser medidas (cantidades, longitudes, tiempo, peso…) o las relaciones que pueden establecerse entre ellas;
- como ***regla o consigna***, el algoritmo mediante el cual se mide cada magnitud (cómo contar; cómo medir longitudes o distancias, amplitudes de ángulos, áreas, volúmenes; cómo medir diversas magnitudes físicas; cómo establecer razones, etc.) y, en algunos casos, alguna fórmula ad hoc (áreas de determinados polígonos, volúmenes de determinados sólidos, etc.); y
- como ***codominio***, el conjunto de los números que expresan estas medidas y las relaciones entre ellas.

Vamos con este último punto. ¿Cuáles son los ***tipos de números que nos sirven para expresar las diversas medidas*** que podemos efectuar? Vamos a reunirlos por primera vez:

- los ***números naturales***: con ellos nos topamos al contar u ordenar los elementos de cualquier conjunto;
- las ***fracciones*** y los ***decimales***: con los primeros nos encontramos al expresar la relación entre una parte y el todo al que pertenece; y con los segundos, como un sistema de representación de las fracciones y al efectuar diversas medidas "no enteras" de magnitudes físicas;
- las ***razones***: como expresión de la relación entre las medidas de dos magnitudes; incluido el caso excepcional del número π (3,141592…) como razón de las magnitudes longitud de la circunferencia y longitud de su radio;
- los ***números de la forma "raíz cuadrada" y "raíz cúbica"***: los primeros, por ejemplo, como expresión de la medida de la longitud de la hipotenusa o de alguno de los catetos de un triángulo rectángulo, cuando se conocen las otras dos medidas; o también como expresión de la longitud del radio de un círculo o del lado de un cuadrado cuando se conocen sus áreas respectivas; y en cuanto a los números con forma de "raíz cúbica", como expresión de la longitud del radio de un círculo o del lado de un cubo cuando se conocen sus volúmenes respectivos.

Pues bien, todos estos tipos de números pueden considerarse como integrantes de un conjunto, al que designaremos con la letra M (no porque sea la inicial del nombre del que escribe esto, sino en referencia a la palabra "medida"). Así, pues, ***los elementos de M son todos los números que sirven para expresar el resultado de diferentes medidas o de relaciones entre ellas***. El conjunto M contiene a todos los números que hemos utilizado hasta el presente y es el gran conjunto de la matemática básica.

3.4 La función inversa

En uno de los primeros ejemplos que presentamos en este Cuaderno hablamos de la relación "ser madre de" (*m*) que, aplicada a los casos de Inés y de Carlos, daba como imagen a Guadalupe, madre de ambos: *m*(Inés) = Guadalupe; *m*(Carlos) = Guadalupe; y afirmábamos estar en presencia de una función si, además, estaban presentes todas las mamás de todos los niños de la clase. Veíamos también cómo la relación opuesta, "ser hijo(a) de" (*h*), no era una función, por cuanto, aplicada al caso de Guadalupe, daría como imágenes tanto a Inés como a Carlos. Algo similar ocurría con otros ejemplos reseñados anteriormente (los referidos a las montañas y los ríos…). En este punto surge una pregunta espontánea: ¿Qué condiciones debería cumplir *m* para que *h* fuera también una función? Helas aquí:

1. Que todos los elementos del dominio de *m* (el conjunto de niños) tengan imágenes diferentes en el conjunto de las madres; es decir, que no haya ninguna mamá que lo sea de más de un(a) niño(a) presente.

2. Que el codominio y el recorrido de *m* sean el mismo conjunto; es decir, que no haya ninguna madre cuyo(a) hijo(a) no esté presente.

Al cumplirse ambas condiciones, *h* se convierte en una función cuyo dominio es el conjunto de las madres presentes, y cuyo codominio es el conjunto de los niños presentes. En efecto, la condición 1 nos garantiza que ningún elemento del dominio de *h* tendrá dos imágenes en el conjunto de los niños; por su parte, la condición 2 nos garantiza que todos los elementos del dominio de *h* tendrán una imagen en el conjunto de los niños.

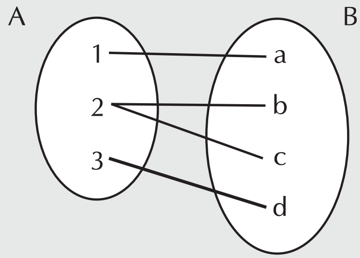
Si sólo se cumple la condición 1, la función *m* se califica como ***inyectiva***; y si sólo se cumple la condición 2, la función *m* se califica como ***sobreyectiva***; pero si se cumplen ambas, *m* se califica como ***biyectiva***. Pues bien, cuando una función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, existe una función en sentido inverso $g : B \rightarrow A$ que se denomina **función inversa de *f***. En nuestro ejemplo, si se cumplen las condiciones 1 y 2, *m* es biyectiva y puede decirse que *h* es una verdadera función y que es, además, la función inversa de *m*.

10. ¿Puede asegurarse que *h* es también biyectiva? Razone su respuesta.

11. Tome como referencia los casos 3 a 7 descritos en los diagramas de Venn del ejercicio **1.** y determine cuáles de estas funciones son: a) inyectivas; b) sobreyectivas; c) biyectivas.

12. ¿Puede una función escalonada por intervalos ser biyectiva? Razone su respuesta.

En el siguiente diagrama se nos muestra cómo $r : A \rightarrow B$ no es una función, sin que eso impida que $s: B \rightarrow A$ sí lo sea. Esta situación no contradice lo que acabamos de decir; lo que ocurre en este caso es que s no puede ser calificada como función inversa de r por la sencilla razón de que r no es una función.



Obsérvese que s: B → A es una función sobreyectiva, pero no inyectiva (¿por qué?).

13. Si el dominio y codominio de una función f no tienen igual número de elementos, ¿puede garantizarse la existencia de una función inversa de f? Razone su respuesta.

En el caso de que una función venga expresada por una fórmula y sea biyectiva, es posible obtener la fórmula de su función inversa por la vía del despeje de la variable independiente. Por ejemplo, si tomamos la función $c = 30 + 60t$ del ejercicio k), podemos pasar a $c - 30 = 60t$, y de aquí, $t = (c - 30)/60$, lo que nos daría el tiempo de la mudanza en función del costo pagado.

Volviendo al problema k), podríamos plantearnos la siguiente pregunta: ¿Cuál es el tiempo máximo en que debemos hacer la mudanza, si sólo disponemos de 255 pesos para pagarla? Para obtener la respuesta podemos proceder por varias vías:

a) Tomar la fórmula original $c = 30 + 60t$ y dar a c el valor de 255. Con ello pasamos a la *ecuación* $255 = 30 + 60t$, cuya resolución (hágalo) nos lleva a la respuesta $t = 225/60 =$ 3 horas y 45/60 de hora, es decir, 3 horas y 45 minutos.

b) Obtener la fórmula de la función inversa $t = (c - 30)/60$ y hallar la imagen de t para el valor de $c = 255$. Con ella llegamos en un solo paso a $t = 225/60$ y a la misma respuesta.

c) Proceder por vía aritmética: de esos 255 pesos, hay que restar 30 del alquiler del camión, con lo que llegamos a 225 pesos pagados sólo por el tiempo de la mudanza; esta cantidad la dividimos entre 60 con el fin de saber cuántas horas nos llevó el trabajo; y llegamos a la misma respuesta.

Observe la diversidad de las vías seguidas: algebraica (resolver una ecuación), funcional (hallar la imagen de un elemento) y aritmética (resolver el problema manejando siempre los datos concretos del enunciado). El hecho de que en el caso de la vía algebraica se llega a una ecuación al sustituir el valor de la variable dependiente y tener que despejar la independiente, ha generado el uso de la expresión "la ecuación de", aplicada sobre todo a las fórmulas de determinadas gráficas de funciones. Así, por ejemplo, a la fórmula $y = mx + b$ de la función lineal se le suele llamar "la ecuación de una recta en el plano".

14. Si al doble de un número se le restan 3 unidades, y esta diferencia se duplica a su vez, se obtiene como resultado 102. ¿Cuál es el número?

Comentario 9

Hasta aquí, en este Cuaderno, hemos tratado de conocer y comprender el concepto de función –cómo surge de la vida y, en particular, de la Aritmética y de la Geometría- y su fuerza generalizadora que trasciende los campos de donde brota. También hemos visto que, en retorno, tiene un inmenso caudal de aplicación a numerosos objetos, no sólo del campo de la Aritmética, de la Geometría, de la Estadística y de la Probabilidad, sino de todos aquellos ámbitos disciplinares en los que se detecta variabilidad en alguna magnitud –sea de la naturaleza que ésta sea-, ligada a situaciones de dependencia entre magnitudes.

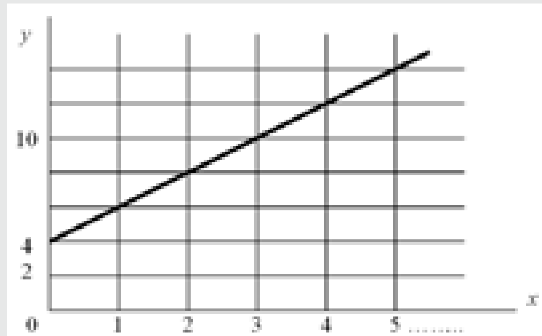
Y cabe preguntarse: ¿dónde no se dan estas situaciones de variabilidad y dependencia? De hecho, en todos los ámbitos de la vida de la naturaleza, de la sociedad y de nuestro propio ser nos encontramos con esas situaciones. Y muchas veces, el progreso de la humanidad –el verdadero progreso- radica en la mejor comprensión de las mismas.

De ahí que la función se haya convertido en uno de los objetos matemáticos más importantes dentro de la disciplina, un auténtico pivote sobre el cual descansan y se estructuran innumerables objetos matemáticos –no importa si son básicos o muy sofisticados-, ya que todos ellos pueden ser caracterizados y definidos como funciones.

Nosotros cerramos por ahora esta puerta de nuestro Curso de Desarrollo del pensamiento matemático. Pero lo hacemos, en realidad, dejando abiertas otras muchas puertas hacia una matemática más compleja (compleja porque hay más objetos matemáticos y más relaciones entre ellos; pero no porque sea más complicada, más difícil). Y entre estas puertas abiertas queremos destacar la de la generalización que nos posibilita la introducción en el Álgebra y en el mundo de las funciones; eso sí, sin perder ni la Aritmética ni la Geometría en el intento. Feliz travesía…

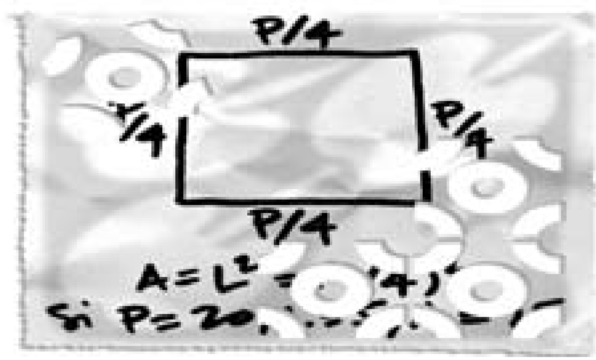
4. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"…

15. Obtenga la fórmula de la siguiente función en la que ambas variables son continuas:



16. Averigüe cómo es la puntuación en las carreras de carros de Fórmula 1 y establezca la correspondiente tabla de valores.

17. Halle el área de un cuadrado si su perímetro mide 20 cm.



18. En la sucesión definida por la función $f(n) = 2n(n + 1)$, n = 1,2,..., ¿qué término vale 180?

19. El costo neto de fabricación de una silla es de x pesos; el fabricante la vende al mayorista con un aumento del 20%, y el mayorista la vende a la tienda de muebles con un recargo del 30% sobre el precio al que la compró; finalmente, la tienda lo vende al cliente al doble del precio que pagó por ella. Escriba la fórmula que representa el precio de venta al público (p) en función del costo de producción x.

20. Atención: 45, 150, 105, 30 y 90 son "plikos". Pero 24, 50, 18, 125, 66, 6 y 80 no son "plikos". ¿Cuáles de los siguientes números: 40, 75, 120, 36, 60, 96 y 135 son "plikos"?

21. Un ganadero tiene 100 m de vallado para construir un cercado rectangular de anchura a y de fondo b.

a) Exprese la variable b en función de la variable a (no se olvide del dominio de la función).

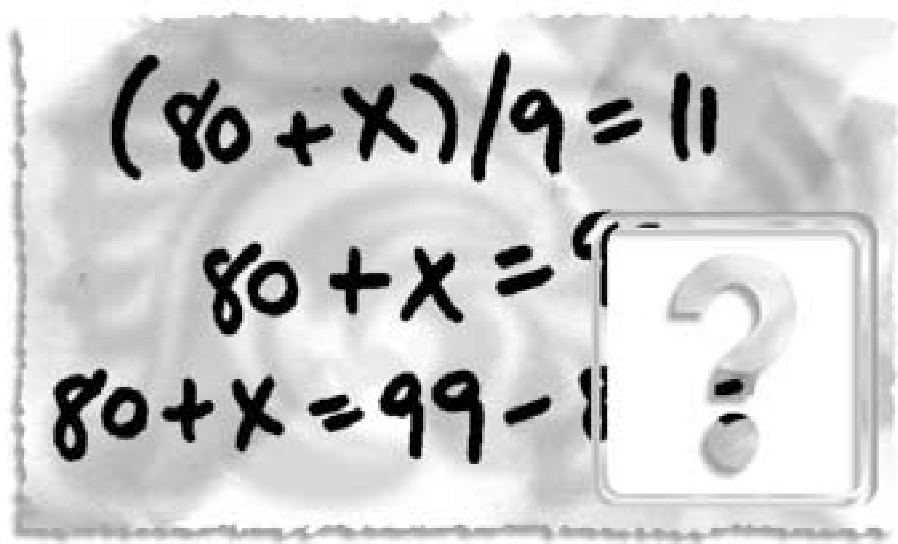
b) Dibuje la gráfica cartesiana de esta relación.

c) Encuentre la relación que existe entre la anchura del cercado y su área A.

22. Elabore una gráfica cartesiana para representar esta función: Se trata de valorar la capacidad para resolver sudokus que posee un grupo de estudiantes; los puntos p se asignan de acuerdo al tiempo t (en minutos) utilizado para resolver cada juego siguiendo la norma que se establece en esta tabla de valores:

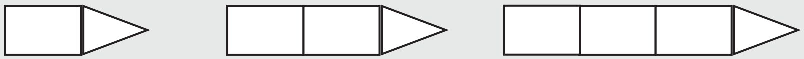
tiempo	≤ 5	$5 < t \leq$	$6 < t \leq 7$	$7 < t \leq 8$	$8 < t \leq 9$	$9 < t \leq 10$	> 10
puntos	10	9	8	7	6	5	1

23. Se tiene el plano de una casa, hecho a una escala 1 : 50. Si las dimensiones de la planta de la casa, que tiene forma rectangular, son de 18 cm x 20 cm en el plano, ¿cuál es el área de la planta de la casa en la realidad?



24. El promedio de 8 números es 10; al agregar un noveno número, el promedio sube a 11. ¿Cuánto vale este noveno número?

25. En la siguiente sucesión de figuras hechas con palillos, ¿cuál es la fórmula que nos da el número *t* de palillos que se utilizan para la figura que ocupa la posición *enésima*?



26. Obtenga la fórmula del volumen V de un cono cuya altura *h* mide el triple del radio *r* de su base [es decir, escriba el volumen del cono como una función sólo del radio de su base].

27. La presión atmosférica, al nivel del mar, es de 1 atmósfera y disminuye a medida que ascendemos: aproximadamente al ascender un km, la presión es 0,9 veces la existente un km más abajo.

a) ¿Qué presión se tendría a un km de altura? ¿Y a 2? ¿Y a 3?

b) Encuentra una fórmula que nos dé la presión *p* que existe, dependiendo de la altura *h* en km.

c) Si un montañero desciende desde 1.000 m. al nivel del mar y otro desciende desde una altitud de 5.000 m a 4.000 m, ¿la presión aumentará lo mismo en ambos casos?

28. El siguiente es un fragmento de una novela que ha sido transcrito utilizando un teclado en el que cinco teclas no escriben la letra que las identifica, sino otra; eso sí, estos cinco errores son constantes. Trate de identificar cuáles son las teclas erradas y cuál es el cambio de letras que han producido.

“El hetel ena in edficie panzide de in asanille apagade qie se cenfindía cen el desiente a si alnededen. Tenía la altina de ciatne pises y ventanales geneneses cen ina tensinación tniangilan selne la cennisa”.

Tome un texto literario cualquiera, haga un cambio de letras similar al anterior (el que se le ocurra), transcriba el texto correspondiente y déselo a sus colegas para que lo interpreten (no lo ponga muy difícil…).

29. Necesitamos hacer un viaje de ida y vuelta entre dos ciudades y para ello alquilamos un carro. La agencia Andes nos pide un pago fijo de 1.100 pesos, más el pago de 16 pesos por km recorrido; en cambio, la agencia Caribe nos pide un pago fijo de 600 pesos, más el pago de 18 pesos por km recorrido. Queremos saber:

a) el costo a pagar en cada agencia por un recorrido total de 200 km;

b) para una distancia de 100 km, ¿los costos totales serán la mitad de los anteriores?;

c) las fórmulas que nos dan los costos en cada agencia, en función de la distancia recorrida (utilizamos c_a y c_c para los costos en las agencias Andes y Caribe, respectivamente, y *d* para la distancia recorrida);

d) el nombre de la agencia que nos resulta más económica, si los puntos de conexión entre las dos ciudades distan exactamente 140 km.

En el problema anterior, haga la gráfica cartesiana de ambas funciones en los mismos ejes coordenados (*d* en las abscisas y c_a y c_c en las ordenadas). Si ambas gráficas se cruzan,

a) ¿cuál es el valor de la abscisa del punto de corte?

b) Sustituya ese valor en las dos fórmulas obtenidas en el punto c) del problema anterior; ¿qué relación existe entre ambos valores?

30. En la sucesión 4, …, …, …, 32, a partir del tercer término, cada número es la suma de los dos anteriores. ¿Cuánto suman los tres últimos?

31. Obtenga la fórmula del área A de un rectángulo cuya base *b* mide el doble de la altura *h* [es decir, escriba el área del rectángulo como una función sólo de su altura].

32. Un vehículo hace un viaje de ida y vuelta; la ida es muy complicada y la velocidad promedio apenas llega a 20 km/h; en cambio, el regreso es más fácil y la velocidad promedio alcanza los 60 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio de todo el viaje?

Dibuje la gráfica de la función "redondeo", es decir, de la función que se aplica a todos los posibles valores de las medidas y actúa de esta manera: toma todos los decimales que siguen a la parte entera y si son iguales o mayores que 500 milésimas, da como resultado el número natural siguiente; y en caso contrario, da como resultado el número natural anterior; por ejemplo, la función hace corresponder a 7,51 el número 8, mientras que a 0,4782 le hace corresponder 0 [Observe que esta función, a la que podemos designar como *r*, tiene como dominio M y como recorrido N; es decir, r: M → N].

La función r: M → N definida en el problema anterior, ¿es inyectiva?; ¿es sobreyectiva?; ¿tiene función inversa?

Referencias bibliográficas y electrónicas

- *Actividades para la detección de conocimientos previos y repaso* (s.f.). Disponible en: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/02/actipre.html

- Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.

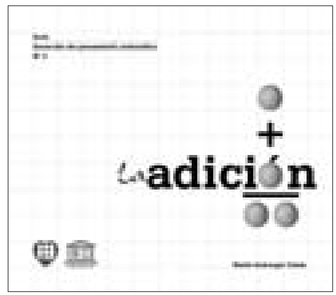
Respuestas de los ejercicios propuestos

1. Casos 1 y 2
2. a) jugadores; días de la semana; gastos; b) pesos; número de víctimas; pagos por IVA; c) {jugadores indicados}; {días de la semana}; {gastos indicados}; d) {pesos indicados}; {5, 6, 7, 9, 11, 12, 16}; {pagos indicados}
3. (a, 9), (b, 6), (c, 8), (d, 3), (e, 7), (f, 3), (g, 9), (h, 7), (i, 8)
4. a) Venezuela, Uruguay, Chile, Brasil, Paraguay; b) "la montaña … está en"
5. a) intervalo [0 m, 70 m]; intervalo [0 m, 35 m]; b) intervalo [0 km, 30 km]; intervalo [0 km/h, 120 km/h]; c) coinciden con los codominios
6. a) 216 personas; b) $f(n) = 6^n$, $n = 1, 2, \ldots$
7. Una recta paralela al eje de abscisas
8. a) 30 pesos; b) 30 pesos
9. Fila 112, columna 6
10. Sí
11. a) 3, 5, 6; b) 4, 6; c) 6
12. No
13. No
14. 27
15. $y = 4 + 2x$
16. 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, para los clasificados del 1º al 8º lugar, respectivamente
17. 25 cm^2
18. 9º
19. $p = 3{,}12x$
20. 75, 120, 60, 135 (múltiplos de 15)
21. a) $b = 50 - a$, $0 < a < 50$; b) $A = a(50 - a)$
22. Es una gráfica escalonada descendente; primer escalón a la altura 10 y último escalón a la altura 1
23. 90 m^2
24. 19
25. $t = 3(n + 1)$, $n = 1, 2, \ldots$
26. $V = \pi r^3$
27. a) 0,9 atm; 0,81 atm; 0,729 atm; b) $p = (0{,}9)^h$, $h = 0, 1, 2, \ldots$; c) no
28. {b, m, o, r, u} {l, s, e, n, i}, en el orden indicado
29. a) $c_a = 4.300$ pesos; $c_c = 4.200$ pesos; b) no; c) $c_a = 1.100 + 16d$; $c_c = 600 + 18d$; d) Andes
30. 64
31. $A = 2h^2$ **32.** 30 km/h

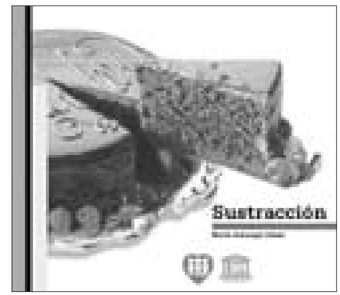
Serie "Desarrollo del pensamiento matemático"

1-El conocimiento matemático

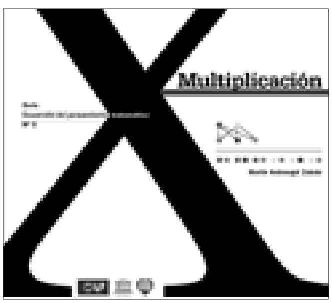
2-El sistema numérico decimal



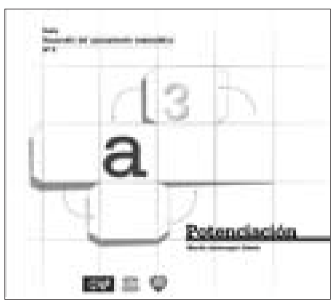
3-La adición



4-Sustracción



5-Multiplicación

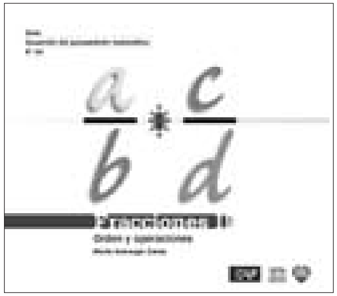


6-Potenciación

7-División

8-Divisibilidad

9-Fracciones I.
Concepto y representación



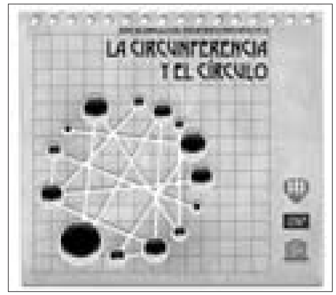
10-Fracciones II.
Orden y operaciones

11-Razones y proporciones

12-Geometría: Conceptos y
construcciones elementales

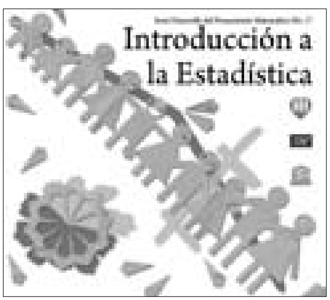
13-Polígonos. Triángulos

14-Cuadriláteros y otros
polígonos. Simetrías

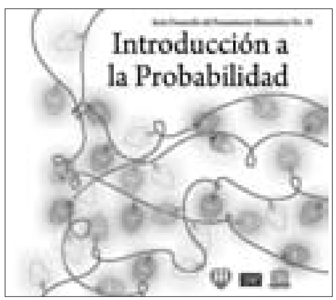


15-La circunferencia
y el círculo

16-Cuerpos geométricos

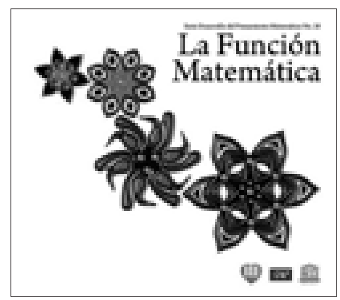


17-Introducción a la estadística



18-Introducción
a la probabilidad

19-Introducción al álgebra



20-La función matemática

Índice