

Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones

Antonio Valdés

22 de enero de 2013

Índice general

1. Curvas parametrizadas	5
1.1. Ejemplos de curvas planas	6
1.1.1. Circunferencia	8
1.1.2. Curvas polinómicas	8
1.2. Curvas de Bézier	10
1.2.1. Afinidades	10
1.2.2. Combinaciones baricéntricas	12
1.2.3. Algoritmo de Jarvis para el cálculo de la envoltura convexa	14
1.2.4. Polinomios de Bernstein	15
1.2.5. Curvas de Bézier	17
1.2.6. El algoritmo de De Casteljaou	19
1.3. Curvas racionales	20
2. Curvas regulares. Curvatura.	25
2.1. Curvas regulares. Longitud de arco.	25
2.2. Definición de curvatura	34
2.2.1. Curvatura de una curva plana	35
2.2.2. Curvatura de una curva no parametrizada por la longitud de arco	37
2.2.3. Invariancia de la curvatura	39
2.2.4. Circunferencia osculadora	40
2.3. Ecuaciones implícitas de curvas en el plano	43
2.3.1. Curvatura de una curva definida implícitamente	47
3. Ecuaciones de Frenet	49
3.1. Otra interpretación de la curvatura de una curva plana	49
3.2. Ecuaciones de Frenet planas	51
3.3. El teorema fundamental de la teoría de curvas planas	53
3.4. Curvas espaciales. Plano osculador	56
3.5. Binormal. Fórmulas de Frenet y consecuencias.	58
3.6. Forma canónica local de una curva	60

4. Superficies	63
4.1. Superficies de Bézier	63
4.2. Superficies parametrizadas regulares	66
4.2.1. El plano tangente es el que mejor aproxima la superficie en el punto	66
4.3. Ejemplos de superficies	68
4.3.1. Grafos	68
4.3.2. Superficies de rotación	68
4.4. Rotaciones y cuaterniones	69
4.5. Curvas sobre superficies. Geodésicas	72
4.5.1. Geodésicas	73
5. Las formas fundamentales	77
5.1. Primera forma fundamental	77
5.1.1. Longitudes de curvas	77
5.1.2. Ángulos	78
5.1.3. Áreas	79
5.2. La segunda forma fundamental	79
5.2.1. Curvatura normal y curvatura geodésica	82
5.2.2. Secciones normales	83
5.2.3. Diagonalización de la segunda forma fundamental	84
5.2.4. Cálculos explícitos	85
5.3. Líneas de curvatura y líneas asintóticas	87
5.4. Una interpretación geométrica de la curvatura de Gauss	89
5.5. El teorema egregio de Gauss	91

Esta obra se difunde bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 3.0. Puede leer las condiciones de la licencia en

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es> :

Capítulo 1

Curvas parametrizadas

Comenzaremos adoptando la siguiente idea intuitiva de curva plana: es el conjunto de puntos del plano recorrido por un punto que se mueve en el tiempo. Esto implica que las coordenadas del punto móvil $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ deben ser funciones $x = x(t), y = y(t)$ de la variable temporal. Dado que las técnicas que usaremos para estudiar dichas curvas usarán herramientas del cálculo diferencial, exigiremos que las coordenadas sean funciones diferenciables con tantas derivadas como sea necesario.

La velocidad de la curva es el vector $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. Nótese que conociendo la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ de la curva y su posición \mathbf{x}_0 en un instante $t = t_0$, es posible recuperar la misma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt. \quad (1.1)$$

Ejercicio 1. Una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ tiene por velocidad $\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t)$. Calcúlense sus ecuaciones y dibújese.

Ejercicio 2. Calcúlense las ecuaciones de las curvas cuya velocidad está dada por $\mathbf{v}(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ siendo $a, b > 0$.

Ejercicio 3. La curva $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 3t + 1, 2t^2 - t - 5)$ es una parábola. Encuéntrese su ecuación implícita.

Ejercicio 4. Demuéstrese que una curva espacial cuyas componentes sean polinomios de grado ≤ 2 está contenida en un plano. (Indicación: el espacio de polinomios de grado ≤ 2 tiene dimensión tres, y los tres polinomios, junto con el polinomio constante 1 son cuatro polinomios).

Ejercicio 5. — Demuéstrese que, si $x(t)$ e $y(t)$ son dos polinomios de grado dos independientes, entonces la curva es una parábola (Indicación: hay

un cambio afín de coordenadas que transforma la curva original en (t, t^2) , que es manifiestamente una parábola. Para encontrarlo basta con escribir los polinomios en términos de la base canónica.)

Ejercicio 6. Demuéstrese que una curva espacial cuyas componentes son polinomios independientes de grado ≤ 2 es una parábola. ¿Y si son dependientes?

1.1. Ejemplos de curvas planas

Antes de comenzar el estudio teórico de las curvas, es conveniente disponer de ejemplos suficientes que muestren su interés.

Un punto

Existe la posibilidad de que el movimiento del punto tenga velocidad nula, es decir, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} = (0, 0)$. En ese caso la integral de la ecuación (1.1) es nula y por tanto

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0.$$

Rectas

Cuando un punto se desplaza con velocidad constante, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$ entonces

$$\int_{t_0}^t \mathbf{v}_0 dt = \mathbf{v}_0(t - t_0),$$

así que la curva resultante es la recta

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0).$$

En coordenadas, si $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{v}_0 = (u, v)$, resulta

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + u(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + v(t - t_0) \end{cases}$$

No obstante, una recta puede ser recorrida a velocidad no constante.

Ejercicio 7. Escribese una curva parametrizada que recorra una recta pero a velocidad no constante. Dibújese, usando Sage.

Ejercicio 8. Demuéstrese que los puntos de una curva están contenidos en una recta, es decir, satisfacen una ecuación lineal del tipo $ax + by + c = 0$, si y sólo si su velocidad $\mathbf{v}(t)$ es de la forma $\mathbf{v}(t) = f(t)\mathbf{v}_0$ para alguna función diferenciable $f(t)$ y un vector constante \mathbf{v}_0 .

La aceleración de una curva es el vector

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}.$$

También emplearemos la notación funcional según la cual

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{x}''(t) &= \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2},\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Ejercicio 9. Demuéstrese que una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ con velocidad nunca nula es una recta si y sólo si su aceleración es proporcional a su velocidad (se entiende que los coeficientes de proporcionalidad son funciones de la variable temporal). ¿Es este resultado razonable, intuitivamente? Sugerencia: Para demostrar que la condición es necesaria, puede utilizarse el ejercicio anterior. Para la suficiencia, la ecuación diferencial $\mathbf{x}''(t) = \lambda(t)\mathbf{x}'(t)$ es fácil de resolver.

Ejercicio 10. Demuéstrese que la función

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

es diferenciable (de clase infinito). Indicación: demuéstrese por inducción que las derivadas de f son de la forma

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} R_n(t)e^{-1/t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

siendo R_n una función racional y calcúlese $\lim_{t \rightarrow 0} f^{(n)}(t)$.

Ejercicio 11. Usando la función definida en el ejercicio anterior, escríbase la parametrización de una curva diferenciable que esté contenida en el eje OX si $t < 0$ y en el eje OY si $t > 0$. ¿Es su aceleración proporcional a su velocidad? ¿Contradice esto el ejercicio 9?

Ejercicio 12. *Supongamos que todas las rectas tangentes a una curva cuya velocidad es nunca nula pasan por un punto fijo. Demuéstrese que la curva está contenida en una recta. (Indicación: Si llamamos al punto \mathbf{x}_0 , tendremos que $\mathbf{x}(t) + \lambda(t)\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}_0$ para cierta función λ . Derívese esta relación y utilícese el ejercicio 9.*

Ejercicio 13. *Dar un ejemplo que muestre que el resultado del ejercicio anterior no es cierto si suponemos que la velocidad de la curva puede anularse.*

1.1.1. Circunferencia

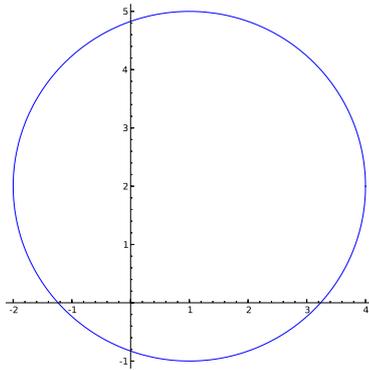
Una circunferencia de centro $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ y radio r puede parametrizarse como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}_0 + r(\cos t, \sin t).$$

Ejercicio 14. *Demuéstrese que los puntos de esta curva distan r del centro.*

Dibujemos la circunferencia con centro $(1, 2)$ y radio 3:

```
t = var('t')
x0, y0 = 1, 2
r = 3
p = parametric_plot((x0 + r * cos(t), y0 + r*sin(t)),
                    (t, 0, 2 * pi))
p.set_aspect_ratio(1)
```



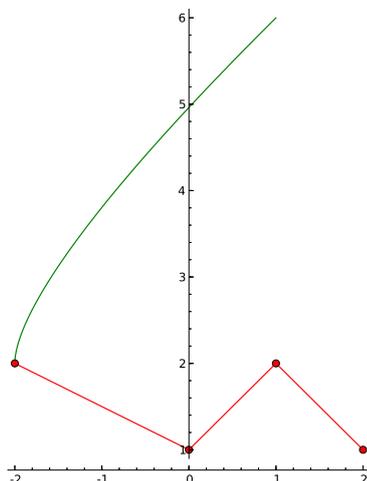
1.1.2. Curvas polinómicas

Una clase especialmente importante de curvas son las curvas polinómicas, es decir, tales que $x(t)$ e $y(t)$ son polinomios en la variable t , digamos de grado $\leq n$. Tienen la ventaja de que su cálculo es muy rápido y están controladas por $n + 1$ parámetros. Sin embargo, la relación entre sus coeficientes y la

curva final es difícil de controlar. Consideremos una curva $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i t^i$, siendo \mathbf{v}_i puntos de \mathbf{R}^2 . El siguiente dibujo muestra un ejemplo de la curva resultante con el polígono formado por los puntos \mathbf{v}_i .

```
m = 3
v = [vector([-2, 2]), vector([0, 1]),
     vector([1, 2]), vector([2, 1])]
curva = sum(v[i]*t^i for i in range(m + 1))
curva_plot = parametric_plot(curva, (t, 0, 1), color = 'green')
v_plot = line([v[i].list() for i in range(m + 1)],
             marker = 'o', color = 'red')

dib = curva_plot + v_plot
dib.set_aspect_ratio(1)
```



Una razón que explica la mala relación entre la curva y el polígono dado por sus coeficientes es que no es geométrica: si consideramos una afinidad $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, es decir, una aplicación de la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, siendo \mathbf{A} una matriz 2×2 y \mathbf{b} un punto de \mathbf{R}^2 , resulta que

$$f\left(\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i t^i\right) \neq \sum_{i=0}^n f(\mathbf{v}_i) t^i,$$

salvo para valores excepcionales de t . Con palabras, no coincide la transformada de la curva con la curva definida por el polígono transformado.

Ejercicio 15. *Demuéstrese, con un ejemplo, que no es cierto que la curva transformada mediante una afinidad coincida con la curva asociada al polígono transformado. ¿Cuáles son las curvas que tienen esta propiedad para toda afinidad?*

Para entender la razón por la que las curvas polinómicas escritas en la base estándar tienen un mal comportamiento, debemos recordar lo que son las combinaciones afines (también llamadas baricéntricas) de puntos.

1.2. Curvas de Bézier

Para definir y entender las curvas de Bézier, es necesario introducir algunos conceptos de geometría afín.

1.2.1. Afinidades

Las transformaciones afines del plano son de la forma

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

una matriz no singular, i.e., $\det \mathbf{A} \neq 0$ y

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

representa una traslación.

Algunos casos particularmente importantes de afinidades son los siguientes:

Traslaciones

Cuando $\mathbf{A} = \text{Id}$, la afinidad se reduce a

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

y se llama *traslación* de vector \mathbf{b} .

Isometrías

En el caso de que la matriz \mathbf{A} sea ortogonal, es decir, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \text{Id}$, la afinidad se llama isometría. Isometría significa “igual medida”, porque dichas transformaciones preservan las distancias, es decir, para cualesquiera puntos \mathbf{x}, \mathbf{y} se tiene que

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Veamos que el que una afinidad preserve las distancias es equivalente a que la matriz A sea ortogonal. Para ello observemos que

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \text{Id}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.2)$$

mientras que

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))^2 &= \|\mathbf{Ax} + \mathbf{b} - (\mathbf{Ay} + \mathbf{b})\|^2 \\ &= (\mathbf{Ax} - \mathbf{Ay})^\top (\mathbf{Ax} - \mathbf{Ay}) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Concluimos por tanto que las expresiones en (1.2) y (1.3) son iguales para todo \mathbf{x}, \mathbf{y} si y solo si

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \text{Id}, \quad (1.4)$$

es decir, A es una matriz ortogonal.

Ejercicio 16. *Demuéstrese esta última afirmación. Indicación: hágase $\mathbf{y} = 0$. Las derivadas parciales de segundo orden respecto a \mathbf{x} de ambas expresiones deben ser iguales y determinan los coeficientes de las matrices.*

Tomando determinantes en (1.4), vemos que

$$|\mathbf{A}|^2 = 1,$$

con lo que $|\mathbf{A}| = \pm 1$.

Ejercicio 17. *Demuéstrese con un ejemplo que no toda matriz con determinante ± 1 tiene por qué ser una matriz ortogonal.*

Las isometrías cuya matriz A tienen determinante $+1$ se llaman *movimientos*.

Ejercicio 18. *Demuéstrese que un movimiento plano tiene una matriz de la forma*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Indicación: analícese el sistema de ecuaciones que resulta de que $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \text{Id}$.

Ejercicio 19. *Demuéstrese que una isometría plana que no es un movimiento tiene una matriz de la forma*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Indicación: Basta con componer A con una reflexión respecto, por ejemplo, a uno de los ejes coordenados.

1.2.2. Combinaciones baricéntricas

Las combinaciones lineales usuales no son compatibles con las afinidades debido esencialmente a la existencia de traslaciones. En efecto, consideremos puntos \mathbf{x}, \mathbf{y} y escalares $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Sea f la traslación de vector \mathbf{b} . Entonces

$$f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \mathbf{b},$$

mientras que

$$\lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + (\lambda + \mu)\mathbf{b}.$$

Si queremos que ambos resultados sean iguales para cualquier traslación, debemos exigir que

$$\lambda + \mu = 1.$$

De forma más general, dados puntos \mathbf{x}_i y escalares $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, \dots, m$, tales que $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$, diremos que

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{x}_i$$

es la *combinación baricéntrica* de los puntos \mathbf{x}_i con *pesos* λ_i .

Ejercicio 20. *Demuéstrese que las afinidades respetan las combinaciones afines de puntos, es decir,*

$$f\left(\sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f(\mathbf{x}_i)$$

si f es una afinidad y

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1.$$

Convexidad

El segmento determinado por los puntos \mathbf{x} y \mathbf{y} está dado por

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{x} + \mu \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} : \mu \in [0, 1]\}.$$

Puesto que $\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, es

$$\mathbf{x} + \mu \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} = (1 - \mu)\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}.$$

Ejercicio 21. *El segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ es el conjunto de combinaciones baricéntricas $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ con $\lambda + \mu = 1$ y $\lambda, \mu \geq 0$.*

Los pesos λ, μ fijan en qué proporción divide el punto $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ al segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. En efecto, si escribimos

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} + \mu\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}},$$

o, equivalentemente

$$\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{p}} = \mu\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \mu(\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{p}} + \overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{y}}),$$

de donde se obtiene que

$$\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{p}} = \frac{\mu}{1-\mu}\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{y}} = \frac{\mu}{\lambda}\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{y}}.$$

Llamaremos a la cantidad μ/λ *razón simple* de los puntos \mathbf{x}, \mathbf{p} y \mathbf{y} y la denotaremos como $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$. Esto a veces se denota de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{p}} : \overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{y}} = \mu : \lambda.$$

Ejercicio 22. Demuéstrese que las afinidades transforman rectas en rectas.

Ejercicio 23. Demuéstrese que las afinidades preservan la razón simple, es decir, si f es una afinidad y $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}$ son puntos alineados, entonces

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y})).$$

Ejercicio 24. Demuéstrese con un ejemplo que las afinidades no preservan ni distancias, ni ángulos, ni áreas.

Ejercicio 25. Prográmese en Sage una función que dibuje el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ y, dada una razón simple r dibuje el punto correspondiente \mathbf{p} y los segmentos $[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ y $[\mathbf{p}, \mathbf{y}]$. Sugerencia: úsese la función `@interact` para poder modificar interactivamente el valor de r .

Ejercicio 26. Prográmese en Sage una función que dibuje el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ y, dado un escalar λ dibuje el punto correspondiente $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$, $\lambda + \mu = 1$. Sugerencia: úsese la función `@interact` para poder modificar interactivamente el valor de λ .

Si ahora tenemos tres puntos, \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} y $\lambda + \mu + \nu = 1$, podemos interpretar la combinación $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}$ de la siguiente forma:

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (\mu + \nu) \left(\frac{\mu}{\mu + \nu}\mathbf{y} + \frac{\nu}{\mu + \nu}\mathbf{z} \right), \quad (1.5)$$

en tanto $\mu + \nu \neq 0$. Si es $\mu + \nu = 0$ entonces la combinación simplemente es el punto \mathbf{x} .

Si los coeficientes de $\frac{\mu}{\mu + \nu}\mathbf{y} + \frac{\nu}{\mu + \nu}\mathbf{z}$ son positivos entonces dicho punto está en el segmento $[\mathbf{y}, \mathbf{z}]$. Si adicionalmente el coeficiente $\lambda \geq 0$ entonces el punto $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}$ está en el triángulo cerrado (junto con su interior) $\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}$.

Ejercicio 27. Demuéstrese que el triángulo cerrado $\overset{\Delta}{\mathbf{xyz}}$ coincide con el conjunto

$$\{\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z} : \lambda, \mu, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1\}.$$

Para ello, defínase previamente el triángulo de forma análoga a como se ha definido el segmento y demuéstrese que ambas definiciones coinciden.

Ejercicio 28. Usando Sage, dibújese el triángulo $\overset{\Delta}{\mathbf{xyz}}$ y el punto $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} + \nu\mathbf{z}$, $\lambda + \mu + \nu = 1$. Usando *@interact*, permítase mover los coeficientes y observar el resultado. Explíquese, según el signo de los coeficientes, dónde debe hallarse el punto respecto al triángulo.

Un conjunto S se dira *convexo* si para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, se tiene que $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset S$. Dado un conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$, definimos la *envoltura convexa* de S , $\text{hull}(S)$, como el menor de los conjuntos convexos que contienen a S .

Ejercicio 29. Dado $S \subset \mathbf{R}^n$, se tiene que

$$\text{hull}(S) = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \mathbf{x}_i : \lambda_i \geq 0, \mathbf{x}_i \in S, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, m \in \mathbf{N} \right\}.$$

Indicación: Demuéstrese que el conjunto dado por el lado derecho de la igualdad contiene a S , es convexo y que está contenido en cualquier conjunto convexo que contenga a S . Para esto último, se puede hacer un argumento inductivo basado en (1.5).

Ejercicio 30. Dibújese una aproximación a la envoltura convexa de un conjunto finito dibujando un número suficientemente grande de puntos de la misma. ¿Se obtienen así buenos resultados? ¿Qué problemas puede tener este método?

1.2.3. Algoritmo de Jarvis para el cálculo de la envoltura convexa

Terminemos viendo un algoritmo sencillo, aunque no el más eficiente, para calcular la envoltura convexa de un conjunto finito S de puntos en el plano. Por simplicidad, supondremos que los puntos están situados en posición general, en el sentido de que no hay tres puntos de S alineados. La idea consiste en comenzar el cálculo de la envoltura convexa con un punto $\mathbf{p}_0 \in S$ con la menor abscisa posible. A continuación consideramos todos los segmentos de la forma $\mathbf{p}_0\mathbf{p}$ con $\mathbf{p} \in S$, hasta que encontramos uno, \mathbf{p}_1 , con la propiedad de que $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ deja a todos los otros puntos de S a su

Algorithm 1 Algoritmo de Jarvis para el cálculo de la envoltura convexa

Input: Un conjunto finito S de puntos del plano en posición general.

Output: El polígono frontera de $\text{hull } S$, $\partial \text{hull } S$, dada como una lista ordenada de puntos.

$\mathbf{p}_0 \leftarrow$ punto de S con menor abscisa.

$\mathbf{p}_{\text{inic}} \leftarrow \mathbf{p}_0$

Inicializa $\partial \text{hull } S$ con \mathbf{p}_0 .

repeat

 Para cada $\mathbf{p} \in S$

if $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_{\text{inic}}$ **and** $[\mathbf{p}_{\text{inic}}, \mathbf{p}]$ deja a los demás puntos de S a su derecha **then**

 Añade \mathbf{p} a la lista de puntos de $\partial \text{hull } S$

$\mathbf{p}_{\text{inic}} \leftarrow \mathbf{p}$

end if

until $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$

derecha. Incorporamos \mathbf{p}_1 a la frontera de la envoltura convexa y repetimos el procedimiento con él y así sucesivamente hasta alcanzar un punto $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_0$, en cuyo caso hemos terminado.

Nótese que para decidir si un punto \mathbf{z} está a la izquierda del segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ basta con ver si los vectores $\{\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{z}}\}$ forman una base positivamente orientada, es decir, si su determinante es positivo.

Ejercicio 31. *Impleméntese, usando Sage, el algoritmo de Jarvis.*

Ejercicio 32. *¿Sabrías implementar el algoritmo si los puntos no están necesariamente en posición general?*

Dado que por cada punto de la frontera de la envoltura convexa hemos de hacer un número constante de operaciones por cada punto de S que no es él mismo, el coste del algoritmo de Jarvis es $O(kn)$, siendo n el número de puntos de S y k el número de puntos de $\partial \text{hull } S$.

1.2.4. Polinomios de Bernstein

Una forma de mejorar la relación entre curva y polígono sería sustituir la base de polinomios $\{1, t, \dots, t^n\}$ por otra base $\{P_0^n(t), \dots, P_n^n(t)\}$ que satisfaga la condición

$$\sum_i P_i^n(t) = 1,$$

de forma que la curva esté dada por una combinación baricéntrica de puntos del polígono de control. La forma más sencilla de hacer esto es escribir

$$1 = (t + (1 - t))^n$$

y desarrollar esta identidad mediante el binomio de Newton. Resulta así

$$1 = \binom{n}{0}t^n + \binom{n}{1}t^{n-1}(1-t) + \binom{n}{2}t^{n-2}(1-t)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(1-t)^n.$$

Este desarrollo sugiere definir los polinomios

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i},$$

que se llaman *polinomios de Bernstein*. Obviamente se trata de $n + 1$ polinomios de grado n , de forma que será suficiente comprobar que son linealmente independientes para ver que forman una base.

Ejercicio 33. Dibújense los polinomios de Bernstein con $t \in [0, 1]$ para $n = 1, \dots, 10$.

Ejercicio 34. Demuéstrese que los polinomios de Bernstein se pueden determinar recursivamente mediante las fórmulas

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t),$$

$$B_0^0(t) = 1.$$

Indicación: Recuérdese que los coeficientes binomiales satisfacen la relación recursiva

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}.$$

Ejercicio 35. Calcúlese el máximo de $B_i^n(t)$ con $t \in [0, 1]$.

Ejercicio 36. Demuéstrese que los polinomios de Bernstein de grado n son linealmente independientes y, por tanto, forman una base. *Indicación:* Obsérvese que la matriz de sus coeficientes respecto a la base canónica tiene forma triangular.

1.2.5. Curvas de Bézier

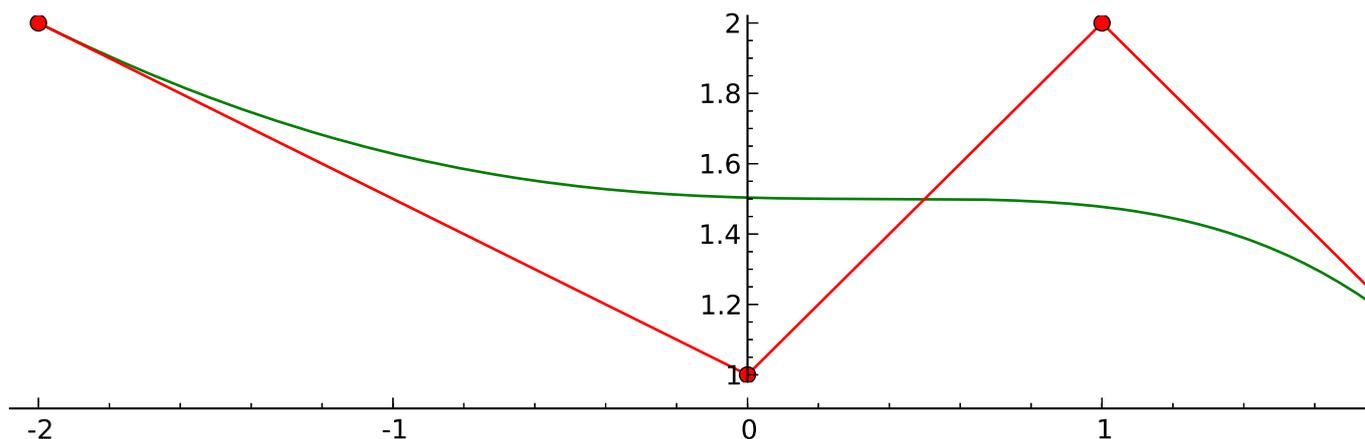
Estamos ya en condiciones de introducir las curvas de Bézier. Dado que los polinomios de Bézier son una base, cualquier curva polinómica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ se podrá escribir como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Una curva polinómica escrita de esta forma y parametrizada con $t \in [0, 1]$ se llama *curva de Bézier* y los coeficientes (ordenados) \mathbf{b}_i se llaman *polígono de control de la curva*. Veamos un ejemplo de curva de Bézier junto con el polígono de control correspondiente:

```
B(n, i, t) = binomial(n, i) * t^i * (1 - t)^(n - i)
b = [vector([-2, 2]), vector([0, 1]), vector([1, 2]), vector([2, 1])]
m = len(b) - 1
curva = sum(b[i]*B(m,i,t) for i in range(m + 1))
curva_plot = parametric_plot(curva, (t, 0, 1), color = 'green')
b_plot = line([b[i].list() for i in range(m + 1)], marker = 'o',
              color = 'red')

dib = curva_plot + b_plot
dib.set_aspect_ratio(1)
```



Ejercicio 37. Demuéstrese que una curva de Bézier satisface $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0, \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_n$.

Ejercicio 38. Demuéstrese que las curvas de Bézier son invariantes bajo transformaciones afines, es decir,

$$f\left(\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n f(\mathbf{b}_i) B_i^n(t)$$

si f es una transformación afín.

Ejercicio 39. Demuéstrese que una curva de Bézier $\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ permanece dentro de la envoltura convexa del polígono de control si $t \in [0, 1]$.

Ejercicio 40. Demuéstrese que una curva de Bézier interpola los extremos del polígono de control, es decir, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$ y $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b}_1$.

Ejercicio 41. Simetría de las curvas de Bézier: pruébese que la imagen de una curva de Bézier con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n\}$ coincide con la de la curva que tiene el polígono de control invertido, es decir, $\{\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0\}$.

Ejercicio 42. Invariancia por combinaciones afines: dadas curvas de Bézier con polígonos de control $\{\mathbf{b}_i\}$ y $\{\mathbf{c}_i\}$, que llamaremos $\mathbf{b}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$, respectivamente, entonces la curva que tiene polígono de control $\{\alpha\mathbf{b}_i + \beta\mathbf{c}_i\}$, siendo $\alpha + \beta = 1$, está dada por $\alpha\mathbf{b}(t) + \beta\mathbf{c}(t)$.

Ejercicio 43. Los polinomios de Bernstein satisfacen la identidad

$$\sum_{j=0}^m \frac{j}{m} B_j^m(t) = t.$$

Es decir, las coordenadas de t en la base de polinomios de Bernstein son $\{j/m\}$. Demuéstrese esto.

Ejercicio 44. Demuéstrese que si los vértices del polígono de control de una curva de Bézier se sitúan uniformemente distribuidos en el segmento $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$, es decir,

$$\mathbf{b}_j = \left(1 - \frac{j}{m}\right) \mathbf{p} + \frac{j}{m} \mathbf{q},$$

entonces la curva de Bézier es la recta que une \mathbf{p} con \mathbf{q} parametrizada de forma natural.

Ejercicio 45. Demuéstrese que las derivadas de los polinomios de Bernstein satisfacen la relación

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

Ejercicio 46. La derivada de una curva de Bézier $\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ viene dada mediante la fórmula

$$\mathbf{b}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} n \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t),$$

donde $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$.

Ejercicio 47. Demuéstrese que una curva de Bézier es tangente al polígono de control en los extremos del mismo.

Ejercicio 48. Escribese la curva $\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 7)$ con $t \in [0, 1]$ como una curva de Bézier.

Ejercicio 49. Escribese la curva $\mathbf{x}(t) = (t^2 + 5t - 1, 4t^2 - 1)$ con $t \in [-3, 2]$ como una curva de Bézier. (Indicación: compóngase la curva con una transformación afín que lleve el intervalo $[-3, 2]$ en el $[0, 1]$).

1.2.6. El algoritmo de De Casteljau

Veamos en esta sección un método alternativo para generar curvas de Bézier. Aunque computacionalmente es menos eficaz que la forma de Bernstein, es un procedimiento geométrico más sugerente. Se trata, básicamente, de hacer una interpolación lineal iterada de los vértices del polígono de control.

Algorithm 2 Algoritmo de De Casteljau

Input: El polígono de control $\{\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n\}$ de la curva y $t \in \mathbf{R}$.

Output: La curva de Bézier asociada $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$.

$\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$.

for $r = 1 \rightarrow n$ **do**

for $i = 1 \rightarrow n - r$ **do**

$\mathbf{b}_i^r(t) = (1 - t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t)$

end for

end for

return $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0^n(t)$.

Ejercicio 50. Demuéstrese que la curva resultante del algoritmo de De Casteljau coincide con la curva de Bézier correspondiente. Indicación: úsese inducción y el ejercicio (34).

Ejercicio 51. Usando la función `animate` de Sage, impleméntese el algoritmo de De Casteljau.

Ejercicio 52. Calcúlense las curvas de Bézier de grado 3 que en sus extremos $(1, 2)$ y $(1, 5)$ tienen velocidades $(6, -9)$ y $(-3, 9)$, respectivamente.

1.3. Curvas racionales

Las curvas polinómicas no son suficientes para obtener algunos tipos de curvas importantes, como por ejemplo las cónicas.

Ejercicio 53. Demuéstrese que no existe ninguna curva polinómica no constante cuya imagen se encuentre contenida en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. (Indicación: si $x(t)$, $y(t)$ son polinomios, ¿qué sucede con el término de grado más alto de $x(t)^2 + y(t)^2 - 1$?)

Una curva racional es la afinización de una curva polinómica proyectiva. Es decir, si

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = (p(t) : q(t) : r(t))$$

es una curva polinómica proyectiva, entonces

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{p(t)}{r(t)}, \frac{q(t)}{r(t)} \right)$$

es la correspondiente curva racional afín (correspondiente a la afinización que supone que $z = 0$ es la recta del infinito). Las curvas racionales no aumentan excesivamente el coste computacional y permiten dibujar cónicas.

Para parametrizar una cónica, que suponemos no degenerada, tomemos un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ de la misma y consideremos el haz de rectas de base \mathbf{x}_0 . Para ello tomemos dos rectas $r_0(x, y) = 0$ y $r_1(x, y) = 0$ no proporcionales cualesquiera que pasen por un punto \mathbf{x}_0 , (por ejemplo, si $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ podemos tomar las rectas $r_0 : x - x_0 = 0$ y $r_1 : y - y_0 = 0$). El haz de rectas de base \mathbf{x}_0 es, por definición, el conjunto de todas las rectas que pasan por \mathbf{x}_0 y coincide con las combinaciones lineales (no triviales) de r_0 y r_1 , es decir, el haz de rectas es el conjunto de rectas de la forma

$$ar_0(x, y) + br_1(x, y) = 0$$

donde los coeficientes a, b no son simultáneamente nulas.

Ejercicio 54. Demuéstrese esta última afirmación.

Como cualquier múltiplo no nulo de la ecuación de una recta produce la misma recta, podemos usar el parámetro $t = b/a$ en tanto que $a \neq 0$ y describir el haz como las rectas como

$$r_0(x, y) + t r_1(x, y) = 0.$$

Si hacemos esto, tenemos el inconveniente de que perdemos la recta $r_1(x, y) = 0$, a la que nos podemos acercar tanto como queramos haciendo que $t \rightarrow \infty$.

Cada recta de dicho haz corta a la cónica en el punto \mathbf{x}_0 y en otro punto adicional, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Veamos que así se obtiene una parametrización racional de la curva. Para ello, conviene simplificar los cálculos haciendo el cambio afín de coordenadas

$$\begin{cases} X = r_0(x, y) \\ Y = r_1(x, y) \end{cases}$$

El que las rectas se cortan en un punto finito \mathbf{x}_0 nos asegura que las ecuaciones del cambio son invertibles (¿por qué?). En las nuevas coordenadas, el punto de corte es $(0, 0)$ y el haz de rectas es $X + tY = 0$. La cónica, dado que tiene que pasar por el origen de coordenadas, no tendrá término independiente, es decir, su ecuación será de la forma

$$f(X, Y) = aX^2 + bY^2 + 2cXY + 2dX + 2eY = 0.$$

Haciendo $X = -tY$, obtenemos la ecuación para calcular la ordenada de los puntos de intersección:

$$f(-tY, Y) = ((at^2 - 2ct + b)Y + 2(-dt + e)) Y = 0,$$

que tiene las soluciones $Y = 0$ e

$$Y = \frac{2(dt - e)}{at^2 - 2ct + b}.$$

Como la ordenada es $X = -tY$, la parametrización que se obtiene es pues

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{-2(dt - e)t}{at^2 - 2ct + b}, \frac{2(dt - e)}{at^2 - 2ct + b} \right)$$

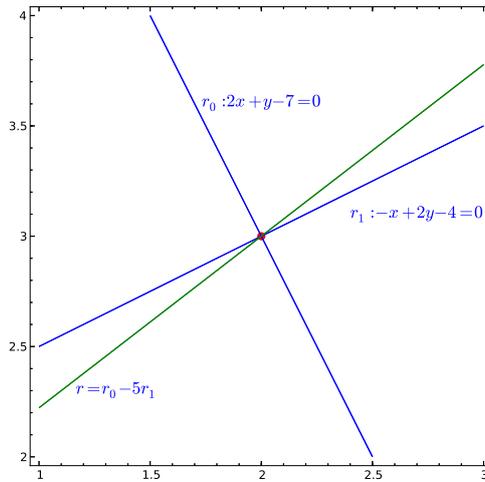
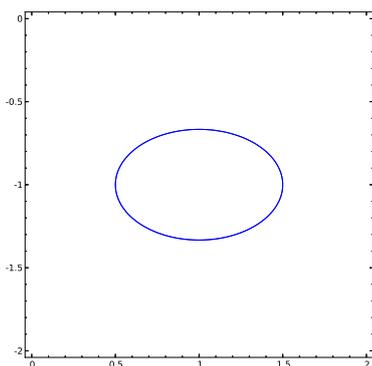


Figura 1.1: Haz engendrado por r_0 y r_1

Deshaciendo el cambio afín de coordenadas, obtenemos la parametrización racional deseada (¿por qué?).

Veamos un ejemplo. Consideremos la elipse $f(x, y) = 0$ siendo

```
f(x, y) = 4*x^2 + 9*y^2 - 8*x + 18*y + 12
ellipse_dib = implicit_plot(f(x, y), (x, 0, 2), (y, -2, 0))
ellipse_dib.set_aspect_ratio(1)
```



Encontremos primero un punto de la misma. Para ello, cortemos la cónica con una recta de la forma $x = c$. Como los puntos de corte pueden ser imaginarios, así que elegiremos c de forma que sean puntos reales.

Las soluciones de $f(c, y) = 0$ son

$$\left[y = -\frac{1}{3} \sqrt{-4c^2 + 8c - 3} - 1, y = \frac{1}{3} \sqrt{-4c^2 + 8c - 3} - 1 \right].$$

Para que el polinomio $-4c^2 + 8c - 3$ no sea negativo, debe ser $1/2 \leq c \leq 3/2$. Si tomamos, por ejemplo, $c = 1/2$ obtenemos el punto $\mathbf{x}_0 = (1/2, -1)$. Ahora que tenemos un punto de la cónica, parametricemos el haz de rectas que pasan por él usando por ejemplo las rectas $x - 1/2 = 0$ e $y + 1 = 0$, de forma que una recta genérica es de la forma

$$(x - 1/2) + t(y + 1) = 0.$$

Cortémosla con la elipse:

```
sage: var('t')
```

t

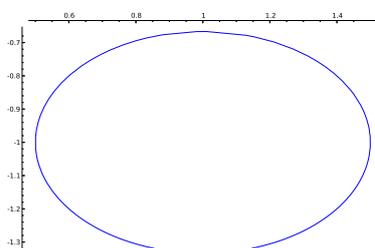
```
sage: sols = solve([x-1 + t*(y+1/3)==0, f(x,y)==0], x, y)
```

Se observa que la solución no constante viene dada por la curva racional

$$x = \frac{4t^2 - 6t + 9}{4t^2 + 9}, y = -\frac{2(8t^2 + 9)}{3(4t^2 + 9)}$$

como se quería.

```
curva = map(lambda X: X.rhs(),sols[1])
elip_param = parametric_plot(curva, (t, -10, 10))
elip_param.set_aspect_ratio(1)
```



Ejercicio 55. Como se observa, al dibujo de la elipse como curva parametrizada le falta un trozo. ¿Por qué? ¿Cómo podrías hacer para pintar la curva entera?

Ejercicio 56. Aplíquese un procedimiento parecido al anterior para obtener parametrizaciones de la hipérbola de ecuación $(x + y - 1)(x - y + 1) = 1$.

Ejercicio 57. Hágase el ejercicio anterior haciendo el cambio afín de coordenadas que sugiere la teoría y deshaciéndolo al final.

Ejercicio 58. Usando Sage, encuéntrese la matriz de la cónica recorrida por la curva parametrizada como

$$\left(\frac{2t - 1}{t^2 + t + 1}, \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} \right)$$

Ejercicio 59. Prográmese, usando Sage, un procedimiento que dada una cónica devuelva un punto real de la misma, si tal punto existe.

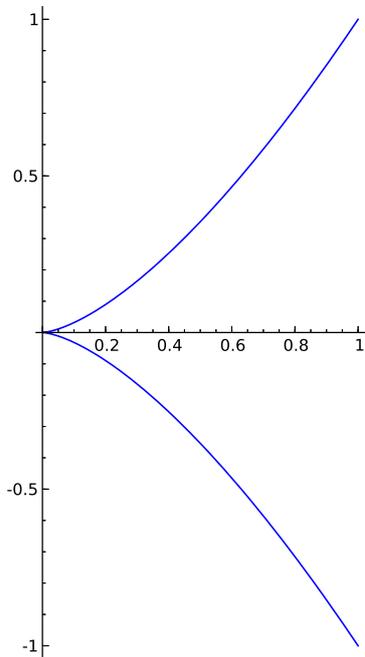
Capítulo 2

Curvas regulares. Curvatura.

2.1. Curvas regulares. Longitud de arco.

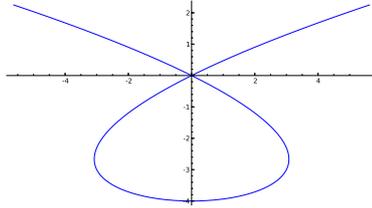
Sea $I \subset \mathbf{R}$ un intervalo abierto y sea $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ una curva diferenciable. Un punto $t \in I$ se dice singular cuando $\mathbf{x}'(t) = 0$. Una curva es regular cuando no tiene puntos singulares.

Ejemplo 1. La curva $\mathbf{x}(t) = (t^2, t^3)$ tiene en $t = 0$ un punto singular.



Llamaremos recta tangente a la curva en un punto regular t a la recta definida por $\mathbf{x}(t)$ y el vector $\mathbf{x}'(t)$. En los puntos singulares no existe recta tangente, según esta definición.

Ejercicio 60. Demuéstrase que la curva $\mathbf{x}(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es regular. Sin embargo, en el $(0, 0)$ tiene dos posibles rectas tangentes. ¿Contradice esto



la regularidad?

Ejercicio 61. Encuéntrese una curva $\mathbf{x} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que $\mathbf{x}(\mathbf{R})$ sea el eje OX , pero que no sea una curva regular.

Ejercicio 62 (*). Sea \mathbf{p} un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta sin resbalar. Paramétricese la curva que \mathbf{p} describe y encuéntrese sus puntos singulares. Dibújese. Una tal curva se llama cicloide. ¿Y si el punto está en el interior o exterior de la circunferencia?

La longitud de una curva restringida a un intervalo cerrado $[a, b]$ (¿por qué esta restricción?) se puede aproximar del siguiente modo: dada una partición $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b\}$, la longitud asociada a la partición se define como

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\|$$

Ejercicio 63 (*). Escribese un programa en Sage que calcule $L(\mathcal{P})$ siendo la partición la dada al dividir el intervalo en n trozos iguales.

Se llama longitud de la curva al número

$$L(\mathbf{x}) = \sup\{L(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es partición del intervalo } [a, b]\}.$$

Nótese que para que este número no sea infinito, el conjunto debe estar acotado, lo que requiere demostración.

Teorema 1. Dada una curva diferenciable \mathbf{x} , se tiene que

$$L(\mathbf{x}) = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt.$$

Demostración. Queremos ver que dos supremos son iguales, por una parte

$$L(\mathbf{x}) = \sup\{L(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es partición del intervalo } [a, b]\}.$$

y por otra parte

$$\int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \sup\{I(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es partición de } [a, b]\},$$

donde $I(\mathcal{P})$ denota la suma inferior de Riemann

$$I(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(t_{i+1} - t_i)$$

y, en la última ecuación, $\mathcal{P} = \{t_i\}_{i=0}^k$ y $m_i = \min\{\|\mathbf{x}'(t)\| : t \in [t_i, t_{i+1}]\}$. El que la integral se puede escribir de esta forma es simplemente parte de la definición de integral de Riemann.

Sabemos que, por ser $\|\mathbf{x}'(t)\|$ continua en $[a, b]$, su integral es finita. Sin embargo esto no está tan claro para $L(\mathbf{x})$, así que asegurémonos de que $L(\mathbf{x}) < \infty$. Para ello, observemos que, dada una partición \mathcal{P} , por el teorema de Lagrange del valor medio, podemos escribir

$$\mathbf{x}_h(t_{i+1}) - \mathbf{x}_h(t_i) = \mathbf{x}'_h(\alpha_i^h)(t_{i+1} - t_i)$$

para ciertos $\alpha_i^h \in (t_i, t_{i+1})$ y cada $h = 1, \dots, n$. Pero nuevamente por tratarse \mathbf{x}'_h de un número finito de funciones continuas en un compacto, están uniformemente acotadas, es decir, existe $M \geq 0$ tal que $|\mathbf{x}'_h(t)| \leq M$ para toda componente h y $t \in [a, b]$. Por tanto

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}) &= \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\| = \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{\sum_{h=1}^n (\mathbf{x}_h(t_{i+1}) - \mathbf{x}_h(t_i))^2} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{\sum_{h=1}^n (\mathbf{x}'_h(\alpha_i^h)(t_{i+1} - t_i))^2} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{\sum_{h=1}^n (\mathbf{x}'_h(\alpha_i^h))^2 (t_{i+1} - t_i)} \tag{2.1} \\ &\leq \sqrt{\sum_{h=1}^n M^2 \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i)} \\ &= \sqrt{n}M(b - a). \end{aligned}$$

Como esta acotación no depende de la partición empleada, concluimos que

$$L(\mathbf{x}) \leq \sqrt{n}M(b - a) < \infty.$$

Por definición de supremo y por ser la longitud asociada a una partición ≥ 0 , resulta que para todo $\epsilon > 0$ existe una partición \mathcal{P} tal que

$$0 \leq L(\mathbf{x}) - L(\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Análogamente, por ser $\|\mathbf{x}'(t)\| \geq 0$ y también por la definición de supremo, existe una partición \mathcal{P}' tal que

$$0 \leq \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt - I(\mathcal{P}') < \epsilon.$$

Veamos que podemos conseguir un refinamiento común de \mathcal{P} y \mathcal{P}' que satisfice las mismas desigualdades. Para ello, notemos que refinar \mathcal{P} (o \mathcal{P}') incrementa L (o I). Para ver esto, basta con añadir un punto a \mathcal{P} , obteniendo $\bar{\mathcal{P}}$. Por simplicidad, suponemos que añadimos un punto al final, de forma que $\bar{\mathcal{P}} = \{t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}\}$. Se argumentaría de forma similar si se añade en cualquier otra posición. Tenemos que

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}) &= \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\| \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\| + \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{i=0}^{k-2} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\| + \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k+1}) + \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_{k-1})\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-2} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\| + \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k+1})\| + \|\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_{k-1})\| \\ &= L(\bar{\mathcal{P}}). \end{aligned}$$

Un argumento inductivo muestra que, en general, si $\bar{\mathcal{P}}$ es más fina que \mathcal{P} (y escribiremos $\mathcal{P} \leq \bar{\mathcal{P}}$) entonces

$$L(\mathcal{P}) \leq L(\bar{\mathcal{P}}).$$

Se demuestra de forma parecida que

$$I(\mathcal{P}') \leq I(\bar{\mathcal{P}}')$$

si $\mathcal{P}' \leq \bar{\mathcal{P}}'$

Ejercicio 64 (*). *Pruébese esta última afirmación.*

De forma que podemos refinar \mathcal{P} y \mathcal{P}' obteniendo una partición \mathcal{P}'' más fina que ambas y tan fina como deseemos. Para esta partición ocurrirá que

$$\begin{aligned} 0 \leq L(\mathbf{x}) - L(\mathcal{P}'') &\leq L(\mathbf{x}) - L(\mathcal{P}) < \epsilon \\ 0 \leq I(\mathbf{x}) - I(\mathcal{P}'') &\leq I(\mathbf{x}) - I(\mathcal{P}') < \epsilon. \end{aligned}$$

En adelante escribiremos $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}$, por simplicidad. Veamos cuál es la distancia entre $L(\mathcal{P})$ y $I(\mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} |L(\mathcal{P}) - I(\mathcal{P})| &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_i)\| - I(\mathcal{P}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{\sum_{j=1}^n (\mathbf{x}'_j(\alpha_i^j))^2} (t_{i+1} - t_i) - \sum_{i=0}^{k-1} m_i (t_{i+1} - t_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n (\mathbf{x}'_j(\alpha_i^j))^2} - m_i \right) (t_{i+1} - t_i) \right|. \end{aligned}$$

Tenemos que analizar si podemos hacer tan pequeña como queramos la diferencia

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n (\mathbf{x}'_j(\alpha_i^j))^2} - m_i.$$

Para ello, definamos la función

$$F : [a, b]^n \rightarrow \mathbf{R}$$

como

$$F(\mathbf{t}) = \|(\mathbf{x}'_1(t^1), \dots, \mathbf{x}'_n(t^n))\|.$$

donde hemos llamado, para abreviar, $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^n)$. Esta es una función continua y $[a, b]^n$ es compacto, así que es uniformemente continua. Esto significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\| < \delta$ entonces $|F(\mathbf{t}) - F(\mathbf{t}')| < \epsilon/(b-a)$.

Por otra parte, como $\|\mathbf{x}'\|$ es continua y $[t_i, t_{i+1}]$ es compacto, el mínimo m_i se alcanza en algún punto del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, digamos β_i . Ahora refinemos la partición \mathcal{P} de forma que $|\mathcal{P}| = \min\{t_{i+1} - t_i, i = 0, \dots, k-1\} < \delta/\sqrt{n}$. Entonces

$$\left| \sqrt{\sum_{j=1}^n (\mathbf{x}'_j(\alpha_i^j))^2} - m_i \right| = |F(\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n) - F(\beta_i, \dots, \beta_i)| < \epsilon/(b-a)$$

ya que

$$\|(\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n) - (\beta_i, \dots, \beta_i)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\alpha_i^j - \beta_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (\delta/\sqrt{n})^2} = \delta.$$

Así que ya tenemos que

$$\begin{aligned}
 |L(\mathcal{P}) - I(\mathcal{P})| &= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n (\mathbf{x}'_j(\alpha_i^j))^2} - m_i \right) (t_{i+1} - t_i) \right| \\
 &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left| \sqrt{\sum_{j=1}^n (\mathbf{x}'_j(\alpha_i^j))^2} - m_i \right| (t_{i+1} - t_i) \\
 &\leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (t_{i+1} - t_i) = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon.
 \end{aligned}$$

Finalmente, vemos que

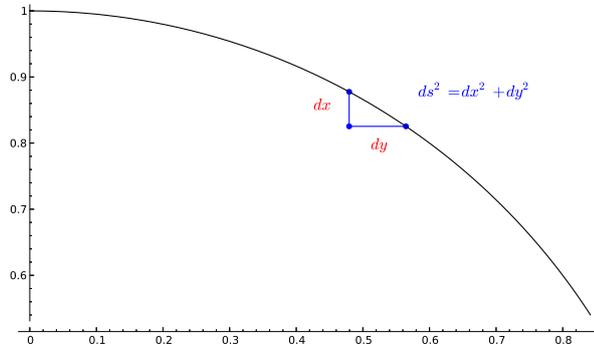
$$\begin{aligned}
 &\left| L(\mathbf{x}) - \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt \right| \\
 &= \left| L(\mathbf{x}) - L(\mathcal{P}) + L(\mathcal{P}) - I(\mathcal{P}) + I(\mathcal{P}) - \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt \right| \\
 &\leq |L(\mathbf{x}) - L(\mathcal{P})| + |L(\mathcal{P}) - I(\mathcal{P})| + \left| I(\mathcal{P}) - \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt \right| \\
 &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.
 \end{aligned}$$

Como esto ocurre para todo $\epsilon > 0$, concluimos que

$$L(\mathbf{x}) = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt,$$

como queríamos demostrar. \square

Observación 1. Desde un punto de vista intuitivo, el teorema anterior puede interpretarse así: en un tiempo infinitesimal dt la curva recorre un arco de longitud ds .



La infinitesimalidad del arco nos permite suponer que ds en realidad es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados dx y dy . El teorema de Pitágoras aplicado a los elementos infinitesimales asegura que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

con lo que, integrando,

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Ejercicio 65. Este argumento es intuitivamente interesante, pero no es riguroso. ¿Qué deficiencias le ves?

Ejercicio 66. Calcúlese la longitud del segmento de recta determinado por los puntos \mathbf{p} y \mathbf{q} .

Ejercicio 67. Demuéstrese que la longitud de un arco de circunferencia de ángulo θ y radio r es θr .

Ejercicio 68. Calcúlese una aproximación numérica a la longitud de una elipse de semiejes $a = 2$ y $b = 3$ con un error menor que 10^{-3} .

Ejercicio 69 (*). Una curva se desplaza en un cilindro circular de radio a , girando alrededor del cilindro con velocidad angular ω y subiendo a lo largo del mismo con velocidad b . Calcúlese su longitud que recorre cuando da una vuelta completa alrededor del cilindro.

Ejercicio 70 (*) (La distancia más corta entre dos puntos es la línea recta). Demuéstrese que si la longitud de una curva $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ satisface la desigualdad

$$\|\mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a)\| \geq L(\mathbf{x}),$$

entonces la curva es una recta (en el sentido de que está contenida en el segmento $[\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)]$) y su longitud es $\|\mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a)\|$. (Indicación: si en algún instante t_1 la curva no está contenida en el segmento, considérese la partición $\{t_0 = a, t_1, t_2 = b\}$).

La longitud de arco de una curva es la función $s : I \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}'(u)\| du,$$

siendo $t_0 \in I$. Intuitivamente, la longitud de arco mide la distancia sobre la curva entre el punto parametrizado por t_0 y el parametrizado por t , teniendo en cuenta que el signo viene dado por el sentido de recorrido de la curva. Cuando se cambia t_0 se obtiene una nueva longitud de arco que difiere de la anterior en una constante.

Ejercicio 71. *Demuéstrese esta última afirmación.*

Ejercicio 72. *Encuéntrese la longitud de arco de la cicloide, definida en el ejercicio 62.*

Ejercicio 73. *Considérese la curva $\mathbf{x}(t) = ae^{bt}(\cos t, \sin t)$, siendo $a > 0$ y $b < 0$. Dibújese para algunos valores de a y b . Demuéstrese que la curva tiende al origen de coordenadas cuando $t \rightarrow \infty$, dando infinitas vueltas alrededor de él, pero que, sin embargo, el límite de su longitud de arco $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) < \infty$.*

Una curva se dice que está parametrizada por la longitud de arco cuando está recorrida con velocidad uno. Equivalentemente, $s(t) = t - t_0$.

Ejercicio 74 (*). *Demuéstrese la equivalencia. ¿Qué significado geométrico tiene el que $s(t) = t - t_0$?*

Las curvas parametrizadas por longitud de arco tienen la ventaja de que están libres de los elementos no geométricos que suponen los cambios de velocidad. Todas las curvas regulares pueden reparametrizarse por la longitud de arco. Definamos formalmente lo que es una reparametrización: dos curvas $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$ se dicen que son reparametrizaciones una de la otra cuando existe un difeomorfismo $f : I \rightarrow J$ tal que $\mathbf{x} = \mathbf{y} \circ f$.

Como f es difeomorfismo, es sobreyectiva, lo que asegura que la imagen de la curva reparametrizada es la misma que la de la original, es decir

$$\mathbf{y}(I) = (\mathbf{x} \circ f)(I).$$

Por otra parte, por tener f una inversa diferenciable, f' nunca se anula (¿por qué?). Por tanto,

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{x}'(f(t))f'(t)$$

y, si la curva \mathbf{x} es regular, entonces podemos asegurar que su reparametrización \mathbf{y} también es regular. Nótese que esta fórmula nos dice que la velocidad a la que es recorrida la curva reparametrizada es la de la original escalada por el factor $f'(t)$.

Ejercicio 75 (*). *Dar un ejemplo que muestre que el que dos curvas tengan la misma imagen no implica que sean equivalentes por reparametrizaciones.*

Ejercicio 76. *Diremos que dos curvas son equivalentes cuando una es una reparametrización de la otra. Demuéstrese así tenemos una relación de equivalencia en el conjunto de curvas diferenciables.*

Ejercicio 77 (*). *Se consideran las parametrizaciones de la circunferencia dadas por*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\theta) &= (\cos \theta, \sin \theta), \\ \bar{\mathbf{x}}(t) &= \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right).\end{aligned}$$

Encuéntrese un cambio de parámetros que las relacione.

Teorema 2. *Dada una curva regular, existe siempre una reparametrización de la misma por la longitud de arco.*

Demostración. La función longitud de arco $s : I \rightarrow \mathbf{R}$ es una función diferenciable cuya derivada es $s'(t) = \|\mathbf{x}'(t)\| > 0$. Por tanto define un difeomorfismo sobre su imagen $J = s(I)$. La curva $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbf{R}^n$ dada por $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ s^{-1}$ es una reparametrización de \mathbf{x} y, debido a la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(\xi) &= \mathbf{x}'(s^{-1}(\xi))(s^{-1})'(\xi) \\ &= \mathbf{x}'(s^{-1}(\xi)) \frac{1}{s'(s^{-1}(\xi))} \\ &= \frac{\mathbf{x}'(s^{-1}(\xi))}{\|\mathbf{x}'(s^{-1}(\xi))\|},\end{aligned}\tag{2.2}$$

con lo que claramente \mathbf{y}' tiene norma uno, es decir, es una curva parametrizada por la longitud de arco. \square

Intentaremos descargar un poco la notación: la inversa de la longitud de arco $s = s(t)$ se llamará simplemente $t = t(s)$. Esto conlleva la confusión de denotar por las letras s y t simultáneamente a funciones y variables, pero esperamos que esté claro por el contexto de qué se trata en cada caso. Más aún, denotaremos por el mismo símbolo \mathbf{x} tanto a la curva como a su reparametrización. Con esta notación, las ecuaciones (2.2) quedarán como

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{1}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|}.\tag{2.3}$$

En adelante, cuando llamemos s al parámetro de una curva, supondremos que está parametrizada por la longitud de arco.

En general, no es posible calcular explícitamente una reparametrización al arco: por una parte no suele poder calcularse explícitamente $s(t)$ y aún menos su inversa. No obstante, su existencia teórica es de gran ayuda para clarificar definiciones y demostraciones, como enseguida veremos.

Ejercicio 78. *Reparametrícese la curva $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ por la longitud de arco.*

Ejercicio 79. *Reparametrícese la espiral logarítmica*

$$\mathbf{x}(t) = ae^{bt}(\cos t, \sin t)$$

por la longitud de arco.

Ejercicio 80. *Reparametrícese la cicloide por la longitud de arco en la zona comprendida entre dos puntos singulares.*

Ejercicio 81. *Demuéstrese que la longitud de una curva dada por una función $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$ está dada por*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ejercicio 82. *Demuéstrese que la longitud de una curva dada en coordenadas polares por $\rho = \rho(\theta)$ está dada por*

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta.$$

Ejercicio 83 (*). *Parametrícese la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 = 1$ usando funciones trigonométricas y calcúlese numéricamente, usando Sage, una reparametrización de la misma por la longitud de arco. Dibújese los puntos de la misma equiespaciados por la longitud de arco, como comprobación de la corrección de los cálculos.*

Ejercicio 84 (*). *Dibújense los puntos de la hipérbola $xy = 1$ que cortan a las rectas $y = 10x$ e $y = x/10$ en el primer cuadrante, junto con la secuencia de puntos sobre la hipérbola que los une y que se hayan equiespaciados sobre la hipérbola a distancia igual a 0,03 unidades.*

2.2. Definición de curvatura

El vector tangente o velocidad $\mathbf{x}'(s)$ de una curva parametrizada por el arco es un vector unitario y la velocidad con la que éste varía indica cuánto se está curvando una curva. Con más precisión, definimos pues el vector curvatura $\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s)$ y la función curvatura está dada por $k(s) = \|\mathbf{k}(s)\|$.

Ejemplo 2. Con lo que sabemos hasta ahora, sólo podemos calcular la curvatura de curvas parametrizadas al arco. Por ejemplo, sea \mathbf{v} un vector unitario y sea $\mathbf{x}(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v}$ la recta que pasa por p y tiene vector director \mathbf{v} . Como $\mathbf{x}'(s) = \mathbf{v}$, es $\|\mathbf{x}'(s)\| = 1$, con lo que la recta está efectivamente parametrizada por la longitud de arco. Su vector de curvatura es $\mathbf{k}''(s) = \mathbf{0}$ y su función de curvatura es pues $k(s) = 0$, como cabía esperar.

Observemos que, derivando la ecuación

$$\left\langle \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\rangle = 1$$

obtenemos que

$$2 \left\langle \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}, \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\rangle = 0,$$

es decir, la aceleración de una curva parametrizada por el arco es perpendicular a la velocidad.

Ejercicio 85. Esta afirmación es, intuitivamente, evidente si se observa que los vectores tangentes recorren una curva sobre la circunferencia o esfera unidad. Explíquese por qué.

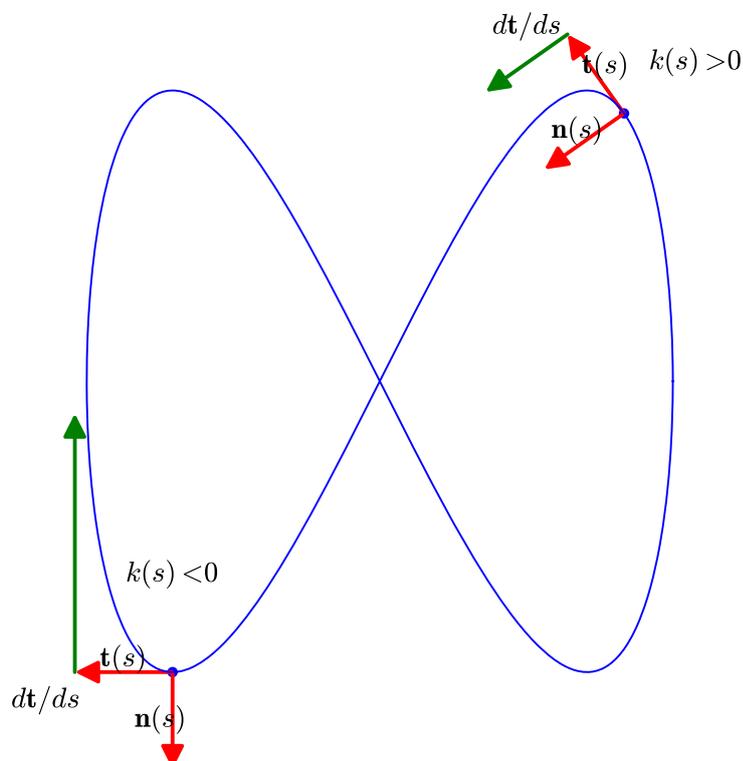
2.2.1. Curvatura de una curva plana

Llamemos $\mathbf{t}(s) = \mathbf{x}'(s)$. Este vector, si la curva es plana, puede ser completado con un vector unitario $\mathbf{n}(s)$ de forma que $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ formen una base ortonormal positivamente orientada. Como $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$, vemos que el vector normal es $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$.

La interpretación geométrica del producto escalar $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{x}''(s) \rangle$ es la proyección del vector de curvatura sobre el vector normal. Como ambos vectores son paralelos y $\mathbf{n}(s)$ es unitario, es

$$|\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{x}''(s) \rangle| = \|\mathbf{x}''(s)\|.$$

El signo de $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{x}''(s) \rangle$ es positivo si $\mathbf{x}''(s)$ tiene la misma dirección que $\mathbf{n}(s)$ y negativo en caso contrario. Como $\mathbf{x}''(s)$ es la velocidad con la que se mueve el vector tangente $\mathbf{t}(s)$ y el vector normal completa el tangente formando una base ortonormal positivamente orientada, es decir, siempre se encuentra a la izquierda del vector tangente, deducimos que $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{x}''(s) \rangle$ es positivo cuando la curva está girando “a izquierdas” respecto al vector de velocidad y negativo cuando gira “a derechas” (véase el siguiente dibujo).



En adelante es a esta función a la que llamaremos curvatura, *cuando la curva es plana*:

$$k(s) = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{x}''(s) \rangle = -y'(s)x''(s) + x'(s)y''(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix}.$$

Por tanto, la curvatura de una curva plana tiene más información que la de una curva en dimensión mayor, puesto que su signo nos informa sobre el sentido de giro de la curva.

El vector de curvatura se puede escribir como

$$\mathbf{k}(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s),$$

siendo ésta la primera de las fórmulas de Frenet, que serán el objeto del siguiente capítulo. En el caso de que la curva sea espacial, seguirá siendo $k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$.

Ejercicio 86. *Parametrícese la circunferencia de radio r por la longitud de arco y calcúlese su vector de curvatura y su curvatura.*

Ejercicio 87. *Si una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ se reparametriza haciendo $\bar{s} = \bar{s}(s)$, demuéstrese que la curva $\mathbf{x}(\bar{s})$ estará parametrizada por la longitud de arco si y sólo si $\bar{s} = \pm s + s_0$.*

Ejercicio 88 (*). ¿Cuál es el efecto sobre el recorrido de la curva de la reparametrización $\bar{s} = -s + s_0$? ¿Y sobre el vector de la curvatura? ¿Y sobre la curvatura? (distínganse los casos plano y espacial)

2.2.2. Curvatura de una curva no parametrizada por la longitud de arco

Nuestro siguiente objetivo es calcular la curvatura de una curva no parametrizada por la longitud de arco sin necesidad de reparametrizarla, es decir, dada la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ calcular $k(s(t))$ (que llamaremos, abusando de la notación, $k(t)$). Esto se puede hacer sin necesidad de conocer explícitamente la reparametrización por el arco gracias a la regla de la cadena y el teorema de la función inversa en una variable.

Fórmula de la curvatura de una curva plana no parametrizada por el arco.

Derivando la ecuación (2.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \frac{dt}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \\ &= \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

En el lado derecho de esta ecuación conocemos todos los términos salvo dt^2/ds^2 , que podríamos también calcular. No obstante, si sólo queremos calcular $k(t)$ realmente no es necesario el cálculo explícito de dt^2/ds^2 . Basta con calcular

$$\begin{aligned} k(s(t)) &= \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right) \\ &= \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \right) \\ &= \det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \\ &= \frac{\det \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right)}{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\|^3}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde hemos usado que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t(s))\|}.$$

Fórmula de la curvatura de una curva espacial no parametrizada por el arco.

En el caso de que la curva esté parametrizada por el arco y sea espacial, sabemos que su curvatura está definida por

$$k(s) = \left\| \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right\|.$$

Podríamos usar directamente la expresión (2.4), pero es más eficiente observar que, como $\mathbf{x}'(s)$ es un vector unitario y ya hemos observado que es perpendicular a $\mathbf{x}''(s)$, entonces

$$\left\| \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \times \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right\| \left\| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\| \sin(\pi/2) = \left\| \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \right\|,$$

lo que nos va a permitir hacer una simplificación análoga a la que hemos hecho en el caso plano, ahorrándonos el cálculo de dt^2/ds^2 .

Ejercicio 89 (*). *Demuéstrese que la curvatura de una curva espacial viene dada por la fórmula*

$$k(t) = \frac{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right\|}{\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\|^3}$$

Ejemplo 3. *Calculemos la curvatura de la curva $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin 2t)$:*

```
var('t')
x(t) = (cos(t), sin(2*t))
dx = x.diff(t); d2x = x.diff(t,t)
result = matrix([dx,d2x]).det() / dx.norm()^3
curv = result.full_simplify().trig_expand()
```

que da como resultado una función curvatura

$$k(t) = -\frac{2(2\cos(t)^3 - 3\cos(t))}{(\sin(t)^2 + 16\cos(t)^4 - 16\cos(t)^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}$$

Ejercicio 90 (*). Dibújese la función de curvatura y el vector curvatura a lo largo de la curva del ejercicio anterior. Interpretese geoméricamente el signo de la curvatura, sus máximos, mínimos y ceros.

Ejercicio 91. La nefroide es la curva de ecuaciones $x(t) = a(3 \cos t - \cos 3t)$, $y(t) = a(3 \sin t - \sin 3t)$. Dibújese y calcúlese su curvatura en los puntos regulares.

Ejercicio 92 (*). Encuéntrese la ecuación paramétrica de la curva

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

cortándola con el haz de rectas que pasa por el origen. ¿Por qué funciona este procedimiento? Calcúlese la curvatura de la curva. Dibújese. Esta curva se llama *folium de Descartes*.

Ejercicio 93. Parametrícese la elipse de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ usando funciones trigonométricas y calcúlese su curvatura en los vértices.

Ejercicio 94. Encuéntrese el vector de curvatura y la curvatura de la curva

$$\mathbf{x}(t) = (t^2 + 3t - 1, t^2 + t + 1, -t^2 + 5).$$

Ejercicio 95. Calcúlese la curvatura de una curva dada por un grafo $y = f(x)$.

Ejercicio 96 (*). Demuéstrese que el vector normal a una curva plana satisface la ecuación

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t}.$$

Ejercicio 97. Demuéstrese que una curva regular tiene curvatura nula si y sólo si es una recta.

2.2.3. Invariancia de la curvatura

Un movimiento es una aplicación $M : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ de la forma $M(\mathbf{p}) = \mathbf{R}\mathbf{p} + \mathbf{b}$ siendo \mathbf{R} una matriz ortogonal, es decir, tal que $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \text{Id}$ y $\det \mathbf{R} > 0$ y $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. Si transformamos una curva mediante un movimiento entonces la curvatura de la curva transformada coincide con el de la original.

Ejercicio 98 (**). Demuéstrese este resultado. Nótese que el resultado es cierto tanto para la curvatura de curvas espaciales (sin signo) como para la curvatura con signo de curvas planas.

Ejercicio 99 (*). *Si en lugar de movimientos consideramos isometrías (es decir, permitimos que el $\det R$ sea negativo), ¿sigue siendo cierto el resultado del ejercicio anterior? (Indicación: considérese por separado los casos $n = 2$ y $n = 3$).*

Además de la invariancia por movimientos, la expresión de la curvatura dada por la expresión (2.5) es invariante por reparametrizaciones que no invierten la orientación. Con más precisión, si $t = f(\bar{t})$ es un cambio de parámetros y $\bar{\mathbf{x}}$ está dada por $\bar{\mathbf{x}}(\bar{t}) = \mathbf{x}(f(\bar{t}))$ entonces $k_{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{t}) = k_{\mathbf{x}}(f(\bar{t}))$.

Ejercicio 100 (*). *Demuéstrese este resultado. Nótese que se trata tan sólo de una aplicación de la regla de la cadena y que, observando que cuando un determinante tiene dos columnas proporcionales entonces se anula, los cálculos necesarios se pueden minimizar.*

Ejercicio 101. *¿Y qué sucede en el caso de que se admitan cambios de parámetro que inviertan la orientación?*

2.2.4. Circunferencia osculadora

A continuación describiremos otros métodos para estudiar la curvatura de una curva. En primer lugar, supongamos que la curva es plana. Si queremos estudiar la curvatura en un punto $\mathbf{x}(s_0)$, podemos tomar dos puntos cercanos, digamos $\mathbf{x}(s_1)$ y $\mathbf{x}(s_2)$ y considerar la circunferencia determinada por los tres puntos. Veamos un ejemplo, usando Sage, en el que calculamos la circunferencia que pasa por tres puntos concretos de la curva $\mathbf{x}(t) = (1 - t^2, t^3 - t)$:

```

var('t')
X = vector([1-t^2, t^3-t]).function(t)

var('x x0 x1 x2 y y0 y1 y2 A B C ')
circ = x^2 + y^2 - 2*A*x - 2*B*y + C
solus = solve([circ(x=x0, y=y0), circ(x=x1, y=y1), circ(x=x2, y=y2)], \
              [A,B,C], solution_dict= True)

centro = vector([solus[0][A], solus[0][B]])
r_square = centro[0]^2 + centro[1]^2 - solus[0][C]

t0 = 0.3; t1 = 0.6; t2 = -0.2

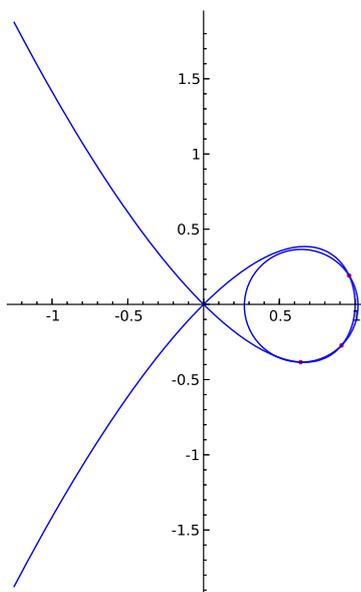
c = centro.subs(x0 = X(t0)[0], y0 = X(t0)[1], \
               x1 = X(t1)[0], y1 = X(t1)[1], \

```

```

x2 = X(t2)[0], y2 = X(t2)[1]
r = r_square.subs(x0 = X(t0)[0], y0 = X(t0)[1],
x1 = X(t1)[0], y1 = X(t1)[1], x2 = X(t2)[0], y2 = X(t2)[1]).sqrt()
curva = parametric_plot(X, (t, -1.5, 1.5))
circulo = circle(c, r)
puntos = point([X(t0), X(t1), X(t2)], color = 'red')
dib = curva + circulo + puntos
dib.set_aspect_ratio(1)

```



Dado que las circunferencias son curvas de curvatura constante y determinada por el radio, el límite $\lim_{s_1, s_2 \rightarrow s_0} r(s_0, s_1, s_2) = r(s_0)$, de existir, sería otra forma posible de medir la curvatura de la curva en un punto. A la circunferencia correspondiente se la denomina circunferencia oscultriz.

Para ello consideremos la ecuación del círculo que pasa por los tres puntos $\mathbf{x}(s_i)$, que será de la forma

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{c}(s_0, s_1, s_2), \mathbf{x} - \mathbf{c}(s_0, s_1, s_2) \rangle = r(s_0, s_1, s_2)^2,$$

donde \mathbf{x} denota un punto genérico del plano. Si llamamos

$$f(s) = \langle \mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s_0, s_1, s_2), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s_0, s_1, s_2) \rangle - r(s_0, s_1, s_2)^2,$$

resulta que f es una función diferenciable que se anula en s_0, s_1 y s_2 . Por el teorema de Rolle, existen puntos intermedios ξ_0, ξ_1 tales que $f'(\xi_0) = f'(\xi_1) =$

0. Una nueva aplicación del teorema de Rolle asegura que existe un nuevo punto intermedio η_0 tal que $f''(\eta_0) = 0$. Dado que es

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f'(s) &= \langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s_0, s_1, s_2) \rangle, \\ \frac{1}{2}f''(s) &= \langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s_0, s_1, s_2) \rangle + \langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}'(s) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s_0, s_1, s_2) \rangle + 1,\end{aligned}\tag{2.6}$$

tomando el límite cuando $s_1, s_2 \rightarrow s_0$ y, por simplificar la notación, denotando s_0 por la letra s se tiene que $\xi_0, \xi_1 \rightarrow s$ y $\eta_0 \rightarrow s$, con lo que

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s) \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s) \rangle + 1 &= 0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

De la primera de estas dos últimas ecuaciones se deduce, dado que suponemos que la curva es plana, que

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{x}(s) + \lambda \mathbf{n}(s).\tag{2.8}$$

La sustitución de (2.8) en la segunda ecuación de (2.7) nos lleva a

$$\langle \mathbf{x}''(s), -\lambda \mathbf{n}(s) \rangle + 1 = 0,$$

con lo que

$$\lambda = \frac{1}{\langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{n}(s) \rangle} = \frac{1}{k(s)}.$$

Por tanto tenemos que

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{x}(s) + \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s),\tag{2.9}$$

La curva recorrida por los centros de las circunferencias osculatrizes se llama evoluta de la curva $\mathbf{x}(s)$. El radio de la curva es

$$r(s) = \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{c}(s)\| = \left\| \frac{1}{k(s)} \mathbf{n}(s) \right\| = \frac{1}{|k(s)|}.$$

Por tanto el radio de la circunferencia osculatriz no aporta una nueva medida de la curvatura de la curva. Nótese que si en un punto la curvatura es nula entonces la circunferencia osculatriz tiene radio infinito.

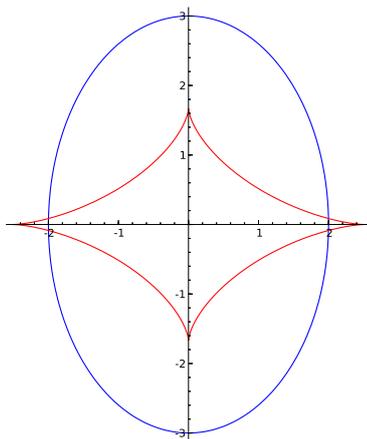
En el caso de que la curva no esté parametrizada por la longitud de arco, es posible calcular la evoluta. Para ello definimos el vector tangente a la curva como

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}.$$

El vector normal $\mathbf{n}(t)$ está únicamente determinado por ser $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ una base ortonormal positivamente orientada y haciendo uso de (2.5), se calcula $\mathbf{c}(t)$.

Ejercicio 102. *Calcúlese la evoluta de la cicloide. Dibújese.*

Ejercicio 103. *Escríbese el código necesario para obtener el dibujo de la evoluta de la elipse de ecuación $x^2/4 + y^2/9 = 1$, que incluimos a continuación:*



¿Sabes interpretar el dibujo? ¿Eres capaz de visualizar las circunferencias osculatrices?

Ejercicio 104 (*). *Demuéstrese que las rectas tangentes a la evoluta de una curva son perpendiculares a la curva inicial. Esto se suele expresar diciendo que la evoluta es envolvente de las rectas normales a la curva.*

La curva determinada por los centros de las circunferencias osculatrices se denomina evoluta de la curva \mathbf{x} . Más adelante, analizaremos algunas de sus propiedades.

2.3. Ecuaciones implícitas de curvas en el plano

Comencemos con algunas ideas intuitivas: una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es un objeto geométrico descrito por un grado de libertad, el parámetro temporal t . Una idea alternativa para generar un objeto con un grado de libertad es partir del plano, cuyos puntos $\mathbf{x} = (x, y)$, están descritos por dos coordenadas y eliminar una de las libertades forzando el que se satisfaga una ecuación

$$f(x, y) = 0. \quad (2.10)$$

La curva será el conjunto de puntos que satisfacen una tal la ecuación. Pero no cualquier función es adecuada. Desde luego, pediremos que la función sea diferenciable, pero esto no es suficiente: por ejemplo, podría ser $f \equiv 0$, con

lo que la curva sería todo el plano, cosa que no deseamos o $f \equiv 1$, entonces ningún punto satisface la ecuación y la curva sería vacía, cosa que tampoco es deseable, así que vemos que debemos exigir más condiciones a la ecuación f .

El que una variable determine la otra se puede expresar matemáticamente pidiendo que exista una función $y = y(x)$ (o bien $x = x(y)$) que cumpla que $f(x, y) = 0$ si y sólo si $y = y(x)$. Esta función es la que 'despeja' y en función de x . Si existe, deberemos tener que

$$f(x, y(x)) \equiv 0.$$

Si derivamos esta identidad respecto a x obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

De aquí se deduce que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Como queremos que dy/dx sea diferenciable, es claro que una condición necesaria para que exista una tal $y = y(x)$ es que

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

Esta condición también se puede interpretar geoméricamente. Para ello debemos entender geoméricamente el vector gradiente

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{\top}.$$

Si asumimos anticipadamente que las soluciones de la ecuación (2.10) son (localmente) una curva parametrizada regular de la forma $\mathbf{x} = (x(t), y(t))$, tendremos que

$$f(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

Derivando esta ecuación obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = 0.$$

Es decir, el gradiente de f en los puntos de la curva es perpendicular a la misma. Por tanto, la condición $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ se puede interpretar como la condición de que la curva no tenga una normal paralela al eje de abscisas, es decir, que la curva, vista como una función desde el eje OX , no tenga pendiente infinita. Si tuviese pendiente infinita, la función $y = y(x)$ no sería una función diferenciable.

El teorema de la función implícita nos asegura que esta condición necesaria para que $f(x, y) = 0$ defina una curva es también suficiente.

Teorema 3 (Teorema de la función implícita en el plano). *Sea f una función diferenciable definida en un abierto del plano y supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ y $f(x_0, y_0) = 0$. Entonces existe un entorno abierto $U \subset \mathbf{R}^2$ del punto (x_0, y_0) , un entorno abierto V de x_0 y una función diferenciable $y = y(x)$ definida en V tales que*

$$\{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\} = \{(x, y(x)) \in \mathbf{R}^2 : x \in V\}.$$

Puede hacerse un enunciado análogo en el caso de que sea $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. En adelante diremos que un subconjunto no vacío $C \subset \mathbf{R}^2$ es una curva plana *definida implícitamente* cuando existe una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$C = \{(x, y) \in U : f(x, y) = 0\}$$

y además $\nabla f(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in C$. Si C es una curva definida implícitamente, el teorema de la función implícita nos asegura que cada punto de la misma tiene un entorno que se puede parametrizar usando un grafo y, en particular, se puede ver localmente como una curva parametrizada regular.

La noción de curva parametrizada que hemos empleado en las secciones anteriores está relacionada, pero no coincide con la de curva definida implícitamente. Véamoslo en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 105 (*). *Sea $\mathbf{x} : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ una curva parametrizada regular. Demuéstrese que cada t_0 tiene un entorno abierto $V \subset \mathbf{R}$ de forma que $\{\mathbf{x}(t) : t \in V\}$ es un grafo. (Indicación: una de las dos funciones coordenadas de la curva es invertible en t_0 .)*

Ejercicio 106 (*). *Demuéstrese que un grafo es una curva definida implícitamente.*

Ejercicio 107. *Sea $C = \{(x, y) : f(x, y) = (x - y)^2 = 0\}$. ¿Es C una curva definida implícitamente?*

Ejercicio 108 (*). Demuéstrese que la curva parametrizada dada por $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin 2t)$ con $t \in \mathbf{R}$ no es una curva implícita. (Indicación: si existe una función $f(x, y) = 0$ que la defina, su gradiente en el origen debería ser perpendicular a los dos vectores independientes tangentes a las dos ramas de la curva que pasan por el origen).

Por otra parte, no toda curva definida implícitamente se puede parametrizar, como muestra el siguiente ejercicio:

Ejercicio 109. Encuéntrese una curva definida implícitamente cuya imagen no sea una curva parametrizada. (Indicación: búsqese una ecuación cuya solución tenga más de una componente conexa).

Sin embargo, si se requiere que la curva definida implícitamente sea conexa, se puede demostrar que siempre se puede parametrizar.

Ejercicio 110. En los siguientes ejemplos, estúdiese si la ecuación $f(x, y) = 0$ define implícitamente una curva: 1. $ax + by + c$, 2. $x^2 - y^2$, 3. $x^2 - y^2 - 9$ 4. $xy - 1$. 5. $5x^2 - 4xy + 8y^2 + 18x - 36y + 9 = 0$. Dibújese el lugar de los ceros y analícese en qué zonas de los lugares resultantes la curva puede escribirse localmente como un grafo, construyéndolo explícitamente.

Ejemplo: cónicas

Sea \mathbf{f} un punto fijo, que llamaremos foco, y sea D una recta fija, que llamaremos directriz. Fijemos también una constante positiva e que llamaremos excentricidad. La cónica dada por estos elementos es el lugar geométrico de los puntos del plano \mathbf{x} que satisfacen que la razón de la distancia $d(\mathbf{x}, \mathbf{f})$ a la distancia de \mathbf{x} a la recta D es e . Si $e = 1$ la cónica se dice una parábola, si $e > 1$ se trata de una hipérbola y si $e < 1$ diremos que la cónica es una elipse.

Ejercicio 111. Encuéntrese la ecuación de la cónica de excentricidad 2 cuya directriz es la recta $4x - 3y + 2 = 0$ y cuyo foco es $(1, -1)$.

Ejercicio 112. Demuéstrese que la ecuación de una cónica, según se ha definido, es de la forma

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0.$$

Ejercicio 113. Escribese la ecuación de una cónica de forma matricial:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

siendo \mathbf{A} una matriz simétrica. Demuéstrese que, si llamamos a las columnas de $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ y es $\mathbf{X} = (x, y, 1)^\top$ es

$$\nabla f = 2(\mathbf{a}_0^\top \mathbf{X}, \mathbf{a}_1^\top \mathbf{X}).$$

Ejercicio 114 (*). Usando el ejercicio anterior, conclúyase que si \mathbf{A} es regular y $ab - h^2 \neq 0$, entonces la cónica es una curva definida implícitamente.

2.3.1. Curvatura de una curva definida implícitamente

Puesto que una curva definida implícitamente está dada localmente por parametrizaciones (grafos), tiene sentido definir su curvatura en un punto. El siguiente teorema muestra cómo calcular la curvatura a partir de la función que define implícitamente la curva. Antes introduzcamos la siguiente notación: llamaremos $J : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ a la aplicación lineal que gira un vector 90 grados en sentido antihorario, es decir, $J(x, y)^\top = (-y, x)^\top$. Denotaremos por $H(f)$ a la matriz Hessiana de f definida por

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Teorema 4. La curvatura de la curva definida implícitamente por la ecuación $f(x, y) = 0$ y recorrida en el sentido que hace que ∇f tenga el mismo sentido que el vector normal \mathbf{n} está dada por

$$k(x, y) = -\frac{J(\nabla f)^\top H(f) J(\nabla f)}{\|\nabla f\|^3}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto de la curva definida implícitamente y sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ una parametrización por la longitud de arco definida en un entorno de \mathbf{x}_0 con $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0$. Puesto que

$$f(x(s), y(s)) \equiv 0,$$

derivando esta ecuación tenemos que

$$f_x x' + f_y y' = 0, \tag{2.11}$$

con lo que obtenemos que

$$(x', y') = \pm \frac{(-f_y, f_x)}{(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}}.$$

Como suponemos que $\mathbf{n} = (-y', x')$ tiene el mismo sentido que (f_x, f_y) , el signo en la última ecuación debe ser *negativo*. Derivando nuevamente (2.11) se obtiene

$$f_{xx}(x')^2 + 2f_{xy}x'y' + f_{yy}(y')^2 + f_x x'' + f_y y'' = 0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} k &= x'y'' - y'x'' = \frac{f_x x'' + f_y y''}{(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{f_{xx}(x')^2 + 2f_{xy}x'y' + f_{yy}(y')^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{\begin{pmatrix} -f_y & f_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_y \\ f_x \end{pmatrix}}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} = -\frac{J(\nabla f)^\top H(f)J(\nabla f)}{\|\nabla f\|^3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

□

Ejercicio 115. Calcúlese la curvatura de la elipse y de la hipérbola de semiejes a y b en mediante los dos métodos que conocemos: parametrizando las curvas y mediante su ecuación implícita. Compruébese que se obtiene el mismo resultado.

Ejercicio 116. Se denomina vértice de una curva a los puntos críticos de la curvatura. Encuéntrense los vértices de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Ejercicio 117. Calcúlese la curvatura de la curva de ecuación $y^2(a^2 - x^2) = (x^2 + 2ay - a^2)^2$. Dibújese para algunos valores de a .

Ejercicio 118 (*). Demuéstrese que la curvatura de una curva definida implícitamente por la ecuación $f(x, y) = 0$ viene dada por

$$k = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right),$$

donde el operador divergencia se define de forma general como

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

siendo $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicación diferenciable.

Capítulo 3

Ecuaciones de Frenet

3.1. Otra interpretación de la curvatura de una curva plana

Una curva plana se puede recuperar a partir de su curvatura $k = k(s)$. En efecto, si $\mathbf{t}(s)$ es el vector tangente a la curva, dado que es un vector unitario, podremos escribirlo como

$$\mathbf{t}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) \quad (3.1)$$

para una cierta función diferenciable $\theta = \theta(s)$. El que esta función está definida en todo el dominio de la curvatura no es completamente evidente y es el contenido del siguiente teorema:

Teorema 5. *Sea $I \subset \mathbf{R}$ un intervalo conexo y sea $f : I \rightarrow S^1$ una función diferenciable. Entonces existe una función diferenciable $\theta : I \rightarrow \mathbf{R}$ tal que*

$$f(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)).$$

Además, cualquier otra función $\bar{\theta} : I \rightarrow \mathbf{R}$ con la misma propiedad difiere de θ en un múltiplo entero de 2π .

Demostración. Si $f(s) = (u(s), v(s)) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$, debe ser

$$f'(s) = \theta'(s)(-v(s), u(s)),$$

por lo que

$$\langle f'(s), (-v(s), u(s)) \rangle = \theta'(s).$$

Esto demuestra que θ está únicamente determinada salvo constantes y podemos recuperarla mediante la fórmula

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s (v'(\xi)u(\xi) - v(\xi)u'(\xi))d\xi + \theta_0$$

estando dado θ_0 por la condición $f(s_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, lo que le determina únicamente salvo múltiplos enteros de 2π .

Hemos de comprobar ahora que la función θ que acabamos de definir cumple que $(u(s), v(s)) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$. Veamos para ello que la función

$$F(s) = (u(s) - \cos \theta(s))^2 + (v(s) - \sin \theta(s))^2 = 2 - 2(u \cos \theta + v \sin \theta)$$

es idénticamente cero, lo que es equivalente a demostrar que

$$u \cos \theta + v \sin \theta = 1,$$

(de hecho, podíamos haber empezado por aquí: dos vectores de la circunferencia unidad coinciden si y sólo si su producto escalar es 1).

Derivando

$$\begin{aligned} (u \cos \theta + v \sin \theta)' &= u' \cos \theta + v' \sin \theta - u\theta' \sin \theta + v\theta' \cos \theta \\ &= u' \cos \theta + v' \sin \theta - u(v'u - vu') \sin \theta + v(v'u - vu') \cos \theta. \end{aligned}$$

Usemos ahora que, como $u^2 + v^2 = 1$ es $uu' + vv' = 0$, de forma que

$$\begin{aligned} (u \cos \theta + v \sin \theta)' &= u' \cos \theta + v' \sin \theta - (v'u^2 - vu'u') \sin \theta + (vv'u - v^2u') \cos \theta \\ &= u' \cos \theta + v' \sin \theta - v'(u^2 + v^2) \sin \theta - u'(v^2 + u^2) \cos \theta \\ &= u' \cos \theta + v' \sin \theta - v' \sin \theta - u' \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

Por tanto la función F es constante, pero como $F(s_0) = 0$, concluimos que $F \equiv 0$. □

El resultado que acabamos de demostrar es también cierto en el caso de que f sea únicamente continua, pero la demostración es más complicada.

Ejercicio 119. *Utilícese el teorema que acabamos de ver para encontrar $\theta(s)$ en el caso de que*

$$f(s) = \left(\frac{2s}{1+s^2}, \frac{1-s^2}{1+s^2} \right).$$

Usemos el teorema anterior en el caso de que $f = \mathbf{t}$ se tendrá entonces que

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \theta'(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))). \quad (3.2)$$

Como $(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) = \mathbf{n}(s)$, resulta que

$$k(s) = \theta'(s).$$

Ejercicio 120. Encuéntrese la curvatura de la curva $x(t) = e^t(\cos t, \sin t)$ calculando $\theta'(s)$.

Por tanto si tenemos $k(s)$ podemos recuperar $\theta(s)$ integrando:

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + \theta_0$$

y la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ mediante una segunda integración:

$$\mathbf{x}(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(\xi) d\xi + x_0, \int_{s_0}^s \sin \theta(\xi) d\xi + y_0 \right).$$

Ejercicio 121. Esto demuestra que a partir de la curvatura recuperamos la curva salvo una traslación y un giro. ¿Por qué?

Ejercicio 122. Usando la expresión que acabamos de calcular, demuéstrese de nuevo que las rectas son las curvas de curvatura nula y las circunferencias las de curvatura constante.

Ejercicio 123. Calcúlese una curva cuya curvatura está dada por $k(s) = \frac{-1}{\sqrt{1-s^2}}$, $s \in (-1, 1)$.

3.2. Ecuaciones de Frenet planas

Sabemos ya que

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s)$$

Esta es conocida como la primera de las ecuaciones de Frenet. Calculemos ahora $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$. En primer lugar, derivando $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ obtenemos que

$$0 = 2 \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{n} \right\rangle,$$

con lo que $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ no tiene componente \mathbf{n} y es pues de la forma

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mu(s)\mathbf{t}(s).$$

Para calcular el coeficiente, observamos que $\mu(s) = \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{t} \right\rangle$ y derivando $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ vemos que

$$0 = \left\langle \mathbf{t}, \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right\rangle + \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \mathbf{t}, \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right\rangle + \langle \mathbf{k}(s), \mathbf{n} \rangle = \left\langle \mathbf{t}, \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right\rangle + k(s).$$

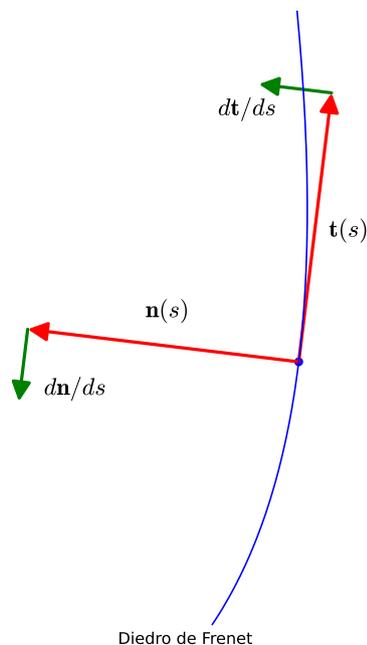
Por tanto $\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\mathbf{t}(s)$, que es la segunda de las fórmulas de Frenet. Tenemos pues

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s) \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\mathbf{t}(s) \end{cases} \quad (3.3)$$

De forma matricial, estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{t}}{ds} & \frac{d\mathbf{n}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

La idea tras las fórmulas de Frenet es la siguiente: hemos calculado la velocidad con la que varía una referencia asociada geoméricamente a la curva ($\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$) respecto a un parámetro también geométrico (la longitud de arco) y la hemos expresado en términos de la propia referencia. Obtenemos así una matriz de coordenadas que nos proporciona funciones (en este caso, esencialmente una única función, la curvatura) con información geométrica sobre la curva. Estas funciones se llaman *invariantes diferenciales* esta técnica, que es de utilidad en muchos otros contextos, se llama *método de la referencia móvil de Cartan*.



3.3. El teorema fundamental de la teoría de curvas planas

Las ecuaciones de Frenet (3.3) pueden verse como un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias (ya que cada ecuación tiene dos componentes), las incógnitas son \mathbf{t}, \mathbf{n} y la curvatura $k(s)$ es un dato. Dado que es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos garantizada la existencia de una solución para cada condición inicial que demos, $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0, \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0$. La solución, precisamente por la linealidad, se extiende a todo el intervalo en el que esté definida k . Esto nos deja a un paso de recuperar la curva a partir de la curvatura, ya que será

$$\mathbf{x}(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(\xi) d\xi + \mathbf{x}_0,$$

como sabemos.

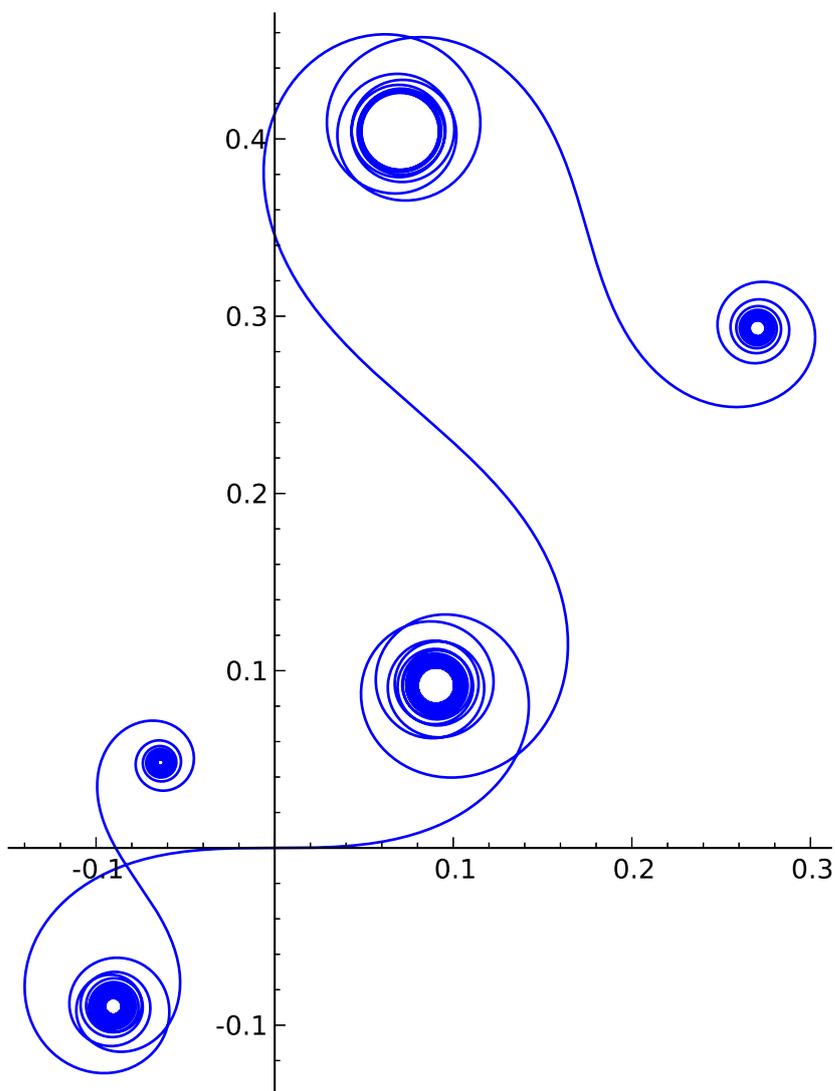
Como ejemplo, calculemos la curva cuya curvatura está dada por $k(s) = (s+4)s(s-4)(s-6)$ en el intervalo $[-5, 7]$:

```

var('s x0 x1 t0 t1 n0 n1')
k = (s+4)*s*(s-4)*(s-6)
ecuaciones = [t0, t1, k*n0, k*n1, -k*t0, -k*t1]
variables = [x0, x1, t0, t1, n0, n1]
condiciones_iniciales = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1]
intervalo = [-5, 7]

P = desolve_system_rk4(ecuaciones, variables,
    ics = condiciones_iniciales,
    ivar = s,
    end_points = intervalo,
    step = 0.001 )
curva = [[x0, x1] for [s, x0, x1, t0, t1, n0, n1] in P]
dib_curva = line(curva)
dib_curva.set_aspect_ratio(1)

```



Ejercicio 124. *¿Cómo está recorrida la curva? ¿Puedes señalar cuáles son los puntos en los que se anula la curvatura? ¿A qué se deben los “remolinos”? ¿Puedes explicar el sentido de giro alrededor de los mismos?*

Este argumento no es una demostración: resolviendo el sistema anterior obtenemos una curva $\mathbf{x}(s)$ pero, ¿su curvatura será $k(s)$? De hecho, no está claro que la curva que se obtiene por este procedimiento esté siquiera parametrizada al arco, porque podría suceder que \mathbf{t}, \mathbf{n} no constituyesen una base ortonormal para cada s . Veamos que esto es así. En primer lugar, demos- tremos que los vectores tangente y normal que se obtienen forman una base

3.3. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TEORÍA DE CURVAS PLANAS 55

ortonormal. Para ello calculamos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle' &= 2 \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 2k(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \\ \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle' &= 2 \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -2k(s) \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \\ \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle' &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = k(s)(\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle - \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle)\end{aligned}$$

La manipulación directa de estas ecuaciones no permite concluir que $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ es una base ortonormal. Sin embargo, podemos observar que las tres ecuaciones anteriores constituyen un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias con tres incógnitas y que, por tanto, tiene solución única para cada condición inicial que demos. Dado que $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ es solución de las mismas y compatible con la condición inicial de ortonormalidad, concluimos la ortonormalidad de la base. Ofrezcamos ahora una demostración matricial de este hecho, que hará transparente que lo que realmente se está usando es la antisimetría de las ecuaciones de Frenet. Nótese que la matriz

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

satisface que

$$\mathbf{F}^\top \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}^\top \\ \mathbf{n}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle & \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle & \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \end{pmatrix}.$$

La matriz $\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$ es una matriz simétrica. Tenemos además, debido a las fórmulas de Frenet, que

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Llamemos $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}$, de forma que las fórmulas de Frenet se escriben simplemente como

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}\mathbf{A}.$$

Nótese que \mathbf{A} es una matriz antisimétrica, es decir, $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$. Veamos que \mathbf{G} es constante. Para ello derivamos

$$\mathbf{G}' = (\mathbf{F}^\top \mathbf{F})' = \mathbf{F}'^\top \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \mathbf{F}' = (\mathbf{F}\mathbf{A})^\top \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top (\mathbf{F}\mathbf{A}) = -\mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{A}.$$

Ahora observemos que

$$\mathbf{G}' = -\mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{A}$$

puede interpretarse como un sistema lineal de ecuaciones diferenciales (en las coordenadas de \mathbf{G} con tantas ecuaciones como incógnitas: tres. Por tanto para cada condición inicial hay una solución única. Nosotros tenemos como

condición inicial la dada por una elección de base ortonormal para algún $s = s_0$, de forma que $G(s_0) = \text{Id}$. Como la matriz constante Id es una solución del sistema de ecuaciones compatible con la condición inicial, concluimos que necesariamente $G(s) = \text{Id}$ para todo s , es decir, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ son una base ortonormal.

Siendo \mathbf{t} unitario, la curva que se obtiene integrándolo está parametrizada al arco y el hecho de que se satisfacen las fórmulas de Frenet $\mathbf{F}' = \mathbf{F}\mathbf{A}$ fuerza a $k(s)$ a ser su curvatura. Además, la unicidad de la solución de las ecuaciones de Frenet asegura que tenemos tantas curvas como posibles condiciones iniciales, pero todas ellas difieren sólo movimientos que llevan unas condiciones iniciales en otras.

Ejercicio 125. *Detállese la expresión matricial de dichos movimientos.*

3.4. Curvas espaciales. Plano osculador

En el caso de que la curva sea espacial, no hay un vector normal a \mathbf{t} únicamente determinado. Sin embargo, en tanto que $\mathbf{x}''(s) \neq \mathbf{0}$ podemos definir un vector privilegiado

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{x}''(s)}{\|\mathbf{x}''(s)\|}$$

que llamaremos vector normal a la curva. La curvatura es ahora

$$k(s) = \|\mathbf{x}''(s)\|$$

y satisface, por definición, la primera ecuación de Frenet:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s). \quad (3.4)$$

En adelante, supondremos que la curva cumple la condición adicional de regularidad $\mathbf{x}''(s) \neq \mathbf{0}$ para todo s .

Sin embargo, el sólo conocimiento de la curvatura no determina la curva espacial salvo movimientos, como se demuestra en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 126. *Calcúlese la curvatura de la hélice*

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

Conclúyase que la curvatura no es suficiente para determinar una curva espacial salvo movimientos.

La curvatura apareció como la velocidad del movimiento de la recta tangente a una curva parametrizada por el arco. La recta tangente en un punto es la recta que mejor se ajusta a la curva en dicho punto. De forma análoga, se puede considerar el plano que mejor se ajusta a una curva espacial en un punto. Para calcularlo, procederemos de forma semejante a cómo calculamos la circunferencia osculadora: tomemos tres puntos de la curva, calculemos el plano que pasa por los mismos (suponiendo que no están alineados) y veamos cuál es el límite cuando dos de ellos se aproximan al tercero.

Si los puntos son $\mathbf{x}(s_i)$, $i = 0, 1, 2$ y llamamos \mathbf{v} a un vector director del plano la ecuación del plano es

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Como la función $f(s) = \langle \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{v} \rangle$ se anula en s_0, s_1 y s_2 , habrá dos puntos intermedios en los que se anule la primera derivada y uno en el que se anula la segunda derivada. Tomando límites cuando $s_1, s_2 \rightarrow s_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(s_0) &= \langle \mathbf{x}(s_0) - \mathbf{x}(s_0), \mathbf{v} \rangle = 0, \text{ lo que es trivial, y} \\ f'(s_0) &= \langle \mathbf{x}'(s_0), \mathbf{v} \rangle = 0 \\ f''(s_0) &= \langle \mathbf{x}''(s_0), \mathbf{v} \rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

De la segunda y terceras ecuaciones concluimos que el del plano límite, que llamaremos plano osculador, está generado por $\mathbf{x}'(s_0)$ y $\mathbf{x}''(s_0)$. En un ejercicio posterior se demostrará que la condición $\mathbf{x}''(s) \neq 0$ para todo s de hecho garantiza la existencia de dicho plano.

Ejercicio 127. *Demuéstrese que*

$$L\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right) = L\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right)$$

de forma que, en el caso de que la curva no esté parametrizada por el arco, podemos escribir el plano osculador como

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}(t) + L\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right).$$

Ejercicio 128. *Demuéstrese que la ecuación del plano osculador es*

$$\det\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right).$$

donde $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$.

Nótese que no es lo mismo el plano osculador, que pasa por un punto de la curva, que el plano vectorial asociado, que es paralelo al mismo y contiene al origen de coordenadas, es decir, es el plano vectorial engendrado por los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$. No obstante, para no sobrecargar demasiado la terminología, llamaremos a ambos planos osculadores y se sobreentenderá por el contexto a cuál nos estamos refiriendo.

3.5. Binormal. Fórmulas de Frenet y consecuencias.

Para analizar la variación del plano osculador vectorial, observemos que existe un vector director del mismo canónico: el producto vectorial del tangente por el normal. Dicho vector se denomina vector binormal:

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s).$$

Estudiar la variación del vector binormal es equivalente a estudiar la variación del plano osculador. Es más práctico, de hecho, analizar simultáneamente la variación del triedro de Frenet $\mathbf{F} = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Sabemos, dado que el triedro es una base, que

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}\mathbf{A}$$

para cierta matriz \mathbf{A} . Veamos que esta matriz ha de ser antisimétrica: como $\mathbf{F}^\top \mathbf{F} = \text{Id}$, derivando esta identidad tenemos que

$$0 = (\mathbf{F}^\top \mathbf{F})' = \mathbf{F}'^\top \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \mathbf{F}' = \mathbf{A}^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \mathbf{F}\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top + \mathbf{A},$$

con lo que \mathbf{A} es efectivamente antisimétrica, como queríamos demostrar.

La ecuación (3.4) nos dice cómo es la primera columna de \mathbf{A} . Teniendo en cuenta la antisimetría de la misma, concluimos que su forma es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \square \\ 0 & -\square & 0 \end{pmatrix},$$

donde \square es simplemente una coordenada de la matriz que desconocemos. Pero, por la definición de la matriz \mathbf{A} , es

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \square \mathbf{n}.$$

Por tanto, \square es justamente la variación del vector binormal que estábamos buscando. A esta función le llamaremos torsión de la curva y se denotará por

$$\tau(s) = \square = \left\langle \frac{d\mathbf{b}}{ds}, \mathbf{n}(s) \right\rangle.$$

Según esta definición, la matriz de variación \mathbf{A} es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

y las fórmulas de Frenet correspondientes, escritas como un sistema de ecuaciones, son

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s) \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau(s)\mathbf{n}(s) \end{cases} \quad (3.6)$$

De forma análoga a como se trató el caso plano, podemos demostrar ahora que dadas dos funciones diferenciables $k(s) > 0$ y $\tau(s)$ arbitrarias, existe, salvo movimientos del espacio, una única curva diferenciable que las produce como curvatura y torsión.

Ejercicio 129. *Aparentemente, en la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no se emplea en absoluto el que la curvatura sea positiva. ¿Qué ocurre si se proporciona una función de curvatura que cambia de signo?*

Ejercicio 130. *Demuéstrese cuidadosamente que si se transforma la curva mediante una isometría del espacio que preserva la orientación, entonces la nueva curva tiene la misma curvatura y torsión. ¿Qué ocurre si la isometría invierte la orientación?*

Ejercicio 131. *¿Qué ocurre con la curvatura y la torsión de una curva cuando se invierte su sentido de recorrido?*

Ejercicio 132. *De forma análoga a como se ha hecho en el caso plano, demuéstrese que la torsión de una curva no parametrizada por el arco viene dada por la fórmula*

$$\tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}$$

Ejercicio 133. *Demuéstrese que la torsión de una curva es nula si y sólo si está contenida en un plano.*

Ejercicio 134. *Demuéstrese que no existe ningún movimiento que transforme la hélice levógira $\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ en la hélice dextrógira $\mathbf{y}(t) = (a \sin t, a \cos t, bt)$.*

Ejercicio 135. Encuéntrese la expresión analítica de las curvas con curvatura contante $k(s) = k_0 > 0$ y torsión también constante $\tau(s) = \tau_0$.

Ejercicio 136. De forma análoga a como se hizo en el caso de curvas planas, prográmese el código necesario para calcular una curva espacial a partir de su torsión y su curvatura.

Ejercicio 137. Prográmese el código necesario para calcular la curvatura y torsión de una curva no parametrizada por el arco.

Ejercicio 138. Prográmese el código necesario para calcular el triedro de Frenet de una curva no parametrizada por el arco. Compruébese que las fórmulas de Frenet se cumplen para la curva $\mathbf{x}(t) = (e^t, 1 + t^2, \cos t)$.

Ejercicio 139. Calcúlese la recta tangente y el plano osculador a la curva dada por $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x^2 + y^2 - x = 0$ en el punto $(0, 0, 1)$.

3.6. Forma canónica local de una curva

Recordemos que el desarrollo de Taylor de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ comenzaría como

$$\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{x}''(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{x}'''(s_0)(s - s_0)^3 + \mathbf{R}(s), \quad (3.7)$$

donde $O(s - s_0)^3$ es una función diferenciable que satisface que

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\mathbf{R}(s)}{(s - s_0)^3} = 0.$$

Las derivadas $\mathbf{x}^{(i)}(s_0)$, dado que son vectores, se pueden escribir en términos del triedro de Frenet $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ y la clave para hacer esto es observar que $\mathbf{x}'(s_0) = \mathbf{t}(s_0)$ y que las derivadas de orden superior se pueden calcular usando las fórmulas de Frenet. Concretamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(s_0) &= \mathbf{t}'(s_0) = k(s_0)\mathbf{n}(s_0) \\ \mathbf{x}'''(s_0) &= (k\mathbf{n})'(s_0) = k'(s_0)\mathbf{n}(s_0) + k(s_0)\mathbf{n}'(s_0) \\ &= k'(s_0)\mathbf{n}(s_0) + k(s_0)(-k(s_0)\mathbf{t}(s_0) - \tau(s_0)\mathbf{b}(s_0)) \\ &= -k(s_0)^2\mathbf{t}(s_0) + k'(s_0)\mathbf{n}(s_0) - k(s_0)\tau(s_0)\mathbf{b}(s_0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Si usamos como sistema de coordenadas aquel con origen $\mathbf{x}(s_0)$ y base el triedro de Frenet en s_0 , sustituyendo las ecuaciones (3.8) en (3.7) obtenemos

que las componentes de la curva son

$$\begin{aligned}x(s) &= s - \frac{1}{6}k(0)^2s^3 + R_x(s) \\y(s) &= \frac{1}{2}k(0)s^2 + \frac{1}{6}k'(0)s^3 + R_y(s) \\z(s) &= -\frac{1}{6}k(0)\tau(0)s^3 + R_z(s)\end{aligned}$$

donde, por simplificar el resultado, hemos supuesto $s_0 = 0$. Estas ecuaciones de la curva reciben el nombre de forma canónica local. Se podría, si es preciso, añadir más términos al desarrollo que dependerán también de la curvatura, la torsión y sus derivadas. Nótese que, en el caso de que la curva sea analítica, esta técnica demuestra alternativamente que la curvatura y la torsión determina la curva salvo movimientos del espacio.

El plano osculador, generado por el tangente y el normal, es en este sistema de referencia el plano xy . Al plano generado por el vector normal y el binormal se le llama plano normal a la curva y es el plano yz . Finalmente, al plano engendrado por el vector tangente y binormal a la curva se le llama plano rectificante, y resulta ser el plano xz .

Ejercicio 140. *Demuéstrese que si las rectas normales a una curva pasan todas por un punto fijo, entonces la curva está contenida en un círculo.*

Ejercicio 141. *Supongamos que $k(s) \neq 0 \neq \tau(s)$ para todo s . Demuéstrese que la curva yace en una esfera si y sólo si*

$$R^2 + (R')^2T^2 = cte.$$

siendo $R = 1/k$ y $T = 1/\tau$. (Indicación: supóngase la curva parametrizada por el arco. Si el centro de la esfera es \mathbf{c} , dérivese sucesivamente la ecuación $\langle \mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{c} \rangle = r^2$ para obtener las coordenadas de $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ respecto al triedro de Frenet. Una vez obtenidas, dérivese la ecuación que expresa $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ en el triedro de Frenet para concluir la relación pedida. Para el recíproco, compruébese que la derivada de $\mathbf{x} + R\mathbf{n} - R'T\mathbf{b}$ es nula y conclúyase que existe \mathbf{c} de forma que $\langle \mathbf{x} - \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{c} \rangle$ es constante).

Ejercicio 142. *Demuéstrese que si la curvatura de una curva es no nula en un valor del parámetro s_0 entonces cualesquiera tres valores de la curva en parámetros distintos y suficientemente cercanos a s_0 determinan un plano.*

Ejercicio 143. *Demuéstrese que el vector binormal determina la curvatura de la curva, así como el valor absoluto de la torsión.*

Ejercicio 144. *Demuéstrese que el vector normal a una curva con torsión no nula en todos los puntos determina las funciones curvatura y torsión.*

Ejercicio 145. *Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ una curva plana. Demuéstrese que si s_0 es tal que la distancia de $\mathbf{x}(s_0)$ al origen es máxima, entonces la curvatura satisface que $|k(s_0)| \geq 1/\|\mathbf{x}(s_0)\|$.*

Capítulo 4

Superficies

De la misma forma que una curva estaba descrita por un punto que se movía a lo largo del tiempo, se puede obtener una superficie mediante una curva que se mueve a lo largo del tiempo. Modelizaremos esta idea definiendo, provisionalmente, una superficie como una aplicación diferenciable

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3,$$

siendo U un abierto del plano \mathbf{R}^2 . Si denotamos por $(u, v) \in U$ a un punto genérico de U , fijado u la aplicación $v \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ es una curva parametrizada por u , de forma que la superficie está siendo barrida por una curva móvil.

Ejemplo 4. Consideremos dos curvas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$. Si interpolamos linealmente cada par de puntos correspondientes $\mathbf{x}_1(u), \mathbf{x}_2(u)$, obtenemos una aplicación diferenciable $\mathbf{x} : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ definida por

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)\mathbf{x}_1(u) + v\mathbf{x}_2(u).$$

Por ejemplo, sea $\mathbf{x}_1(u) = (u, 0, 0)$ y $\mathbf{x}_2(u) = (u, 1, u)$. Entonces

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)(u, 0, 0) + v(u, 1, u) = (u, v, uv),$$

y obtenemos así el paraboloides hiperbólico $z = xy$.

Ejercicio 146. Demuéstrese que la superficie anterior coincide efectivamente con el hiperboloides $z = xy$.

4.1. Superficies de Bézier

Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ es una curva de Bézier de grado n , de forma que

$$\mathbf{x}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(u).$$

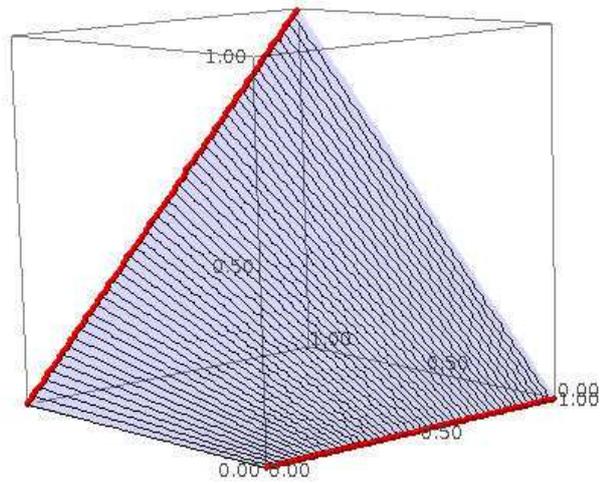


Figura 4.1: Una recta móvil barre una superficie, obteniéndose un paraboloides hiperbólico.

Una forma razonable de desplazar la curva es hacer que los puntos del polígono de control \mathbf{b}_i vayan recorriendo a su vez una curva de Bézier, de forma que

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_j^m(v).$$

De esta forma la superficie que estas curvas barren será

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i(v) B_i^n(u) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_j^m(v) \right) B_i^n(u) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \end{aligned} \quad (4.1)$$

A los puntos $\{\mathbf{b}_{ij}\}$ se les llama *malla de control* de la superficie, que será una superficie polinómica de bigrado (n, m) .

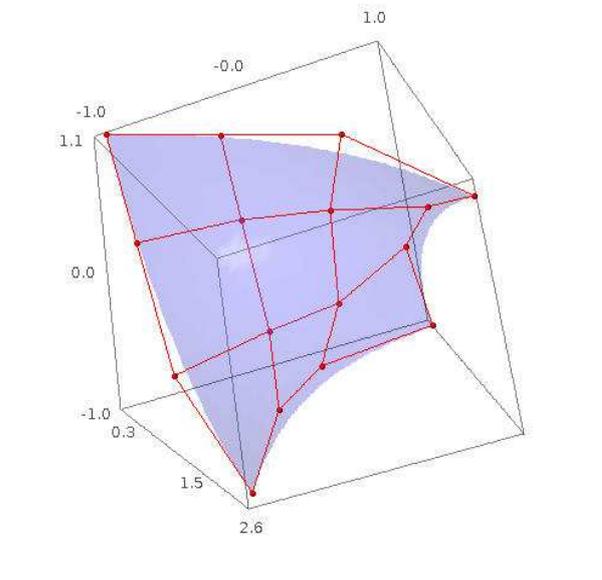


Figura 4.2: Dibujo de una superficie de Bézier bicúbica junto con su malla de control.

Ejercicio 147. *En general, ¿por cuántos puntos de la malla de control pasa la superficie de Bézier?*

Ejercicio 148. *Escribase un programa en Sage que, dada una malla de control, calcule y dibuje la superficie correspondiente.*

4.2. Superficies parametrizadas regulares

Una aplicación diferenciable $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ se dice regular si en cada punto $(u, v) \in U$ la diferencial

$$d\mathbf{x}_{(u,v)} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

tiene rango dos, es decir, los vectores $d\mathbf{x}(\mathbf{e}_1) = \partial\mathbf{x}/\partial u = \mathbf{x}_u$ y $d\mathbf{x}(\mathbf{e}_2) = \partial\mathbf{x}/\partial v = \mathbf{x}_v$ son linealmente independientes en cada (u, v) . Normalmente simplificaremos la notación no especificando el punto (u, v) a menos que sea necesario. Cuando la aplicación \mathbf{x} es regular en todo punto, diremos que es una *superficie parametrizada*. La condición de regularidad nos permite definir el espacio vectorial tangente a la superficie en un punto $\mathbf{p} = \mathbf{x}(u, v)$: es simplemente la imagen de la diferencial $d\mathbf{x}_{(u,v)}$, es decir, el espacio vectorial generado por $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$. El espacio afín tangente será simplemente el trasladado de este espacio vectorial al punto \mathbf{p} , es decir,

$$\mathbf{x}(u, v) + L(\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)).$$

Normalmente llamaremos a ambos espacios simplemente espacio tangente, estando claro por el contexto a cuál de ellos nos estamos refiriendo.

Ejercicio 149. *Calcúlense las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano tangente a la superficie $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, uv)$ en el punto $(1, -1, -1)$.*

Ejercicio 150. *Encuéntrese los puntos de la superficie $\mathbf{x}(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $x - y + z = 0$.*

Ejemplo 5. *Un plano de \mathbf{R}^3 es una superficie. En efecto, si \mathbf{x}_0 es un punto del plano y \mathbf{u}, \mathbf{v} son dos vectores del mismo linealmente independientes, la aplicación*

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}_0 + u\mathbf{u} + v\mathbf{v}, \text{ con } u, v \in \mathbf{R}$$

es una superficie dado que es una aplicación diferenciable y $\mathbf{x}_u = \mathbf{u}$, $\mathbf{x}_v = \mathbf{v}$.

4.2.1. El plano tangente es el que mejor aproxima la superficie en el punto

El plano tangente está caracterizado por ser el que mejor aproxima la superficie en el punto de tangencia. Esto se puede formalizar del siguiente

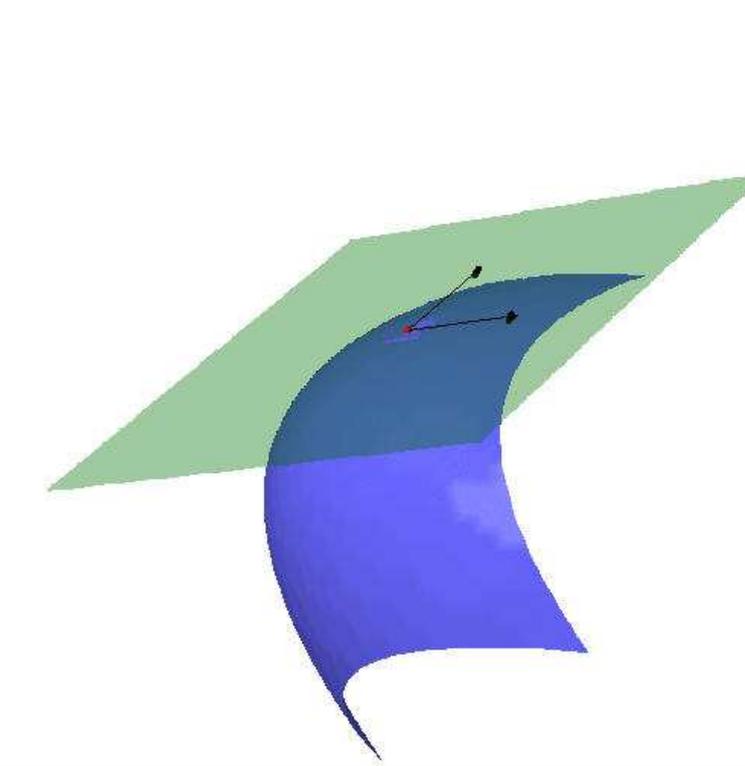


Figura 4.3: Plano tangente a una superficie. Se muestran también los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ que lo generan.

modo: la distancia (con signo) de un punto $\mathbf{x}(u, v)$ al plano que pasa por $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ y es normal al vector unitario \mathbf{u} está dada por

$$d(u, v) = \langle \mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(u_0, v_0), \mathbf{u} \rangle. \quad (4.2)$$

Calculemos el desarrollo de Taylor de $d(u, v)$ en (u_0, v_0) . Para ello recordemos que el desarrollo de Taylor de $\mathbf{x}(u, v)$ comienza por

$$\mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)(v - v_0) + \mathbf{R}(u, v).$$

Sustituyendo en 4.2 obtenemos

$$d(u, v) = \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{u} \rangle (u - u_0) + \langle \mathbf{x}_v(u_0, v_0), \mathbf{u} \rangle (v - v_0) + R(u, v),$$

siendo $R(u, v) = \langle \mathbf{R}(u, v), \mathbf{u} \rangle$ el resto, el cual satisface

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0, v_0)} \frac{R(u, v)}{\|(u - u_0, v - v_0)\|} = 0.$$

Vemos pues que el que $\mathbf{u} \perp \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$, es decir, que el plano sea el que hemos definido como plano tangente, asegura que el plano sea el más próximo posible a la superficie en el punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$.

4.3. Ejemplos de superficies

4.3.1. Grafos

Siempre que tengamos una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, su grafo produce una superficie parametrizada dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Ejercicio 151. *Demuéstrese que un grafo es siempre una superficie parametrizada.*

4.3.2. Superficies de rotación

Dada una curva en el plano XZ con ecuaciones $x = x(t), y = 0, z = z(t)$, podemos obtener una superficie girándola alrededor del eje OZ . Como la matriz de un giro de ángulo θ alrededor del eje OZ es

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la parametrización debe ser

$$\mathbf{x}(t, \theta) = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 152. *Compruébese que si la curva $(x(t), z(t))$ es regular y $x(t) > 0$ entonces la parametrización de la superficie de rotación es regular.*

Este ejemplo suscita la cuestión de cómo girar un objeto alrededor de una recta arbitraria. Una alternativa sería hacer un cambio de coordenadas, de forma que la recta se convierta en el eje OZ , pero esto no es lo más conveniente. Uno de los métodos más eficaces consiste en usar cuaterniones.

4.4. Rotaciones y cuaterniones

Los números cuaterniónicos son una generalización de los números complejos. Por definición, los números cuaterniones \mathbf{H} son el espacio vectorial usual de cuaternas de números reales \mathbf{R}^4 , en el cual introducimos una operación adicional de producto. Para definirlo, usaremos los símbolos formales \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} para escribir un cuaternión $\mathbf{q} = (a, b, c, d) \in \mathbf{H}$ de la forma

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

La multiplicación de cuaterniones se lleva a cabo teniendo en cuenta las reglas

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1,$$

de las que puede deducirse el resultado del producto de cualesquiera otras dos unidades imaginarias teniendo en cuenta que el producto es asociativo.

Ejercicio 153. *Calcúlense los productos de cualesquiera dos unidades imaginarias en cualquier orden.*

Los números cuaterniónicos, dotados de estas dos operaciones, resultan ser un cuerpo no conmutativo. Para calcular el inverso de un cuaternión, definamos primero la noción de conjugado. Dado el cuaternión $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ se define

$$\bar{\mathbf{q}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

Ejercicio 154. *La operación de conjugación se comporta con respecto al producto de cuaterniones del siguiente modo:*

$$\overline{\mathbf{q}\mathbf{q}'} = \bar{\mathbf{q}}'\bar{\mathbf{q}}.$$

Ejercicio 155. *Compruébese que*

$$\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

El inverso de $\mathbf{q} \neq 0$ está dado por

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}.$$

Ejercicio 156. *Compruébese que, efectivamente,*

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1.$$

Consideraremos la inmersión del espacio \mathbf{R}^3 dentro de los cuaterniones que identifica un vector $\mathbf{v} = (u, v, w)$ con el cuaternión imaginario, que denotaremos también por \mathbf{v} ,

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}.$$

Dado un cuaternión $\mathbf{q} \neq 0$, introducimos la operación de conjugación que asigna al vector \mathbf{v} el cuaternión

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{q}.$$

Resulta que \mathbf{v}' es también un cuaternión imaginario. En efecto, los cuaterniones imaginarios se caracterizan porque $\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{v}$. Se tiene que

$$\bar{\mathbf{v}}' = \overline{\mathbf{q}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{v}}\frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|} = -\mathbf{q}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{q} = -\mathbf{v}',$$

con lo que \mathbf{v}' es efectivamente imaginario puro. Afirmamos que, además, $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\|$. Esto es consecuencia de la identidad, más general,

$$\|\mathbf{q}\mathbf{q}'\| = \|\mathbf{q}\|\|\mathbf{q}'\|.$$

Esta última igualdad se demuestra usando la notable identidad

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (-d^2 + ax - by - cz)^2 + (cd + bx + ay - dz)^2 \\ + (-bd + cx + dy + az)^2 + (ad + dx - cy + bz)^2,$$

también llamada identidad de los cuatro cuadrados de Euler.

Ejercicio 157. *Demuéstrese la identidad de los cuatro cuadrados de Euler y $\|\mathbf{q}\mathbf{q}'\| = \|\mathbf{q}\|\|\mathbf{q}'\|$.*

Ejercicio 158. Demuéstrese que la aplicación $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = \mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-1}$ define una isometría lineal $\mathbf{R}_{\mathbf{q}}$ de \mathbf{R}^3 .

Ejercicio 159. Demuéstrese que la matriz de $\mathbf{R}_{\mathbf{q}}$ está dada por

$$\mathbf{R}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{2bc-2ad}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{2ac+2bd}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{2bc+2ad}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{-2ab+2cd}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{-2ac+2bd}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{2ab+2cd}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 160. Demuéstrese que el determinante de $\mathbf{R}_{\mathbf{q}}$ es positivo construyendo una curva de cuaterniones $\mathbf{q}_t = a + t(\mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k})$ y observando que $\det \mathbf{R}_{\mathbf{q}} = \det \mathbf{R}_{\mathbf{q}_0} = 1$.

Ejercicio 161. Los números cuaterniónicos se pueden descomponer como pares $\mathbf{q} = (s, \mathbf{v})$, donde s es la parte real de \mathbf{q} y \mathbf{v} su parte imaginaria. Con esta notación, demuéstrese que el producto de cuaterniones está dado por la fórmula

$$(s, \mathbf{v}) \cdot (s', \mathbf{v}') = (ss' - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle, s\mathbf{v}' + s'\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}').$$

Ejercicio 162. Demuéstrese que $\mathbf{R}_{\mathbf{q}}$, siendo $\mathbf{q} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{n})$, representa un giro de ángulo θ alrededor del vector unitario \mathbf{n} .

Ejercicio 163. Escribese un programa en Sage que dada una curva espacial y un vector, calcule y dibuje la superficie que se obtiene al girarla.

Ejercicio 164. Dada una recta en el espacio, determinada por un punto y un vector director, modifíquese el programa anterior para que calcule la superficie que se obtiene al girar la curva alrededor de la recta.

Ejercicio 165. Usar el programa del ejercicio anterior para girar una recta alrededor de otra. Dibújense los distintos casos, según la posición relativa de ambas.

Ejercicio 166. Idem. al ejercicio anterior, pero para una circunferencia y una recta.

Ejercicio 167. Idem. al ejercicio anterior, pero para una elipse y una recta.

Ejercicio 168. Idem. al ejercicio anterior, pero para una hipérbola y una recta.

Ejercicio 169. Encuéntrese las ecuaciones paramétricas e implícitas de la superficie que se obtiene al girar la a) circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ b) elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ c) hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ d) par de rectas $x^2 = 1$ e) par de rectas $x^2 - y^2 = 0$ alrededor del eje OX . Dibújense. ¿Qué nombres reciben estas superficies?

Ejercicio 170. *Compruébese que las superficies parametrizadas del problema anterior son regulares (si la parametrización es la obvia sugerida por su construcción).*

Ejercicio 171. *Encuéntrese las ecuaciones paramétricas e implícitas de la superficie que se obtiene al girar la circunferencia de radio 1 centrada en el punto $(0, 2, 0)$ y contenida en el plano XY alrededor del eje OX . Esta superficie es un toro de revolución.*

Ejercicio 172. *Compruébese que las superficies parametrizadas del problema anterior son regulares (si la parametrización es la obvia sugerida por su construcción).*

Ejercicio 173. *Se considera el segmento L que une los puntos $(0, 2, 1)$ y $(0, 2, -1)$. El segmento comienza a girar alrededor del eje OZ a velocidad angular 1 al mismo tiempo que gira alrededor de su centro con velocidad angular $1/2$ en el plano determinado por el eje OZ y el centro del segmento, barriéndose de esta forma una superficie. Calcúlense unas ecuaciones paramétricas de dicha superficie y demuéstrese que es una parametrización regular. Esta superficie es un ejemplo de banda de Möbius.*

4.5. Curvas sobre superficies. Geodésicas

Una curva sobre una superficie parametrizada $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ es, por definición, la imagen de una curva diferenciable $u = u(t), v = v(t)$ con t en un intervalo abierto $I \subset \mathbf{R}$, es decir, es la aplicación

$$I \ni t \mapsto \mathbf{x}(u(t), v(t)) \in \mathbf{R}^3.$$

Escribiremos a veces simplemente que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una curva de la superficie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, entendiéndose que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$.

El vector tangente a la curva $\mathbf{x}(t)$ vendrá dado, según la regla de la cadena, por

$$\mathbf{x}'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t)),$$

aunque simplemente escribiremos

$$\mathbf{x}' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v. \quad (4.3)$$

Equivalentemente,

$$\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

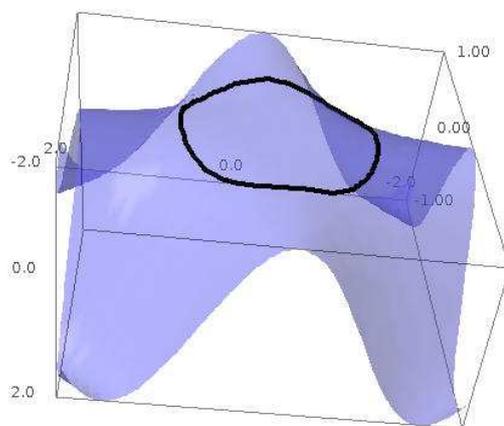


Figura 4.4: Curva $u(t) = \cos(t)$, $v(t) = \sin(t)$ sobre la superficie $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \cos(uv))$.

4.5.1. Geodésicas

Una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ se dice *geodésica* cuando su aceleración $\mathbf{x}''(t)$ es siempre normal a la superficie. Desde un punto de vista intuitivo, esto significa que no sufre aceleraciones detectables desde la superficie. La condición de ser geodésica se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Veamos cómo: si derivamos la ecuación (4.3) obtenemos que

$$\mathbf{x}'' = u''\mathbf{x}_u + v''\mathbf{x}_v + (u')^2\mathbf{x}_{uu} + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} + (v')^2\mathbf{x}_{vv}$$

y por tanto las condiciones

$$\langle \mathbf{x}'', \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}'', \mathbf{x}_v \rangle = 0$$

se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}'', \mathbf{x}_u \rangle &= u''\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + v''\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle + (u')^2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + 2u'v'\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle + (v')^2\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{x}'', \mathbf{x}_v \rangle &= u''\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + v''\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle + (u')^2\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + 2u'v'\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle + (v')^2\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Es quizá conveniente introducir la terminología clásica siguiente: las funciones

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \end{aligned}$$

se llaman coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie. Son funciones

$$E, F, G : U \rightarrow \mathbf{R}.$$

Nótese que sin embargo en (4.4) las funciones E, F y G están evaluadas en $(u(t), v(t))$. Con esta notación, podemos escribir las ecuaciones de las geodésicas de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

donde

$$\begin{aligned} A &= (u')^2 \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + 2u'v' \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle + (v')^2 \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle, \\ B &= (u')^2 \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle + 2u'v' \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle + (v')^2 \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que la superficie parametrizada es regular, los vectores \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son linealmente independientes. Esto es equivalente que la matriz

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

sea invertible.

Ejercicio 174. *Demuéstrese que efectivamente la matriz \mathbf{I} es invertible viendo que*

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 = EG - F^2$$

y teniendo en cuenta que, por hipótesis, \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son linealmente independientes.

Por tanto las ecuaciones de las geodésicas producen el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = -\mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

en donde, al estar dado el lado izquierdo por funciones diferenciables en u, v, u', v' y t concluimos que tiene solución única en un entorno de t_0 para

cada cualquier condición inicial que demos $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$, y $u'(t_0) = u'_0, v'(t_0) = v'_0$. tales que $(u_0, v_0) \in U$. Desde el punto de vista geométrico, esto significa que existe una única geodésica que a tiempo t_0 pase por un punto dado de la superficie con velocidad dada. La vida de dicha geodésica, sin embargo, no tiene porqué ser todo \mathbf{R} , pudiendo estar reducida sólo a un intervalo abierto en el cual se encuentra t_0 .

La velocidad de una geodésica es constante. En efecto, si llamamos $f(t) = \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}'(t) \rangle$ entonces

$$f'(t) = 2\langle \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'(t) \rangle = 0,$$

ya que \mathbf{x}'' es perpendicular a la superficie y \mathbf{x}' es un vector tangente a la misma. Por tanto f debe ser constante, es decir, la velocidad de la geodésica es constante.

Ejercicio 175. *El recíproco no es cierto: dar un ejemplo de curva sobre una superficie que tenga velocidad constante pero que no sea geodésica.*

Ejercicio 176. *Demuéstrese que las geodésicas del plano son las líneas rectas recorridas a velocidad constante.*

Ejercicio 177. *Demuéstrese que las geodésicas de una esfera son sus círculos máximos.*

Ejercicio 178. *Encuéntrense las ecuaciones de las geodésicas de una superficie parametrizada como un grafo.*

Ejercicio 179. *Dada una superficie de revolución, estúdiese si los paralelos y los meridianos son en algún caso geodésicas.*

Ejercicio 180. *Supongamos que dos superficies son tangentes a lo largo de una curva. Demuéstrese que son geodésicas para una de ellas si y sólo si lo son para la otra.*

Ejercicio 181. *Demuéstrese que si una recta está contenida en una superficie, entonces es una geodésica de la misma.*

Ejercicio 182. *Consideremos todas las geodésicas que parten de un punto con velocidad v . El conjunto de sus extremos se llama círculo geodésico de radio v . Escribese un programa en Sage que, dada una superficie y un punto de la misma, dibuje el mencionado círculo geodésico.*

Capítulo 5

Las formas fundamentales

5.1. Primera forma fundamental

Hemos definido previamente los coeficientes de la primera forma fundamental como

$$\begin{aligned}E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \\F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle.\end{aligned}$$

Ejercicio 183. *Dada una curva parametrizada por el arco, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, se considera la superficie tangencial $\mathbf{x}(s) + \lambda \mathbf{t}(s)$. Calcúlese su primera forma fundamental.*

Con ellos es posible realizar medidas intrínsecas en la superficie: calcular longitudes de curvas, ángulos y áreas. Veámoslo.

5.1.1. Longitudes de curvas

La longitud de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in [a, b]$, sobre una superficie parametrizada $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ viene dada por

$$\int_a^b \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}'(t) \rangle^{1/2} dt.$$

Dado que $\mathbf{x}' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}'(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2.\end{aligned}$$

Desde un punto de vista intuitivo, merece la pena recordar la interpretación clásica del elemento de longitud escrito en términos de la primera forma fundamental. Llamando $ds^2 = \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}'(t) \rangle dt^2$ y escribiendo $u' = du/dt$, $v' = dv/dt$, tenemos que

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

que se puede ver como una versión infinitesimal de un teorema de Pitágoras distorsionado. La geometría de la superficie será Euclídea cuando el elemento de longitud satisfaga

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Ejercicio 184. Calcúlese la primera forma fundamental de las siguientes superficies parametrizadas:

1. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$, (elipsoide).
2. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$ (paraboloide elíptico).
3. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$ (paraboloide hiperbólico).
4. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$ (hiperboloide de dos hojas).

Dibújense las superficies y sobre las mismas las curvas coordenadas $u = 0$ y $v = 0$. Calcúlese numéricamente la longitud de la curva $u = t, v = t^2$, $t \in [-1, 1]$ usando los coeficientes de la primera forma fundamental y dibújese también, tanto la curva sobre la superficie como en el espacio de parámetros.

5.1.2. Ángulos

Dos vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ tangentes a la superficie en un punto (u_0, v_0) , podemos escribirlos en función de la base $\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ del espacio tangente en dicho punto como

$$\mathbf{u}_i = u'_i \mathbf{x}_u + v'_i \mathbf{x}_v$$

. El coseno del ángulo α formado por los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 vendrá dado por

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\|},$$

pero ya sabemos cómo escribir $\|\mathbf{u}_i\|$ en términos de sus coordenadas y la primera forma fundamental y respecto al numerador, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle &= u'_1 u'_2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + (u'_1 v'_2 + u'_2 v'_1) \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + v'_1 v'_2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= Eu'_1 u'_2 + F(u'_1 v'_2 + u'_2 v'_1) + Gv'_1 v'_2. \end{aligned}$$

¹Estamos llamando u'_i, v'_i a los coeficientes de los vectores aunque no tienen por qué provenir de curvas. No obstante, siempre es posible definir curvas de las que provengan, de hecho, una infinidad de ellas. Por ejemplo, si se desea se puede considerar las dadas por $u_i(t) = u_0 + tu'_i$ y $v_i(t) = v_0 + tv'_i$.

5.1.3. Áreas

El paralelogramo curvilíneo delimitado por las líneas coordenadas y de vértices los puntos $\mathbf{x}(u, v)$, $\mathbf{x}(u + du, v)$, $\mathbf{x}(u, v + dv)$, $\mathbf{x}(u + du, v + dv)$ se puede aproximar, si du y dv son suficientemente pequeños, por el paralelogramo en el espacio dado por los tres primeros vértices. Dicho paralelogramo tendrá como área

$$dA = \|(\mathbf{x}(u + du, v) - \mathbf{x}(u, v)) \times (\mathbf{x}(u, v + dv) - \mathbf{x}(u, v))\|.$$

Aproximando $\mathbf{x}(u + du, v) - \mathbf{x}(u, v) \sim \mathbf{x}_u du$ y $\mathbf{x}(u, v + dv) - \mathbf{x}(u, v) \sim \mathbf{x}_v dv$ resultará que

$$dA = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv.$$

Esta es la motivación intuitiva de la siguiente definición: dada una superficie parametrizada \mathbf{x} y una región medible R en el dominio de la parametrización en la que \mathbf{x} es inyectiva, definimos el área de la superficie $\mathbf{x}(R)$ como

$$A = \int_R \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv.$$

Nótese que como \mathbf{x} no tiene por qué ser inyectiva globalmente, puede ocurrir que este área no se corresponda con el área de $\mathbf{x}(R)$. En el caso de que haya una biyección entre R y $\mathbf{x}(R)$ (salvo, quizá, en un conjunto de medida nula), diremos que A es el área de $\mathbf{x}(R)$.

Puesto que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \sin^2 \theta \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2, \end{aligned}$$

vemos que el área se puede calcular también conociendo la primera forma fundamental de la superficie.

Ejercicio 185. Calcúlese el área del toro que se obtiene al hacer girar la circunferencia de radio a y centro el punto $(0, b, 0)$ alrededor del eje OZ .

5.2. La segunda forma fundamental

Dado que \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son, por hipótesis, siempre linealmente independientes, disponemos de un vector normal unitario a la superficie

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Para estudiar la forma de la superficie en un entorno del punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ es natural considerar la altura (con signo) a la que está cada punto respecto al plano tangente a la superficie en $\mathbf{x}(u_0, v_0)$, es decir, la función

$$h(u, v) = \langle \mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(u_0, v_0), \mathbf{N}(u_0, v_0) \rangle.$$

Usando el desarrollo de Taylor alrededor de (u_0, v_0) tenemos que

$$\begin{aligned} h(u, v) &= \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0)\Delta u + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\Delta v \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0)\Delta u^2 + 2\mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0)\Delta u\Delta v + \mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0)\Delta v^2), \mathbf{N}(u_0, v_0) \rangle \\ &\quad + O(\Delta u^2 + \Delta v^2) \\ &= \frac{1}{2} (\langle \mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0), \mathbf{N}(u_0, v_0) \rangle \Delta u^2 \\ &\quad + \langle \mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0), \mathbf{N}(u_0, v_0) \rangle \Delta u\Delta v \\ &\quad + \langle \mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0), \mathbf{N}(u_0, v_0) \rangle \Delta v^2), \\ &\quad + O(\Delta u^2 + \Delta v^2) \end{aligned}$$

donde $\Delta u = u - u_0$ y $\Delta v = v - v_0$. Definimos los coeficientes de la segunda forma fundamental como

$$e = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle, f = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle \text{ y } g = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N} \rangle.$$

y la segunda forma fundamental en un punto (u, v) , $\text{II}_{(u,v)}$, es la aplicación

$$(\Delta u, \Delta v) \mapsto \text{II}_{(u,v)}(\Delta u, \Delta v) = e(u, v)\Delta u^2 + 2f(u, v)\Delta u\Delta v + g(u, v)\Delta v^2.$$

Por tanto

$$h(u, v) = \frac{1}{2} \text{II}_{(u_0, v_0)}(\Delta u, \Delta v) + O(\Delta u^2 + \Delta v^2),$$

es decir, la segunda forma fundamental es, salvo el factor $1/2$, la primera aproximación no nula a la función altura sobre la normal en el punto de parámetros (u_0, v_0) . Viene dada por una forma cuadrática cuyos coeficientes son e , f y g .

Si la segunda forma fundamental es definida, lo que sucede cuando su determinante $eg - f^2 > 0$, como es (salvo el factor $1/2$) la aproximación de orden 2 del desarrollo de Taylor de h , tenemos que en un entorno reducido de (u_0, v_0) la función altura es estrictamente positiva o bien estrictamente negativa. En cualquiera de los dos casos, esto significa que la superficie se encuentra, en un entorno del punto, a un solo lado del plano tangente y sólo toca al plano tangente en el punto de tangencia. Los puntos de la superficie con segunda forma fundamental definida se llaman puntos elípticos.

Si, por el contrario, es $eg - f^2 < 0$ entonces la segunda forma fundamental es no definida y no degenerada. Esto significa que en todo entorno reducido del punto en cuestión hay puntos en los que la superficie está a un lado del plano tangente y puntos en los que se encuentra al lado contrario. Los puntos en los que la segunda forma fundamental es no definida y no degenerada se llaman hiperbólicos.

Finalmente, si la segunda forma fundamental es degenerada, es decir, $eg - f^2 = 0$, pero no es nula, entonces se dice que el punto es parabólico. Dado que habrá una recta a lo largo de la cual la segunda forma fundamental se anula, existe la posibilidad de que términos de orden superior dominen, por lo que no se puede asegurar nada sobre la posición de la superficie respecto al plano tangente. El último caso a considerar es el de la anulación completa de la segunda forma fundamental en el punto. En este caso el punto se llama plano (lo cual no significa que la superficie sea un plano).

Ejercicio 186. *Dar un ejemplo de superficie con un punto parabólico en el que la misma se encuentra a un solo lado del plano tangente y corta al mismo en una curva. Idem., estando a un sólo lado y cortando al mismo en un sólo punto. Idem., estando a los dos lados del plano tangente.*

Ejercicio 187. *Dar un ejemplo de superficie en el que un punto es plano, pero que no sea plana en ningún entorno del mismo.*

Podemos también considerar una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ y calcular la altura $h = h(t)$ respecto al punto de parámetro t_0 . Realizando unos cálculos similares a los anteriores, vemos que $h(t_0) = h'(t_0) = 0$ y

$$h(t) = \frac{1}{2} \text{II}(u'(t_0), v'(t_0))(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3).$$

Ejercicio 188. *Dar los detalles de la demostración de esta última afirmación.*

Nótese que $\text{II}(u', v')$ resulta ser una forma cuadrática en u', v' . Esto nos será útil para responder a preguntas tales como ¿cuáles son las direcciones en las que la función altura varía con mayor o menor rapidez?, ya que tendremos a nuestra disposición la teoría de formas cuadráticas. Pero antes de proseguir, observemos que derivando las ecuaciones $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N} \rangle = 0$ obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} e &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle \\ f &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u \rangle \\ g &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N} \rangle = -\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_v \rangle \end{aligned}$$

que, en ocasiones, simplificarán algunos cálculos teóricos.

Ejercicio 189. Calcúlese la segunda forma fundamental de las siguientes superficies parametrizadas:

1. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$, (elipsoide).
2. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$ (paraboloide elíptico).
3. $\mathbf{x}(u, v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$ (paraboloide hiperbólico).
4. $\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$ (hiperboloide de dos hojas).

5.2.1. Curvatura normal y curvatura geodésica

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ ² una curva sobre la superficie, que suponemos, para simplificar los cálculos, que está parametrizada por el arco. Su aceleración coincide entonces con su vector curvatura, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{x}''(s)$, y en cada punto de la curva podemos descomponer el vector de curvatura en suma de dos vectores,

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$$

donde $\mathbf{k}_g(s)$ es tangente a la superficie y $\mathbf{k}_n(s)$ es perpendicular a la misma. Llamaremos a \mathbf{k}_g vector de curvatura geodésica y a \mathbf{k}_n , vector de curvatura normal. No es difícil calcularlos si conocemos el vector normal $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(u(s), v(s))$: tendremos que $\mathbf{k}_n(s) = \kappa_n(s)\mathbf{N}(s)$ y, por tanto,

$$\langle \mathbf{k}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{k}_n, \mathbf{N} \rangle = \kappa_n.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_n &= \kappa_n \mathbf{N} = \langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} \\ \mathbf{k}_g &= \mathbf{x}''(s) - \langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} \end{aligned}$$

Nótese que la curva es una geodésica si y sólo si su vector de curvatura geodésica es nulo.

Como

$$\langle \mathbf{x}', \mathbf{N} \rangle = 0,$$

derivando esta identidad obtenemos que

$$\langle \mathbf{x}'', \mathbf{N} \rangle = -\langle \mathbf{x}', \mathbf{N}' \rangle,$$

y como

$$\mathbf{N}' = \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v' \text{ y } \mathbf{x}' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v',$$

²Nótese que la curva $\mathbf{x}(s)$ está parametrizada por el arco, pero no necesariamente la curva en el espacio de parámetros $(u(s), v(s))$

tenemos que

$$\begin{aligned}\kappa_n &= -\langle \mathbf{x}', \mathbf{N}' \rangle \\ &= -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle (u')^2 + (-\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u \rangle) u'v' - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_v \rangle (v')^2 \\ &= e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2.\end{aligned}$$

Es decir, la segunda forma fundamental, actuando sobre un vector unitario, puede interpretarse como la curvatura normal de una curva de la superficie con dicho vector tangente. En el caso de que la curva no esté parametrizada por el arco, esto no es un gran problema: podemos sustituir la coordenadas (u', v') por $(u'/\|\mathbf{x}'(t)\|, v'/\|\mathbf{x}'(t)\|)$, que sí se corresponden con las del vector unitario de la curva reparametrizada por la longitud de arco. Quedaría entonces que

$$\kappa_n = \frac{e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2}{\|\mathbf{x}'(t)\|^2} = \frac{\text{II}(u', v')}{\text{I}(u', v')}.$$

Es decir, la curvatura normal viene dada por el cociente de la segunda forma fundamental entre la primera.

Otro resultado interesante que acabamos de demostrar es que la curvatura normal no depende más que de la dirección tangente a la curva en el punto del que se trate o, dicho de otra forma, todas las curvas en una superficie que tengan la misma recta tangente en un punto tendrán en dicho punto la misma curvatura normal. Este resultado se conoce como *teorema de Meusnier*.

5.2.2. Secciones normales

Como acabamos de ver que la curvatura normal sólo depende de la recta tangente, dado un punto de una superficie podemos considerar el haz de planos normales a la misma que pasan por dicho punto. Los cortes de dichos planos con la superficie nos proporcionarán curvas³ con todas las direcciones tangentes posibles. A los cortes de los planos normales a la superficie en un punto con la superficie misma les llamaremos *secciones normales*.

Este haz de planos genera una familia de curvas planas y calcular la curvatura de las mismas en el punto base no es difícil. Dada una de estas secciones normales a la superficie, el vector de curvatura \mathbf{k} debe estar contenido en el plano normal, simplemente por ser la curva plana. Por ser vector de curvatura, debe ser también normal al vector tangente, así que la única posibilidad

³Estas curvas estarán bien definidas al menos en un entorno del punto, lo que es suficiente para nuestros propósitos.

es que sea proporcional al vector normal a la superficie, por lo tanto (en el punto base):

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n = \kappa_n \mathbf{N}.$$

En consecuencia la curvatura de la sección normal $\|\mathbf{k}\| = k$ coincide con el valor absoluto de κ_n .

Ejercicio 190. *Como la secciones normales son curvas planas, es posible orientar el plano y dar un signo a la curvatura, que llamaremos también k . ¿Es posible orientar el plano de forma que $k = \kappa_n$.*

5.2.3. Diagonalización de la segunda forma fundamental

Consideremos el círculo unidad c en el plano tangente a la superficie en un punto de parámetros (u, v) . Podemos considerar la segunda forma fundamental restringida a dicho círculo,

$$\text{II}_{(u,v)}|_c: c \rightarrow \mathbf{R}.$$

que, por ser una aplicación continua definida sobre un conjunto compacto, debe alcanzar su máximo en algún punto $\mathbf{e}_1 \in c$. El vector unitario \mathbf{e}_1 puede ser completado con otro vector $\mathbf{e}_2 \in c$ de forma que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ formen una base ortonormal. Veamos cuál es la expresión de la segunda forma fundamental en esta base: si \mathbf{x}' es un vector tangente en el punto de parámetros (u, v) , tendremos que $\mathbf{x}' = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ y será

$$\text{II}(\mathbf{x}') = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

para ciertos coeficientes α, β y γ . Dado que $\mathbf{x}' \in c$ será

$$\mathbf{x}' = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$$

y como \mathbf{e}_1 es un máximo, la función $f(\theta) = \alpha \cos^2 \theta + 2\beta \cos \theta \sin \theta + \gamma \sin^2 \theta$ tiene un máximo en $\theta = 0$. Por tanto satisface que $f'(0) = 2\beta = 0$. En consecuencia,

$$\text{II}(\mathbf{x}') = \alpha x^2 + \gamma y^2.$$

Nuevamente utilizando que \mathbf{e}_1 es máximo vemos que $\alpha = \text{II}(\mathbf{e}_1) \geq \text{II}(\mathbf{e}_2) = \gamma$. Tenemos pues las desigualdades

$$\alpha(x^2 + y^2) \geq \alpha x^2 + \gamma y^2 \geq \gamma(x^2 + y^2).$$

Por tanto si $\mathbf{x}' \in c$, i.e., $x^2 + y^2 = 1$, concluimos que

$$\alpha \geq \alpha x^2 + \gamma y^2 \geq \gamma,$$

es decir, la segunda forma fundamental restringida al círculo unidad alcanza su mínimo γ en la dirección ortogonal a la del máximo, es decir, la de \mathbf{e}_2 . Finalmente notemos que ambos valores coinciden sólo cuando $\alpha = \gamma$, en cuyo caso la segunda forma fundamental resulta ser constante sobre el círculo unidad.

Recordemos que si $\mathbf{x}' \in c$ entonces $\text{II}(\mathbf{x}')$ es el valor de la curvatura normal κ_n en la dirección de \mathbf{x}' . Hemos demostrado pues que la curvatura normal en un punto de la superficie o bien es constante o bien tiene dos valores extremos distintos.

En la notación anterior, el máximo era α y el mínimo γ , pero es costumbre denotarlos como κ_1 y κ_2 , respectivamente. Estos valores se alcanzan en dos direcciones ortogonales y se llaman *curvaturas principales*. Las direcciones correspondientes se denominan *direcciones principales*.

Si la segunda forma fundamental es constante sobre el círculo unidad, entonces diremos que $\kappa_1 = \kappa_2$ es este valor común y las direcciones principales no están definidas. Los puntos en los que ocurre esto se llaman *puntos umbilicales*.

Tenemos ya los ingredientes necesarios para definir las dos principales medidas de la curvatura de una superficie en un punto: la curvatura de Gauss,

$$K = \kappa_1 \kappa_2,$$

y la curvatura media

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

La primera interpretación de estas dos importantes funciones es algebraica: son, respectivamente, el determinante y la traza de la segunda forma fundamental respecto a la base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

5.2.4. Cálculos explícitos

Veamos ahora cómo podemos calcular, en términos de una parametrización, las direcciones principales y las curvaturas principales. Buscamos una dirección tangente $\mathbf{x}' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v$ que haga máxima la curvatura normal

$$\kappa_n = \frac{\text{II}(u', v')}{\text{I}(u', v')} = \frac{e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}.$$

Supongamos que no es dirección principal ni la de \mathbf{x}_u ni la de \mathbf{x}_v , de forma que si dividimos numerador y denominador por $(u')^2$ y llamamos $m = v'/u'$ tenemos que la función

$$\kappa_n(m) = \frac{e + 2fm + gm^2}{E + 2Fm + Gm^2}$$

debe satisfacer, en la dirección principal, que $d\kappa_n/dm = 0$. De esto se obtiene que

$$\frac{d\kappa_n}{dm} = \frac{2(f + gm)(E + 2Fm + Gm^2) - 2(F + Gm)(e + 2fm + gm^2)}{(E + 2Fm + Gm^2)^2} = 0,$$

de donde se obtiene que

$$(f + gm) - (F + Gm)\kappa_n = 0,$$

es decir,

$$fu' + gv' - (Fu' + Gv')\kappa_n = 0. \quad (5.1)$$

Si hacemos unos cálculos análogos para $m = u'/v'$ obtenemos que

$$eu' + fv' - (Eu' + Fv')\kappa_n = 0. \quad (5.2)$$

Es decir, poniendo en forma matricial estas dos últimas ecuaciones:

$$\left[\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} - \kappa_n \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0,$$

o, equivalentemente, si κ_n es curvatura principal y (u', v') es una dirección principal, entonces está en el núcleo de

$$\text{II} - \kappa_n \text{I}.$$

Equivalentemente, podemos decir que (u', v') es un autovector de I^{-1}II con autovalor κ_n .

De aquí resulta que las dos curvaturas principales se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado en κ_n dada por

$$\det(\text{II} - \kappa_n \text{I}) = (EG - F^2)k^2 - (Eg - 2Ff + Ge)k + eg - f^2 = 0,$$

y los dos autovectores asociados a las soluciones son las coordenadas de las direcciones principales. Como $EG - F^2 \neq 0$, podemos dividir la ecuación por este determinante, obteniendo que las curvaturas principales son solución de

$$k^2 - \frac{(Eg - 2Ff + Ge)}{(EG - F^2)}k + \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)} = 0,$$

de donde deducimos que

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)}.$$

Ejercicio 191. Calcúlese la primera y segunda forma fundamental, así como la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales de: una esfera, un elipsoide de rotación, un hiperboloide de rotación de una hoja, un hiperboloide de rotación de dos hojas, un paraboloides de rotación, un cilindro de sección circular, un cono circular sin vértice, un toro, una catenoide de rotación, una seudoesfera y un helicoides recto.

Ejercicio 192. Demuéstrese que si una superficie está contenida en un plano entonces sus curvaturas principales son nulas.

Ejercicio 193. Calcúlese las curvaturas principales en los vértices del hiperboloide de dos hojas $x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$.

Ejercicio 194. Calcular las curvaturas principales de la superficie $z = xy$ en el punto $(1, 1, 1)$.

Ejercicio 195. Calcular las curvaturas principales de la superficie $x^2/p + y^2/q = 2z$ en el punto $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 196. Demuéstrese que en todo punto de la superficie $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = \lambda u$ una de las secciones normales principales es una recta.

Ejercicio 197. En la superficie $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ se considera el punto P de parámetros $u = v = 1$. Calcúlese las curvaturas principales de la superficie en P , las ecuaciones de las secciones normales principales y las rectas tangentes correspondientes en P y la curvatura de la sección normal en P que es tangente a la curva $v = u^2$.

Ejercicio 198. Demuéstrese que un punto es umbilical si y sólo si $e/E = f/F = g/G$.

Ejercicio 199. Calcúlese los puntos umbilicales del elipsoide de semiejes a, b, c .

5.3. Líneas de curvatura y líneas asintóticas

En un punto no umbilical de la superficie tenemos pues bien definidas dos direcciones principales, en las que las secciones normales alcanzan sus valores máximo y mínimo. Las curvas con la propiedad de que su dirección tangente es siempre una dirección principal se llaman líneas de curvatura. Para calcularlas, usemos las ecuaciones (5.1) y (5.2) para obtener

$$\frac{fu' + gv'}{Fu' + Gv'} = \frac{eu' + fv'}{Eu' + Fv'}$$

es decir,

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0,$$

que son las ecuaciones diferenciales de las líneas de curvatura.

Por otra parte, en el caso de que la curvatura de Gauss sea negativa entonces existen dos direcciones independientes en las cuales la curvatura normal es nula, justamente aquellas que anulan la segunda forma fundamental. Estas direcciones se llaman direcciones asintóticas y satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0.$$

Por cada punto de una superficie con curvatura de Gauss negativa pasan dos líneas asintóticas (salvo reparametrizaciones de las mismas).

Ejercicio 200. *Demuéstrese que si una curva es línea de curvatura o asintótica, entonces también lo son las reparametrizaciones de la misma. ¿Por qué?*

Ejercicio 201. *Calcúlense los puntos umbilicales y las líneas de curvatura de la superficie $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.*

Ejercicio 202. *Demuéstrese que las curvas coordenadas de la superficie*

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(e^{(u-v)/2} \cos\left(\frac{u+v}{2}\right), e^{(u-v)/2} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right), \frac{u-v}{2} \right)$$

son líneas asintóticas.

Ejercicio 203. *Demuéstrese que una geodésica que es línea asintótica*

Ejercicio 204. *Estúdiense si los paralelos y meridianos del toro de revolución son líneas de curvatura o líneas asintóticas.*

Ejercicio 205. *Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que las curvas coordenadas de una parametrización sean líneas de curvatura en un entorno de un punto no umbilical es que $F = f = 0$.*

Ejercicio 206. *Dada la superficie*

$$\mathbf{x}(u, v) = (u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2),$$

calcúlense las curvaturas principales en un punto arbitrario. Demuéstrese que las líneas de curvatura son las curvas coordenadas y que las líneas asintóticas están dadas por $u + v = \text{cte.}$, $u - v = \text{cte.}$

Ejercicio 207. *Calcúlense las líneas asintóticas del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.*

5.4. Una interpretación geométrica de la curvatura de Gauss

En esta sección estudiaremos la definición original de curvatura dada por Gauss. Sea R sea un disco cerrado de radio r centrado en un punto (u_0, v_0) y contenido en el dominio de la superficie parametrizada $\mathbf{x} : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Consideremos la normal unitaria $\mathbf{N} : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ asociada a la parametrización, es decir,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Como $\|\mathbf{N}\| \equiv 1$, la imagen $\mathbf{N}(R) \subset S^2$, siendo S^2 la esfera unitaria. La definición original de curvatura de una superficie en un punto que propuso Gauss es la siguiente:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(\mathbf{N}(R))}{\text{Area}(\mathbf{x}(R))}. \quad (5.3)$$

Ejercicio 208. *Calcúlese directamente el valor de este límite cuando la superficie es a) un plano, b) una esfera de radio ρ , c) un cilindro.*

Tenemos que

$$\text{Area}(\mathbf{N}(R)) = \int_R \|\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v\| dudv.$$

Calculemos $\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v$. Puesto que $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 0$, tenemos que

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N} \rangle = 0,$$

es decir, \mathbf{N}_u y \mathbf{N}_v son tangentes a la superficie. Por tanto se pueden escribir en términos de \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{aligned}$$

para ciertas funciones $a_{ij} = a_{ij}(u, v)$ que ahora vamos a determinar. Si escribimos las últimas ecuaciones de forma matricial, tenemos que

$$(\mathbf{N}_u \quad \mathbf{N}_v) = (\mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_v) \mathbf{W}, \quad (5.4)$$

siendo

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Usando las propiedades del producto vectorial, vemos que

$$\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \det \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v.$$

Calculemos la matriz \mathbf{W} . Para ello, escribamos la ecuación (5.4) de forma algo más compacta denotando $d\mathbf{N} = (\mathbf{N}_u \ \mathbf{N}_v)$, $d\mathbf{x} = (\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v)$, con lo que

$$d\mathbf{N} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{W}. \quad (5.5)$$

Como

$$d\mathbf{x}^\top d\mathbf{x} = \mathbf{I},$$

y

$$d\mathbf{x}^\top d\mathbf{N} = -\mathbf{II},$$

multiplicando por la izquierda por $d\mathbf{x}^\top$ ambos miembros de (5.5) obtenemos que

$$d\mathbf{x}^\top d\mathbf{N} = -\mathbf{II} = d\mathbf{x}^\top d\mathbf{x} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{W},$$

y, por tanto,

$$\mathbf{W} = -\mathbf{I}^{-1}\mathbf{II}.$$

Recordemos que la matriz $-\mathbf{W}$ apareció anteriormente cuando calculábamos las curvaturas principales. La matriz \mathbf{W} se llama matriz de *Weingarten*.

Ahora podemos calcular

$$\det \mathbf{W} = \det(-\mathbf{I}^{-1}\mathbf{II}) = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}} = K,$$

y por tanto

$$\text{Area}(\mathbf{N}(R)) = \int_R \|\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v\| dudv = \int_R |K| \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv.$$

Entonces el límite (5.3) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(\mathbf{N}(R))}{\text{Area}(\mathbf{x}(R))} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_R |K| \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv}{\int_R \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|K(u^*, v^*)| \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|(u^*, v^*) \text{Area}(R)}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|(u^{**}, v^{**}) \text{Area}(R)}, \end{aligned}$$

donde $(u^*, v^*), (u^{**}, v^{**}) \in R$ son ciertos puntos cuya existencia está asegurada gracias al teorema del valor medio del cálculo integral. Por tanto, obtenemos que

$$|K(u_0, v_0)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(\mathbf{N}(R))}{\text{Area}(\mathbf{x}(R))}.$$

Es posible dar una interpretación al signo de la curvatura de Gauss. Para ello consideremos una parametrización c_r del borde del disco R positivamente orientada en el plano, es decir, que gira en sentido antihorario. Diremos que la aplicación normal $\mathbf{N} : U \rightarrow S^2$ preserva la orientación en (u_0, v_0) cuando la curva $\mathbf{N} \circ c_r$ en la esfera S^2 gira alrededor del punto $\mathbf{N}(\mathbf{x}(u_0, v_0))$ en el mismo sentido que la curva $\mathbf{x} \circ c_r$ gira en la superficie alrededor del punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$.

Para poder comparar ambos sentidos de giro, observemos que el plano tangente a la esfera en el punto $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ es el mismo que el de la superficie en el punto de parámetros (u_0, v_0) .

Ejercicio 209. *Demuéstrese esta última afirmación.*

Podemos escoger como lado para observar la superficie aquel hacia el que señala $\mathbf{N}(u_0, v_0)$ y, desde esta posición, decidir si ambas curvas giran en el mismo sentido. En el caso de que sea así, asignaremos un signo positivo al área de $\text{Area}(\mathbf{N}(R))$ y signo negativo en caso contrario. Pues bien, se puede demostrar que el que ambas orientaciones coincidan en entornos arbitrariamente pequeños del punto es equivalente a que la curvatura de Gauss sea positiva, con lo que resulta

$$K(u_0, v_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Area}(\mathbf{N}(R))}{\text{Area}(\mathbf{x}(R))}.$$

Ejercicio 210. *Parametrícese un entorno del polo norte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y considérese la circunferencia $c_r(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Dibújese la curva $\mathbf{N} \circ c_r$ y decídase si tiene o no la misma orientación que la curva $\mathbf{x} \circ c_r$. ¿Cuál es el signo de la curvatura de Gauss? Hágase el mismo ejercicio para la superficie $z = xy$ en el punto $(0, 0, 0)$.*

5.5. El teorema egregio de Gauss

Tanto la definición de curvatura que hemos dado en función de las curvaturas principales como la definición original de Gauss parecen depender del ambiente en el que se encuentra la superficie, ya que ambas hacen uso del vector normal a la superficie. El teorema egregio de Gauss demuestra un resultado sorprendente: la curvatura de Gauss depende en realidad sólo de la primera forma fundamental, es decir, es un objeto perteneciente a la geometría intrínseca de la superficie. Para demostrar este resultado, fijémonos

en el numerador de la curvatura de Gauss:

$$\begin{aligned}
 eg - f^2 &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N} \rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle^2 \\
 &= (\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \rangle \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \rangle) / (EG - F^2) \\
 &= (\det(\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) - \det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)^2) / (EG - F^2),
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

y el numerador de esta última expresión se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 &\det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}^\top \\ \mathbf{x}_u^\top \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_u^\top & \mathbf{x}_v \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv}^\top \\ \mathbf{x}_u^\top \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_u^\top & \mathbf{x}_v \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_u \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_u \end{pmatrix}. \tag{5.7} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{vv} & E & F \\ \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_{vv} & F & G \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{uv} & E & F \\ \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_{uv} & F & G \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2} E_u \\
 \mathbf{x}_{vv}^\top \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2} G_v \\
 \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_v &= (\mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_v)_u - \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{vu} \\
 &= F_u - \frac{1}{2} E_v \\
 \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{vv} &= (\mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_v)_v - \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_v \\
 &= F_v - \frac{1}{2} G_u
 \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2} E_v \\
 \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2} G_u.
 \end{aligned}$$

De esta forma, todos los coeficientes de las matrices que aparecen en la ecuación (5.6) se escriben en términos de la primera forma fundamental salvo $\mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_{vv}$ y $\mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_{uv}$. Pero notemos que estos dos coeficientes tienen el mismo

menor complementario, de forma que podemos escribir

$$(eg-f^2)(EG-F^2) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{vv} & E & F \\ \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_{vv} & F & G \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{uv} & E & F \\ \mathbf{x}_v^\top \mathbf{x}_{uv} & F & G \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

y observar que la diferencia

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}^\top \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv}^\top \mathbf{x}_{uv} &= (\mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{vv})_u - \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{vvu} \\ &\quad - ((\mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{uv})_v - \mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{uvv}) \\ &= (\mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_u^\top \mathbf{x}_{uv})_v \\ &= (F_v - \frac{1}{2}G_u)_u - (\frac{1}{2}E_v)_v = -\frac{1}{2}(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}) & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG-F^2)^2} \quad (5.9) \end{aligned}$$

Por tanto hemos visto que para calcular la curvatura de Gauss es necesario únicamente el conocimiento de la primera forma fundamental, es decir, de medidas intrínsecas sobre la superficie.

Ejercicio 211. *Demuéstrese que en el caso de que las líneas coordenadas sean ortogonales la curvatura de Gauss viene dada mediante la expresión*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v - \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$