Mirada Superficial al Álgebra y Pre-Cálculo

Compilado por Felipe Portales O.

PDF generado usando el kit de herramientas de fuente abierta mwlib. Ver http://code.pediapress.com/ para mayor información.
PDF generated at: Fri, 25 Dec 2009 20:34:53 UTC

Contenidos

Artículos

Lógica y Teoría de Conjuntos

Lógica matemática

La lógica matemática es un subcampo de la lógica y las matemáticas. Consiste en el estudio matemático de la lógica y en la aplicación de este estudio a otras áreas de las matemáticas. La lógica matemática guarda estrechas conexiones con la ciencias de la computación y la lógica filosófica.

La **lógica matemática** estudia los sistemas formales en relación con el modo en el que codifican conceptos intuitivos de objetos matemáticos como conjuntos, números, demostraciones y computación.

La lógica matemática suele dividirse en cuatro subcampos: teoría de modelos, teoría de la demostración, teoría de conjuntos y teoría de la recursión. La investigación en lógica matemática ha jugado un papel fundamental en el estudio de los fundamentos de las matemáticas.

La lógica matemática fue también llamada **lógica simbólica**. El primer término todavía se utiliza como sinónimo suyo, pero el segundo se refiere ahora a ciertos aspectos de la teoría de la demostración.

La lógica matemática no es la "lógica de las matemáticas" sino la "matemática de la lógica". Incluye aquellas partes de la lógica que pueden ser modeladas y estudiadas matemáticamente.

Historia

Lógica Matemática fue el nombre dado por Giuseppe Peano para esta disciplina. En esencia, es la lógica de Aristóteles, pero desde el punto de vista de una nueva notación, más abstracta, tomada del álgebra.

Previamente ya se hicieron algunos intentos de tratar las operaciones lógicas formales de una manera simbólica por parte de algunos filósofos matemáticos como Leibniz y Lambert, pero su labor permaneció desconocida y aislada.

Fueron George Boole y Augustus De Morgan, a mediados del siglo XIX, quienes primero presentaron un sistema matemático para modelar operaciones lógicas. La lógica tradicional aristotélica fue reformada y completada, obteniendo un instrumento apropiado para investigar sobre los fundamentos de la matemática.

El tradicional desarrollo de la lógica enfatizaba su centro de interés en la forma de argumentar, mientras que la actual lógica matemática lo centra en un estudio combinatorio de los contenidos. Esto se aplica tanto a un nivel *sintáctico* (por ejemplo, el envío de una cadena de símbolos perteneciente a un lenguaje formal a un programa compilador que lo convierte en una secuencia de instrucciones ejecutables por una máquina), como a un nivel *semántico*, construyendo modelos apropiados (teoría de modelos). La lógica matemática estudia los sistemas formales en relación con el modo en el que codifican conceptos intuitivos de objetos matemáticos como conjuntos, números, demostraciones y computación.

La lógica matemática suele dividirse en cuatro subcampos: teoría de modelos, teoría de la demostración, teoría de conjuntos y teoría de la recursión. La investigación en lógica matemática ha jugado un papel fundamental en el estudio de los fundamentos de las matemáticas.

Áreas

La *Mathematics Subject Classification* divide la lógica matemática en las siguientes áreas:

- Filosófica y crítica
- Lógica general (que incluye campos como la lógica modal y la lógica borrosa)
- Teoría de modelos
- Teoría de la computabilidad
- Teoría de conjuntos
- Teoría de la demostración y matemática constructiva
- Lógica algebraica
- Modelos no-estándar

En algunos casos hay conjunción de intereses con la Informática teórica, pues muchos pioneros de la informática, como Alan Turing, fueron matemáticos y lógicos. Así, el estudio de la semántica de los lenguajes de programación procede de la teoría de modelos, así como también la verificación de programas, y el caso particular de la técnica del model checking. También el isomorfismo de Churry-Howard entre pruebas y programas se corresponde con la teoría de pruebas, donde la lógica intuicionista y la lógica lineal son especialmente significativas. Algunos sistemas lógicos como el cálculo lambda, y la lógica combinatoria entre otras han devenido, incluso, auténticos lenguajes de programación, creando nuevos paradigmas como son la programación funcional y la programación lógica.

Lógica de predicados

La lógica de predicados es un lenguaje formal donde las sentencias bien formadas son producidas por las reglas enunciadas a continuación.

Lenguajes y estructuras de primer orden

Un lenguaje de primer orden' $\mathfrak{L}$es una colección de distintos símbolos clasificados como sigue:

1. El **símbolo de igualdad** $=$; las *conectivas* $\vee$ ***,*** $\neg$ ***; el*** *cuantificador universal* ' $\forall$ y el **paréntesis** $($, $)$.
2. Un conjunto contable de **símbolos de variable** $\{v_i\}_{i=0}^{\infty}$.
3. Un conjunto de **símbolos de constante** $\{c_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$.
4. Un conjunto de **símbolos de función** $\{f_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$.
5. Un conjunto de **símbolos de relación** $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Así, para especificar un orden, generalmente sólo hace falta especificar la colección de símbolos constantes, símbolos de función y símbolos relacionales, dado que el primer conjunto de símbolos es estándar. Los paréntesis tienen como único propósito de agrupar símbolos y no forman parte de la estructura de las funciones y relaciones.

Los símbolos carecen de significado por sí solos. Sin embargo, a este lenguaje podemos dotarlo de una semántica apropiada.

Una $\mathfrak{L}$**-estructura** sobre el lenguaje $\mathfrak{L}$, es una tupla consistente en un conjunto no vacío A , el universo del discurso, junto a:

1. Para cada símbolo constante c de $\mathfrak{L}$, tenemos un elemento $c^{\mathfrak{A}} \in A$.
2. Para cada símbolo de function n -aria f de $\mathfrak{L}$, una function n -aria $f^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A$.
3. Para cada símbolo de relación n -aria R de $\mathfrak{L}$, una relación n -aria sobre A , esto es, un subconjunto $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.

A menudo, usaremos la palabra *modelo* para denotar esta estructura.

Véase también

- Lógica proposicional
- Lógica de primer orden

Bibliografía adicional

- Agazzi, Evandro (1986). *Lógica simbólica*. Editorial Herder. ISBN 978-84-254-0130-5.

Enlaces externos

- Wikiversidad alberga proyectos de aprendizaje sobre **Lógica matemática**.Wikiversidad

Lógica proposicional

En lógica y matemática, la **lógica proposicional** es un sistema formal diseñado para analizar ciertos tipos de argumentos. En la lógica proposicional, las fórmulas representan proposiciones y las constantes lógicas son operaciones sobre las fórmulas que producen otras fórmulas de mayor complejidad.[1] Como otros sistemas lógicos, la lógica proposicional intenta clarificar nuestra comprensión de la noción de consecuencia lógica para el rango de argumentos que analiza.

Introducción

Considérese el siguiente argumento:

1. Mañana es miércoles o mañana es jueves.
2. Mañana no es jueves.
3. Por lo tanto, mañana es miércoles.

Este es un argumento válido. Quiere decir que es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Esto no quiere decir que la conclusión sea verdadera. Si las premisas son falsas, entonces la conclusión también podría serlo. Pero si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión también lo es. La validez de este argumento no se debe al significado de las expresiones "mañana es miércoles" y "mañana es jueves", porque éstas podrían cambiarse por otras y el argumento permanecer válido. Por ejemplo:

1. Está soleado o está nublado.
2. No está nublado.
3. Por lo tanto, está soleado.

En cambio, la validez de estos dos argumentos depende del significado de las expresiones "o" y "no". Si alguna de estas expresiones se cambiara por otra, entonces podría ser que los argumentos dejaran de ser válidos. Por ejemplo:

1. Ni está soleado ni está nublado.
2. No está nublado.
3. Por lo tanto, está soleado.

Las expresiones de las que depende la validez de los argumentos se llaman *constantes lógicas*. La lógica proposicional estudia el comportamiento de una variedad de estas expresiones. En cuanto a las expresiones como "está nublado" o "mañana es jueves", lo único que importa de ellas es que tengan un valor de verdad. Es por esto que se las reemplaza por simples letras, cuya intención es simbolizar una expresión con valor de verdad cualquiera. En general las letras se toman del alfabeto latino, empezando por la letra p, luego q, r, s, etc. Así, los dos primeros argumentos de esta sección podrían reescribirse así:

1. p o q

2. No q
3. Por lo tanto, p

Y el tercer argumento, a pesar de no ser válido, puede reescribirse así:

1. Ni p ni q
2. No q
3. Por lo tanto, p

Constantes lógicas

A continuación hay una tabla que despliega todas las constantes lógicas que ocupan a la lógica proposicional, incluyendo ejemplos de su uso en el lenguaje natural y los símbolos que se utilizan para representarlas.

Expresión en el lenguaje natural	Ejemplo	Símbolo en este artículo	Símbolos alternativos
no	**No** está lloviendo.	$\neg$	$\sim$
y	Está lloviendo **y** está nublado.	$\wedge$	$\&$
o	Está lloviendo **o** está soleado.	$\vee$	
si... entonces	**Si** está soleado, **entonces** es de día.	$\rightarrow$	$\supset$
si y sólo si	Está nublado **si y sólo si** hay nubes visibles.	$\leftrightarrow$	$\equiv$
ni... ni	**Ni** está soleado **ni** está nublado.	$\downarrow$	
o bien... o bien	**O bien** está soleado, **o bien** está nublado.	$\nleftrightarrow$	$\veebar$, $\not\equiv$

En la lógica proposicional, las constantes lógicas son tratadas como funciones de verdad. Es decir, como funciones que toman conjuntos de valores de verdad y devuelven valores de verdad. Por ejemplo, la constante lógica "no" es una función que si toma el valor de verdad 1, devuelve 0, y si toma el valor de verdad 0, devuelve 1. Por lo tanto, si se aplica la función "no" a una letra que represente una proposición falsa, el resultado será algo verdadero. Si es falso que "está lloviendo", entonces será verdadero que "no está lloviendo".

El significado de las constantes lógicas no es nada más que su comportamiento como funciones de verdad. Cada constante lógica se distingue de las otras por los valores de verdad que devuelve frente a las distintas combinaciones de valores de verdad que puede recibir. Esto quiere decir que el significado de cada constante lógica puede ilustrarse mediante una tabla que despliegue los valores de verdad que la función devuelve frente a todas las combinaciones posibles de valores de verdad que puede recibir.

Negación

p	$\neg p$
1	0
0	1

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disyunción

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Condicional

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Límites de la lógica proposicional

La maquinaria de la lógica proposicional permite formalizar y teorizar sobre la validez de una gran cantidad de argumentos. Sin embargo, también existen argumentos que son intuitivamente válidos, pero cuya validez no puede ser probada por la lógica proposicional. Por ejemplo, considérese el siguiente argumento:

1. Todos los hombres son mortales.
2. Sócrates es un hombre.
3. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Según la lógica proposicional, la forma de este argumento es la siguiente:

1. p
2. q
3. $\therefore r$

Pero esta es una forma de argumento inválida, y eso contradice nuestra intuición de que el argumento es válido. Para teorizar sobre la validez de este tipo de argumentos, se necesita investigar la estructura interna de las variables proposicionales. De esto se ocupa la lógica de primer orden. Otros sistemas formales permiten teorizar sobre otros tipos de argumentos. Por ejemplo la lógica de segundo orden, la lógica modal y la lógica temporal.

Dos sistemas formales de lógica proposicional

A continuación se presentan dos sistemas formales estándar para la lógica proposicional. El primero es un sistema axiomático simple, y el segundo es un sistema sin axiomas, de deducción natural.

Sistema axiomático

Alfabeto

El alfabeto de un sistema formal es el conjunto de símbolos que pertenecen al lenguaje del sistema. Si L es el nombre de este sistema axiomático de lógica proposicional, entonces el alfabeto de L consiste en:

- Una cantidad finita pero arbitrariamente grande de variables proposicionales. En general se las toma del alfabeto latino, empezando por la letra *p*, luego *q*, *r*, etc., y utilizando subíndices cuando es necesario o conveniente. Las variables proposicionales representan proposiciones como "está lloviendo" o "los metales se expanden con el calor".
- Un conjunto de operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Dos signos de puntuación: los paréntesis izquierdo y derecho. Su única función es desambiguar ciertas expresiones ambiguas, en exactamente el mismo sentido en que desambiguan la expresión 2 + 2 ÷ 2, que puede significar tanto (2 + 2) ÷ 2, como 2 + (2 ÷ 2).

Gramática

Una vez definido el alfabeto, el siguiente paso es determinar qué combinaciones de símbolos pertenecen al lenguaje del sistema. Esto se logra mediante una gramática formal. La misma consiste en un conjunto de reglas que definen recursivamente las secuencias de símbolos que pertenecen al lenguaje. A las secuencias de símbolos construidas según estas reglas se las llama fórmulas bien formadas. Las reglas del sistema L son:

1. Las variables proposicionales del alfabeto de L son fórmulas bien formadas.
2. Si ϕ es una fórmula bien formada de L, entonces $\neg\phi$ también lo es.
3. Si ϕ y ψ son fórmulas bien formadas de L, entonces $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$y $(\phi \leftrightarrow \psi)$también lo son.
4. Sólo las expresiones que pueden ser generadas mediante las cláusulas 1 a 3 en un número finito de pasos son fórmulas bien formadas de L.

Según estas reglas, las siguientes secuencias de símbolos son ejemplos de fórmulas bien formadas:

p

$\neg\neg\neg q$

$(p \wedge q)$

$\neg(p \wedge q)$

$(p \leftrightarrow \neg p)$

$((p \rightarrow q) \wedge p)$

$(\neg(p \wedge (q \vee r)) \vee s)$

Y los siguientes son ejempos de fórmulas mal formadas:

(p)

$\neg(p)$

$(\neg p)$

$(p \wedge q \rightarrow r)$

Axiomas

Los axiomas de un sistema formal son un conjunto de fórmulas bien formadas que se toman como punto de partida para demostraciones ulteriores. Un conjunto de axiomas estándar es el que descubrió Jan Łukasiewicz:

- $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$
- $((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)))$
- $((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi))$

Reglas de inferencia

Una regla de inferencia es una función que va de conjuntos de fórmulas a fórmulas. Al conjunto de fórmulas que la función toma como argumento se lo llama *premisas*, mientras que a la fórmula que devuelve como valor se la llama *conclusión*. En general se busca que las reglas de inferencia transmitan la verdad de las premisas a la conclusión. Es decir, que sea imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. En el caso de L, la única regla de inferencia es el modus ponens, el cual dice:

$(\phi \rightarrow \psi), \phi \vdash \psi$

Recordando que ϕ y ψ no son fórmulas, sino metavariables que pueden ser reemplazadas por cualquier fórmula bien formada.

Ejemplo de una demostración

A demostrar: $\phi \rightarrow \phi$		
Paso	**Fórmula**	**Razón**
1	$\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)$	Instancia del primer axioma.
2	$\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$	Instancia del primer axioma.
3	$\big(\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)\big) \rightarrow \big((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)\big)$	Instancia del segundo axioma.
4	$\big((\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)\big)$	Desde (2) y (3) por modus ponens.
5	$\phi \rightarrow \phi$	Desde (1) y (4) por modus ponens. Q.E.D.

Deducción natural

Un sistema de lógica proposicional también puede construirse a partir de un conjunto vacío de axiomas. Para ello se especifican una serie de reglas de inferencia que intentan capturar el modo en que naturalmente razonamos acerca de las constantes lógicas.

- Introducción de la negación:

  Si suponer ϕ lleva a una contradicción, entonces se puede inferir que $\neg\phi$ (reducción al absurdo).
- Eliminación de la negación:

  $\neg\neg\phi \vdash \phi$
- Introducción de la conjunción:

  $\phi, \psi \vdash (\phi \land \psi)$

  $\phi, \psi \vdash (\psi \land \phi)$
- Eliminación de la conjunción:

  $(\phi \land \psi) \vdash \phi$

  $(\phi \land \psi) \vdash \psi$
- Introducción de la disyunción:

  $\phi \vdash (\phi \lor \psi)$

  $\phi \vdash (\psi \lor \phi)$
- Eliminación de la disyunción:

  $(\phi \lor \psi), (\phi \to \chi), (\psi \to \chi) \vdash \chi$
- Introducción del condicional:

  Si suponer ϕ lleva a una prueba de ψ , entonces se puede inferir que $(\phi \to \psi)$.
- Eliminación del condicional (modus ponens):

  $(\phi \to \psi), \phi \vdash \psi$
- Introducción del bicondicional:

  $(\phi \to \psi), (\psi \to \phi) \vdash (\phi \leftrightarrow \psi)$

  $(\phi \to \psi), (\psi \to \phi) \vdash (\psi \leftrightarrow \phi)$
- Eliminación del bicondicional:

  $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash (\phi \to \psi)$

  $(\phi \leftrightarrow \psi) \vdash (\psi \to \phi)$

Ejemplo de una demostración

A demostrar: $\phi \to \phi$		
Paso	**Fórmula**	**Razón**
1	ϕ	Supuesto.
2	$\phi \lor \phi$	Desde (1) por introducción de la disyunción.
3	$(\phi \lor \phi) \land \phi$	Desde (1) y (2) por introducción de la conjunción.
4	ϕ	Desde (3) por eliminación de la conjunción.
5	$\phi \vdash \phi$	Resumen de (1) hasta (4).
6	$\vdash \phi \to \phi$	Desde (5) por introducción del condicional. Q.E.D.

Lenguaje formal en la notación BNF

El lenguaje formal de la lógica proposicional se puede generar con la gramática formal descrita usando la notación BNF como sigue:

$$
\begin{aligned}
\langle \text{Bicondicional} \rangle &::= \langle \text{Condicional} \rangle \leftrightarrow \langle \text{Bicondicional} \rangle \mid \langle \text{Condicional} \rangle \\
\langle \text{Condicional} \rangle &::= \langle \text{Conjuncion} \rangle \to \langle \text{Condicional} \rangle \mid \langle \text{Conjuncion} \rangle \\
\langle \text{Conjuncion} \rangle &::= \langle \text{Disyuncion} \rangle \lor \langle \text{Conjuncion} \rangle \mid \langle \text{Disyuncion} \rangle \\
\langle \text{Disyuncion} \rangle &::= \langle \text{Literal} \rangle \land \langle \text{Disyuncion} \rangle \mid \langle \text{Literal} \rangle \\
\langle \text{Literal} \rangle &::= \langle \text{Atomo} \rangle \mid \neg \langle \text{Atomo} \rangle \\
\langle \text{Atomo} \rangle &::= \top \mid \bot \mid \langle \text{Letra} \rangle \mid \langle \text{Agrupacion} \rangle \\
\langle \text{Agrupacion} \rangle &::= (\langle \text{Bicondicional} \rangle) \mid [\langle \text{Bicondicional} \rangle] \mid \{\langle \text{Bicondicional} \rangle\}
\end{aligned}
$$

La gramática anterior define la precedencia de operadores de la siguiente manera:

1. Negación ($\neg$)
2. Conjunción ($\land$)
3. Disyunción ($\lor$)
4. Implicación ($\to$)
5. Coimplicación ($\leftrightarrow$)

Semántica

Una interpretación para un sistema de lógica proposicional es una asignación de valores de verdad para cada variable proposicional, sumada a la asignación usual de significados para los operadores lógicos. A cada variable proposicional se le asigna uno de dos posibles valores de verdad: o 1 (verdadero) o 0 (falso). Esto quiere decir que si hay n variables proposicionales en el sistema, el número de interpretaciones distintas es de 2^n.

A partir de esto podemos definir: si ϕ es una fórmula cualquiera de un sistema L, e I es una interpretación de L, entonces:

- ϕ es verdadera bajo la interpretación I, si I asigna el valor de verdad 1 a ϕ .
- ϕ es falsa bajo la interpretación I, si I asigna el valor de verdad 0 a ϕ .
- ϕ es una tautología (o válida) si para toda interpretación I, I asigna el valor de verdad 1 a ϕ .
- ϕ es una contradicción si para toda interpretación I, I asigna el valor de verdad 0 a ϕ .
- ϕ es consistente (o satisfacible) si existe al menos una interpretación I que asigne el valor de verdad 1 a ϕ .
- ϕ es una consecuencia semántica de un conjunto de fórmulas Γ, si para toda fórmula ψ que pertenezca a Γ, no hay ninguna interpretación en que ψ sea verdadera y ϕ falsa. Cuando ϕ es una consecuencia semántica de Γ, se escribe: $\Gamma \models \phi$

Tablas de verdad

La tabla de verdad de una fórmula es una tabla en la que se presentan todas las posibles interpretaciones de las variables proposicionales que constituyen la fórmua y el valor de verdad de la fórmula completa para cada interpretación. Por ejemplo, la tabla de verdad para la fórmula $\neg(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ sería:

p	q	r	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$(p \rightarrow r)$	$\neg(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Como se ve, esta fórmula tiene 2^3 interpretaciones posibles —una por cada línea de la tabla—, y resulta ser una tautología, es decir que bajo todas las interpretaciones posibles de las variables proposicionales, el valor de verdad de la fórmula completa termina siendo 1.

La lógica proposicional y la computación

Debido a que los computadores trabajan con información binaria, la herramienta matemática adecuada para el análisis y diseño de su funcionamiento es el Álgebra de Boole. El Álgebra de Boole fue desarrollada inicialmente para el estudio de la lógica. Ha sido a partir de 1938, fecha en que Claude Shannon publicó un libro llamado "Análisis simbólico de circuitos con relés", estableciendo los primeros conceptos de la actual teoría de la conmutación, cuando se ha producido un aumento considerable en el número de trabajos de aplicación del Álgebra de Boole a los computadores digitales. Hoy en día, esta herramienta resulta fundamental para el desarrollo de los computadores ya que, con su ayuda, el análisis y síntesis de combinaciones complejas de circuitos lógicos puede realizarse con rapidez.

Aristóteles con respecto al estudio de la lógica

La lógica es conocida como una de las ciencias más antiguas, tanto es así que se le atribuye a Aristóteles la paternidad de esta disciplina Partiendo de que corresponde a Aristóteles haber sido el primero en tratar con todo detalle la lógica, se le considera pues ser su fundador. En un principio se llamó Analítica, en virtud del título de las obras en que trató los problemas lógicos. Más tarde los escritos de Aristóteles relativos a estos eventos fueron recopilados por sus discípulos con el título de Organon, por considerar que la lógica era un instrumento para el conocimiento de la verdad. Aristóteles se planteo cómo es posible probar y demostrar que un conocimiento es verdadero, es decir, que tiene una validez universal. Aristóteles encuentra el fundamento de la demostración en la deducción, procedimiento que consiste en derivar un hecho particular de algo universal. La forma en que se afecta esa derivación es el silogismo, por cuya razón la silogística llega a ser el centro de la lógica aristotélica.

Véase también

- Cálculo lógico
- Lógica matemática
- Lógica de primer orden
- Lista de reglas de inferencia
- Tabla de valores de verdad
- Gráficos existenciales

Enlaces externos

- Introducción a la lógica proposicional [2]
- Aprende Lógica [3]

Referencias

[1] « propositional calculus (http://www.oxfordreference.com/views/ENTRY.html?subview=Main&entry=t98.e2552)» (en inglés). *Oxford Dictionary of Philosophy*. Ed. Simon Blackburn. Oxford University Press. Consultado el 13 de agosto de 2009.

[2] http://portales.educared.net/wikiEducared/index.php?title=L%C3%B3gica_proposicional

[3] http://www.fcalzado.es/logica

Tabla de valores de verdad

Una **tabla de valores de verdad**, o **tabla de verdad**, es una tabla que despliega el valor de verdad de una proposición compuesta, para cada combinación de valores de verdad que se pueda asignar a sus componentes.[1]

Fue desarrollada por Charles Sanders Peirce por los años 1880, pero el formato más popular es el que introdujo Ludwig Wittgenstein en su *Tractatus logico-philosophicus*, publicado en 1921.

Definición y algoritmo fundamental

Considérese dos proposiciones *A* y *B*.[2] Cada una puede tomar uno de dos valores de verdad: o 1 (verdadero), o 0 (falso). Por lo tanto, los valores de verdad de *A* y de *B* pueden combinarse de cuatro maneras distintas: o ambas son verdaderas; o *A* es verdadera y *B* falsa, o *A* es falsa y *B* verdadera, o ambas son falsas. Esto puede expresarse con una tabla simple:

A	B
1	1
1	0
0	1
0	0

Considérese además a " $*$ " como una operación o conjunción lógica que realiza una función de verdad al tomar los valores de verdad de *A* y de *B*, y devolver un único valor de verdad. Entonces, existen 16 funciones distintas posibles, y es fácil construir una tabla que muestre qué devuelve cada función frente a las distintas combinaciones de valores de verdad de *A* y de *B*.

		1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

		9	10	11	12	13	14	15	16
A	B	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$	$A*B$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Las dos primeras columnas de la tabla muestran las cuatro combinaciones posibles de valores de verdad de A y de B. Hay por lo tanto 4 líneas, y las 16 columnas despliegan todos los posibles valores que puede devolver una función $*$.

De esta forma podemos conocer mecánicamente, mediante algoritmo, los posibles valores de verdad de cualquier conexión lógica interpretada como función, siempre y cuando definamos los valores que devuelva la función.

Se hace necesario, pues, definir las funciones que se utilizan en la confección de un sistema lógico.

De especial relevancia se consideran el Cálculo de deducción natural y las puertas lógicas en los circuitos electrónicos.

Definiciones en el Cálculo lógico de Deducción Natural

De todas estas posibles funciones de verdad, algunas parecen tener correlatos en el lenguaje natural. Por ejemplo, la función definida en la columna 8, que devuelve 1 sólo cuando los valores de verdad de *A* y de *B* son ambos 1, se asemeja a la expresión "y" del lenguaje natural. Por ejemplo, cuando se dice que llueve y hace frío, esa afirmación es verdadera sólo cuando es verdad tanto que llueve como que hace frío. Si es verdad que llueve, pero no que hace frío, entonces no es verdad que llueve y hace frío. Del mismo modo, si no es verdad que llueve, pero sí que hace frío, entonces no es verdad que llueve y hace frío. Y por último, si no es verdad ni que llueve ni que hace frío, entonces está claro que no es verdad que llueve y hace frío.

Esta interpretación de las conexiones lógicas ligadas a funciones gramaticales del lenguaje natural constituye el fundamento del Cálculo de deducción natural en el que suelen definirse las siguientes funciones:

Negación

La negación es un operador que opera sobre un único valor de verdad, típicamente el valor de verdad de una proposición, devolviendo el valor de verdad *verdadero* si la proposición es falsa, y *falso* si la proposición es verdadera.

La tabla de verdad de la negación es la siguiente:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Conjunción

La conjunción es un operador que opera sobre dos valores de verdad, típicamente los valores de verdad de dos proposiciones, devolviendo el valor de verdad *verdadero* cuando ambas proposiciones son verdaderas, y *falso* en cualquier otro caso.

La tabla de verdad de la conjunción es la siguiente:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Que se corresponde con la columna 8 del algoritmo fundamental.

Disyunción

La disyunción es un operador que opera sobre dos valores de verdad, típicamente los valores de verdad de dos proposiciones, devolviendo el valor de verdad *verdadero* cuando una de las proposiciones es verdadera, o cuando ambas lo son, y *falso* cuando ambas son falsas.

La tabla de verdad de la disyunción es la siguiente:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Que se corresponde con la columna 2 del algoritmo fundamental.

Condicional material

El condicional material es un operador que opera sobre dos valores de verdad, típicamente los valores de verdad de dos proposiciones, devolviendo el valor de verdad *falso* sólo cuando la primera proposición es verdadera y la segunda falsa, y *verdadero* en cualquier otro caso.

La tabla de verdad del condicional material es la siguiente:

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Que se corresponde con la columna 5 del algoritmo fundamental.

Bicondicional

El bicondiconal es un operador que opera sobre dos valores de verdad, típicamente los valores de verdad de dos proposiciones, devolviendo el valor de verdad *verdadero* cuando ambas proposiciones son verdaderas, o cuando ambas son falsas.

La tabla de verdad del condicional material es la siguiente:

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Que se corresponde con la columna 7 del algoritmo fundamental.

Tablas de verdad

Las tablas nos manifiestan los posibles valores de verdad de cualquier proposición molecular, así como el análisis de la misma en función de las proposicíones que la integran, encontrándonos con los siguientes casos:

Verdad Indeterminada o Contingencia

Se entiende por verdad contingente, o verdad de hecho, aquella proposición que puede ser verdadera o falsa, según los valores de las proposiciones que la integran. Sea el caso: A ∧ (B ∨ C).

Su tabla de verdad se construye de la siguiente manera:

Ocho filas que responden a los casos posibles que pueden darse según el valor V o F de cada una de las proposiciones A, B, C. (Columnas 1, 2, 3)

Una columna (Columna 4) en la que se establecen los valores de B ∨ C aplicando la definición del disyuntor a los valores de B y de C en cada una de las filas.(Columnas 2,3 → 4)

Una columna (columna 5) en la que se establecen los valores resultantes de aplicar la definición de la conjunción entre los valores de A (columna 1) y valores de la columna B ∨ C, (columna 4) que representarán los valores de la proposición completa A ∧ (B ∨ C), cuyo valor de verdad es V o F según la fila de los valores de A, B, y C que consideremos. (Columnas 1,4 → 5)

1	2	3	4	5
A	**B**	**C**	**B∨C**	**A∧(B∨C)**
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

Donde podemos comprobar cuándo y por qué la proposición A∧(B∨C) es V y cuándo es F

Contradicción

Se entiende por proposición contradictoria, o contradicción, aquella proposición que en todos los casos posibles de su tabla de verdad su valor siempre es F. Dicho de otra forma, su valor F no depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman, sino de la forma en que están establecidas las relaciones de unas con otras. Sea el caso: [(A∧B)∧¬(A∨B)]∧C

Procederemos de manera similar al caso anterior. Aplicamos (Columna 4) la definición de conjuntor a los valores de A y B.(columnas 1,2 → 4) Después aplicamos la definición de disyuntor a los valores de A y B. (columnas 1,2 → 5) Aplicamos en la columna siguiente (Columna 6) el negador a los valores de la columna anterior. Aplicamos el conjuntor a los valores de la columna (A∧B)(Columna 4) con los de la columna ¬(A∨B).(Columna 6) Por último (Columna 8) aplicamos el conjuntor a los valores de la columna de C (Columna 3) con la columna última (Columna 7)cuyo resultado nos da los valores de [(A∧B)∧¬(A∨B)]∧C, siempre falsos cualquiera que sea la fila que consideremos.

1	2	3	4	5	6	7	8
A	**B**	**C**	**A∧B**	**A∨B**	**¬(A∨B)**	**(A∧B)∧¬(A∨B)**	**[(A∧B)∧¬(A∨B)]∧C**
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F	F

Tautologías

Se entiende por proposición tautológica, o tautología, aquella proposición que en todos los casos posibles de su tabla de verdad su valor siempre es V. Dicho de otra forma, su valor V no depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman, sino de la forma en que están establecidas las relaciones sintácticas de unas con otras. Sea el caso: [(A→B)∧(B→C)] →(A→C)

Siguiendo la mecánica algorítmica de la tabla anterior construiremos su tabla de verdad:

A	**B**	**C**	**A→B**	**B→C**	**(A→B)∧(B→C)**	**(A→C)**	**[(A→B)∧(B→C)] →(A→C)**
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tablas de verdad, proposiciones lógicas y argumentos deductivos

En realidad toda la lógica está contenida en las tablas de verdad, en ellas se nos manifesta todo lo que implican las relaciones sintácticas entre las diversas proposiciones.

No obstante la sencillez del algoritmo, aparecen dos dificultades.

- La gran cantidad de operaciones que hay que hacer para una proposición con más de 4 variables.

Esta dificultad ha sido magníficamente superada por la rapidez de los ordenadores, y no presenta dificultad alguna.

- Que únicamente será aplicable a un esquema de inferencia, o argumento cuando la proposición condicionada, como conclusión, sea previamente conocida, al menos como hipótesis, hasta comprobar que su tabla de verdad manifiesta una tautología.

Por ello se construye un cálculo mediante cadenas deductivas:

Las proposiciones que constituyen el antecedente del esquema de inferencia, se toman como premisas de un argumento.

Se establecen como reglas de cálculo algunas tautologías como tales leyes lógicas, (pues garantizan, por su carácter tautológico, el valor V).

Se permite la aplicación de dichas reglas como reglas de sustitución de fórmulas bien formadas en las relaciones que puedan establecerse entre dichas premisas.

Deduciendo mediante su aplicación, como teoremas, todas las conclusiones posibles que haya contenidas en las premisas.

Cuando en un cálculo se establecen algunas leyes como principios o axiomas, el cálculo se dice que es axiomático.

El cálculo lógico así puede utilizarse como demostración argumentativa.

Aplicaciones

Lógica de circuitos

La aplicación más importante de las tablas de verdad procede del hecho de que, interpretando los valores lógicos de verdad como 1 y 0 en el sentido:

Valor 1: corriente eléctrica

Valor 0: ausencia de dicha corriente.

Los valores de entrada o no entrada de corriente a través de un diodo puede producir una salida 0 o 1 según unas condiciones definidas como función según las tablas definidas anteriormente.

Así se establecen las siguientes funciones: AND, NAND, OR, XOR NOR, que se corresponden con las funciones definidas en las columnas, 8, 9, 2, 10 Y 15 respectivamente, y la función NOT.

En lugar de variables proposicionales consideramos gráficamente los posibles input como EA, EB, y los correspondientes outputs de SALIDA como 1, 0.

NOT

EA	EB
1	0
0	1

EA	EB	AND	NAND	OR	XOR	NOR
1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1

Esta aplicación hace posible la construcción de aparatos capaces de realizar estas computaciones a velocidades increíbles, llamadas por lo mismo computadoras u ordenadores.

El desarrollo de estos circuitos y su estructuración merece verse en el artículo puerta lógica.

La Tabla de la verdad es una herramienta imprescindible en la recuperación de datos en las bases de datos como Internet con los motores de búsqueda o en una biblioteca con sus ficheros informatizados. Asi mismo se utilizan para programar simulaciones lógicas de inteligencia artificial con lenguajes propios. También en modelos matemáticos predictores: meteorología, marketing y otros muchos.

Véase también

- Operador lógico
- Anexo:Tabla de símbolos matemáticos
- Lenguaje formalizado
- Álgebra de Boole
- Cálculo lógico
- Lógica binaria
- Lógica proposicional
- Puerta lógica
- Función lógica

Enlaces externos

http://www.mitecnologico.com/Main/TablasDeVerdad

Referencias

[1] « truth table (http://www.oxfordreference.com/views/ENTRY.html?subview=Main&entry=t82.e2895)» (en inglés). *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics*. Oxford University Press. Consultado el 8 de octubre de 2009.

[2] Las letras *A* y *B* son metavariables, es decir que simbolizan cualquier proposición, atómica o no, del lenguaje de la lógica proposicional.

Teoría de conjuntos

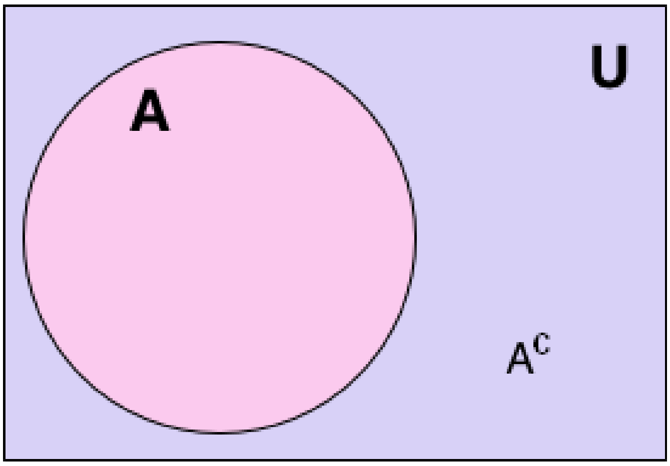


Diagrama de Venn que muestra un conjunto A contenido en otro conjunto U y su complemento A^C

La **teoría de conjuntos** es una división de las matemáticas que estudia los conjuntos. El primer estudio formal sobre el tema fue realizado por el matemático alemán Georg Cantor, Gottlob Frege y Julius Wilhelm Richard Dedekind en el Siglo XIX y más tarde reformulada por Zermelo.

El concepto de conjunto es intuitivo y se podría definir como una "colección de objetos"; así, se puede hablar de un conjunto de personas, ciudades, gafas, lapiceros o del conjunto de objetos que hay en un momento dado encima de una mesa. Un conjunto está bien definido si se sabe si un determinado elemento pertenece o no al conjunto. El conjunto de los bolígrafos azules está bien definido, porque a la vista de un bolígrafo se puede saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no está bien definido, porque a la vista de una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber distintas personas, que opinen si esa persona es alta o no lo es. En el siglo XIX, según Frege, los elementos de un conjunto se definían sólo por tal o cual propiedad. Actualmente la teoría de conjuntos está bien definida por el sistema ZFC. Sin embargo, sigue siendo célebre la definición que publicó Cantor

Se entiende por **conjunto** a la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o nuestra mente.

Georg Cantor

Un conjunto es un saco lleno de elementos. Dentro del saco puede haber números, letras, plantas, personas, mastodontes,..., practicamente cualquier cosa.

Julius Wilhelm Richard Dedekind

Notación

Usualmente los conjuntos se representan con una letra mayúscula: A , B , K ,...

Llamaremos *elemento*, a cada uno de los objetos que forman parte de un conjunto, estos elementos tienen carácter individual, tienen cualidades que nos permiten diferenciarlos, y cada uno de ellos es único, no habiendo elementos duplicados o repetidos. Los representaremos con una letra minúscula: a , b , k ,...

De esta manera, si A es un conjunto, y a, b, c, d, e todos sus elementos, es común escribir:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

para definir a tal conjunto A . Esta notación empleada para definir al conjunto A se llama *notación por extensión*

Para representar que un elemento x pertenece a un conjunto A , escribimos $x \in A$ (léase " x en A ", " x pertenece a A " o bien " x es un elemento de A "). La negación de $x \in A$ se escribe $x \notin A$ (léase x no pertenece a A).

El conjunto universal, que siempre representaremos con la letra U (u mayúscula), es el conjunto de todas las cosas sobre las que estemos tratando. Así, si hablamos de números enteros entonces U es el conjunto de los números enteros, si hablamos de ciudades, U es el conjunto de todas las ciudades, este conjunto universal puede mencionarse explícitamente, o en la mayoría de los casos se da por supuesto dado el contexto que estemos tratando, pero siempre es necesario demostrar la existencia de dicho conjunto previamente.

Existe además, un único conjunto que no tiene elementos al que se le llama *conjunto vacío* y que se denota por $\emptyset$. Es decir

$$\emptyset = \{\}$$

La característica importante de este conjunto es que satisface todos los elementos posibles que no están contenidos en él, es decir

$$\forall x \quad x \notin \emptyset \, .$$

Por otro lado, si todos los elementos x de un conjunto A satisfacen alguna propiedad, misma que pueda ser expresada como una proposición $p\left(x\right)$, con la indeterminada x , usamos la *notación por comprensión*, y se puede definir:

$$A = \{x \in U : p(x)\}$$

Lo anterior se lee " A es el conjunto de elementos x , que cumplen la propiedad $p(x)$". El símbolo "**:**" se lee "que cumplen la propiedad" o "tal que"; este símbolo puede ser remplazado por una barra $|$.
Por ejemplo, el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ puede definirse por:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 4\}$$

donde el símbolo $\mathbb{N}$ representa al conjunto de los números naturales.

El uso de algún conjunto U es muy importante, ya que de no hacerlo se podría caer en contradicciones como ejemplo:

$$M = \{x : x \notin M\}$$

Es decir, M es el conjunto donde cada elemento x satisface la propiedad $x \notin M$. Al principio uno podría creer que ningún conjunto puede estar contenido en sí mismo y que por lo tanto M no contiene elemento alguno; sin embargo, en vista de que M es un conjunto, cabe hacer la pregunta "¿ $M \subset M$?" Si la respuesta es negativa ($M \not\subset M$) entonces M cumple la propiedad $x \notin M$ y por lo tanto $M \subset M$. Si por el contrario la respuesta es afirmativa ($M \subset M$), entonces M no cumple con la propiedad $x \notin M$ y por esta razón $M \not\subset M$. Esta paradoja es muy famosa y se conoce como la *paradoja del barbero* esta es una de las tantas incongruencias que tenía la teoría de Cantor.

Igualdad entre conjuntos. Subconjuntos y Superconjuntos

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B se dicen *iguales*, lo que se escribe $A = B$ si constan de los mismos elementos. Es decir, si y solo si todo elemento de A está también contenido en B y todo elemento de B está contenido en A . En símbolos:

$$\forall x, x \in A \iff x \in B$$

Subconjuntos y Superconjuntos

Un conjunto A se dice que es *subconjunto* de otro B , si cada elemento de A es también elemento de B , es decir, cuando se verifique:

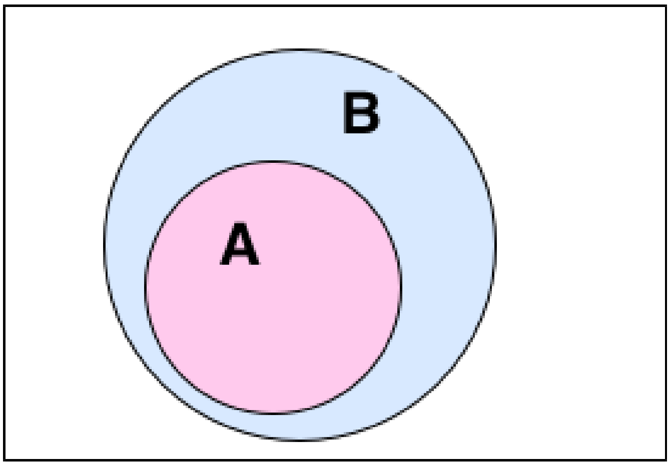


Diagrama de Venn que muestra $A \subseteq B$

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

sea cual sea el elemento x . En tal caso, se escribe $A \subseteq B$.

Cabe señalar que, por definición, no se excluye la posibilidad de que si $A \subseteq B$, se cumpla $A = B$. Si B tiene por lo menos un elemento que no pertenezca al conjunto A , pero si todo elemento de A es elemento de B , entonces decimos que A es un *subconjunto propio* de B , lo que se representa por $A \subset B$. En otras palabras, $A \subset B$ si y sólo si $A \subseteq B$, y $B \setminus A \neq \emptyset$. Así, el conjunto vacío es subconjunto propio de todo conjunto (excepto de sí mismo), y todo conjunto A es *subconjunto impropio* de sí mismo.
Si A es un subconjunto de B , decimos también que B es un *superconjunto* de A , lo que se escribe $B \supseteq A$. Así pues

$$B \supseteq A \iff A \subseteq B,$$

y también que:

$$B \supset A \iff A \subset B,$$

significando $B \supset A$ que B es *superconjunto propio* de A .

Por el principio de identidad, es siempre cierto $x \in A \Rightarrow x \in A$, para todo elemento x , por lo que todo conjunto es subconjunto (y también superconjunto) de sí mismo.

Vemos que $\subseteq$ es una relación de orden sobre un conjunto S de conjuntos, pues

$$A \subseteq A \qquad (\subseteq \text{ es } \textit{reflexiva})$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad A = B \qquad (\subseteq \text{ es } \textit{antisimétrica})$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C \qquad (\subseteq \text{ es } \textit{transitiva})$$

Operaciones con conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

Unión u

Para cada par de conjuntos A y B existe un conjunto Unión de los dos, que se denota como $A \cup B$ el cual contiene todos los elementos de A y de B. De manera más general, para cada conjunto S existe otro conjunto denotado como $\bigcup S$ de manera que sus elementos son todos los $x \in X$ tales que $X \in S$. De esta manera $A \cup B$ es el caso especial donde $S = \{A, B\}$.

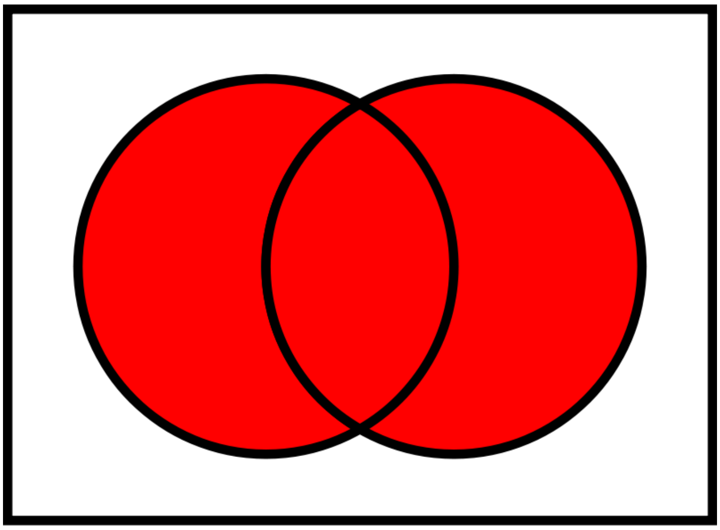


Diagrama de Venn que ilustra $A \cup B$

Es claro que el hecho de que un elemento x pertenezca a $A \cup B$ es condición necesaria y suficiente para afirmar que x es un elemento de A o al menos de B. Es decir

$$x \in (A \cup B) \iff (x \in A) \vee (x \in B)$$

Ejemplos: si tenemos los conjuntos

$$A = \{\triangle, \bigcirc, 6\}$$
$$B = \{\star, 6, \dagger, \square\}$$
$$C = \{\square, 14, \star, \clubsuit\}$$
$$S = \{A, B, C\}$$

Entonces

$$A \cup B = \{\triangle, \bigcirc, 6, \star, \dagger, \square\}$$
$$A \cup C = \{\triangle, \bigcirc, 6, \square, 14, \star, \clubsuit\}$$
$$\bigcup S = \{\triangle, \bigcirc, 6, \star, \dagger, \square, 14, \clubsuit\}$$
$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cup A = A$$

Intersección ∩

Los elementos comunes a A y B forman un conjunto denominado *intersección de* A *y* B, representado por $A \cap B$. Es decir, $A \cap B$ es el conjunto que contiene a todos los elementos de A que al mismo tiempo están en B:

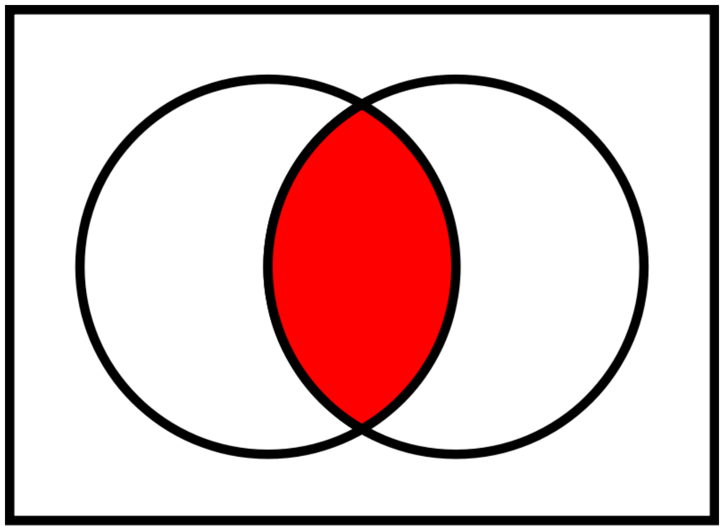


Diagrama de Venn que ilustra $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}.$$

Si dos conjuntos A y B son tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B se dice que son *conjuntos disjuntos*.

Es claro que el hecho de que $x \in A \cap B$ es condición necesaria y suficiente para afirmar que $x \in A$ y $x \in B$. Es decir

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Ejemplos: si tenemos los conjuntos

$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$B = \{4, 6, 8, 10\}$$
$$C = \{10, 14, 16, 26\}$$

Entonces:

$$A \cap B = \{4, 6\}$$
$$A \cap C = \emptyset$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cap A = A$$

Particiones

Dado un conjunto A y una serie de subconjuntos Ai, se dice que Ai son particiones de A cuando la unión de todas es el conjunto A, y la intersección de todas es el conjunto vacío. Es decir, que los subconjuntos Ai, forman parte del conjunto mas grande denotado A.

Diferencia -

Los elementos de un conjunto A que no se encuentran en otro conjunto B, forman otro conjunto llamado *diferencia de* A *y* B, representado por $A \setminus B$. Es decir:

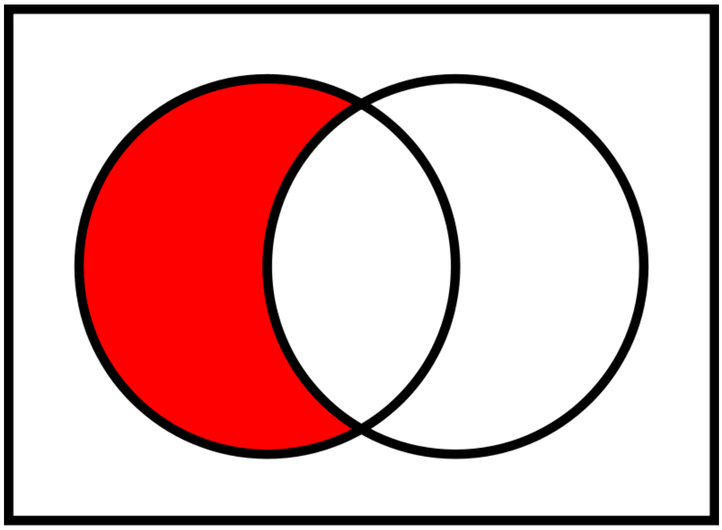


Diagrama de Venn que muestra $A - B$

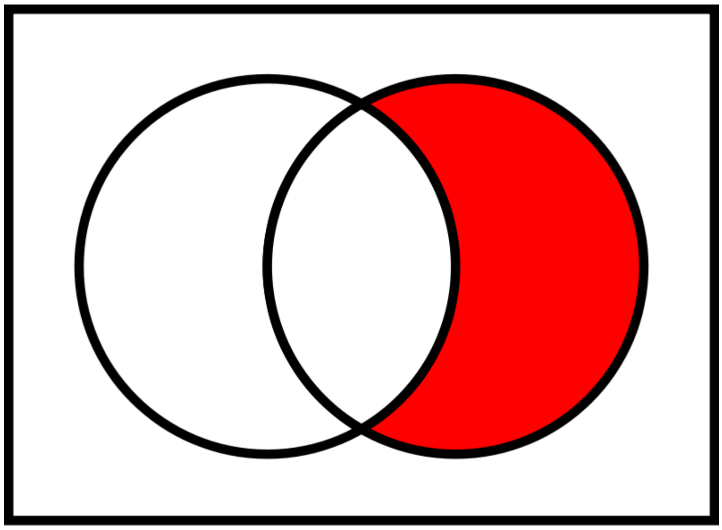


Diagrama de Venn que muestra $B - A$

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} .$$

o dicho de otra manera:

$$x \in (A \setminus B) \iff (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

Algunas personas prefieren denotar la diferencia de A y B como $A - B$.

Una propiedad interesante de la diferencia es que

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$$

eso es porque

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff (x \in A) \wedge (x \in B) \\ &\iff (x \in A) \wedge (x \notin A \setminus B) \\ &\iff x \in A \setminus (A \setminus B) \end{aligned}$$

Ejemplos: Sin importar cual conjunto A elija usted, siempre se cumple

$$A \setminus \emptyset = A$$
$$\emptyset \setminus A = \emptyset$$
$$\{0,1,2,3\} \setminus \{3,2\} = \{0,1\}$$

Complemento

El complemento de un conjunto A, es el conjunto de los elementos que pertenecen a algún conjunto U pero no pertenecen a A, que lo representaremos por $A^{\complement}$. Es decir

$$A^{\complement} = U \setminus A$$

El conjunto complemento siempre lo es respecto al conjunto universal que estamos tratando, esto es, si hablamos de números enteros, y definimos el conjunto de los números pares, el conjunto complemento de los números pares, es el formado por los números no pares. Si estamos hablando de personas, y definimos el conjunto de las personas rubias, el conjunto complementario es el de las personas no rubias.

En vista de que $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, entonces

$$x \in (A \setminus B) \iff x \in \left(A \cap B^{\complement}\right),$$

de manera que

$$A \setminus B = A \cap B^{\complement}$$

Pero también

$$\begin{aligned} x \in \left(A \cap B^{\complement}\right) &\iff x \in A \wedge x \in B^{\complement} \\ &\iff x \in B^{\complement} \wedge \ x \in A \\ &\iff x \in B^{\complement} \wedge x \notin A^{\complement} \\ &\iff x \in \left(B^{\complement} \setminus A^{\complement}\right) \end{aligned}$$

de modo que

$$A \setminus B = \left(B^{\complement} \setminus A^{\complement}\right)$$

Diferencia simétrica

Los elementos de dos conjuntos,***A*** y ***B*** a excepción de aquellos que se encuentran en el área de intersección de dichos conjuntos se define la diferencia simétrica.

$$B \Delta A = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$$

Álgebra de conjuntos

Sean A, B, y C conjuntos cualesquiera y U un conjunto tal que $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ y $C \subseteq U$ entonces:

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$ Elemento neutro de la unión
- $A \cap U = A$ Elemento neutro de la intersección
- $A \cup U = U$
- $A \cap B = B \cap A$ Propiedad conmutativa de la intersección

- $A \cup B = B \cup A$ Propiedad conmutativa de la unión
- $\left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A$ Propiedad de Involución.
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Propiedad asociativa de la intersección
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Propiedad asociativa de la unión
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Propiedad distributiva de la intersección
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Propiedad distributiva de la unión
- $A \subseteq B \iff A \cap B = A$
- $A \subseteq B \iff A \cup B = B$
- $A \subseteq B \iff B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
- $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
- $C \setminus (B \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)$
- $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus A = B \cap (C \setminus A)$
- $(B \setminus A) \cup C = (B \cup C) \setminus (A \setminus C)$
- $A \subseteq B \iff A \setminus B = \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset \iff B \setminus A = B$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$
- $(B \setminus A)^{\complement} = A \cup B^{\complement}$
- $U \setminus A = A^{\complement}$
- $A \setminus U = \emptyset$

Producto cartesiano de conjuntos o producto cruz

Un par ordenado de números (x, y) es tal si los pares (x, y) y (y, x) son uno mismo si y sólo si $x = y$.

Dados dos conjuntos A y B, definimos al *conjunto producto* (o *producto cartesiano*) de A y B (en ese orden), representado por $A \times B$, como el conjunto

$$A \times B = \{(x, y) \mid \quad x \in A \quad \wedge \quad y \in B\}$$

Ejemplo

Sean $S = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{a, b, c\}$. Así,

$$S \times R = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$

Ya que el producto cartesiano está formado de pares ordenados (donde el orden de los componentes importa), resulta

$$A \times B = B \times A \qquad \Leftrightarrow \qquad A = B$$

Cuantificadores

Los cuantificadores sirven para indicar cuantos elementos de un conjunto dado cumplen con cierta propiedad. Tales cuantificadores son

- El cuantificador universal, representado por $\forall$. Este cuantificador se emplea para afirmar que *todos* los elementos de un conjunto cumplen con determinada propiedad. Se escribe

  $$\forall_{x\in A} \quad p(x)$$

- El cuantificador existencial se usa para indicar que al menos un elemento de un conjunto A cumple con una propiedad. Se escribe

  $$\exists_{x\in A} \quad p(x).$$

Se definen

$$\neg(\forall_{x\in A} \quad p(x)) \iff \exists_{x\in A} \quad \neg p(x)$$
$$\neg(\exists_{x\in A} \quad p(x)) \iff \forall_{x\in A} \quad \neg p(x)$$

Funciones

Sean A y B dos conjuntos. Un subconjunto $f \subset A \times B$, se dice *aplicación* o *función* de A en B , lo que se representa por

$$f : A \to B$$

siempre que se verifique

- $\forall_{x\in A}\exists_{y\in B} \quad (x, y) \in f$
- $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$

Si $(x, y) \in f$, el elemento y se dice *imagen* de x por f , y el elemento x se llama *antecedente* de y por f .

Sea una función $f : A \to B$. Se emplea la notación $f(x)$ para representar a la imagen de $x \in A$ por f , y por tanto $f(x) \in B$.

Sean las funciones $f : X \to f(X)$ y $g : Y \to g(Y)$. Se define

$$f \circ g : \quad x \to f(g(x)),$$

y se dice que $f \circ g$ es el *producto de composición* de las funciones f y g .

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres funciones. Entonces $h(g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Para demostrar la igualdad tendremos que probar que tienen el mismo dominio, el mismo codominio, y que sus imágenes son iguales:

$$Dom[h \circ (g \circ f)] = Dom(g \circ f) = Dom(f) = A$$
$$Dom[(h \circ g) \circ f] = Dom(f) = A$$

Hemos demostrado que los dominios son iguales.

$$Codom[h \circ (g \circ f)] = Codom(h) = D$$
$$Codom[(h \circ g) \circ f] = Codom(h \circ g) = Codom(h) = D$$

También vemos que tienen el mismo codominio, sólo nos queda ver que $[h(g \circ f)](a) = [(h \circ g) \circ f](a) \ \forall a \in A$:

$$[h \circ (g \circ f)](a) = h[(g \circ f)(a)] = h[g(f(a))]$$
$$[(h \circ g) \circ f](a) = (h \circ g)(f(a)) = h[g(f(a))]$$

Por lo tanto queda probado que:

$$h(g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Bibliografía

1. González Carlomán, Antonio (6 de 2006). *Retículo completo de Boole, lógica matemática, teoría de conjuntos*, 2 edición (en español), Universidad de Oviedo. Servicio de Publicaciones, pp. 232. ISBN 978-84-8317-534-7.
2. Cantor, Georg (11 de 2005). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos : escritos y correspondencia selecta*, Ferreirós Domínguez, José; Gómez-Caminero, Emilio F.; Ferreirós Domínguez, José, 1 edición (en español), Editorial Crítica, pp. 320. ISBN 978-84-8432-695-3.
3. Fernández Laguna, Víctor (2 de 2004). *Teoría de conjuntos elemental, Bachillerato*, 2 edición (en español), Anaya, pp. 168. ISBN 978-84-667-2614-6.
4. Climent Coloma, Joan Josep (10 de 2003). *Álgebra : teoría de conjuntos y estructuras algebraicas*, 2 edición (en español), Editorial Club Universitario, pp. 512. ISBN 978-84-8454-302-2.
5. Setó, Jordi (7 de 2002). *Teoría elemental de conjuntos*, 1 edición (en español), Clag S.A, pp. 168. ISBN 978-84-921847-6-7.
6. Arrieche Alvarado, Mario (7 de 2002). *Iniciación de la teoría de conjuntos, en la formación de profesores de matemáticas*, 1 edición (en español), Arrieche Alvarado, Mario Jose, pp. 169. ISBN 978-84-607-4774-1.
7. González Carlomán, Antonio (9 de 2001). *Retículo completo de Boole. Lógica matemática teoría de conjuntos*, 1 edición (en español), Universidad de Oviedo. Servicio de Publicaciones, pp. 204. ISBN 978-84-8317-264-3.
8. Climent Coloma, Joan Josep (6 de 2001). *Álgebra. Teoría de conjuntos y estructuras algebraicas*, 1 edición (en español), Editorial Club Universitario, pp. 240. ISBN 978-84-8454-081-6.
9. Alonso Jiménez, José A; Pérez Jiménez, Mario de J.; Ruiz Reina, José L. (9 de 1998). *Teoría de conjuntos*, 1 edición (en español), Ediciones La Ñ, S.L., pp. 348. ISBN 978-84-89524-45-3.

Referencias

- Hernández Hernández, Fernando (1998). *Teoría de conjuntos*. México D.F.: Sociedad Matemática Mexicana.
- Jonsonbaugh, Richard (2005). *Matemáticas Discretas Sexta Edición*. Pearson Educación, México, 2005. ISBN 970-26-0637-3.

Véase también

- Teoría axiomática de conjuntos
- Hipótesis del continuo
- Diagrama de Venn
- Conjunto
- Intersección de conjuntos
- Unión de conjuntos
- Diferencia de conjuntos

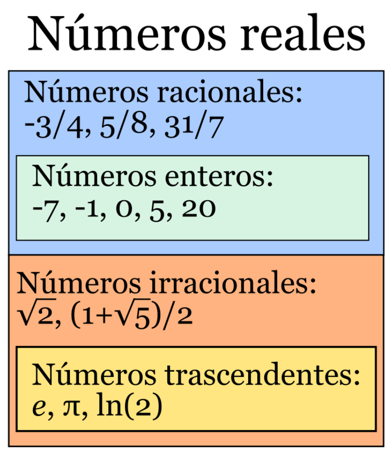
Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Teoría de conjuntos**.Commons

Presentación de los Números Reales

Número real

En matemáticas, los **números reales** incluyen tanto a los números racionales (como: 31, 37/22, 25,4) como a los números irracionales aquellos que no se pueden expresar de manera fraccionaria y tienen infinitas cifras decimales no periódicas, tales como: $\sqrt{2}, \pi$. Números reales son aquellos que poseen una expresión decimal.



Diferentes clases de números reales.

Pueden ser descritos de varias formas, aparentemente simples, pero estas carecen del rigor necesario para los propósitos formales de matemáticas.

Durante los siglos XVI y XVII el cálculo avanzó mucho aunque carecía de una base rigurosa, puesto que en el momento no se consideraba necesario el formalismo de la actualidad, usando expresiones como «pequeño», «límite», «se acerca» sin una definición precisa. Esto llevó finalmente a una serie de paradojas y problemas lógicos que hicieron evidente la necesidad de crear una base rigurosa a la nueva matemática, la cual incluyó definiciones formales y rigurosas (aunque ciertamente técnicas) del concepto de número real.[1] Más adelante se describirán algunas de las definiciones más usuales actualmente: clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, Cortaduras de Dedekind.

$$\mathbb{C} \quad \text{Complejos} \begin{cases} \mathbb{R} \quad \text{Reales} \begin{cases} \mathbb{Q} \quad \text{Racionales} \begin{cases} \mathbb{Z} \quad \text{Enteros} \begin{cases} \mathbb{N} \quad \text{Naturales} \\ \text{Cero} \\ \text{Enteros negativos} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales} \end{cases} \\ \text{Imaginarios} \end{cases}$$

Historia

Los egipcios utilizaron por primera vez las fracciones comunes alrededor del año 1000 a. C.; alrededor del 500 a. C. el grupo de matemáticos griegos liderados por Pitágoras se dio cuenta de la necesidad de los números irracionales. Los números negativos fueron ideados por matemáticos indios cerca del 600, posiblemente reinventados en China poco después, pero no se utilizaron en Europa hasta el siglo XVII, si bien a finales del XVIII Leonhard Euler descartó las soluciones negativas de las ecuaciones porque las consideraba irreales. En ese siglo, en el cálculo se utilizaba un conjunto de números reales sin una definición concisa, cosa que finalmente sucedió con la definición rigurosa hecha por Georg Cantor en 1871.

En realidad, el estudio riguroso de la construcción total de los números reales exige tener amplios antecedentes de teoría de conjuntos y lógica matemática. Fue lograda la construcción y sistematización de los números reales en el siglo XIX por dos grandes matemáticos europeos utilizando vías distintas: la teoría de conjuntos de Georg Cantor (encajamientos sucesivos, cardinales finitos e infinitos), por un lado, y el análisis matemático de Richard Dedekind (vecindades, entornos y cortaduras de Dedekind). Ambos matemáticos lograron la sistematización de los números reales en la historia, no de manera espontánea, sino utilizando todos los avances previos en la materia: desde la antigua Grecia y pasando por matemáticos como Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Cauchy y Weierstrass, por mencionar sólo a los más sobresalientes

Evolución del concepto de número

Se sabe que los egipcios y babilónicos hacían uso de fracciones (números racionales) en la resolución de problemas prácticos. Sin embargo, fue con el desarrollo de la matemática griega cuando se consideró el aspecto filosófico de número. Los pitagóricos descubrieron que las relaciones armónicas entre las notas musicales correspondían a cocientes de números enteros, lo que les inspiró a buscar proporciones numéricas en todas las demás cosas, y lo expresaron con la máxima «*todo es número*».

En la matemática griega, dos magnitudes son *conmensurables* si es posible encontrar una tercera tal que las primeras dos sean múltiplos de la última, es decir, es posible encontrar una *unidad* común para la que las dos magnitudes tengan una medida entera. El principio pitagórico de que todo número es un cociente de enteros, expresaba en esta forma que cualesquiera dos magnitudes deben ser conmensurables.

Sin embargo, el ambicioso proyecto pitagórico se tambaleó ante el problema de medir la diagonal de un cuadrado, o la hipotenusa de un triángulo rectángulo, pues no es conmensurable respecto de los catetos. En notación moderna, un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, tiene una hipotenusa que mide $\sqrt{2}$:

> Si $\sqrt{2} = p/q$ es un número racional donde p/q está reducido a sus términos mínimos (sin factor común) entonces $2q^2=p^2$.
> La expresión anterior indica que p^2 es un número par y por tanto p también, es decir, $p=2m$. Sustituyendo obtenemos $2q^2=(2m)^2=4m^2$, y por tanto $q^2=2p^2$.
>
> Pero el mismo argumento usado nos dice ahora que q debe ser un número par, esto es, $q=2n$. Mas esto es imposible, puesto que p y q no tienen factores comunes (y hemos encontrado que 2 es un factor de ambos).
>
> Por tanto, la suposición misma de que $\sqrt{2}$ es un número racional debe ser falsa.

Surgió entonces un dilema, ya que de acuerdo al principio pitagórico: todo número era racional, mas la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles no era conmensurable con los catetos, lo cual implicó que en adelante las magnitudes geométricas y las cantidades numéricas tendrían que tratarse por separado, hecho que tuvo consecuencias en el desarrollo de la matemática durante los dos milenios siguientes.[2]

Los griegos desarrollaron una geometría basada en comparaciones (proporciones) de segmentos sin hacer referencia a valores numéricos, usando diversas teorías para manejar el caso de medidas inconmesurables, como la teoría de proporciones de Eudoxo. Así, los números irracionales permanecieron a partir de entonces excluidos de la aritmética puesto que sólo podían ser tratados mediante el método de infinitas aproximaciones. Por ejemplo, los pitagóricos encontraron (en notación moderna) que si a/b es una aproximación a $\sqrt{2}$ entonces $p=a+2b$ y $q=a+b$ son tales que p/q es una aproximación más precisa. Repitiendo el proceso nuevamente se obtienen mayores números que dan una mejor aproximación.[3] Dado que las longitudes que expresan los números irracionales podían ser obtenidas mediante procesos geométricos sencillos pero, aritméticamente, sólo mediante procesos de infinitas aproximaciones, originó que durante 2000 años la teoría de los números reales fuese esencialmente geométrica, identificando los números reales con los puntos de una línea recta.

Nuevos avances en el concepto de número real esperaron hasta los siglos XVI y XVII, con el desarrollo de la notación algebraica, lo que permitió la manipulación y operación de cantidades sin hacer referencia a segmentos y longitudes. Por ejemplo, se encontraron fórmulas para resolver ecuaciones de segundo y tercer grado de forma mecánica mediante algoritmos, los cuales incluían raíces e incluso, en ocasiones, «números no reales» (lo que ahora conocemos como números complejos). Sin embargo, no existía aún un concepto formal de número y se seguía dando primacía a la geometría como fundamento de toda la matemática. Incluso con el desarrollo de la geometría analítica este punto de vista se mantenía vigente, pues Descartes rechazaba la idea que la geometría pudiera fundamentarse en números, puesto que para él la nueva área era simplemente una herramienta para resolver problemas geométricos.

Posteriormente, la invención del cálculo abrió un período de grande avances matemáticos, con nuevos y poderosos métodos que permitieron por vez primera atacar los problemas relacionados con lo infinito mediante el concepto de límite. Así, un número irracional pudo ser entendido como el límite de una suma infinita de números racionales (por ejemplo, su expansión decimal). Como muestra, el número π puede estudiarse de forma algebraica (sin apelar a la intuición geométrica) mediante la serie:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$$

entre muchas otras expresiones similares.

Para entonces, el concepto intuitivo de número real era ya el moderno, identificando sin problema un segmento con la medida de su longitud (racional o no). El cálculo abrió el paso al análisis matemático, que estudia conceptos como continuidad, convergencia, etc. Pero el análisis no contaba con definiciones rigurosas y muchas de las demostraciones apelaban aún a la intuición geométrica. Esto conllevó a una serie de paradojas e imprecisiones.

Tipos de números reales

Un número real puede ser un *número racional* o un *número irracional*. Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, tal como 3/4, -21/3, 5, 0, 1/2, mientras que los irracionales son todos los demaś. Los números racionales también pueden describirse como aquellos cuya representación decimal es eventualmente periódica, mientras que los irracionales tienen una expansión decimal aperiódica:

Ejemplos

1/4 = 0,25**0**0**0**0... ES un número racional puesto que es periódico a partir del tercer número decimal.

5/7 = 0,**714285**714285**714285**7.... ES racional y tiene un período de longitud 6 (repite 714285).

$\frac{\sqrt[3]{7}+1}{2} = 1{,}456465591386194\ldots$ es irracional y su expansión decimal es aperiódica

Otra forma de clasificar los números reales es en *algebraicos* y *trascendentes*. Un número es algebraico si existe un polinomio que lo tiene por raíz y es trascendente en caso contrario. Obviamente, todos los números racionales son algebraicos: si $\frac{p}{q}$ es un número racional, con *p* entero y *q* natural, entonces es raíz del binomio *qx*=*p*. Sin embargo, no se cumple el recíproco, no todos los números algebraicos son racionales.

Ejemplos

El número $\frac{\sqrt[3]{7}+1}{2}$ es algebraico puesto que es la raíz del polinomio $8x^3 - 12x^2 + 6x - 8$

Un ejemplo de número trascendente es $\ln 3 = 1{,}09861228866811\ldots$

Operaciones con números reales

Con números reales pueden realizarse todo tipo de operaciones básicas con dos excepciones importantes:

1. No existen raíces de orden par (cuadradas, cuartas, sextas, etc.) de números negativos en números reales, razón por la que existe el conjunto de los números complejos donde estas operaciones sí están definidas.
2. No existe la división entre cero, pues carece de sentido dividir entre nada o entre nadie, es decir, no existe la operación de dividir entre nada.

Estas dos restricciones tienen repercusiones importantes en ramas más avanzadas de las matemáticas: existen asíntotas verticales en los lugares donde una función se indefine, es decir, en aquellos valores de la variable en los que se presenta una división entre cero, o no existe gráfica real en aquellos valores de la variable en que resulten números negativos para raíces de orden par, por mencionar un ejemplo de construcción de gráficas en geometría analítica.

La principal característica del conjunto de los números reales es la completitud, es decir, la existencia de límite para dada sucesión de Cauchy de números reales.

Notación

Los números reales miden cantidades continuas que se expresan con fracciones decimales que tienen una secuencia infinita de dígitos a la derecha de la coma decimal, como por ejemplo 324,8232. Frecuentemente también se subrepresentan con tres puntos consecutivos al final (324,823211247…), lo que significaría que aún faltan más dígitos decimales, pero que se consideran sin importancia.

Las medidas en las ciencias físicas son siempre una aproximación a un número real. No sólo es más conciso escribirlos con forma de fracción decimal (es decir, números racionales que pueden ser escritos como proporciones, con un denominador exacto) sino que, en cualquier caso, cunde íntegramente el concepto y significado del número real. En el análisis matemático los números reales son objeto principal de estudio. Puede decirse que los números reales son la herramienta de trabajo de las matemáticas de la continuidad, como el cálculo y el análisis matemático, mientras que los números enteros lo son de las matemáticas discretas, en las que está ausente la continuidad.

Se dice que un número real es **recursivo** si sus dígitos se pueden expresar por un algoritmo recursivo. Un número **no-recursivo** es aquél que es imposible de especificar explícitamente. Aun así, la escuela rusa de constructivismo supone que todos los números reales son recursivos.

Los ordenadores sólo pueden aproximarse a los números reales por números racionales; de todas maneras, algunos programas de ordenador pueden tratar un número real de manera exacta usando su definición algebraica (por ejemplo, " $\sqrt{2}$") en vez de su respectiva aproximación decimal.

Los matemáticos usan el símbolo $\mathbb{R}$ (o, de otra forma, $\mathbf{R}$, la letra "R" en negrita) para representar el conjunto de todos los números reales.

La notación matemática $\mathbb{R}^n$ se refiere a un espacio de n dimensiones de los números reales; por ejemplo, un valor $\mathbb{R}^3$consiste de tres números reales y determina un lugar en un espacio de tres dimensiones.

En matemática, la palabra "real" se usa como adjetivo, con el significado de que el campo subyacente es el campo de los números reales. Por ejemplo, *matriz real*, *polinomio real*, y *Álgebra de Lie real*.

Construcciones de los números reales

Construcción axiomática

El conjunto de *números reales*, denotado por $\mathbb{R}$ es aquel conjunto en el que cada elemento cumple cada una de las siguientes proposiciones:

1. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y \in \mathbb{R}$ (Cerradura en la suma)
2. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$ (Conmutatividad en la suma)
3. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Asociatividad en la suma)
4. Existe $0 \in \mathbb{R}$ de manera que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Neutro aditivo)
5. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{R}$ tal que $-x + x = 0$(Inverso aditivo)
6. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $xy \in \mathbb{R}$ (Cerradura en la multiplicación)
7. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $xy = yx$ (Conmutatividad en la multiplicación)
8. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(xy)z = x(yz)$ (Asociatividad en la multiplicación)
9. Existe $1 \in \mathbb{R}$ de manera que $x1 = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ (Neutro multiplicativo)
10. Para cada $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x^{-1}x = 1$(Inverso multiplicativo)
11. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x(y + z) = xy + xz$ (Distributividad de la multiplicación en la suma)

12. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces se cumple sólo una de estas: (Tricotomía)
    - $x < y$
    - $y < x$
    - $x = y$
13. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$ (Transitividad)
14. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $x + z < y + z$ (Monotonía en la suma)
15. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $0 < z$, entonces $xz < yz$ (Monotonía en la multiplicación)
16. Si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces E tiene supremo en $\mathbb{R}$ (Axioma del supremo)

Los axiomas del 1 al 15 corresponden a la estructura más general de cuerpo ordenado. El último axioma es el que distingue $\mathbb{R}$ de otros cuerpos ordenados como $\mathbb{Q}$.

Construcción por números decimales

Consideramos los números decimales como los conocemos intuitivamente. Sabemos que $\pi = 3,14159265358979323846 26\ldots$, es decir, el número π se expresa como el número entero 3 y una secuencia infinita de *dígitos* 1, 4, 1, 5, 9, 2, etc.

Un número decimal se expresa entonces como $x.d_1d_2d_3d_4\ldots$ donde x es un número entero y cada d_i es un elemento del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Además, consideramos que no existen las colas de 9.

Al conjunto de todos los números decimales donde x es un número entero positivo se le denota por $\mathbb{R}^+$ y se le llama el conjunto de los números *reales positivos*.

Al conjunto de todos los números decimales donde x es un número entero negativo se le denota por $\mathbb{R}^-$ y se le llama el conjunto de los números *reales negativos*.

Al número decimal $0,00000\ldots$ se le llama *cero*.

Al conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0,00000\ldots\}$ se le denota por $\mathbb{R}$ y se le llama conjunto de *números reales*.

Se define la relación de orden total de los números decimales como

1. $0 > x$ para todo $x \in \mathbb{R}^-$
2. $x > y$ siempre que $x \in \mathbb{R}^+$ y $y \in \mathbb{R}^-$
3. $x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$
4. Dados dos números reales cualesquiera $x = a.a_1a_2a_3a_4\ldots$ y $y = b.b_1b_2b_3b_4\ldots$, $x > y$ en cualquiera de los casos siguientes:
    - $a > b$
    - $a = b$ y además existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = b_i$ para todo $1 \leq i < n$ y $a_n > b_n$

Construcción por cortaduras de Dedekind

Hay valores que no se pueden expresar como números racionales, tal es el caso de $\sqrt{2}$. Sin embargo es claro que se puede aproximar $\sqrt{2}$ con números racionales tanto como se desee. Podemos entonces partir al conjunto de los números racionales en dos subconjuntos A y B de manera que en el conjunto A se encuentran todos los números racionales $x < \sqrt{2}$ y en B todos los números racionales tales que $x > \sqrt{2}$.

Una *cortadura de dedekind* es un par ordenado (A, B) que hace precisamente esto. Conceptualmente, la cortadura es el "espacio" que hay entre A y B. De esta manera es posible definir a $\sqrt{2}$ como (A, B) tal que $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$.

Es posible demostrar que B queda unívocamente definido por A , de esta manera la cortadura (A, B) se reduce simplemente a A .

También es demostrable que el conjunto de todas las cortaduras cumple con los axiomas de los números reales, de esta manera $\mathbb{R}$ es el conjunto de todas las cortaduras de Dedekind. Esta es la primera construcción formal de los números reales bajo la teoría de conjuntos.

Construcción por sucesiones de Cauchy

Las sucesiones de Cauchy retoman la idea de aproximar con números racionales un número real. Tómese por ejemplo, la ecuación

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{2n+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \ldots = \pi$$

Es claro que esta sumatoria opera sólo con los números racionales de la forma $\frac{4(-1)^n}{2\,n+1}$, sin embargo el resultado final es el número irracional π . Cada vez que se añade un término, la expresión se aproxima más y más a π .

Las sucesiones de Cauchy generalizan este concepto para definir a los números reales. Primero se define que una *sucesión de números racionales* es una función $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Cada $x(i)$ se denota simplemente por x_i .

Una *sucesión de Cauchy* es una sucesión de números racionales donde sus elementos cada vez son menos diferentes. Más formalmente, se define una *sucesión de Cauchy* como una sucesión de números racionales tales que para todo $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$ se cumple $|x_m - x_n| < \epsilon$.

De esta manera es posible definir al número real π como la sucesión de números racionales:

$$x_i = \sum_{n=0}^{i} \frac{4(-1)^n}{2n+1}$$

expresa las propiedades aplicadas en las siguientes expresiones matemáticas y ab = ba. al expresar el número el valor siempre es 0.

Véase también

- Complejos $\mathbb{C}$
  - Reales $\mathbb{R}$
    - Racionales $\mathbb{Q}$
      - Enteros $\mathbb{Z}$
        - Naturales $\mathbb{N}$
          - Primos
          - Compuestos
        - Cero
        - Negativos
      - Fraccionarios
        - Fracción propia
        - Fracción impropia
    - Irracionales
      - Algebraicos
      - Trascendentes
  - Imaginarios

Referencias

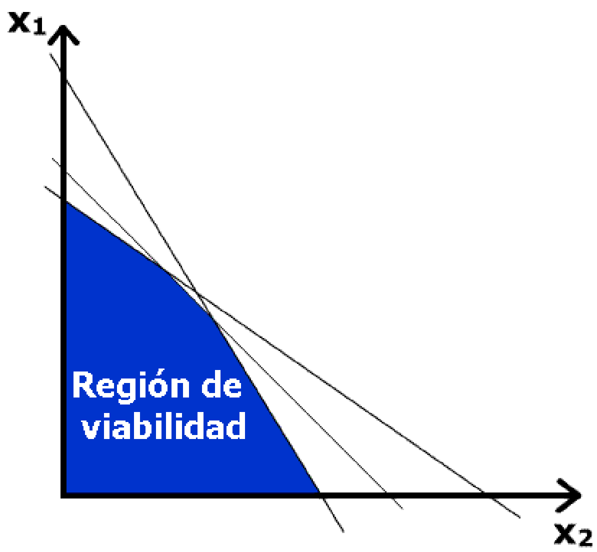
[1] Anglin, W. S. (1991). *Mathematics: A concise history and philosophy*. Springer. ISBN 3-540-94280-7.

[2] Dantzig, Tobias (1955). *The Bequest of the Greeks*. London: Unwin Brothers LTD. 3982581.

[3] Stillwell, John (1989). *Mathematics and its History*. Springer-Verlag. 19269766. ISBN 3-540-96981-0.

Inecuación

Una **inecuación** es una expresión matemática la cual se caracteriza por tener los signos de desigualdad; Siendo una expresión algebraica nos da como resultado un conjunto en el cual la variable independiente puede tomar el valor cualesquiera de ese conjunto cumpliendo esta desigualdad; a este conjunto se le conoce como Intervalo.



La región de viabilidad en un problema de programación lineal está definida por un juego de inecuaciones.

En matemáticas, una **inecuación** es una expresión referida al tamaño u orden relativo de dos objetos (ver también ecuación). La notación **a < b** significa que *a* es menor que *b* y la notación **a > b** quiere decir que *a* es mayor que *b*. Estas relaciones son conocidas con el nombre de **inecuaciones estrictas**, contrastando con **a ≤ b** (*a* es menor o igual a *b*) y **a ≥ b** (*a* es mayor o igual que *b*).

Si el signo comparativo de la inecuación es el mismo para cualquier valor que tomen las variables por las que está definida, entonces se hablará de una inecuación "absoluta" o "incondicional" (véase entidad). Si por el contrario, es el mismo sólo para ciertos valores de las variables, pero se invierte o destruye en caso de que éstos se cambien, será una inecuación "condicional". El signo comparativo de una inecuación no se cambia si a ambos miembros se les suma o resta el mismo número, o si se les multiplica o divide por un número positivo; en cambio, se invierte si ambos miembros se multiplican o dividen por un número negativo.

La notación *a* >> *b* quiere decir que *a* "es mucho mayor que" *b*. El significado de esto puede variar, refiriéndose a una diferencia entre ambos indefinida. Se usa en ecuaciones en las cuales un valor mucho mayor causará que la resolución de la ecuación arroje a luz un cierto resultado.

Propiedades

Las inecuaciones se rigen por las siguientes propiedades:

Tricotomía

La propiedad de la tricotomía dicta que:

- Para dos números reales cualquiera, *a* y *b*, sólo se cumplirá una de las siguientes afirmaciones:
  - $a < b$
  - $a = b$
  - $a > b$

Simetría

Las relaciones en inecuaciones pueden ser invertidas, queriendo decir esto que:

- Para dos números reales, *a* y *b*:
  - Si $a > b$ entonces $b < a$
  - Si $a < b$ entonces $b > a$

Transitiva

- Para tres números reales, *a*, *b*, y *c*:
  - Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$
  - Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$
  - Si $a > b$ y $b = c$ entonces $a > c$

Adición y sustracción

Las propiedades relacionadas con la adición y la sustracción:

- Para tres números reales, *a*, *b*, y *c*:
  - Si $a > b$; entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$
  - Si $a < b$; entonces $a + c < b + c$ y $a - c < b - c$

Multiplicación y división

Las propiedades relativas a la multiplicación y la división:

- Para tres números reales, *a*, *b*, y *c*:
  - Si c es positivo y $a > b$ entonces $a \times c > b \times c$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
  - Si c es positivo y $a < b$ entonces $a \times c < b \times c$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
  - Si c es negativo y $a > b$ entonces $a \times c > b \times c$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
  - Si c es negativo y $a < b$ entonces $a \times c < b \times c$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Nota:

Si ambos términos de una inecuación se multiplican o dividen por la misma expresión negativa, el símbolo de la desigualdad se da la vuelta.

Aplicando una función a ambos miembros

Puede aplicarse cualquier función monótona creciente a ambos lados de una inecuación manteniendo el mismo signo de desigualdad.

Notación encadenada

La notación **a < b < c** establece que a < b (a menor que b) y que b < c (b menor que c) y aplicando la propiedad transitiva anteriormente citada, puede deducirse que a < c (a menor que c). Obviamente, aplicando las leyes anteriores, puede sumarse o restarse el mismo número a los tres términos, así como multiplicarlos o dividirlos todos por el mismo número (distinto de cero) invirtiendo las inecuaciones según su signo. Debe tenerse cuidado de utilizar en todos los casos el mismo número. Así, $a < b + e < c$ es equivalente a $a - e < b < c - e$.

Esta notación se puede extender a cualquier número de términos: por ejemplo, $\mathbf{a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n}$ establece que $a_i \leq a_{i+1}$ para i = 1, 2, ..., n−1. Según la propiedad de la transitividad, esta condición es equivalente a $a_i \leq a_j$ para cualquier $1 \leq i \leq j \leq n$.

Ocasionalmente, la notación encadenada se usa con inecuaciones en diferentes direcciones. En ese caso el significado es la conjunción lógica de las desigualdades entre los términos adyacentes. Por ejemplo, $a < b > c \leq d$ significa que $a < b$, $b > c$, y $c \leq d$. Aparte del uso poco frecuente en matemáticas, esta notación existe en unos pocos lenguajes de programación tales como Python.

Desigualdades conocidas

Categoría principal: Desigualdades

Los matemáticos suelen usar inecuaciones para aproximarse a cantidades cuyas fórmulas exactas no pueden ser fácilmente computadas. Algunas se usan tan a menudo que se les ha puesto nombre, como:

- Desigualdad de Azuma
- Desigualdad de Bernoulli
- Desigualdad de Boole
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz
- Desigualdad de Chebyshov
- Desigualdad de Chernoff
- Desigualdad de Cramér-Rao
- Desigualdad de Hoeffding
- Desigualdad de Hölder
- Desigualdad de las medias aritmética y geométrica
- Desigualdad de Jensen
- Desigualdad de Márkov
- Desigualdad de Minkowski
- Desigualdad de Nesbitt
- Desigualdad de Pedoe
- Desigualdad de Shapiro
- Desigualdad triangular

Véase también

- Relación binaria
- Conjunto parcialmente ordenado
- Polos y ceros

Referencias

- Hardy, G., Littlewood J.E., Polya, G. (1999). *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press. ISBN 0521052068.
- Beckenbach, E.F., Bellman, R. (1975). *Introduction to Inequalities*, Random House Inc. ISBN 0394015592.
- Drachman, Byron C., Cloud, Michael J. (1998). *Inequalities: With Applications to Engineering*, Springer-Verlag. ISBN 0387984046.

Geometría analítica

Se conoce como **geometría analítica** al estudio de ciertos objetos geométricos mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas. Se podría decir que es el desarrollo histórico que comienza con la geometría cartesiana y concluye con la aparición de la geometría diferencial con Gauss y más tarde con el desarrollo de la geometría algebraica.

Los dos problemas fundamentales de la geometría analítica son:

1. Dado el lugar geométrico en un sistema de coordenadas, obtener su ecuación.
2. Dada la ecuación en un sistema de coordenadas, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que la cumplen.

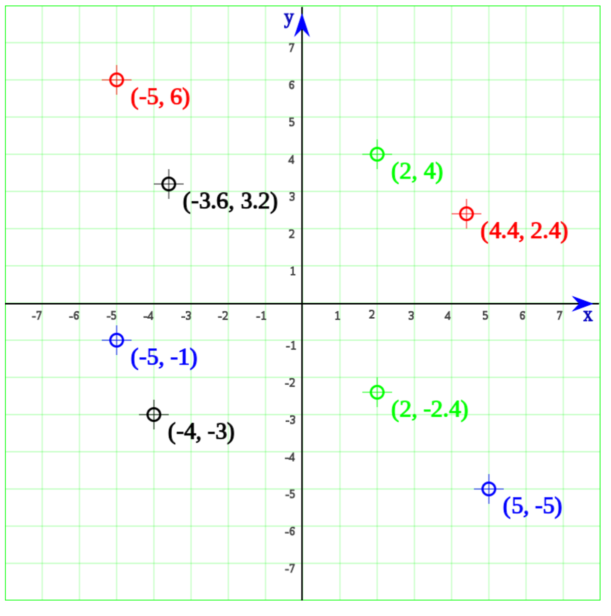
Lo novedoso de la Geometría Analítica es que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x,y)=0$, donde f representa una función u otro tipo de expresión matemática. En particular, las rectas pueden expresarse como ecuaciones polinómicas de grado 1 (v.g.: $2x+6y=0$) y las circunferencias y el resto de cónicas como ecuaciones polinómicas de grado 2 (v.g.: la circunferencia $x^2+y^2=4$, la hipérbola $xy=1$).

Construcciones fundamentales

En un sistema de coordenadas cartesianas, un punto del plano queda determinado por dos números, llamados "abscisa" y "ordenada" del punto. Mediante ese procedimiento a todo punto del plano corresponden siempre dos números reales ordenados (abscisa y ordenada), y recíprocamente, a un par ordenado de números corresponde un único punto del plano. Consecuentemente el sistema cartesiano establece una correspondencia biunívoca entre un concepto geométrico como es el de los puntos del plano y un concepto algebraico como son los pares ordenados de números. Esta correspondencia constituye el fundamento de la Geometría Analítica.

Con la Geometría Analítica se puede determinar figuras geométricas planas por medio de ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas. Éste es un método alternativo de resolución de problemas, o cuando menos nos proporciona un nuevo punto de vista con el cual poder atacar el problema.

Localización de un punto en el plano cartesiano



En un plano traza dos rectas perpendiculares (ejes) —que por convenio se trazan de manera que una de ellas sea horizontal y la otra vertical—, y cada punto del plano queda unívocamente determinado por las distancias de dicho punto a cada uno de los ejes, siempre y cuando se dé también un criterio para determinar sobre qué semiplano determinado por cada una de las rectas hay que tomar esa distancia, criterio que viene dado por un signo. Ese par de números, las coordenadas, quedará representado por un par ordenado (x,y), siendo x la distancia a uno de los ejes (por convenio será la distancia al eje vertical) e y la distancia al otro eje (al horizontal).

En la coordenada x, el signo positivo (que suele omitirse) significa que la distancia se toma hacia la derecha del eje horizontal (**eje de las abscisas**), y el signo negativo (nunca se omite) indica que la distancia se toma hacia la izquierda. Para la coordenada y, el signo positivo (también se suele omitir) indica que la distancia se toma hacia arriba del eje vertical (**eje de ordenadas**), tomándose hacia abajo si el signo es negativo (tampoco se omite nunca en este caso). A la coordenada x se la suele denominar *abscisa* del punto, mientras que a la y se la denomina *ordenada* del punto.

Los puntos del eje de abscisas tienen por lo tanto ordenada igual a 0, así que serán de la forma $(x, 0)$, mientras que los del eje de ordenadas tendrán abscisa igual a 0, por lo que serán de la forma $(0, y)$.
El punto donde ambos ejes se cruzan tendrá por lo tanto distancia 0 a cada uno de los ejes, luego su abscisa será 0 y su ordenada también será 0. A este punto —el $(0, 0)$— se le denomina **origen de coordenadas**.

Ecuaciones de la recta en el plano

Una recta es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que, tomados dos cualesquiera de ellos, el cálculo de la pendiente resulta siempre igual a una constante.

La ecuación general de la recta es de la forma:

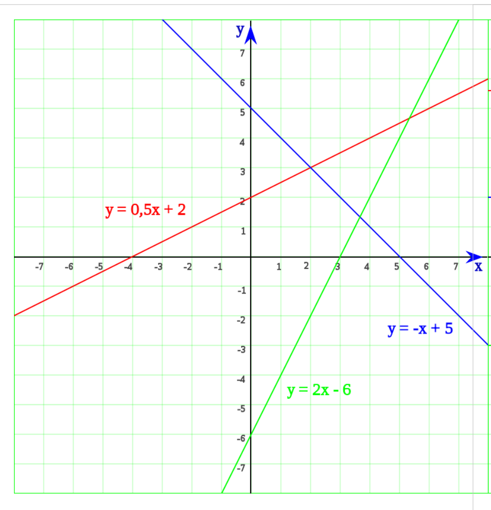
$$Ax + By + C = 0$$

cuya pendiente es m = -A/B y cuya ordenada al origen es b = -C/B.

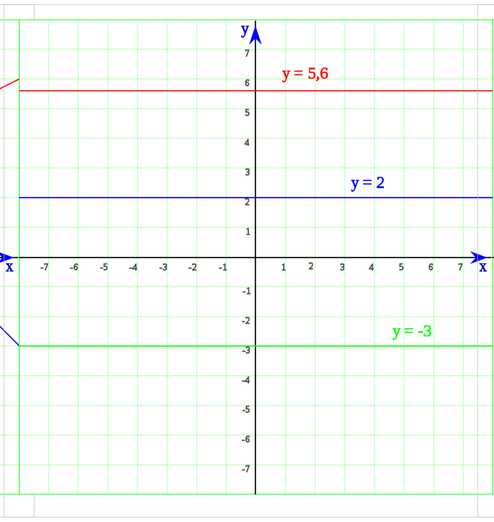
Una recta en el plano se representa con la función polinómica de primer grado de la forma:

$$y = mx + b$$

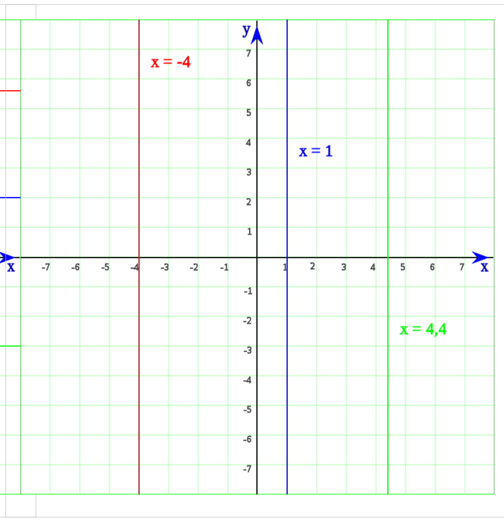
como expresión general, Esta es conocida como ecuación pendiente-ordenada al origen y podemos distinguir dos casos particulares. Si una recta no corta a uno de los ejes, será porque es paralela a él. Como los dos ejes son perpendiculares, si no corta a uno de ellos forzosamente ha de cortar al otro (siempre y cuando la función sea continua para todos los reales). Tenemos pues tres casos:



Rectas oblicuas.



Rectas horizontales.



Rectas verticales.

- **Rectas verticales**, estas rectas no cortan al eje de ordenadas y son paralelas a dicho eje y se denominan *rectas verticales*. El punto de corte con el eje de abscisas es el punto $(x_0, 0)$. La ecuación de dichas rectas es:

  $$x = x_0$$

- **Rectas horizontales**, estar rectas no cortan al eje de las abscisas y, por tanto, son paralelas a dicho eje y se denominan rectas horizontales. El punto de corte con el eje de ordenadas es el punto $(0, y_0)$. La ecuación de dichas rectas es:

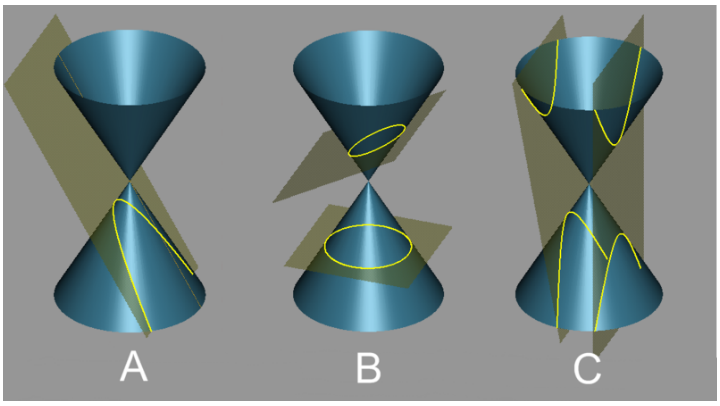
  $$y = y_0$$

- **Rectas oblicuas**. Cualquier otro tipo de recta recibe el nombre de **recta oblicua**. En ellas hay un punto de corte con el eje de abscisas $(a,0)$ y otro punto de corte con el eje de ordenadas $(0,b)$. El valor a recibe el nombre de **abscisa en el origen**, mientras que el b se denomina **ordenada en el origen**.

Secciones cónicas

El resultado de la intersección de la superficie de un cono, con un plano, da lugar a lo que se denominan secciones cónicas, que son: la parábola, la elipse (la circunferencia es un caso particular de elipse) y la hipérbola.

- La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



Los tres ejemplos de intersección de un plano con un cono: parábola (**A**), elipse (**B**) e hipérbola (**C**).

Una parábola (Figura **A**) cuyo eje de simetría sea paralelo al eje de abcisas se expresa mediante la ecuación:

$$y = ax^2 + bx + c$$

- Elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre igual a una constante positiva, e igual a la distancia entre los vértices.

Una elipse (Figura **B**) centrada en los ejes, con longitudes de semieje **a** y **b** viene dada por la expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Si los dos ejes son iguales y los llamamos **c**:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

el resultado es una circunferencia:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

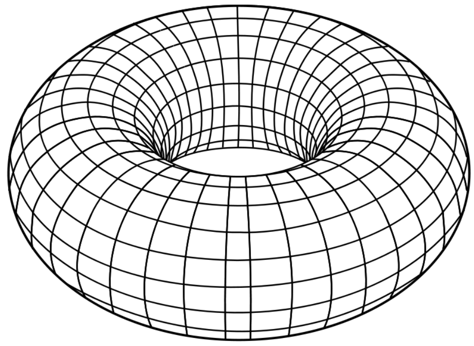
- La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia (resta) de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre igual a una constante positiva, e igual a la distancia entre los vértices.

La hipérbola (Figura **C**) tiene por expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Construcciones en el espacio tridimensional

Los razonamientos sobre la construcción de los ejes coordenados son igualmente válidos para un punto en el espacio y una terna ordenada de números, sin más que introducir una tercera recta perpendicular a los ejes X e Y: el eje Z.



Un toro, ejemplo de superficie tridimensional.

Sin embargo no hay análogo al importantísimo concepto de pendiente de una recta. Una única ecuación lineal del tipo:

$$ax + by + cz = 0$$

Representa en el espacio un plano. Si se pretende representar mediante ecuaciones una recta en el espacio tridimensional necesitaremos especificar, no una, sino dos ecuaciones lineales como las anteriores. De hecho toda recta se puede escribir como interesección de dos planos. Así una recta en el espacio podría quedar representada como:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Es importante notar que la representación anterior no es única, ya que una misma recta puede expresarse como la intersección de diferentes pares de planos. Por ejemplo los dos pares de ecuaciones:

Clasificación de la geometría analítica dentro de la geometría

Desde el punto de vista de la clasificación de Klein de las geometrías (el Programa de Erlangen), la geometría analítica no es una geometría propiamente dicha.

Desde el punto de vista didáctico, la geometría analítica resulta un puente indispensable entre la geometría euclidiana y otras ramas de la matemática y de la propia geometría, como son el propio análisis matemático, el álgebra lineal, la geometría afín, la geometría diferencial o la geometría algebraica.

Historia de la geometría analítica

Existe una cierta controversia sobre la verdadera paternidad de este método. Lo único cierto es que se publica por primera vez como "Geometría analítica", apéndice al *Discurso del método*, de Descartes, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes. Aunque Omar Khayyam ya en el siglo XI utilizara un método muy parecido para determinar ciertas intersecciones entre curvas, es imposible que alguno de los citados matemáticos franceses tuvieran acceso a su obra.

El nombre de *geometría analítica* corrió parejo al de *geometría cartesiana*, y ambos son indistinguibles. Hoy en día, paradójicamente, se prefiere denominar *geometría cartesiana* al apéndice del *Discurso del método*, mientras que se entiende que *geometría analítica* comprende no sólo a la geometría cartesiana (en el sentido que acabamos de citar, es decir, al texto apéndice del *Discurso del método*), sino también todo el desarrollo posterior de la geometría que se base en la construcción de ejes coordenados y la descripción de las figuras mediante funciones —algebraicas o no—

hasta la aparición de la geometría diferencial de Gauss (decimos "paradójicamente" porque se usa precisamente el término "geometría cartesiana" para aquello que el propio Descartes bautizó como "geometría analítica"). El problema es que durante ese periodo no existe una diferencia clara entre geometría analítica y análisis matemático —esta falta de diferencia se debe precisamente a la identificación hecha en la época entre los conceptos de función y curva—, por lo que resulta a veces muy difícil intentar determinar si el estudio que se está realizando corresponde a una u otra rama.

La geometría diferencial de curvas sí que permite un estudio mediante un sistema de coordenadas, ya sea en el plano o en el espacio tridimensional. Pero en el estudio de las superficies, en general, aparecen serios obstáculos. Gauss salva dichos obstáculos creando la geometría diferencial, y marcando con ello el fin de la geometría analítica como disciplina. Es con el desarrollo de la geometría algebraica cuando se puede certificar totalmente la superación de la geometría analítica.

Es de puntualizar que la denominación de *analítica* dada a esta forma de estudiar la geometría provocó que la anterior manera de estudiarla (es decir, la manera axiomático-deductiva, sin la intervención de coordenadas) se terminara denominando, por oposición, geometría sintética, debido a la dualidad análisis-síntesis.

Actualmente el término *geometría analítica* sólo es usado en enseñanzas medias o en carreras técnicas en las que no se realiza un estudio profundo de la geometría.

Véase también

- $\sqrt{x}$ Portal:Matemática. Contenido relacionado con **Matemática**.

Enlaces externos

- Graficador gratuito de funciones, cónicas y haces para geometría analítica [1]
- Construya objetos de la geometría analítica [2]

Bibliografía

1. Tortosa Grau, Leandro (12 de 2008). *Introducción a la geometría analítica*, 1 edición (en español), Torres Gosálvez, Ramón, pp. 460. ISBN 978-84-95434-50-0.
2. Berdugo, Isabel (1964-) (12 de 2007). *Geometría analítica para la distensión*, 1 edición (en español), Asociación Cultural Tántalo, pp. 100. ISBN 978-84-935334-4-1.
3. Martín Aláez, Pedro (12 de 2007). *Notas de geometría analítica*, 1 edición (en español), PREMIR Oposiciones Médicas S.L., pp. 163. ISBN 978-84-612-0960-6.
4. Colera Jiménez, José (11 de 2007). *Matemáticas II, geometría analítica del espacio, Bachillerato. Ejercicio 9*, 1 edición (en español), Anaya, pp. 48. ISBN 978-84-667-2215-5.
5. Colera Jiménez, José (06 de 2002). *Matemáticas, geometría analítica plana, 1 Bachillerato. Cuaderno 3*, 1 edición (en español), Anaya, pp. 56. ISBN 978-84-667-1369-6.
6. Alcaide Guindo, Fernando (03 de 2007). *Matemáticas, geometría analítica, 4 ESO. Cuaderno de trabajo*, 1 edición (en español), Ediciones SM, pp. 48. ISBN 978-84-675-1508-4.
7. Rees, Paul K. (11 de 1972). *Geometría analítica*, 1 edición (en español), Editorial Reverté, S.A., pp. 292. ISBN 978-84-291-5110-7.
8. Ríos Santos, Agustín (05 de 2004). *Geometría analítica*, 1 edición (en español), Editorial Ecir, S.A., pp. 48. ISBN 978-84-7065-858-7.
9. Colera Jiménez, José (03 de 2004). *Geometria analítica de l'espai, matemàtiques, Batxillerat. Exercicis*, 1 edición (en Catalán), Editorial Barcanova, S.A., pp. 48. ISBN 978-84-489-1559-9.
10. Bellón Fernández, Manuel (02 de 2004). *Matemáticas, geometría analítica, 4 ESO. Cuaderno 5*, 1 edición (en español), Ediciones SM, pp. 32. ISBN 978-84-348-8031-3.

11. Ruiz Sancho, Jesús María (02 de 2004). *Geometría analítica, Bachillerato*, 1 edición (en español), Anaya, pp. 160. ISBN 978-84-667-2612-2.
12. González Urbaneja, Pedro Miguel (01 de 2004). *Los orígenes de la geometría analítica*, 1 edición (en español), Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, pp. 166. ISBN 978-84-607-9668-8.

Referencias

[1] http://gdf2004.tripod.com/
[2] http://www.mygeometryteacher.com/

Funciones, Polinomios y Números Complejos

Función real

Una **función real** f es una función matemática cuyo dominio y codominio están contenidos en $\mathbb{R}$, es decir, es una función:

$f : S \subseteq \mathbb{R} \to S' \subseteq \mathbb{R}$

En general se trata de funciones continuas, o bien discontinuas cuando están representadas por tramos, a diferencia de las funciones discretas, que son siempre discontinuas.

Álgebra de las Funciones (con valores) Reales

Sea X un conjunto cualquiera no vacío y sea $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ el conjunto formado por todas las funciones de X en $\mathbb{R}$. Muchas de las operaciones y propiedades algebraicas de los Reales se pueden extender a $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, como veremos a continuación.

Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ elementos de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Definimos operaciones entre esas funciones, punto a punto por

- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ Suma de Funciones.
- $f - g : x \mapsto f(x) - g(x)$ Resta de Funciones.
- $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ Producto de Funciones.

También, podemos extender relaciones punto a punto.

- $f < g \iff \forall x, f(x) < g(x)$.

La manera en que hicimos la extensión, garantiza que muchas de las propiedades de los Reales se extienden a $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Indicamos a continuación aquellas más importantes.

- La suma de funciones es asociativa, conmutativa, con neutro la función constante $x \mapsto 0$, con opuesto aditivo $-f : x \to -f(x)$ para cada función *f*.
- La resta es tal que $f - g := f + (-g)$.
- La multiplicación es asociativa, conmutativa, con neutro la función constante $x \mapsto 1$, pero solamente las funciones que nunca tiene valor nulo, tienen recíprocos.
- La multiplicación es distributiva respecto a la suma.

Note que todas las anteriores propiedades son análogas a propiedades de los números reales. Hay, sin embargo, propiedades "extrañas". Por ejemplo, *Cuando el conjunto X tiene a lo menos dos elementos, hay divisores de cero en* $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. En efecto, supongamos que $X = \{a, b\}$ y definamos $f, g : X \to \mathbb{R}$ tales que $f(a) = 1, f(b) = 0$ y $g(a) = 0 y g(b) = 1$. Se ve, inmediatamente, que fg es la función constante 0, o sea la función cero, aunque ninguno de los factores lo es.

El conjunto $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ junto con sus operaciones es importante por la gran cantidad de ejemplos diversos que se obtienen al seleccionar el conjunto *X*.

- Sea $X = \{1, 2\}$. Entonces, cada función de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ define una pareja de números $f(1), f(2)$ que si consideramos el orden natural en *X*, podemos escribir como el para ordenado $(f(1), f(2))$. Esto nos dice que, en este caso, podemos identificar $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ con el conjunto de todos los pares posibles de números reales, o sea con $\mathbb{R}^2$.

- Sea $X = \{1, 2, 3\}$ Razonado como arriba, podemos identificar a $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^3$.
- Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ Razonado como arriba, podemos identificar a $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^n$.

Note que en cada uno de los ejemplos anteriores, el conjunto de pares, tríos, duplas ordenadas aparece provisto de una suma y multiplicación. La suma coincide con la suma vectorial usual y la multiplicación por constantes con la multiplicación por escalar.

- Sea $X = \mathbb{N}$, los Naturales. En este caso, $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ es el conjunto de todas las sucesiones de números reales provisto cono la suma y multiplicación usual de sucesiones.

Funciones Numéricas

Llamamos funciones numéricas a funciones cuyo dominio y codominio son subconjuntos de los Reales. Estas funciones son aquellas que aparecen más frecuentemente en las aplicaciones elementales. En el resto del ártículo, funciones significará funciones numéricas. Muchas veces, para estas funciones, se da solamente la regla o fórmula de la función. En esa situación se aplica el convenio del dominio natural y se supone que el codominio (natural) consiste de todo $\mathbb{R}$.

Funciones acotadas

Decimos que una función f está **acotada** cuando su conjunto imagen está acotado. Es decir, hay un número M tal que para todo x del dominio de la función se cumple que

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Por ejemplo: **f(x) = sen(x)** y **g(x) = cos(x)** tienen por conjunto imagen al intervalo [-1,1] y son, por lo tanto acotadas. Una función está acotada cuando su gráfica está entre dos líneas horizontales.

En forma análoga se define las nociones de función acotada superiormente y función acotada inferiormente, queriendo decir que su conjunto imagen está acotado superiroemente o inferiormente respectivamente. Por ejemplo, **f("x")=|x|** tiene por conjunto imagen $[0, +\infty[$, por lo que la función está acotada inferiormente.

Funciones monótonas

1. Decimos que una función **f** es **estrictamente creciente** en el intervalo $[a, b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$
2. Decimos que función **f** es **estrictamente decreciente** en $[a, b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
3. Decimos que **f** es **creciente** en $[a, b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
4. Decimos que **f** es **decreciente** en $[a, b] \leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Cuando una función verifica cualquiera de las cuatro propiedades anteriores, decimos que es **monótona**.

Propiedades

- Si una función es estrictamente creciente o decreciente entonces es **inyectiva**.
- La suma de funciones monótonas de un mismo tipos tiene el mismo tipo de monotonía. Lo anterior no es cierto ni para restas ni para productos.

Funciones pares e impares

Decimos que una función es **par** cuando presenta simetría sobre el eje Y (ordenadas), esto es, si para todo elemento x de su dominio se cumple que $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = f(x)$$

Decimos que una función es **impar** cuando presenta simetría srespecto al origen, esto es, si para todo elemento x de su dominio se cumple que $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = -f(x)$$

Una función que no presenta simetría par, no tiene necesariamente simetría impar. Algunas funciones no presentan ninguno de los dos tipos de simetría o bien la presentan frente a focos o ejes distintos del de coordenadas o el eje de ordenadas (o eje Y). Dichas funciones se dice que no poseen paridad.

Propiedades

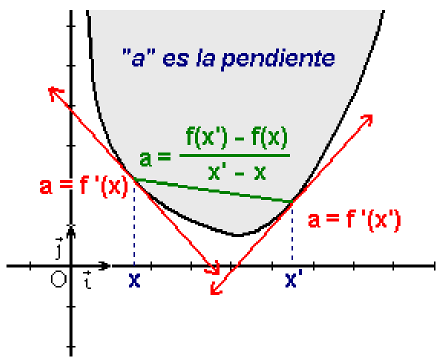
- La suma de dos funciones pares o dos funciones impares es par.
- El producto de función par por par o impar, da par.
- Todas las otras combinaciones dan impar.

Funciones periódicas

Decimos función es periódica si se cumple: $f(x) = f(x+T); T \neq 0$ donde T es un período de la función. El periodo es el menor de los periodos positivos, cuando exista tal numero.
Los ejemplos clásicos son las funciones seno y coseno con periodos iguals a 2π. Si **int** denota la función parte entera (que produce el mayor enetero menor o igual al argumento) entonces la función f tal que $f(x) = x - int(x)$ tiene periodo 1.

Una función es periódica alternada cuando se cumple: $f(x) = -f\left(x + \frac{T}{2}\right)$. Estas últimas también son conocidas como funciones simétricas de media onda y constan de dos semiondas iguales de sentidos opuestos.

Funciones cóncavas y convexas



Función convexa.

Una función f es convexa sobre un intervalo cuando el segmento que une dos puntos de la gráfica de f, siempre esta por encima o tocando la gráfica.
Una función f es estrictamente convexa sobre un intervalo cuando el segmento que une dos puntos de la gráfica de f, siempre esta por encima de la gráfica.
Una función f es **cóncava** (**estrictamente cóncava**) sobre un intervalo cuando $-f$ es convexa (estrictamente convexa).
Una función f es estrictamente convexa sobre un intervalo cuando el segmento que une dos puntos de la gráfica de f, siempre esta por encima de la gráfica.
La denominación de convexidad y concavidad depende del punto de vista que se adopte para considerar que es una concavidad, esto es si se mira a la función "desde arriba" o "desde abajo". Por ello, algunos textos denominan convexas a las funciones que se curvan "hacia abajo", al contrario de la definición que se acaba de dar en los anteriores párrafos. Por ello, es frecuente que en ocasiones se adopten las denominaciones **concava hacia arriba** y **concava hacia abajo** para evitar las ambigüedades.

Las técnicas del análisis diferencial (Cálculo) permiten determinar si una función es creciente, decreciente, concava o convexa a través del estudio de las derivadas sucesivas de la función.

Se verifica que una función es convexa estricta en un intervalo si la rectas tangentes a la función en ese intervalo están por debajo de la gráfica de la función. Una función es cóncava estricta en un intervalo si la rectas tangentes a la función de ese intervalo están por encima.

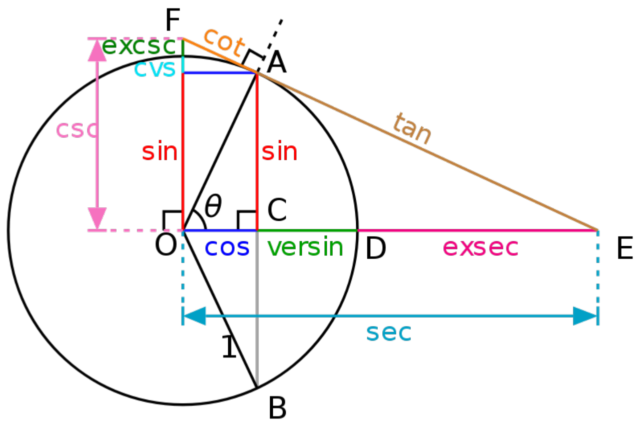
Véase también

- Función matemática
- Función discreta

Función trigonométrica

Las **funciones trigonométricas**, en matemática, son relaciones angulares; guardan relación con el estudio de la geometría de los triángulos y son de gran importancia en astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, y otras muchas aplicaciones.

Historia



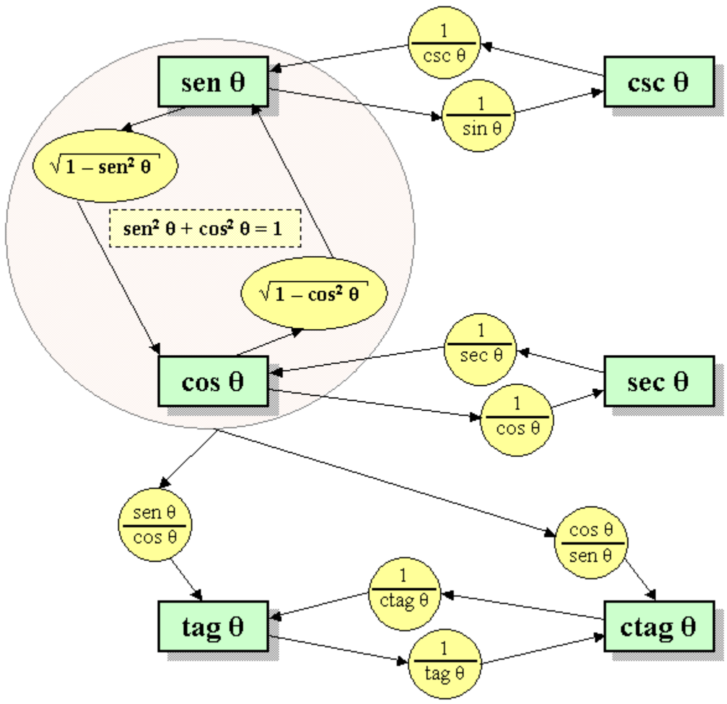
Todas las funciones trigonométricas de un ángulo θ pueden ser construidas geométricamente en relación a una circunferencia de radio unidad de centro *O*.

El estudio de las funciones trigonométricas se remonta a la época de Babilonia, y gran parte de los fundamentos de trigonometría fueron desarrollados por los matemáticos de la Antigua Grecia, de la India y estudiosos musulmanes.

El primer uso de la función **seno** aparece en el *Sulba Sutras* escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Las funciones trigonométricas fueron estudiadas por Hiparco de Nicea (180-125 a. C.), Aryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontanus (1464), Ghiyath al-Kashi y Ulugh Beg (Siglo XIV), Madhava (ca. 1400), Rheticus, y el alumno de éste, Valentin Otho. La obra de Leonhard Euler *Introductio in analysin infinitorum* (1748) fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas "Fórmulas de Euler".

La noción de que debería existir alguna correspondencia estándar entre la longitud de los lados de un triángulo siguió a la idea de que triángulos similares mantienen la misma proporción entre sus lados. Esto es, que para cualquier triángulo semejante, la relación entre la hipotenusa y otro de sus lados es constante. Si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas.

Conceptos básicos



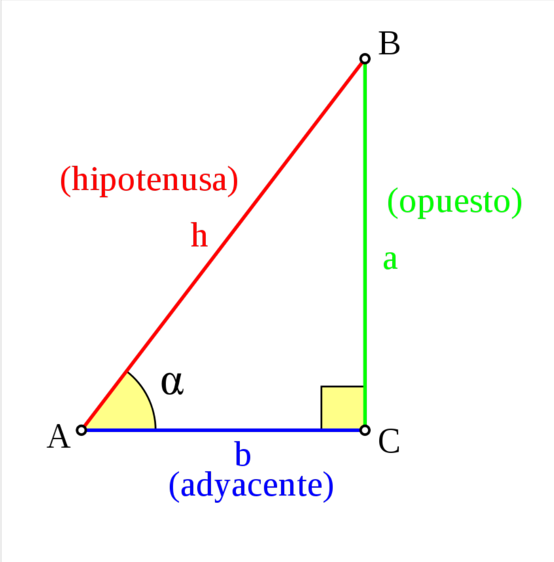
Identidades trigonométricas fundamentales.

Las Razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Las funciones trigonométricas son funciones cuyos valores son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia unitaria (de radio unidad). Definiciones más modernas las describen como series infinitas o como la solución de ciertas ecuaciones diferenciales, permitiendo su extensión a valores positivos y negativos, e incluso a números complejos.

Existen seis funciones trigonométricas básicas. Las últimas cuatro, se definen en relación de las dos primeras funciones, aunque se pueden definir geométricamente o por medio de sus relaciones. Algunas funciones fueron comunes antiguamente, y aparecen en las primeras tablas, pero no se utilizan actualmente; por ejemplo el verseno (1 − cos θ) y la exsecante (sec θ − 1).

Función	Abreviatura	Equivalencia
Seno	sen	$\operatorname{sen}\theta \equiv \frac{1}{\csc\theta} \equiv \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\cos\theta}{\cot\theta}$
Coseno	cos	$\cos\theta \equiv \frac{1}{\sec\theta} \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$
Tangente	tan	$\tan\theta \equiv \frac{1}{\cot\theta} \equiv \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
Cotangente	cot	$\cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta} \equiv \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
Secante	sec	$\sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta} \equiv \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
Cosecante	csc (cosec)	$\csc\theta \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \equiv \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \equiv \frac{\cot\theta}{\cos\theta}$

Definiciones respecto de un triángulo rectángulo



Para definir las razones trigonométricas del ángulo: α, del vértice *A*, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en los sucesivo será:

- La hipotenusa (*h*) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- El cateto opuesto (*a*) es el lado opuesto al ángulo que nos interesa.
- El cateto adyacente (*b*) es el lado adyacente al ángulo del que queremos determinar.

Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano Euclidiano, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a π radianes (o 180°). En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0 y π/2 radianes. Las definiciones que se dan a continuación definen estrictamente las funciones trigonométricas para ángulos dentro de ese rango:

1) El **seno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

El valor de esta relación no depende del tamaño del triángulo rectángulo que elijamos, siempre que tenga el mismo ángulo α, en cuyo caso se trata de triángulos semejantes.

2) El **coseno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

3) La **tangente** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la del adyacente:

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}.$$

4) La **cotangente** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto:

$$\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}.$$

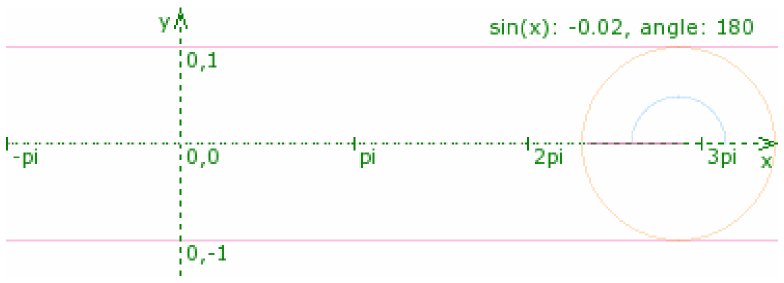
5) La **secante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente:

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{h}{b}.$$

6) La **cosecante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto:

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{h}{a}.$$

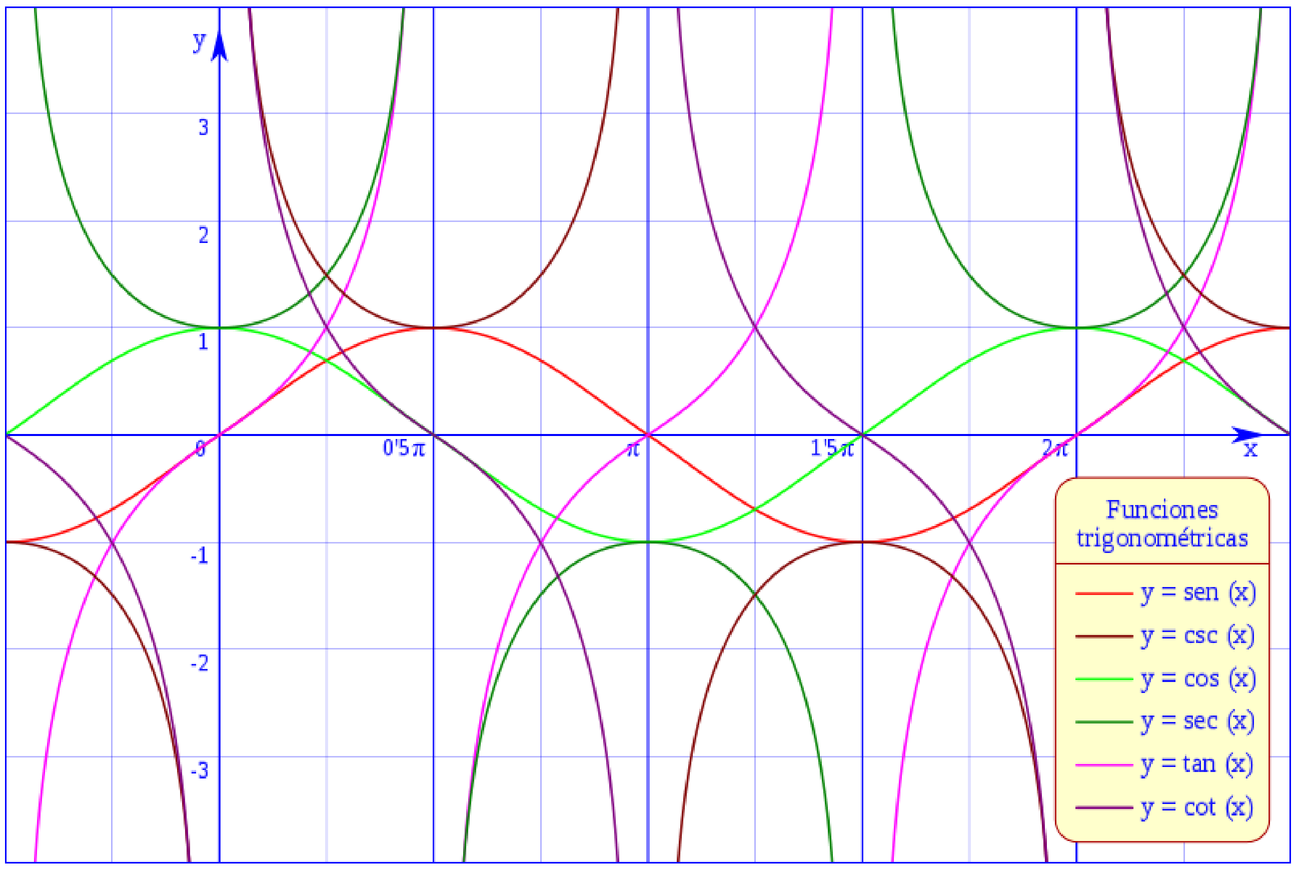
Funciones trigonométricas de ángulos notables



Animación de la función seno.

	0°	30°	45°	60°	90°
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Representación gráfica



Definiciones analíticas

La definición analítica más frecuente dentro del análisis real se hace a partir de ecuaciones diferenciales. En concreto se definen dos funciones $C(x)$ y $S(x)$ que satisfacen el siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{cases} S'(x) = C(x) & S(0) = 0 \\ C'(x) = -S(x) & C(0) = 1 \end{cases}$$

El teorema de Picard-Lindelöf de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales lleva a que existen las funciones anteriores que se llaman respectivamente seno y coseno, es decir:

$$\cos x = C(x), \qquad \text{sen } x = S(x)$$

Esta definición analítica de las funciones trigonométricas permite una definición no-geométrica del número π, a saber, dicho número es el mínimo número real positivo que es un cero de la función seno.

Series de potencias

A partir de las definición anterior pueden establecerse que las funciones seno y coseno son funciones analíticas cuyo desarrollo en serie de potencias viene dado por:

$$\text{sen } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \ x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ \ldots$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \ x^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ \ldots$$

Relación con la exponencial compleja

Existe una relación importante entre la exponenciación de números complejos y las funciones trigonométricas:

$$e^{ix} = \cos x + i\text{sen } x$$

Esta relación puede probarse usando el desarrollo en serie de Taylor para la función exponencial y el obtenido en la sección anterior para las funciones seno y coseno. Separando ahora en parte real e imaginaria en la expresión anterior se encuentran las definiciones de seno y coseno en términos de exponenciales complejas:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Funciones trigonométricas inversas

Las tres funciones trigonométricas inversas comúnmente usadas son:

- Arcoseno es la función inversa del seno de un ángulo. El significado geométrico es: el arco cuyo seno es dicho valor.

La función arcoseno real es una función $[-1,1] \longrightarrow [0,2\pi)$, es decir, no está definida para cualquier número real. Esta función puede expresarse mediante la siguiente serie de Taylor:

$$\arcsin(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x = -1 \\ x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots & -1 < x < 1 \\ +\frac{\pi}{2} & x = 1 \end{cases}$$

- Arcocoseno es la función inversa del coseno de un ángulo. El significado geométrico es: el arco cuyo coseno es dicho valor.

Es una función similar a la anterior, de hecho puede definirse como:

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

- Arcotangente es la función inversa de la tangente de un ángulo. El significado geométrico es: el arco cuya tangente es dicho valor.

A diferencia de las anteriores la función arcotangente está definida para todos los reales. Su expresión en forma de serie es:

$$\operatorname{arctg}(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots & |x| < 1 \\ \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \dots & + \text{ con } x \geq 1, - \text{ con } x \leq -1 \end{cases}$$

Generalizaciones

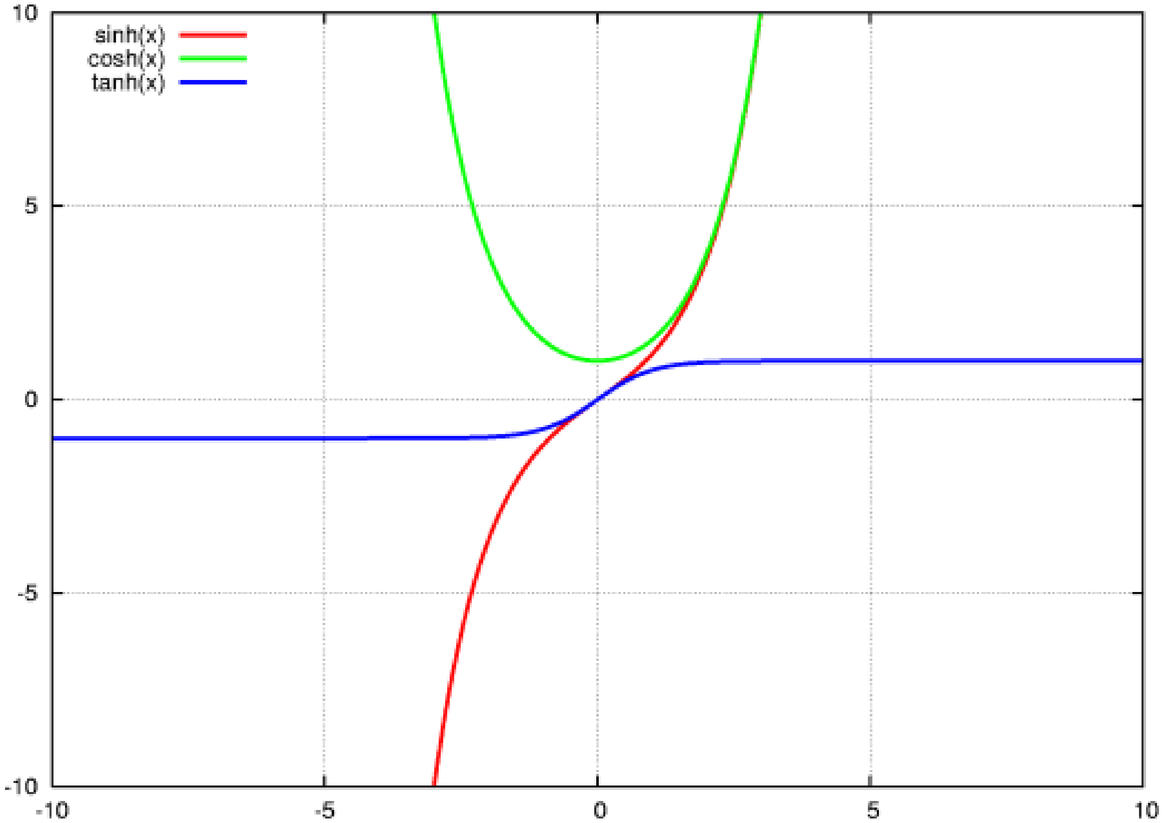
- Las funciones hiperbólicas son el análogo de las funciones trigonométricas para una hipérbola equilatera. Además el seno y coseno de un número imaginario puro puede expresarse en términos de funciones hiperbólicas.
- Las funciones elípticas son una generalización biperiódica de las funciones trigonométricas que en el plano complejo sólo son periódicas sobre el eje real. En particular las funciones trigonométricas son el límite de las funciones elípticas de Jacobi cuando el parámetro del que dependen tiende a cero.

Véase también

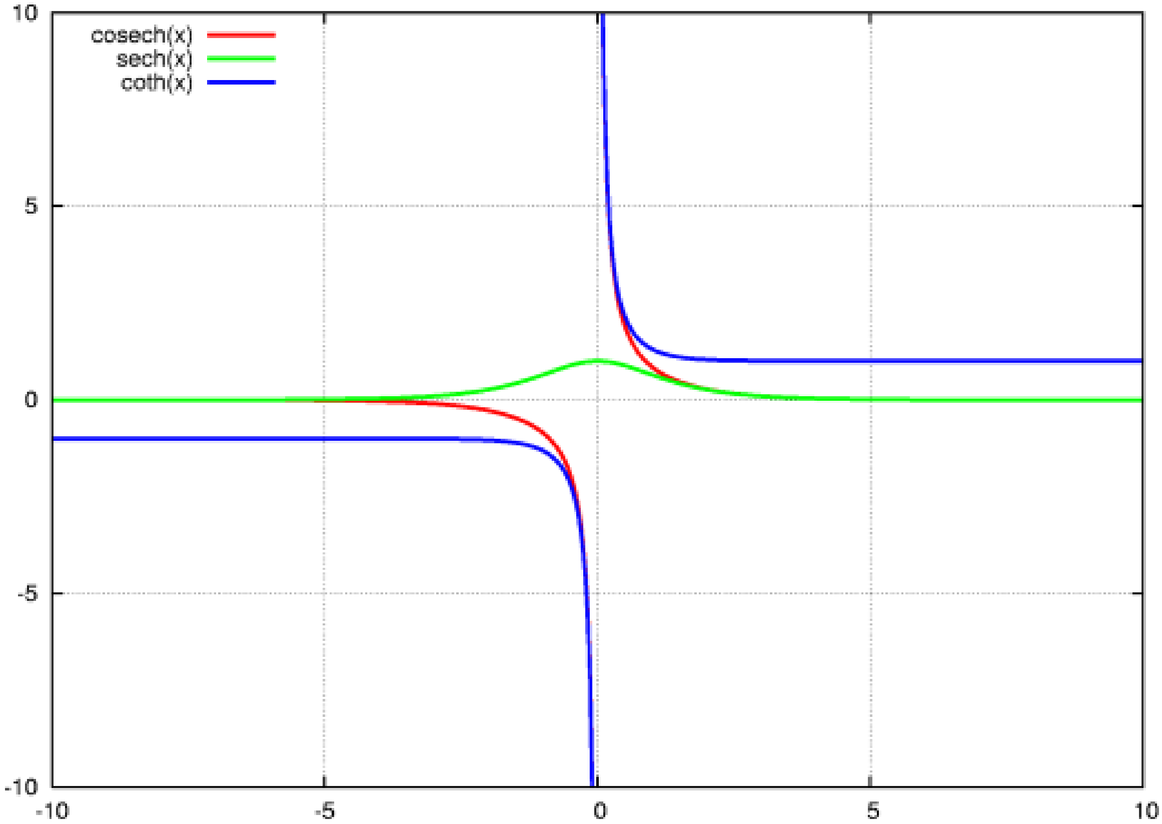
- Trigonometría
- Identidad trigonométrica
- Seno, coseno, tangente, verseno

Función hiperbólica

Las **funciones hiperbólicas** son análogas a las funciones trigonométricas ordinarias o funciones circulares. Estas son:



sinh, cosh y tanh



csch, sech y coth

El seno hiperbólico

$$\sinh(wx) = \frac{e^{wx} - e^{-wx}}{2}$$

El coseno hiperbólico

$$\cosh(wx) = \frac{e^{wx} + e^{-wx}}{2}$$

La tangente hiperbólica

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

y otras líneas:

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

(*cotangente hiperbólica*)

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

(*secante hiperbólica*)

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

(*cosecante hiperbólica*)

Relaciones

$$\cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$$

La derivada de sinh(x) está dada por cosh(x) y la derivada de cosh(x) es sinh(x). El gráfico de la función cosh(x) se denomina catenaria.

Series de Taylor

Es posible expresar las funciones hiperbólicas utilizando una serie de Taylor:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!}, |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \cdots = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!}, 0 < |x| < \pi$$

$$\mathrm{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n E_n x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \cdots = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!}, 0 < |x| < \pi$$

Donde

B_n es el enésimo número de Bernoulli y

E_n es el enésimo número de Euler.

Inversas de las funciones hiperbólicas

Las funciones recíprocas de las funciones hiperbólicas son:

$$\mathrm{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\mathrm{arccosh}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$$

$$\mathrm{arctanh}(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\mathrm{arccoth}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\mathrm{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$\mathrm{arccsch}(x) = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

Las series de Taylor de las funciones inversas de las funciones hiperbólicas vienen dadas por:

$$\mathrm{asinh}(x) = x - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)\frac{x^5}{5} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)\frac{x^7}{7} + \cdots =$$

$$\mathrm{asinh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, |x| < 1$$

$$\operatorname{acosh}(x) = \ln 2 - (\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^{-2}}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^{-4}}{4} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^{-6}}{6} + \cdots) =$$

$$\operatorname{acosh}(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{-2n}}{(2n)}, x > 1$$

$$\operatorname{atanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots =$$

$$\operatorname{atanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, |x| < 1$$

$$\operatorname{acsch}(x) = \operatorname{asinh}(x^{-1}) = x^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^{-3}}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^{-5}}{5} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^{-7}}{7} + \cdots =$$

$$\operatorname{acsch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)}, |x| < 1$$

$$\operatorname{asech}(x) = \operatorname{acosh}(x^{-1}) = \ln 2 - (\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{x^4}{4} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{x^6}{6} + \cdots) =$$

$$\operatorname{asech}(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{x^{2n}}{(2n)}, 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{acoth}(x) = \operatorname{atanh}(x^{-1}) = x^{-1} + \frac{x^{-3}}{3} + \frac{x^{-5}}{5} + \frac{x^{-7}}{7} + \cdots =$$

$$\operatorname{acoth}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{-(2n+1)}}{(2n+1)}, |x| > 1$$

Relación con la función exponencial

De la relación del coseno y seno hiperbólico se pueden derivar las siguientes relaciones:

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

y

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x.$$

Estas expresiones son análogas a las que están en términos de senos y cosenos, basadas en la fórmula de Euler, como suma de exponenciales complejos.

Véase también

- Trigonometría
- Funciones trigonométricas
- Logaritmo natural
- Número e

Fórmula de Euler

La **fórmula o relación de Euler**, atribuida a Leonhard Euler, establece que:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

para todo número real *x*. Aquí, *e* es la base del logaritmo natural, *i* es la unidad imaginaria y $senx$ y $cosx$ son funciones trigonométricas.

Esta función tiene, tanto simetría par como impar sabido que este tipo de simetrías desempeñan un papel muy importante en la física moderna, razón por la cual en la mecánica cuántica los números complejos son esenciales.

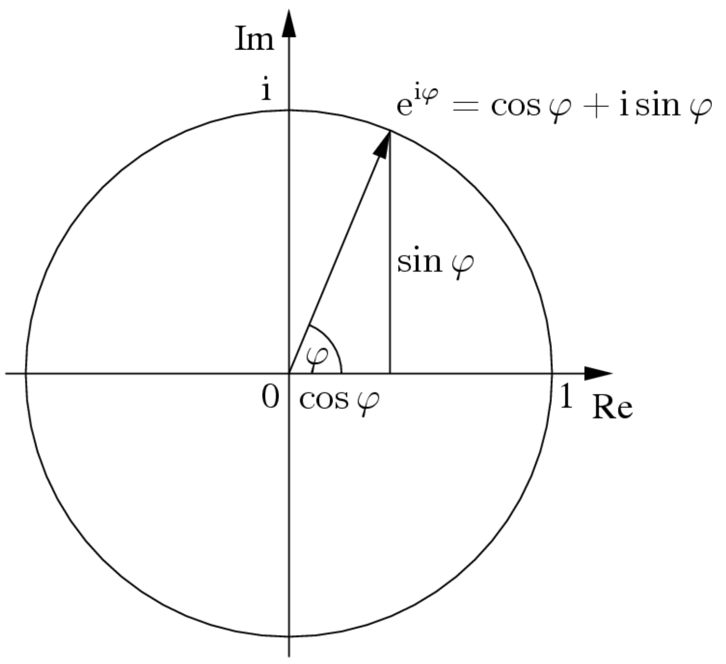
Demostración

La fórmula puede interpretarse geométricamente como una circunferencia de radio unidad en el plano complejo, dibujada por la función e^{ix} al variar x sobre los números reales. Así, x es el ángulo de una recta que conecta el origen del plano y un punto sobre la circunferencia unidad, con el eje positivo real, medido en sentido contrario a las agujas del reloj y en radianes. La fórmula sólo es válida si también el seno y el coseno tienen sus argumentos en radianes.

La fórmula de Euler fue demostrada por primera vez por Roger Cotes en 1714, y luego redescubierta y popularizada por Euler en 1748. Es interesante notar que ninguno de los descubridores vio la interpretación geométrica señalada anteriormente: la visión de los números complejos como puntos en el plano surgió unos 50 años más tarde (ver Caspar Wessel).

Demostración usando las Series de Taylor

Sabiendo que:



La fórmula de Euler ilustrada en el plano complejo

$$\begin{aligned} &i^0 = 1, \quad &i^1 = i, \quad &i^2 = -1 \quad &i^3 = -i, \\ &i^4 = 1, \quad &i^5 = i, \quad &i^6 = -1, \quad &i^7 = -i, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Además de esto, las funciones e^x, cos(*x*) y sin(*x*) (asumiendo que *x* sea un número real) pueden ser expresadas utilizando sus series de Taylor alrededor de cero.

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \cos x &= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

Para una z compleja *definimos* cada una de estas funciones por las series anteriores, remplazando x por $i{\cdot}z$. Esto es posible porque el radio de convergencia es infinito en cada serie. Entonces encontramos que:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \frac{(iz)^0}{0!} + \frac{(iz)^1}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \cdots \\ &= \frac{z^0}{0!} + i\frac{z^1}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(\frac{z^0}{0!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots \right) + i\left(\frac{z^1}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right) \\ &= \cos(z) + i\sin(z) \end{aligned}$$

El reordenamiento es posible debido a que cada serie es absolutamente convergente. Remplazando $z = x$ como un número real resulta en la identidad original tal como la descubrió Euler.

Relevancia matemática

La fórmula proporciona una potente conexión entre el análisis matemático y la trigonometría. Se utiliza para representar los números complejos en coordenadas polares y permite definir el logaritmo para números negativos y números complejos.

para el logaritmo de un número negativo:

basta con evaluar la fórmula de euler en $x = \pi$, obteniendo:

$$e^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\,\sin\pi = -1$$
$$e^{\mathrm{i}\pi} = -1.$$

Luego invirtiendo la exponencial se obtiene el logaritmo natural de -1:

$$\mathrm{i}\pi = ln(-1).$$

Para un número negativo cualquiera:

$$ln(-a) = ln(a) + ln(-1) = ln(a) + \mathrm{i}\pi.$$ (Con $a > 0$).

Además puede definirse el logaritmo de un número negativo en cualquier base, a partir del logaritmo natural y la fórmula de cambio de base.

Una propiedad importante de la fórmula de Euler es que es la única función matemática que permanece con la misma forma -excepto por la unidad imaginaria- con las operaciones de integración y derivación del cálculo integral, lo que permite que en Ingeniería Eléctrica se utilice para convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones con forma algebraica, simplificando enormemente esas operaciones.

De las reglas de la exponenciación

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

y

$$(e^a)^b = e^{a \cdot b}$$

(válidas para todo par de números complejos a y b), se pueden derivar varias identidades trigonométricas, así como la fórmula de De Moivre.

La fórmula de Euler también permite interpretar las funciones seno y conseno como meras variaciones de la función exponencial:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Estas fórmulas sirven asimismo para definir las funciones trigonométricas para argumentos complejos x . Las dos ecuaciones anteriores se obtienen simplemente resolviendo las fórmulas

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\ \sin x$$
$$e^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\ \sin x$$

para el seno y el coseno.

En las ecuaciones diferenciales, la función e^{ix} es utilizada a menudo para simplificar derivadas, incluso si la respuesta final es una función real en la que aparezcan senos o cosenos. La identidad de Euler es una consecuencia inmediata de la fórmula de Euler

En ingeniería y otras disciplinas, las señales que varían periódicamente suelen describirse como una combinación de funciones seno y coseno (véase análisis de Fourier), y estas son expresadas más convenientemente como la parte real de una función exponencial con exponente imaginario, utilizando la fórmula de Euler.

Véase también

- Número complejo
- Plano complejo
- Análisis de Fourier

Identidad de Euler

Se llama **identidad de Euler** a una fórmula desarrollada por Leonhard Euler, notable por relacionar cinco números muy utilizados en la historia de las matemáticas y que pertenecen a distintas ramas:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

donde:

- π es el número más importante de la geometría
- e es el número más importante del análisis matemático
- i es el número más importante del álgebra
- 0 y 1 son las bases de la aritmética por ser los elementos neutros respectivamente de la adición y la multiplicación

Una curiosidad de esta fórmula es que, si la escribimos de esta manera:

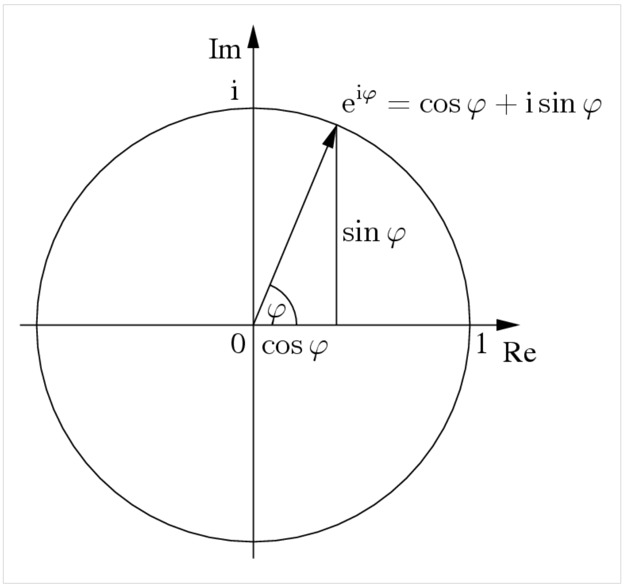
$$e^{i\pi} = -1$$

representa la evolución del concepto de número a lo largo de la historia. Desde el concepto más intuitivo, los números naturales, conocidos desde la prehistoria, añadiendo los números negativos (representados por -1) obtenemos los números enteros. Luego, añadiendo las fracciones (no aparecen) obtenemos los racionales. Después, añadiendo los irracionales (e y π) obtenemos los números reales. Y finalmente, añadiendo los números imaginarios (representados por i) obtenemos los números complejos.

Volviendo a la primera fórmula, se puede ver que también cuenta la historia de una evolución en las matemáticas, en este caso de las operaciones aritméticas. Aparecen una suma, un producto y una potencia.

Derivación

La identidad es un caso especial de la Fórmula de Euler, la cual especifica que



$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

para cualquier número real *x*. (Nótese que los argumentos para las funciones trigonométricas *sen* y *cos* se toman en radianes.) En particular si

$$x = \pi$$

entonces

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

y ya que

$$\cos\pi = -1$$

y que

$$\sin\pi = 0$$

se sigue que

$$e^{i\pi} = -1$$

Lo cual implica la identidad

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Para una forma alternativa de notar que la identidad de Euler es tanto verdadera como profunda, supongamos que:

$$x = i\pi,$$

en la expansión polinomial de e a la potencia x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...,$$

para obtener:

$$e^{i\pi} = 1 + i\pi + \frac{(i\pi)^2}{2!} + \frac{(i\pi)^3}{3!} + \frac{(i\pi)^4}{4!} + ...,$$

simplificando (usando $i^2 = -1$):

$$e^{i\pi} = 1 + i\pi - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{i\pi^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} + ...,$$

Al separar el lado derecho de la ecuación en subseries real e imaginarias:

$$i(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + ...) = 0 \quad ; \quad (1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + ...) = -1$$

Se puede comprobar la convergencia de estas dos subseries infinitas, lo cual implica

$$e^{i\pi} = -1$$

Referencias

- Weisstein, Eric W.. «Euler Formula [1]» (en inglés). *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. Consultado el 2009-05-15.

Véase también

- Leonhard Euler
- Fórmula de Euler

Referencias

[1] http://mathworld.wolfram.com/EulerFormula.html

Polinomio

En matemáticas, se denomina **polinomio** a una expresión algebraica constituida por un número finito de variables y constantes, utilizando solamente operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potenciación con exponentes naturales. Por ejemplo:

$$x^2 - 4x + 7$$

es un polinomio, pero:

$$x^2 - \frac{4}{x} + 7x^{\frac{3}{2}}$$

no, porque incorpora la división y un exponente fraccionario.

El polinomio de un sólo término se denomina monomio, el de dos binomio, el de tres trinomio , el de cuatro cuatrinomio o polinomio de "N" términos dependiendo de cuantos haya.

La expresión general de los polinomios que sólo tienen una variable, los más utilizados, es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

por ejemplo:

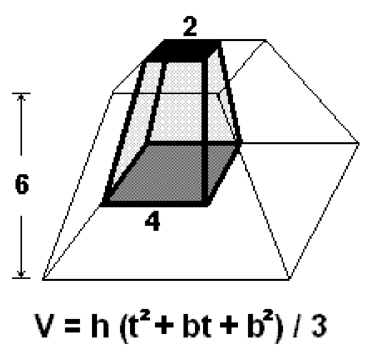
$$P(x) = 7x^5 + 9x^4 - 14x^2 + 6x - 12$$

Se denomina *grado de un polinomio* a la mayor potencia de los monomios que lo componen.

Historia

La resolución de ecuaciones algebraicas, o la determinación de las raíces de polinomios, está entre los problemas más antiguos de la matemática. Sin embargo, la elegante y práctica notación que utilizamos actualmente se desarrolló a partir del siglo XV.

En el problema 14º del papiro de Moscú (ca. 1890 a. C.) se pide calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular. El escriba expone los pasos: eleva al cuadrado 2 y 4, multiplica 2 por 4, suma los anteriores resultados y multiplícalo por un tercio de 6 (h); finaliza diciendo: «ves, es 56, lo has calculado correctamente». En notación algebraica actual sería: $V = h(t^2 + b^2 + tb) / 3$, un polinomio de cuatro variables (V, h, t, b) que, conociendo tres, permite obtener la cuarta variable.



Volumen de una pirámide truncada.

Algunos polinomios, como $f(x) = x^2 + 1$, no tienen ninguna raíz que sea número real. Sin embargo, si el conjunto de las raíces posibles se extiende a los números complejos, todo polinomio (no constante) tiene una raíz: ese es el enunciado del teorema fundamental del álgebra.

Hay una diferencia entre la aproximación de raíces y el descubrimiento de fórmulas concretas para ellas. Se conocen fórmulas de polinomios de hasta cuarto grado desde el siglo XVI (ver ecuación cuadrática, Gerolamo Cardano, Niccolo Fontana Tartaglia). Pero, las fórmulas para polinomios de quinto grado fueron irresolubles para los investigadores durante mucho tiempo. En 1824, Niels Henrik Abel demostró que no puede haber fórmulas generales para los polinomios de quinto grado o mayores (ver el teorema de Abel-Ruffini). Este resultado marcó el comienzo de la teoría de Galois que se ocupa del estudio detallado de las relaciones existentes entre las raíces de los polinomios.

La máquina diferencial de Charles Babbage fue diseñada para crear automáticamente tablas de valores de funciones logarítmicas y diferenciales, evaluando aproximaciones polinómicas en muchos puntos, usando el método de las diferencias de Newton.

Funciones polinómicas

Las **funciones polinómicas** son aquellas que surgen de evaluar los polinomios sobre las variables en las que están definidos. Son una clase de *funciones suaves*, esto es, son infinitamente diferenciables (tienen derivadas de todos los órdenes finitos).

A las funciones polinómicas de

- Función polinómica de grado 0, que también se denomina: *funciones constantes*
- Función polinómica de grado 1, que también se denomina: *funciones lineales*,
- Función polinómica de grado 2, que también se denomina: *funciones cuadráticas*,
- Función polinómica de grado 3, que también se denomina: *funciones cúbicas*.
- Función polinómica de grado 4, que también se denomina: *funciones de grado 4*.

Debido a su estructura simple, los polinomios son muy sencillos de evaluar, y se usan ampliamente en análisis numérico para interpolación polinómica o para integrar numéricamente funciones más complejas. Una manera muy eficiente para evaluar polinomios es la utilización de la regla de Horner.

En álgebra lineal el polinomio característico de una matriz cuadrada codifica muchas propiedades importantes de la matriz. En teoría de los grafos el polinomio cromático de un grafo codifica las distintas maneras de colorear los vértices del grafo usando x colores.

Con el desarrollo de la computadora, los polinomios han sido remplazados por funciones spline en muchas áreas del análisis numérico. Las splines se definen a partir de polinomios y tienen mayor flexibilidad que los polinomios ordinarios cuando definen funciones simples y suaves. Éstas son usadas en la interpolación spline y en gráficos por computadora.

Definición algebraica

Para a_0, …, a_n constantes en algún anillo (en particular podemos tomar un cuerpo, como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, en cuyo caso los coeficientes del polinomio serán números) con a_n distinto de cero, para $n > 0$, entonces un **polinomio**, **P**, de **grado** n en la variable **x** es un objeto de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0.$$

El polinomio se puede escribir más concisamente usando sumatorios como

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Las constantes a_0, …, a_n se llaman los **coeficientes** del polinomio. A a_0 se le llama el **coeficiente constante** (o término independiente) y a a_n, el **coeficiente principal**. Cuando el coeficiente principal es 1, al polinomio se le llama **mónico** o **normado**. Siendo **x** un símbolo llamado indeterminada.

Operaciones con polinomios

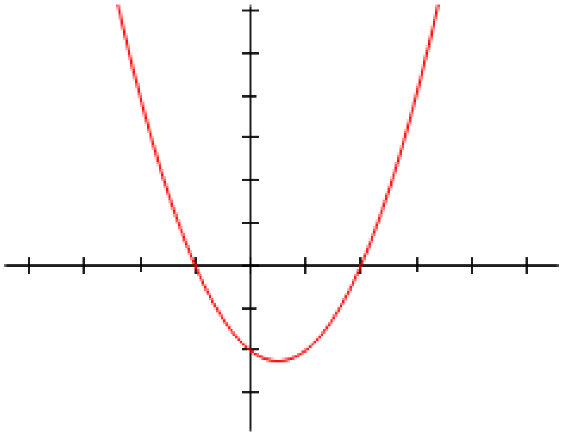
Los polinomios se pueden sumar y restar agrupando los términos y simplificando los monomios semejantes. Para multiplicar polinomios se multiplica cada término de un monomio por el término del otro monomio y se simplifican los monomios semejantes, posteriormente.

Factorización

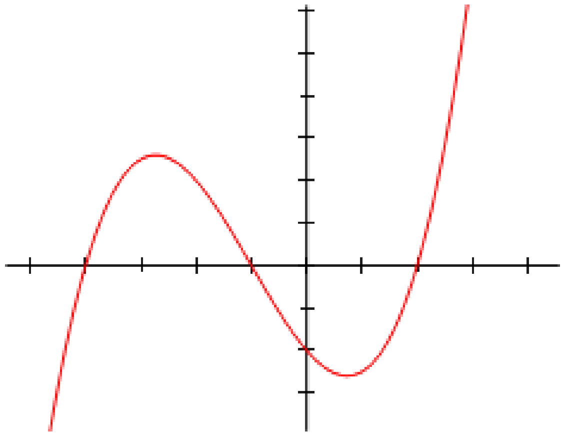
Para factorizar un polinomio de segundo grado completo (con todos los términos) se divide por el inverso de una de sus raíces sumado con la incógnita, siendo los factores el número por el que dividimos y el resultado; ya que no hay resto, cumpliéndose así que dividendo = divisor X cociente + resto. En caso de que el polinomio no tenga término independiente se sacará la incógnita como factor común y ya está factorizado. También se puede factorizar usando las igualdades notables.

Ejemplos

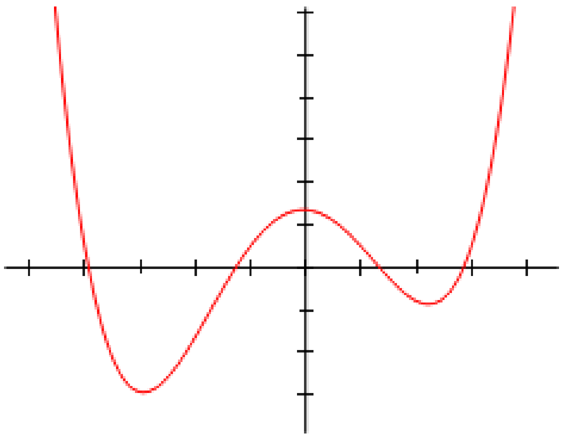
Las funciones polinómicas de una variable (x), se corresponden con diversas curvas planas, que se pueden representar en un sistema de coordenadas cartesianas XY.



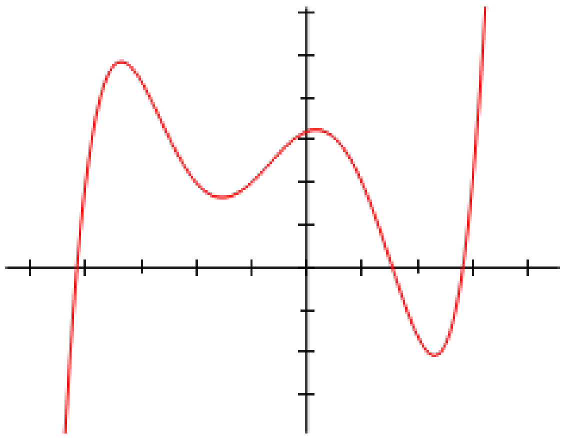
Polinomio de grado 2:
$f(x) = x^2 - x - 2$
$= (x+1)(x-2)$



Polinomio de grado 3:
$f(x) = x^3/5 + 4x^2/5 - 7x/5 - 2$
$= 1/5\ (x+5)(x+1)(x-2)$



Polinomio de grado 4:
$f(x) = 1/14\ (x+4)(x+1)(x-1)(x-3) + 0.5$



Polinomio de grado 5:
$f(x) = 1/20\ (x+4)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3) + 2$

La función

$$f(x) = 13x^4 - 7x^3 + \tfrac{2}{3}x^2 - 5x + 3$$

es un ejemplo de función polinómica con coeficiente principal 13 y una constante de 3.

Véase también

- Operaciones con polinomios
- Teorema del resto
- Factorización
- Álgebra
- Álgebra elemental
- Teorema fundamental del álgebra
- Posinomio

Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Polinomio**.Commons
- Polinomios, en descartes.cnice.mec.es [1]
- Calculadora polinómica gratuita en línea. [2]
- Calculadora polinómica. [3]

Referencias

[1] http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Polinomios/polinomios1.htm
[2] http://xrjunque.nom.es/precis/polycalc.aspx?ln=es
[3] http://thales.cica.es./rd/Recursos/rd99/ed99-0453-02/ed99-0453-02.html

Número complejo

El término **número complejo** describe la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra **i**). Los números complejos se utilizan en todos los campos de las matemáticas, en muchos de la física (y notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

En matemáticas, los números constituyen un cuerpo y, en general, se consideran como puntos del plano: el plano complejo. La propiedad más importante que caracteriza a los números complejos es el teorema fundamental del álgebra, que afirma que cualquier ecuación algebraica de grado *n* tiene exactamente n soluciones complejas.

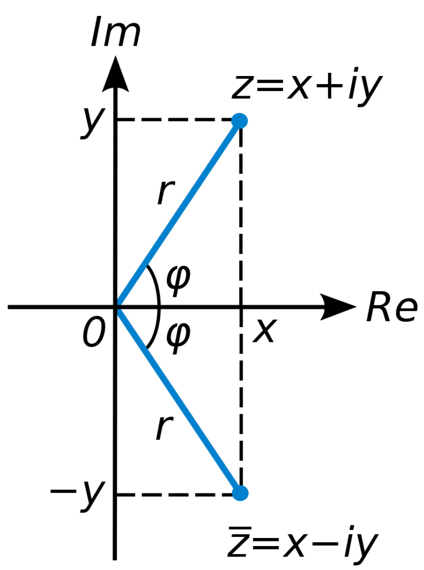


Ilustración del plano complejo. Los números reales se encuentran en el eje de coordenadas horizontal y los imaginarios en el eje vertical.

Los **números complejos** son una extensión de los números reales, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los números complejos representan todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales.

Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra ordinaria, llamada álgebra de los números complejos, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, aerodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia.

Contienen a los números reales y los imaginarios puros y constituyen una de las construcciones teóricas más importantes de la inteligencia humana. Los análogos del cálculo diferencial e integral con números complejos reciben el nombre de variable compleja o análisis complejo.

$$\mathbb{C}\quad \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\quad \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\quad \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\quad \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\quad \text{Naturales}\\ \quad\;\;\text{Cero}\\ \quad\;\;\text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \quad\;\;\text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \quad\;\;\text{Irracionales}\end{cases}\\ \quad\;\;\text{Imaginarios}\end{cases}$$

Definición

Definiremos cada complejo *z* como un par ordenado de números reales (*a*, *b*) ó (Re(*z*), Im(*z*)), en el que se definen las siguientes operaciones:

- Suma

$$(a,b)+(c,d)=(a+c)+\ (b+d)i$$

- Multiplicación

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd)+\ (ad+cb)i$$

- Igualdad

$$(a,b)=(c,d)\iff a=c\wedge b=d$$

Al primer componente (que llamaremos *a*) se le llama **parte real** y al segundo (que llamaremos *b*), **parte imaginaria**. Se denomina **número imaginario puro** a aquel que esta compuesto sólo por la parte imaginaria, es decir, aquel en el que $a=0$.

Los números complejos forman un cuerpo, el cuerpo complejo, denotado por **C** (o más apropiadamente por el carácter unicode □). Si identificamos el número real *a* con el complejo (*a*, 0), el cuerpo de los números reales **R** aparece como un subcuerpo de **C**. Más aún, **C** forma un espacio vectorial de dimensión 2 sobre los reales. Los complejos no pueden ser ordenados como, por ejemplo, los números reales: **C** no puede ser convertido de ninguna manera en un cuerpo ordenado.

La multiplicación de números complejos es asociativa, conmutativa y distributiva:

Sean $z,w,s\in \mathrm{C}$

I) $(zw)s=z(ws)$

II) $zw=wz$

III) $z(w+s)=zw+zs$

Sean $z=a+ib, w=c+id, s=e+if$ con $a,b,c,d,e,f\in \mathrm{R}$

Por demostrar la propiedad asociativa (I)

$$(zw)s=[(a+ib)(c+id)](e+if)=[(ac-bd)+i(bc+ad)](e+if)$$
$$[e(ac-bd)-f(bc+ad)]+i[e(bc+ad)+f(ac-bd)]=(ace-bde-bcf-adf)+i(bce+ade+acf-bdf)$$

Por otra parte

$$z(ws)=(a+ib)[(c+id)(e+if)]=(a+ib)[(ce-df)+i(de+cf)]$$
$$[a(ce-df)-b(de+cf)]+i[b(ce-df)+a(de+cf)]=(ace-bde-bcf-adf)+i(bce+ade+acf-bdf)$$

Entonces se cumple $(zw)s=z(ws)$.

Unidad imaginaria

Tomando en cuenta que $(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a)$, se define un número especial en matemáticas de gran importancia, el número *i* o unidad imaginaria, definido como

$$\mathrm{i} = (0, 1)$$

De donde se deduce inmediatamente que,

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Representación binomial

Un número complejo se representa en forma binomial como:

$$z = a + bi$$

La parte real del número complejo y la parte imaginaria, se pueden expresar de varias maneras, como se muestra a continuación:

$$a = \mathrm{Re}(z) = \Re(z)$$
$$b = \mathrm{Im}(z) = \Im(z)$$

Plano de los números complejos o Diagrama de Argand

El concepto de plano complejo permite interpretar geométricamente los números complejos. La suma de números complejos se puede relacionar con la suma con vectores, y la multiplicación de números complejos puede expresarse simplemente usando coordenadas polares, donde la magnitud del producto es el producto de las magnitudes de los términos, y el ángulo contado desde el eje real del producto es la suma de los ángulos de los términos.

Los diagramas de Argand se usan frecuentemente para mostrar las posiciones de los polos y los ceros de una función en el plano complejo.

El análisis complejo, la teoría de las funciones complejas, es una de las áreas más ricas de la matemática, que encuentra aplicación en muchas otras áreas de la matemática así como en física, electrónica y muchos otros campos.

Valor absoluto o módulo, conjugado y distancia

Valor absoluto o módulo de un número complejo

El valor absoluto, *módulo* o *magnitud* de un número complejo *z* viene dado por la siguiente expresión:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$$

Si pensamos en *z* como algún punto en el plano; podemos ver, por el teorema de Pitágoras, que el valor absoluto de un número complejo coincide con la distancia euclídea desde el origen del plano.

Si el complejo está escrito en forma exponencial $z = r\, e^{\mathrm{i}\varphi}$, entonces $|z| = r$. Se puede expresar en forma polar como $z = r\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, donde $\cos\varphi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\varphi = e^{\mathrm{i}\varphi}$ es la conocida fórmula de Euler.

Podemos comprobar con facilidad estas cuatro importantes propiedades del valor absoluto

$$|z| = 0 \iff z = 0$$
$$|z + w| \leq |z| + |w|$$
$$|zw| = |z||w|$$
$$|z - w| \geq |z| - |w|$$

para cualquier complejo *z* y *w*.

Por definición, la función distancia queda como sigue *d*(*z*, *w*) = |*z* - *w*| y nos provee de un espacio métrico con los complejos gracias al que se puede hablar de límites y continuidad. La suma, la resta, la multiplicación y la división de complejos son operaciones continuas. Si no se dice lo contrario, se asume que ésta es la métrica usada en los números complejos.

Conjugado de un número complejo

Dos binomios se llaman conjugados si solo difieren en su signo central, por ejemplo, los dos binomios: 3m - 1 y 3m + 1 son conjugados.

El *conjugado* de un complejo *z* (denotado como $\bar{z}$ ó z^*) es un nuevo número complejo, definido así:

$$\bar{z} = a - \mathrm{i}b \iff z = a + \mathrm{i}b$$

Se observa que ambos difieren en el signo de la parte imaginaria.

Con este número se cumplen las propiedades:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$$

$$z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$z \neq 0 \implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Esta última fórmula es el método elegido para calcular el inverso de un número complejo si viene dado en coordenadas rectangulares.

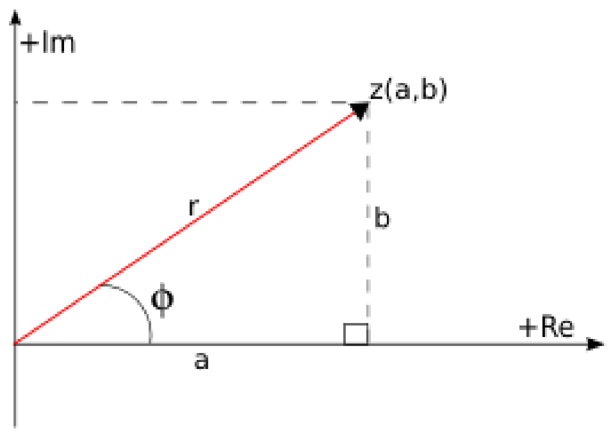
Representación trigonométrica (polar) y representación geométrica

Algunas veces, la representación de números complejos en la forma *z* = *a* + *i b* (coordenadas ortogonales) es menos conveniente que otra representación, usando coordenadas polares.

Representamos el número complejo *z* en el **plano de números complejos** como un punto con coordenadas (a, b), denominado ***vector de posición***.

Trazamos la distancia desde el punto (0,0) hasta (a, b), a la que llamaremos *r*, y, que como se ha visto antes, es igual al módulo de *z*, expresado $|z|$.

Esta distancia forma, con respecto al eje real positivo, un ángulo, denominado ϕ .



La **representación polar** nos permite expresar este número complejo en función de *r* y del ángulo ϕ :

$$z = re^{\mathrm{i}(\phi+2\pi k)}$$

donde k pertenece a $\mathbb{Z}$,

Módulo y argumento

En esta representación, r es el **módulo** del número complejo y el ángulo ϕ es el **argumento** del número complejo.

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

Formamos un triángulo rectángulo, con *r* como hipotenusa, y con catetos *a* y *b*. Vemos que:

$$\sin\phi = \frac{b}{r}$$
$$\cos\phi = \frac{a}{r}$$

Despejamos *a* y *b* en las expresiones anteriores y, utilizando la representación binomial:

$$z = a + \mathrm{i}b;\ \ z = r\cos\phi + \mathrm{i}r\sin\phi$$

Sacamos factor común *r*:

$$z = r\left(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi\right)$$

Frecuentemente, esta expresión se abrevia convenientemente de la siguiente manera:

$$z = r\ \mathrm{cis}\ \phi$$

la cual solo contiene las abreviaturas de las razones trigonométricas coseno, la unidad imaginaria y la razón seno del argumento respectivamente.

Según esta expresión, puede observarse que para definir un número complejo tanto de esta forma como con la representación binomial se requieren dos parámetros, que pueden ser parte real e imaginaria o bien módulo y argumento, respectivamente.

Según la Fórmula de Euler, vemos que:

$$\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi = e^{\mathrm{i}\phi};\ \ z = re^{i\phi}$$

No obstante, el ángulo ϕ no está unívocamente determinado por *z*, como implica la fórmula de Euler:

$$\forall k\in\mathbb{Z}\ z = e^{\mathrm{i}(\phi+2\pi k)}$$

Por esto, generalmente restringimos ϕ al intervalo [-π, π) y a éste ϕ restringido lo llamamos *argumento principal* de *z* y escribimos φ = Arg(*z*). Con este convenio, las coordenadas estarían unívocamente determinadas por *z*.

La multiplicación de números complejos es especialmente sencilla con la notación polar:

$$z_1z_2 = rse^{\mathrm{i}(\phi+\psi)} \Leftrightarrow z_1z_2 = re^{\mathrm{i}\phi}se^{\mathrm{i}\psi}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}e^{\mathrm{i}(\phi-\psi)}$$

Potenciación:

$$z^n = r^ne^{\mathrm{i}\phi n} \Leftrightarrow z^n = \left(re^{i\phi}\right)^n$$

$$z^n = (a+b\mathrm{i})^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b\mathrm{i} + \binom{n}{2}a^{n-2}\left(b\mathrm{i}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a\left(b\mathrm{i}\right)^{n-1} + \binom{n}{n}\left(b\mathrm{i}\right)^n$$

Geometría y operaciones con complejos

Geométricamente, las operaciones algebraicas con complejos las podemos entender como sigue. Para sumar dos complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, podemos pensar en ello como la suma de dos vectores del plano *x*-*y* apuntando desde el origen al punto (a_1, b_1) y (a_2,b_2), respectivamente. Si trasladamos (movemos) el segundo vector, sin cambiar su dirección, con lo que su punto de aplicación coincide con el punto final del primer vector; el segundo vector así ubicado apuntará al complejo $z_1 + z_2$.

Siguiendo con esta idea, para multiplicar dos complejos z_1 y z_2, primero medimos el ángulo que forman en sentido contrario a las agujas del reloj con el eje positivo de las x y sumamos ambos ángulos: el ángulo resultante corresponde con el del vector que representa al complejo producto $z_1 \cdot z_2$. La longitud de este vector producto viene dada por la multiplicación de las longitudes de los vectores originales. La multiplicación por un número complejo fijo puede ser vista como la transformación del vector que rota y cambia su tamaño simultáneamente.

Multiplicar cualquier complejo por i corresponde con una rotación de 90º en dirección contraria a las agujas del reloj. Asimismo el que (-1) · (-1) = +1 puede ser entendido geométricamente como la combinación de dos rotaciones de 180º (i al cuadrado = -1), dando como resultado un cambio de signo al completar una vuelta.

Soluciones de ecuaciones polinómicas

Una *raíz* del polinomio p es un complejo z tal que $p(z)=0$. Un resultado importante de esta definición es que todos los polinomios de grado n tienen exactamente n soluciones en el *campo complejo*, esto es, tiene exactamente n complejos z que cumplen la igualdad $p(z)=0$, contados con sus respectivas multiplicidades.También se cumple que si z es una raíz entonces su conjugado también es una *raíz* del polinomio p. A esto se lo conoce como Teorema Fundamental del Álgebra, y demuestra que los complejos son un cuerpo algebraicamente cerrado. Por esto los matemáticos consideran a los números complejos unos números más *naturales* que los **números reales** a la hora de resolver ecuaciones.

Variable compleja o análisis complejo

Al estudio de las funciones de variable compleja se lo conoce como el Análisis complejo. Tiene una gran cantidad de usos como herramienta de matemáticas aplicadas así como en otras ramas de las matemáticas. El análisis complejo provee algunas importantes herramientas para la demostración de teoremas incluso en teoría de números; mientras que las funciones reales de variable real, necesitan de un plano cartesiano para ser representadas; las funciones de variable compleja necesitan un espacio de cuatro dimensiones, lo que las hace especialmente difíciles de representar. Se suelen utilizar ilustraciones coloreadas en un espacio de tres dimensiones para sugerir la cuarta coordenada o animaciones en 3D para representar las cuatro dimensiones.

Esbozo histórico

La primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, como Herón de Alejandría en el siglo I antes de Cristo, como resultado de una imposible sección de una pirámide. Los complejos se hicieron más patentes en el Siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como Tartaglia, Cardano. Aunque sólo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos. El término **imaginario** para estas cantidades fue acuñado por Descartes en el Siglo XVII y está en desuso. La existencia de números complejos no fue completamente aceptada hasta la más abajo mencionada interpretación geométrica que fue descrita por Wessel en 1799, redescubierta algunos años después y popularizada por Gauss. La implementación más formal, con pares de números reales fue dada en el Siglo XIX.

Aplicaciones

Los números complejos se usan en ingeniería electrónica y en otros campos para una descripción adecuada de las señales periódicas variables *(ver Análisis de Fourier)*. En una expresión del tipo $z = r\, e^{i\varphi}$ podemos pensar en r como la amplitud y en φ como la fase de una onda sinusoidal de una frecuencia dada. Cuando representamos una corriente o un voltaje de corriente alterna (y por tanto con comportamiento sinusoidal) como la parte real de una función de variable compleja de la forma:$f(t) = z\, e^{i\omega t}$ donde ω representa la frecuencia angular y el número complejo z nos da la fase y la amplitud, el tratamiento de todas las fórmulas que rigen las resistencias, capacidades e inductores pueden ser unificadas introduciendo resistencias imaginarias para las dos últimas (ver redes eléctricas). Ingenieros eléctricos y físicos usan la letra j para la unidad imaginaria en vez de i que está típicamente destinada a la intensidad de corriente.

El campo complejo es igualmente importante en mecánica cuántica cuya matemática subyacente utiliza Espacios de Hilbert de dimensión infinita sobre **C** (□).

En la relatividad especial y la relatividad general, algunas fórmulas para la métrica del espacio-tiempo son mucho más simples si tomamos el tiempo como una variable imaginaria.

En ecuaciones diferenciales, cuando se estudian las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es habitual encontrar primero las raíces (en general complejas) λ de la ecuación característica, lo que permite expresar la solución general del sistema en términos de funciones de base de la forma: $f(x) = e^{\lambda x}$.

Los fractales son diseños artísticos de infinita complejidad. En su versión original, se los define a través de cálculos con números complejos en el plano.

Representaciones alternativas de los números complejos

Otras representaciones, no tan frecuentes, de los números complejos, pueden darnos otra perspectiva de su naturaleza. La siguiente es una interpretación donde cada complejo se representa matricialmente, como una matriz de orden 2x2 con números reales como entradas que estiran y rotan los puntos del plano. Cada una de estas matrices tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

con números *reales* a y b. La suma y el producto de dos matrices queda de nuevo de esta forma. Cualquier matriz no nula de esta forma es invertible, y su inverso es de nuevo de esta forma. Por consiguiente, las matrices de esta forma son un cuerpo. En efecto, este es exactamente el cuerpo de los complejos. Cualquier matriz puede ser escrita:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual sugiere que se puede identificar la unidad con la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la unidad imaginaria

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

esto es, una rotación de 90 grados. ¡Nos damos cuenta de que el cuadrado de esta matriz es ciertamente igual a -1!

El valor absoluto de un complejo expresado como una matriz es igual a la raíz cuadrada del determinante de la matriz. Si vemos la matriz como una transformación del plano, entonces la transformación rota puntos con un ángulo igual al argumento del complejo y escala multiplicando por un factor igual al valor absoluto del complejo. El complejo conjugado de z es la transformación con la misma rotación dispuesta por z pero en sentido inverso, y escala de la misma manera que z; esto puede ser descrito por la traspuesta de la matriz correspondiente a z.

Véase también

- Complejos $\mathbb{C}$
  - Reales $\mathbb{R}$
    - Racionales $\mathbb{Q}$
      - Enteros $\mathbb{Z}$
        - Naturales $\mathbb{N}$
          - Primos
          - Compuestos
        - Cero
        - Negativos
      - Fraccionarios
        - Fracción propia
        - Fracción impropia
    - Irracionales
      - Algebraicos
      - Trascendentes
  - Imaginarios

Enlaces externos

- Historia [1]
- Números complejos en Excel [2]

Referencias

[1] http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/09/c11.html
[2] http://www.necesitomas.com/index.php?q=node/70

Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Matriz (matemática)

En matemáticas, una **matriz** es una tabla de números consistente en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse. Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales, realizar un seguimiento de los coeficientes de una aplicación lineal y registrar los datos que dependen de varios parámetros. Las matrices se describen en el campo de la teoría de matrices. Pueden sumarse, multiplicarse y descomponerse de varias formas, lo que también las hace un concepto clave en el campo del álgebra lineal.

Definiciones y notaciones

Una **matriz** es una tabla cuadrada o rectangular de datos (llamados **elementos** o **entradas** de la matriz) ordenados en **filas** y **columnas**, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz m-por-n (escrito $m \times n$), y a m y n **dimensiones** de la matriz. Las dimensiones de una matriz siempre se dan con el número de filas primero y el número de columnas después. Comúnmente se dice que una matriz m-por-n tiene un **orden** de m × n ("orden" tiene el significado de tamaño). Dos matrices se dice que son iguales si son del mismo orden y tienen los mismos elementos.

Al elemento de una matriz que se encuentra en la fila i-ésima y la columna j-ésima se le llama elemento i,j o elemento (i,j)-iésimo de la matriz. Se vuelve a poner primero las filas y después las columnas.

Casi siempre, se denotan a las matrices con letras mayúsculas mientras que se utilizan las correspondientes letras en minúsculas para denotar a los elementos de las mismas. Por ejemplo, al elemento de una matriz A que se encuentra en la fila i-ésima y la columna j-ésima se le denota como $a_{\mathrm{i,j}}$ o $a[i,j]$. Notaciones alternativas son $\mathbf{A}[i,j]$ o $\mathbf{A}_{i,j}$. Además de utilizar letras mayúsculas para representar matrices, numerosos autores representan a las matrices con fuentes en negrita para distinguirlas de otros tipos de variables. Así **A** es una matriz, mientras que A es un escalar.

Normalmente se escribe $A := (a_{i,j})_{m \times n}$ para definir una matriz A $m \times n$ con cada entrada en la matriz $A[i,j]$ llamada a_{ij} para todo $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Sin embargo, la convención del inicio de los índices i y j en 1 no es universal: algunos lenguajes de programación comienzan en cero, en cuál caso se tiene $0 \leq i \leq m - 1$ y $0 \leq j \leq n - 1$.
Una matriz con una sola columna o una sola fila se denomina a menudo *vector*, y se interpreta como un elemento del espacio euclídeo. Una matriz $1 \times n$ (una fila y n columnas) se denomina vector fila, y una matriz $m \times 1$ (una columna y m filas) se denomina vector columna.

Ejemplo

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

es una matriz 4x3. El elemento $A[2,3]$ o $a_{2,3}$ es 7.

La matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

es una matriz 1×9, o un vector fila con 9 elementos.

Operaciones básicas

Suma o adición

Dadas las matrices *m*-por-*n* ,*A* y *B*, su **suma** *A* + *B* es la matriz *m*-por-*n* calculada sumando los elementos correspondientes (i.e. $(A + B)[i, j] = A[i, j] + B[i, j]$). Es decir, sumar cada uno de los elementos homólogos de las matrices a sumar. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Propiedades

- Asociativa

Dadas las matrices $m\times n$ A, B y C

A + (B + C) = (A + B) + C

- Conmutativa

Dadas las matrices $m\times n$ A y B

A + B = B + A

- Existencia de matriz cero o matriz nula

A + 0 = 0 + A = A

- Existencia de matriz opuesta

con gr-A = $[-a_{ij}]$

A + (-A) = 0

Producto por un escalar

Dada una matriz *A* y un escalar *c*, su **producto** *cA* se calcula multiplicando el escalar por cada elemento de *A* (i.e. $(cA)[i, j] = cA[i, j]$).

Ejemplo

$$2\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3 \\ 2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Sean *A* y *B* matrices y *c* y *d* escalares.

- **Clausura:** Si A es matriz y c es escalar, entonces cA es matriz.
- **Asociatividad:** (cd)A = c(dA)
- **Elemento Neutro:** 1·A = A
- **Distributividad:**
  - **De escalar:** c(A+B) = cA+cB
  - **De matriz:** (c+d)A = cA+dA

Producto

El **producto** de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, entonces su **producto matricial** AB es la matriz $m \times p$ (m filas, p columnas) dada por:

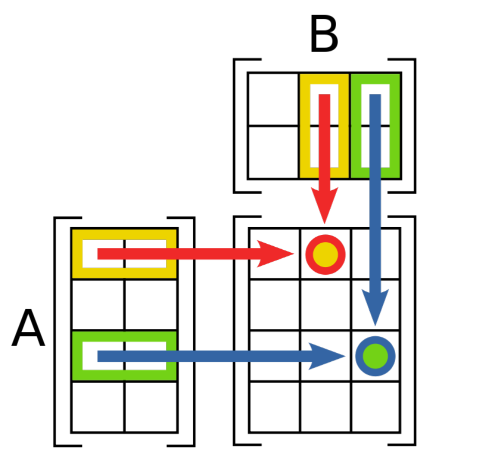


Diagrama esquemático que ilustra el producto de dos matrices **A** y **B** dando como resultado la matriz **AB**.

$$(AB)[i,j] = A[i,1]B[1,j] + A[i,2]B[2,j] + ... + A[i,n]B[n,j]$$

para cada par i y j.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Si los elementos de la matriz pertenecen a un cuerpo, y puede definirse el producto, el producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

- *Propiedad asociativa*: (**AB**)**C** = **A**(**BC**).
- *Propiedad distributiva por la derecha*: (**A** + **B**)**C** = **AC** + **BC**.
- *Propiedad distributiva por la izquierda*: **C**(**A** + **B**) = **CA** + **CB**.
- *En general, el producto de matrices tiene divisores de cero*: **Si A.B = 0** , *No necesariamente* **A** *ó* **B** *son matrices nulas*
- *El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación*: **Si A.B = A.C**, *No necesariamente* **B=C**

El producto de dos matrices generalmente no es conmutativo, es decir, **AB ≠ BA**. La división entre matrices, es decir, la operación que podría producir el cociente **A / B**, no se encuentra definida. Sin embargo, existe el concepto de matriz inversa, sólo aplicable a las matrices cuadradas.

Aplicaciones lineales

Las matrices pueden representar convenientemente aplicaciones lineales (también conocidas como "transformaciones lineales") entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Así, si $\mathbb{R}^n$ es el espacio euclídeo n-dimensional cuyos vectores se pueden representar como vectores columna (matrices n-por-1), para cada aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existe una única matriz **A** m por n de tal forma que

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

para cada vector **x** de $\mathbb{R}^n$.

Se dice que la matriz **A** "representa" la aplicación lineal *f*, o que **A** es la **matriz coordenada** de *f*.

El producto de matrices claramente corresponde a la composición de las aplicaciones. Si la matriz k por m **B** representa otra aplicación lineal $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, entonces la composición $g \circ f$ se representa por **BA**:

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = g(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}\,.$$

Esto se desprende de la mencionada propiedad asociativa del producto de matrices.

Más en general, una aplicación lineal de un espacio vectorial n-dimensional en otro espacio vectorial m-dimensional (no necesariamente $\mathbb{R}^n$) se representa por una matriz m por n, a condición de que se haya elegido una base para cada uno de ellos.

Rango

El rango de una matriz **A** es la dimensión de la imagen de la aplicación lineal representada por **A**, que coincide con la dimensión de los espacios vectoriales generados por las filas o columnas de **A**. También puede ser definido sin referencia al álgebra lineal de la siguiente manera: el rango de una matriz m por n **A** es el más pequeño número k de tal manera que **A** puede escribirse como un producto **BC** donde **B** es una matriz m por k y **C** es una matriz k por n (aunque ésta no es una manera práctica de calcular el rango).

Transpuesta

La transpuesta de una matriz m-por-n **A** es la matriz n-por-m $\mathbf{A}^T$ (algunas veces denotada por $\mathbf{A}^t$) formada al intercambiar las filas y columnas, i.e.

$$(\mathbf{A}^T)_{i,j} = \mathbf{A}_{j,i}.$$

La transposición de matrices tiene las siguientes propiedades:

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A},$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T,$$
$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T,$$

Si **A** describe una aplicación lineal respecto a dos bases, entonces la matriz $\mathbf{A}^T$ describe la transpuesta de una aplicación lineal respecto a las bases del espacio dual.

Matrices cuadradas y definiciones relacionadas

Una **matriz cuadrada** es una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas. El conjunto de todas las matrices cuadradas n-por-n junto a la suma y la multiplicación de matrices, es un anillo que generalmente no es conmutativo.

M(n,**R**), el anillo de las matrices cuadradas reales, es un álgebra asociativa real unitaria. M(n,**C**), el anillo de las matrices cuadradas complejas, es un álgebra asociativa compleja.

La **matriz identidad** $\mathbf{I}_n$ de orden n es la matriz n por n en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás elementos son iguales a 0. La matriz identidad se denomina así porque satisface las ecuaciones $\mathbf{M}\mathbf{I}_n = \mathbf{M}$ y $\mathbf{I}_n\mathbf{N} = \mathbf{N}$ para cualquier matriz **M** m por n y **N** n por k. Por ejemplo, si $n = 3$:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz identidad es el elemento unitario en el anillo de matrices cuadradas.

Los elementos invertibles de este anillo se llaman **matrices invertibles** o **matrices no singulares**. Una matriz **A** *n* por *n* es invertible si y sólo si existe una matriz **B** tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BA}.$$

En este caso, **B** es la **matriz inversa** de **A**, identificada por $\mathbf{A}^{-1}$. El conjunto de todas las matrices invertibles *n* por *n* forma un grupo (concretamente un grupo de Lie) bajo la multiplicación de matrices, el grupo lineal general.

Si λ es un número y **v** no es un vector nulo tal que $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$, entonces se dice que **v** es un vector propio de **A** y que λ es su valor propio asociado. El número λ es un valor propio de **A** si y sólo si $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_n$ no es invertible, lo que sucede si y sólo si $p_\mathbf{A}(\lambda) = 0$, donde $p_\mathbf{A}(x)$ es el polinomio característico de **A**. $p_\mathbf{A}(x)$ es un polinomio de grado *n* y por lo tanto, tiene *n* raíces complejas múltiples raíces si se cuentan de acuerdo a su multiplicidad. Cada matriz cuadrada tiene como mucho *n* valores propios complejos.

El determinante de una matriz cuadrada **A** es el producto de sus *n* valores propios, pero también puede ser definida por la *fórmula de Leibniz*. Las matrices invertibles son precisamente las matrices cuyo determinante es distinto de cero.

El algoritmo de eliminación gaussiana puede ser usado para calcular el determinante, el rango y la inversa de una matriz y para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal, lo que equivale a la suma de sus *n* valores propios.

Las matrices en la Computación

Las matrices son utilizadas ampliamente en la computación, por su facilidad y liviandad para manipular información. En este contexto, son la mejor forma para representar grafos, y son muy utilizadas en el cálculo numérico.

Historia

El origen de las matrices es muy antiguo. Un cuadrado mágico, 3 por 3, se registra en la literatura china hacia el 650 a. C.[1]

Es larga la historia del uso de las matrices para resolver ecuaciones lineales. Un importante texto matemático chino que proviene del año 300 a. C. a 200 a. C., *Nueve capítulos sobre el Arte de las matemáticas* (*Jiu Zhang Suan Shu*), es el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas.[2] En el capítulo séptimo, "*Ni mucho ni poco*", el concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de su publicación por el matemático japonés Seki Kowa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693.

Los "cuadrados mágicos" eran conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los matemáticos y astrónomos de la India, junto con otros aspectos de las matemáticas combinatorias. Todo esto sugiere que la idea provino de China. Los primeros "cuadrados mágicos" de orden 5 y 6 aparecieron en Bagdag en el 983, en la *Enciclopedia de la Hermandad de Pureza* (*Rasa'il Ihkwan al-Safa*).[1]

Después del desarrollo de la teoría de determinantes por Seki Kowa y Leibniz, a finales del siglo XVII, Cramer presentó en 1750 la ahora denominada regla de Cramer. Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan desarrollaron la eliminación de Gauss-Jordan en el siglo XIX.

El término "**matriz**" fue acuñado en 1848, por J. J. Sylvester. En 1853, Hamilton hizo algunos aportes a la teoría de matrices. Cayley introdujo en 1858 la **notación matricial**, como forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas. Grassmann, Frobenius y von Neumann están entre los matemáticos famosos que trabajaron sobre la teoría de matrices.

Olga Taussky-Todd (1906-1995), durante la II Guerra Mundial, usó la teoría de matrices para investigar el fenómeno de aeroelasticidad llamado *fluttering*.

Véase también

- Determinante (matemática)
- Matlab

Referencias

[1] Swaney, Mark. History of Magic Squares (http://www.arthurmag.com/magpie/?p=449).
[2] Shen Kangshen et al. (ed.) (1999). *Nine Chapters of the Mathematical Art, Companion and Commentary*. Oxford University Press. cited byOtto Bretscher (2005). *Linear Algebra with Applications*, 3rd ed. edición, Prentice-Hall, pp. 1.

Sistema de ecuaciones lineales

En matemática y álgebra lineal, un **sistema de ecuaciones lineales**, también conocido como **sistema lineal de ecuaciones** o simplemente **sistema lineal**, es un conjunto de ecuaciones lineales sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & -2 \\ -\,x_1 & + & \frac{1}{2}\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

El problema consiste en encontrar los valores desconocidos de las variables x_1, x_2 y x_3 que satisfacen las tres ecuaciones.

El problema de los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los más antiguos de la matemática y tiene una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

Introducción

En general, un sistema con *m* ecuaciones lineales *n* incógnitas puede ser escrito en forma ordinaria como:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Donde $x_1, \dots, x_n$ son las incógnitas y los números $a_{ij} \in \mathbb{K}$ son los coeficientes del sistema sobre el cuerpo $\mathbb{K}\ [= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots]$. Es posible reescribir el sistema separando con coeficientes con notación matricial:

([[#Eqnref_1|1]])

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos:

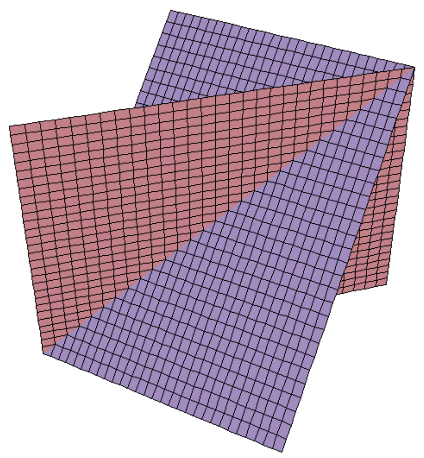
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Donde **A** es una matriz *m* por *n*, **x** es un vector columna de longitud *n* y **b** es otro vector columna de longitud *m*. El sistema de eliminación de Gauss-Jordan se aplica a este tipo de sistemas, sea cual sea el cuerpo del que provengan los coeficientes.

Sistemas lineales reales

En esta sección se analizan las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, es decir, los sistemas lineales en los coeficientes de las ecuaciones son números reales.

Representación gráfica



La intersección de dos planos no paralelos es una recta

Un sistema con n incógnitas se puede representar en el n-espacio correspondiente.

En los sistemas con 2 incógnitas, el universo de nuestro sistema será el plano bidimensional, mientras que cada una de las ecuaciones será representada por una recta, si es lineal, o por una curva, si no lo es. La solución será el punto (o línea) donde intersecten todas las rectas y curvas que representan a las ecuaciones. Si no existe ningún punto en el que intersecten al mismo tiempo todas las líneas, el sistema es incompatible, o lo que es lo mismo, no tiene solución.

En el caso de un sistema con 3 incógnitas, el universo será el espacio tridimensional, siendo cada ecuación un plano dentro del mismo. Si todos los planos intersectan en un único punto, las coordenadas de éste serán la solución al sistema. Si, por el contrario, la intersección de todos ellos es una recta o incluso un plano, el sistema tendrá infinitas soluciones, que serán las coordenadas de los puntos que forman dicha línea o superficie.

Para sistemas de 4 ó más incógnitas, la representación gráfica no es intuitiva para el ser humano, por lo que dichos problemas no suelen enfocarse desde esta óptica.

Tipos de sistemas

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden presentar. De acuerdo con ese caso se pueden presentar los siguientes casos:

- **Sistema incompatible** si no tiene ninguna solución.
- **Sistema compatible** si tiene alguna solución, en este caso además puede distinguirse entre:
  - **Sistema compatible determinado** cuando tiene un número finito de soluciones.
  - **Sistema compatible indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones.

Quedando así la clasificación:

$$\text{Tipos de sistemas}\begin{cases}\text{Compatible} & \begin{cases}\text{Determinado}\\ \text{Indeterminado}\end{cases}\\ \\ \text{Incompatible}\end{cases}$$

Los sistemas incompatibles geométricamente se caracterizan por (hiper)planos o rectas que se cruzan sin cortarse. Los sistemas compatibles determinados se caracterizan por un conjunto de (hiper)planos o rectas que se cortan en un único punto. Los sistemas compatibles indeterminados se caracterizan por (hiper)planos que se cortan a lo largo de una recta [o más generalmente un hiperplano de dimensión menor]. Desde un punto de vista algebraico los sistemas compatibles determinados se caracterizan porque el determinante de la matriz es diferente de cero:

$$\text{Sistema compatible determinado} \iff det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Sistemas compatibles indeterminados

Un sistema sobre un cuerpo *K* es **compatible indeterminado** cuando posee un número infinito de soluciones. Por ejemplo, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & = 1 \\ 2x & +4y & = 2 \end{cases}$$

Tanto la primera como la segunda ecuación se corresponden con la recta cuya pendiente es $-0,5$y que pasa por el punto $(-1,1)$, por lo que ambas intersectan en todos los puntos de dicha recta. El sistema es compatible por haber solución o intersección entre las rectas, pero es indeterminado al ocurrir esto en infinitos puntos.

- En este tipo de sistemas, la solución genérica consiste en expresar una o más variables como función matemática del resto. En los sistemas lineales compatibles indeterminados, al menos una de sus ecuaciones se puede hallar como combinación lineal del resto, es decir, es linealmente dependiente.
- Una condición necesaria para que un sistema sea compatible indeterminado es que el determinante de la matriz del sistema sea cero (y por tanto uno de sus autovalores será 0):

$$\text{sistema compatible indeterminado} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$$

- De hecho, de las dos condiciones anteriores se desprende, que el conjunto de soluciones de un sistema compatible indeterminado es un subespacio vectorial. Y la dimensión de ese espacio vectorial coincidirá con la multiplicidad geométrica del autovalor cero.

Sistemas incompatibles

De un sistema se dice que es **incompatible** cuando no presenta ninguna solución. Por ejemplo, supongamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & = 4 \\ 2x & +4y & = 7 \end{cases}$$

Las ecuaciones se corresponden gráficamente con dos rectas, ambas con la misma pendiente, Al ser paralelas, no se cortan en ningún punto, es decir, no existe ningún valor que satisfaga a la vez ambas ecuaciones.

Matemáticamente un sistema de estos es incompatible cuando el rango de la matriz del sistema es inferior al rango de la matriz ampliada. Una condición necesaria para que esto suceda es que el determinante de la matriz del sistema sea cero:

$$\text{sistema incompatible} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$$

Métodos de resolución

Sustitución

El metodo de sustitución consiste en despejar en una de las ecuaciones cualquier incógnita, preferiblemente la que tenga menor coeficiente, para, a continuación, sustituirla en otra ecuación por su valor.

En caso de sistemas con más de dos incógnitas, la seleccionada debe ser sustituida por su valor equivalente en todas las ecuaciones excepto en la que la hemos despejado. En ese instante, tendremos un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el inicial, en el que podemos seguir aplicando este método reiteradamente. Por ejemplo, supongamos que queremos resolver por sustitución este sistema:

$$\begin{cases} 3x & +y & = & 22 \\ 4x & -3y & = & -1 \end{cases}$$

En la primera ecuación, seleccionamos la incógnita y por ser la de menor coeficiente y que posiblemente nos facilite más las operaciones, y la despejamos, obteniendo la siguiente ecuación.

$$y = 22 - 3x$$

El siguiente paso será sustituir cada ocurrencia de la incógnita y en la otra ecuación, para así obtener una ecuación donde la única incógnita sea la x .

$$4x - 3(22 - 3x) = -1 \qquad \Rightarrow 13x - 66 = -1, \qquad \Rightarrow 13x = 65$$

Al resolver la ecuación obtenemos el resultado $x = 5$, y si ahora sustituimos esta incógnita por su valor en alguna de las ecuaciones originales obtendremos $y = 7$, con lo que el sistema queda ya resuelto.

Igualación

El método de igualación se puede entender como un caso particular del método de sustitución en el que se despeja la misma incógnita en dos ecuaciones y a continuación se igualan entre sí la parte derecha de ambas ecuaciones.

Tomando el mismo sistema utilizado como ejemplo para el método de sustitución, si despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} y = & 22 - 3x \\ y = & \dfrac{4x+1}{3} \end{cases}$$

Como se puede observar, ambas ecuaciones comparten la misma parte izquierda, por lo que podemos afirmar que las partes derechas también son iguales entre sí.

$$22 - 3x = \frac{4x+1}{3}$$

Llegados a este punto, la ecuación resultante es resoluble y podemos obtener el valor de la incógnita x , y a partir de aquí, sustituyendo dicho valor en una de las ecuaciones originales, obtener el valor de la y , que además ya se encuentra despejada.

La forma más fácil de tener el método de sustitución es realizando un cambio para despejar x después de averiguar el valor de la y.

Reducción

Este método suele emplearse mayoritariamente en los sistemas lineales, siendo pocos los casos en que se utiliza para resolver sistemas no lineales. El procedimiento, diseñado para sistemas con dos ecuaciones e incógnitas, consiste en transformar una de las ecuaciones (generalmente, mediante productos), de manera que obtengamos dos ecuaciones en la que una misma incógnita aparezca con el mismo coeficiente y distinto signo. A continuación, se suman ambas ecuaciones produciéndose así la reducción o cancelación de dicha incógnita, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita, donde el método de resolución es simple.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} 2x & +3y & = 5 \\ 5x & +6y & = 4 \end{cases}$$

no tenemos más que multiplicar la primera ecuación por -2 para poder cancelar la incógnita y . Al multiplicar, dicha ecuación nos queda así:

$$-2(2x + 3y = 5) \quad \longrightarrow \quad -4x - 6y = -10$$

Si sumamos esta ecuación a la segunda del sistema original, obtenemos una nueva ecuación donde la incógnita y ha sido reducida y que, en este caso, nos da directamente el valor de la incógnita x :

$$\begin{array}{rrcr} -4x & -6y & = & -10 \\ 5x & +6y & = & 4 \\ \hline x & & = & -6 \end{array}$$

$x = -6$

El siguiente paso consiste únicamente en sustituir el valor de la incógnita x en cualquiera de las ecuaciones donde aparecían ambas incógnitas, y obtener así que el valor de y es igual a:

$$y = \frac{17}{3}$$

Método de Gauss

La eliminación de Gauss-Jordan, más conocida como método de Gauss, es un método aplicable únicamente a los sistemas lineales de ecuaciones, y consistente en triangular la matriz aumentada del sistema mediante transformaciones elementales, hasta obtener ecuaciones de una sola incógnita, cuyo valor será igual al coeficiente situado en la misma fila de la matriz. Este procedimiento es similar al anterior de reducción, pero ejecutado de manera reiterada y siguiendo un cierto orden algorítmico.

Tomemos como ejemplo el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -z & = & 8 \\ -3x & -y & +2z & = & -11 \\ -2x & +y & +2z & = & -3 \end{array} \right.$$

Su matriz aumentada será esta:

$$\left(\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

En primer lugar, reducimos la incógnita x , sumando a la segunda fila, la primera multiplicada por $\frac{3}{2}$, y a la tercera, la primera fila. La matriz queda así:

$$\left(\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

El siguiente paso consiste en eliminar la incógnita y en la primera y tercera fila, para lo cual les sumamos la segunda multiplicada por -2 y por -4, respectivamente.

$$\left(\begin{array}{rrrr} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Por último, eliminamos la z , tanto de la primera como de la segunda fila, sumándoles la tercera multiplicada por -2 y por $\frac{1}{2}$, respectivamente:

$$\left(\begin{array}{rrrr} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Llegados a este punto podemos resolver directamente las ecuaciones que se nos plantean:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = 4 \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{3}{2} \\ -z = 1 \end{array} \right.$$

O, si lo preferimos, podemos multiplicar las tres filas de la matriz por: $\frac{1}{2}$, 2 y -1 respectivamente, y obtener así automáticamente los valores de las incógnitas en la última columna.

$$\begin{cases} x = & 2 \\ y = & 3 \\ z = & -1 \end{cases}$$

Regla de Cramer

La regla de Cramer da una solución para sistemas compatibles determinados en términos de determinantes y adjuntos dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(\mathbf{A})}$$

Donde A_j es la matriz resultante de remplazar la j-ésima columna de A por el vector columna **b**. Para un sistema de dos ecuaciones y dos incónitas:

$$\begin{cases} a\,x & + & b\,y & = e \\ c\,x & + & d\,y & = f \end{cases}$$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Nota: Cuando en la determinante original det(A) el resultado es 0, el sistema indica múltiples o sin coincidencia.

Sistemas lineales en un cuerpo arbitrario

Cuando consideramos ecuaciones lineales cuyas soluciones son números racionales, reales o complejos o más generalmente un cuerpo $\mathbb{K}$, la solución puede encontrarse mediante Regla de Cramer. Para sistemas de muchas ecuaciones la regla de Cramer puede ser computacionalmente más costosa y suelen usarse otros métodos más "económicos" en número de operaciones como la eliminación de Gauss-Jordan y la descomposición de Cholesky. Existen también métodos indirectos (basados en iteraciones) como el método de Gauss-Seidel.

Si el cuerpo es infinito (como es el caso de los números reales o complejos), entonces solo puede darse una de las tres siguientes situaciones:

- el sistema no tiene solución (en dicho caso decimos que el sistema está sobredeterminado o que es incompatible)
- el sistema tiene una única solución (el sistema es compatible determinado)
- el sistema tiene un número infinito de soluciones (el sistema es compatible indeterminado).

Un sistema de la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

se le llama sistema *homogéneo*. El conjunto de todas las soluciones de este tipo de sistema se le llama núcleo de la matriz y se escribe como *Nuc A*.

Se han diseñado algoritmos alternativos mucho más eficientes a la eliminación de Gauss-Jordan para una gran cantidad de casos específicos. La mayoría de estos algoritmos mejorados tienen una complejidad computacional de $O(n^2)$. Algunos de los métodos más usados son:

- Para los problemas de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es una matriz de Toeplitz simétrica, se puede utilizar la recursión de Levinson o alguno de los métodos derivados de éste. Un método derivado de la recursión de Levinson es la recursión de Schur, que es ampliamente usado en el campo del procesamiento digital de señales.

- Para los problemas de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es una matriz singular o casi singular, la matriz A se descompone en el producto de tres matrices en un proceso llamado descomposición de valores singulares.

Solución de sistemas lineales en un anillo

Los métodos para resolver el sistema ([[#Equation_1|1]]) sobre un anillo son muy diferentes a los considerados anteriormente. De hecho la mayoría de métodos usados en cuerpos, como la regla de Cramer, son inaplicables en anillos debido a que no existen inversos multiplicativos.

La existencia de solución del sistema ([[#Equation_1|1]]) sobre los enteros requiere varias condiciones:

1. Para cada *i* $\mathrm{mcd}(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ es divisor de b_i.
2. Si la condición anterior se cumple para un determinado *i* existe un conjunto de enteros $\mathcal{S}_i$ formado por el conjunto de enteros que satisface la *i*-ésima ecuación, y existirá solución si la intersección $\mathcal{S}_1 \cap ... \cap \mathcal{S}_n \neq \varnothing$.

Véase también

- Sistema de ecuaciones
- Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

Enlaces externos

- Resolusor de ecuaciones lineales en línea [1]

Referencias

[1] http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?lang=es&module=tool/linear/linsolver.es

Fuentes y contribuyentes del artículo

Lógica matemática *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=31725787 *Contribuyentes*: Arcibel, Cinabrium, Cobalttempest, Davius, DerkeNuke, Diegusjaimes, Dodo, Egaida, Elwikipedista, Fer31416, FrancoGG, Gerwoman, Ingenioso Hidalgo, Julian Mendez, JulianMendez, Kokoo, Kved, Lauranrg, Lord Arioch, Matdrodes, Mortadelo2005, Paintman, Pan con queso, Piolinfax, Sertrevel, SpeedyGonzalez, Tomatejc, Tostadora, Unificacion, Vivero, Wewe, 88 ediciones anónimas

Lógica proposicional *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32360887 *Contribuyentes*: .Sergio, Airunp, Boja, Camiloaa, Chaikovskii, Cobalttempest, Cobbor, Diegusjaimes, Djacnov, Ernesto2288, Federico Uicich, Fkereki, Gaeddal, Gonzjesu, Greek, Heisei, José Daniel, Julian Colina, Julian Mendez, JulianMendez, Kijote, Kn, Kokoo, Lauranrg, Lipedia, Loveless, Luis Felipe Schenone, MONIMINO, ManuelMore, Manuelt15, Matdrodes, Netito777, PabloCastellano, Panypeces, Penarc, PoLuX124, Taichi, Tirithel, Vitamine, 96 ediciones anónimas

Tabla de valores de verdad *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32281176 *Contribuyentes*: -jem-, .Sergio, Alephcero, Angel verde, Antur, Arctosouros, Banfield, BetoCG, C'est moi, Cebrianm, Dansanti, Dianai, Diegusjaimes, Dnu72, Dodo, Edgar, Edmenb, FAR, Filipo, Fortefranco, Gabri-gr-es, GermanX, JKD, Julian Colina, Kokoo, Lagarto, Laura Fiorucci, Lauranrg, Luis Felipe Schenone, MONIMINO, Mansoncc, Matdrodes, Melocoton, Pabloallo, Sabbut, Taichi, Tirithel, Vivero, Wilfredor, XalD, Xenocrates, Xenoforme, Xuankar, Yrithinnd, conversion script, 200 ediciones anónimas

Teoría de conjuntos *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32057660 *Contribuyentes*: .José, Aadrover, Airunp, Aleator, Alephcero, AlfonsoERomero, Alhen, Andreasmperu, Antur, Aracne, Ascánder, Cain31415, Chalisimo5, Chanchocan, Cinabrium, Cobalttempest, Comae, Crescent.Moon, Cuate77, Cuky, Daipop, Davidsevilla, Dianai, Diegusjaimes, Dnu72, Dodo, Ebr, Ejrrjs, Elessar.telkontar, Elodar, Elwikipedista, Eqcedwin, Farisori, Fmr cosm, Fsd141, Götz, HiTe, Héctor Guido Calvo, JAGT, Jorge C.Al, JorgeGG, Joseaperez, Juan Marquez, Kiaramaria, Klauestte, Kn, Kolmogorov, Kronoss, Kved, Latiniensis, Laura Fiorucci, Lauranrg, Linkedark, Lipedia, Lolmaker, Lucien leGrey, Mafores, Maldoror, Manwë, Marsa, Matdrodes, Mauricio Maluff, Moriel, Mortadelo2005, Mpagano, Muro de Aguas, Nicolasdiaz, Nicop, Nyx, Paintman, Palach, Pan con queso, PoLuX124, Redjhawk, Retama, Rimeju, Rioman, Rsg, Rubenerm, Sabbut, Super braulio, Superzerocool, Tano4595, Tirithel, Tito HX, Toad32767, Tomas Sánchez, Torquemado, Ty25, Vargenau, Vivero, Wewe, Willtron, Yeza, 327 ediciones anónimas

Número real *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32196562 *Contribuyentes*: 3coma14, Akael, Alvaro qc, Andre Engels, Andreasmperu, Antur, Aparejador, AstroNomo, Balderai, Banfield, Bucephala, C'est moi, CASF, Camiloalcubo2, Carloszelayeta, Charly Toluca, Charly genio, Chfiguer, Daniel JG, Dat, Davius, Diegusjaimes, Dnu72, Drini, Drini2, Erfil, GermanX, Gonis, Greek, Guanxito, Hawking, Henry1103-2009, Humberto, Ingenioso Hidalgo, Isha, JMCC1, Joseaperez, Juan Marquez, Kadellar, Kikegall, Klemen Kocjancic, Kn, KnightRider, Kved, Lauranrg, Linkedark, MI GENERAL ZAPATA, Maldoror, Manwë, Martorell, Matdrodes, Matiasasb, Maveric149, Miguel, Moriel, Msdus, Muro de Aguas, Mutari, Nicop, OMenda, Oscar ., Paintman, Parras, Peejayem, Poco a poco, Point-set topologist, Ravave, Rovnet, Rupert de hentzau, Sabbut, Santiperez, Sigmanexus6, Snakeyes, Susleriel, Thctase, Txo, Vitamine, Vivero, Walter closser, Wewe, Youssefsan, conversion script, 187 ediciones anónimas

Inecuación *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32203332 *Contribuyentes*: Airunp, Aleator, Alexav8, Alhen, Baiji, Beto29, Bryant1410, Camilo, Celeron, Cobalttempest, Comae, Dferg, Dianai, Diegusjaimes, Drini, Edmenb, FrancoGG, GNM, Gaius iulius caesar, GermanX, Gustavocarra, Henry1103-2009, Hlnodovic, Humberto, Ingenioso Hidalgo, Javier Arturo Ollarves Rojas, Juan Mayordomo, Jynus, Limbo@MX, Lucía Sicre, Luzbelito92, Martincho1993, Matdrodes, Moriel, Muro de Aguas, Nethac DIU, Nixón, OMenda, Paintman, PoLuX124, RoyFocker, Sabbut, Tano4595, Tirithel, Tomatejc, Vic Fede, Y0rx, 171 ediciones anónimas

Geometría analítica *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32472503 *Contribuyentes*: 3coma14, Alhen, Angel GN, Arthuro0, AstroNomo, Azarahi, Baiji, Bcoto, BlackBeast, Ca in, Cerles24, Charly genio, Charrua85, Chucho ipn2007, Chuck es dios, Cobalttempest, Correogsk, Darabuc, Dat, Davius, Dferg, Dhcp, Dhl 11 12 1989, Dianai, Diegusjaimes, Dnu72, Ejmeza, Eric, Fonsi80, Gaius iulius caesar, Greek, HiTe, Hosg, Humberto, Isha, JMCC1, Johns, Jsanchezes, Julie, Jurgens, MI GENERAL ZAPATA, Macar, Manwë, Matdrodes, Maveric149, Peejayem, PoLuX124, Queninosta, Reygecko, RoyFocker, Rul2007, Slayerlp55, Sueño Stereo 0, Tano4595, Vatelys, Visens, Wewe, Wilfredor, Yeza, 206 ediciones anónimas

Función real *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=31510372 *Contribuyentes*: Brobdingnag, Farisori, HUB, Javierito92, PetrohsW, Rehernan, Sabbut, Tano4595, 4 ediciones anónimas

Función trigonométrica *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32019866 *Contribuyentes*: Andreasmperu, Antur, Barteik, David0811, Davius, Diegusjaimes, Dnu72, Dominguillo, Drini2, Dusan, Edmenb, Eligna, Emijrp, Farisori, Gaianauta, GermanX, Greek, HiTe, Humberto, JMCC1, Matdrodes, Mel 23, Oscar armando romero loreto, Pan con queso, RoyFocker, Tano4595, Tirithel, Xavigivax, 110 ediciones anónimas

Función hiperbólica *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32176123 *Contribuyentes*: Airunp, Cdlfd, Cmx, Dhcp, FAR, GermanX, Ingenioso Hidalgo, Lucien leGrey, Matdrodes, Mistwalker7, Mordecki, Moriel, Perky Pat, Ricardogpn, Tano4595, Txuspe, 46 ediciones anónimas

Fórmula de Euler *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32222038 *Contribuyentes*: Alefisico, Antur, Cinabrium, Dodo, Dominican, Erufailon, Homo logos, Isomorfismo, Kikegall, Kristobal, Larocka, Lnieves, Matdrodes, Mathfun, Mdiagom, MontanNito, Moriel, Ramjar, Sabbut, 54 ediciones anónimas

Identidad de Euler *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=31966145 *Contribuyentes*: AstroNomo, DBK1, Digigalos, Electronvolt, Elwikipedista, Felper, Franguigo, GermanX, Homo logos, JViejo, Joseaperez, Julian Colina, Kn, Llull, Logarithmika Magus, Luis Felipe Schenone, Matiasasb, Metalfan, MontanNito, Moriel, Pino, Rjelves, Romero Schmidtke, Sabbut, Tano4595, Togo, Xatufan, YoaR, Zeitus, 40 ediciones anónimas

Polinomio *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32301428 *Contribuyentes*: 4lex, Abgenis, Adrian.h.v, Airunp, Ale flashero, Alexav8, AlfonsoERomero, Alhen, Aloriel, Amadís, Balderai, BetoCG, Bucho, C'est moi, Cesar saltillo, Cinabrium, Clauh, Cronos x, Cuat, Delphidius, Diosa, Dnu72, Dreitmen, Drini, Ecemaml, Emijrp, Farisori, Fernando H, Fmariluis, Gengiskanhg, GermanX, Goose32, Greek, Grundig, Gusgus, Hanibaal, Hawking, Humberto, Ingenioso Hidalgo, Iulius1973, JMCC1, Jarisleif, Javierito92, Jdmprof, Jgalgarra, Jgomez53, Joseaperez, Juan Mayordomo, Jynus, Kristobal, Kved, Leandroidecba, Linkedark, M S, Mahadeva, Manwë, MasterVickhu, Matdrodes, Moriel, Mortadelo2005, Mpagano, NaSz, Navarroaxel, Netito777, Nicop, PaQmbral, Paintman, Planeador negro, PoLuX124, Profcarla, Prometheus, Queninosta, Quiron, Raystorm, Roblespepe, Rodriguillo, Sabbut, Saposabio, Shooke, Suisui, Tano4595, Thormaster, Tirithel, Tomatejc, Vivero, Wewe, Xavigivax, Xrjunque, Xuankar, Youssefsan, 214 ediciones anónimas

Número complejo *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32329698 *Contribuyentes*: .Sergio, 213-96-167-20.uc.nombres.ttd.es, 3coma14, Aeoris, Agualin, Aibdescalzo, Airunp, Airwolf, Alexquendi, Antur, Arturo Reina, Ascánder, Atlante, Avm, CSTAR, Camilo, Carloszelayeta, Charly Toluca, Charly genio, Cinabrium, CorzoC., Dat, Diegusjaimes, Digigalos, Dnu72, Doctor C, Dodo, Don Depresor, Dorieo, Drake 81, Filipo, Fmariluis, Frutoseco, Garber, GermanX, Gizmo II, Gonis, Greek, Gusgus, Götz, Hingelstein, Homo logos, Humberto, Ingenioso Hidalgo, Isha, Ivivaj, JMCC1, Joker Miguel, JorgeGG, Jose32, Joseaperez, Jtico, Juan Marquez, Juan Mayordomo, Julie, Kn, Kristobal, Kved, LCB, LPFR, Laura Fiorucci, LimoWreck, MI GENERAL ZAPATA, Macarrones, Mafores, Manwë, Matdrodes, Matiasasb, Maveric149, Mister, Moriel, Msdus, Muro de Aguas, Mushii, Netito777, OboeCrack, Oscar ., Pabloallo, Pacomegia, Pan con queso, Peejayem, Pertile, PoLuX124, Psambrana, Quark&Jaguar, Raulshc, Reignerok, Retama, RoyFocker, Sabbut, Santiperez, Sobolev, Soteke, Tano4595, Toad32767, Togo, Vbenedetti, Vitamine, Vivero, Wikiwert, Xasel, Xenoforme, Zorosandro, conversion script, 313 ediciones anónimas

Matriz (matemática) *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32245398 *Contribuyentes*: 2orejas1boca, 3coma14, Adrruiz, Af3, Airunp, Alberto Salguero, Alhen, Amadís, Angelsaracho, Antur, Astroza, Baiji, CHV, CaStarCo, Casary, Chewie, Cinabrium, Danielba894, Davidsevilla, Davius, Diegusjaimes, Eduardo Lima, El Hoy, Eligna, Emijrp, Epnob, Esceptic0, Eudescontreras, Euratom, Farisori, FrancoGG, Fsd141, Gaius iulius caesar, Gengiskanhg, GermanX, HUB, Humberto, Inajle, Ingenioso Hidalgo, Isha, IvanStepaniuk, J.delanoy, JMPerez, Jatt, Javierito92, Jecanre, Jjafjjaf, JorgeGG, Joseaperez, Jtico, Juan Mayordomo, Julio Isaac Moreno Díaz, Kved, L&T2, La Maga, Lampsako, Lourdes Cardenal, Macalla, Malguzt, Manwë, Marcodallacamina, Matdrodes, Mgallege, Moriel, Mortadelo2005, Mushii, Numbo3, Paintman, Pieter, PoLuX124, Queninosta, Rdaneel, Retama, Ricard Delgado Gonzalo, Romero Schmidtke, Sabbut, Sanbec, Santiago Hernández, Sebanievas87, Steve.jaramillov, Tano4595, Tostadora, Triku, Veon, Vitamine, Will vm, Yeza, Yopohari, Zorosandro, 270 ediciones anónimas

Sistema de ecuaciones lineales *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=32262051 *Contribuyentes*: Ale flashero, Astenuz, Barteik, Bucephala, CASF, Davius, Diegusjaimes, Dj alejo, Dnu72, GASDEJAVA, HUB, Hameryko, HiTe, Humberto, Imrathor, Ingenioso Hidalgo, Isidro a h, Ivansss, J.delanoy, Joarobles, Jtico, Juan Mayordomo, Manuelt15, Mariowiki, Martin paliza, Matdrodes, Oscar ., Pino, PoLuX124, Racso, Rafael.heras, Repos34, Ricard Delgado Gonzalo, Spirit-Black-Wikipedista, Steve.jaramillov, Tano4595, Vic Fede, Wilfredor, 141 ediciones anónimas

Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

Imagen:Wikiversity-logo-Snorky.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Wikiversity-logo-Snorky.svg *Licencia*: logo *Contribuyentes*: User:Snorky

Image:Absolute complement (set teory, Venn diagram).PNG *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Absolute_complement_(set_teory,_Venn_diagram).PNG *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: User:Paul August

Image:Venn A subset B.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Venn_A_subset_B.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: -

Image:Venn0111.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Venn0111.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:Lipedia

Image:Venn0001.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Venn0001.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:Lipedia

Image:Venn0100.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Venn0100.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:Lipedia

Image:Venn0010.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Venn0010.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:Lipedia

Imagen:Commons-logo.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Commons-logo.svg *Licencia*: logo *Contribuyentes*: User:3247, User:Grunt

Archivo:Números reales.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Números_reales.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: Drini (Pedro Sánchez)

Image:Gráfico de ejemplo de Programación lineal.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Gráfico_de_ejemplo_de_Programación_lineal.png *Licencia*: desconocido *Contribuyentes*: -

Archivo:FuncionLineal00.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:FuncionLineal00.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:HiTe

Archivo:FuncionLineal04.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:FuncionLineal04.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:HiTe

Archivo:FuncionLineal06.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:FuncionLineal06.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:HiTe

Archivo:FuncionLineal07.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:FuncionLineal07.svg *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: User:HiTe

Archivo:Conic sections 2n.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Conic_sections_2n.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: -

Archivo:Simple Torus.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Simple_Torus.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: -

Imagen:Nuvola apps edu mathematics-p.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Nuvola_apps_edu_mathematics-p.svg *Licencia*: GNU General Public License *Contribuyentes*: user:Flamurai

Archivo:Convexidad desigualdad.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Convexidad_desigualdad.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: -

Archivo:Circle-trig6.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Circle-trig6.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: User:Stevenj, user:Tttrung

Archivo:Identidades trigonométricas fundamentales.gif *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Identidades_trigonométricas_fundamentales.gif *Licencia*: desconocido *Contribuyentes*: User:German

Archivo:Trigono a10.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trigono_a10.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: User:Dnu72

Archivo:Sine animation.gif *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sine_animation.gif *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: -

Archivo:FunTriR333.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:FunTriR333.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: User:Dnu72

imagen:sinh cosh tanh.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sinh_cosh_tanh.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: user:Ckeen

imagen:csch sech coth.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Csch_sech_coth.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: user:Ckeen

Archivo:Euler's formula.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Euler's_formula.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: user:gunther

Archivo:Mfrus3.GIF *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Mfrus3.GIF *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: -

Archivo:Polynomialdeg2.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polynomialdeg2.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contribuyentes*: Anarkman, Derbeth, Enochlau, Geek3, Gerbrant, Juiced lemon, N.Mori, 2 ediciones anónimas

Archivo:Polynomialdeg3.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polynomialdeg3.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contribuyentes*: -

Archivo:Polynomialdeg4.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polynomialdeg4.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contribuyentes*: -

Archivo:Polynomialdeg5.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polynomialdeg5.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contribuyentes*: -

Archivo:Complex conjugate picture.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Complex_conjugate_picture.svg *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: User:Oleg Alexandrov

Archivo:Complejog1.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Complejog1.png *Licencia*: desconocido *Contribuyentes*: Original uploader was Toad32767 at es.wikipedia

Archivo:Matrix multiplication diagram.svg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Matrix_multiplication_diagram.svg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 2.5 *Contribuyentes*: User:Bilou

Imagen:PlaneIntersection.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PlaneIntersection.png *Licencia*: GNU Free Documentation License *Contribuyentes*: User:Jackohare

Licencia