Capítulo 1

El Conjunto de los números Reales

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

1.1 El conjunto de los números Naturales 4
1.2 El conjunto de los números Enteros 4
1.3 El conjunto de los números Racionales y el conjunto de los números Irracionales 4
1.4 El conjunto de los números Irracionales 11
1.5 El conjunto de los números Reales 11
1.5.1 Operaciones definidas en el conjunto de los números reales 12
1.5.2 Orden en el conjunto de los números reales 14
1.6 Aritmética en el Conjunto de los Números Reales 20
1.7 Propiedades de los números enteros 20
1.7.1 Operaciones definidas en el conjunto de los números enteros 20
1.7.2 Adición de los números enteros 20
1.7.3 Multiplicación de números enteros 22
1.7.4 Operaciones combinadas 25
1.7.5 Algoritmo de la división 30
1.7.6 Divisibilidad 31
1.7.7 Algunos criterios de divisibilidad 33
1.7.8 Múltiplos y factores de un número entero 37
1.7.9 Números primos y números compuestos 39
1.7.10 Representación de un número compuesto como el producto de números primos 40
1.7.11 Máximo divisor común 41
1.7.12 Mínimo múltiplo común 43
1.8 Propiedades de los números racionales 45
1.8.1 Fracciones equivalentes 45
1.8.2 Simplificación de fracciones 48
1.8.3 Fracciones canónicas y fracciones reducibles 49
1.8.4 Amplificación de fracciones 51
1.8.5 Representación de números racionales usando el mínimo denominador común 51
1.9 Algoritmos de las operaciones definidas en $\mathbb{Q}$ 52
1.9.1 Adición de números racionales 52
1.9.2 Sustración de números racionales 57
1.9.3 Algoritmo de la multiplicación de números racionales 58
1.9.4 Algoritmo de la división de números racionales 60
1.9.5 Operaciones combinadas 63
1.9.6 Potencias en el conjunto de los números reales 71
1.9.7 Propiedades de las potencias 73
1.9.8 Raíz enésima de un número real 85
1.9.9 Propiedades 94
1.9.10 Productos de radicales de diferente índice 100

1.1 El conjunto de los números Naturales

Definición 1

El conjunto cuyos elementos son $0, 1, 2, 3, 4, ...$ recibe el nombre de conjunto de los números naturales y se denota con el símbolo $\mathbb{N}$, así:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Nótese que este conjunto tiene un primer elemento, a saber, el cero, pero no existe un último elemento.
Por esta razón diremos que el conjunto de los números naturales es infinito.

1.2 El conjunto de los números Enteros

Definición 2

El conjunto cuyos elementos son $..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$ recibe el nombre de conjunto de los números enteros y se denota con el símbolo $\mathbb{Z}$, así:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Nótese que:

1.) El conjunto de los números enteros no tiene un primer elemento ni un último elemento, por lo que decimos que es infinito.

2.) Los números naturales $0, 1, 2, 3, 4, ...$ pertenecen al conjunto de los números enteros, de donde se tiene que el conjunto de los números naturales es subconjunto del conjunto de los números enteros, lo que se expresa simbólicamente así:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

1.3 El conjunto de los números Racionales y el conjunto de los números Irracionales

Notación: Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ tal que $b \neq 0$.

La expresión $a \div b$ denota el resultado de dividir a por b lo cual también se escribe $\dfrac{a}{b,}$ es decir:

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

La expresión $\dfrac{a}{b}$ se lee "a sobre b"

Observación importante: La división por cero no está definida, es decir, la frase "a dividido por cero" no tiene sentido matemático en este contexto.

Definición 3

El conjunto cuyos elementos son los números que se pueden presentar como $\dfrac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ recibe el nombre de conjunto de los números racionales y se denota con el símbolo $\mathbb{Q}$, así:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z},\; b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Observación: Recuerde que $\dfrac{a}{b}$ significa "a dividido por b" y como la división por cero no está definida, la frase "a dividido por cero" no tiene sentido matemático en este contexto. Por esto es que en la definición anterior se pide que $b \neq 0$.

Ejemplo 1

$\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{0}{4}$, $\dfrac{12}{-10}$, $\dfrac{-9}{-2}$, $\dfrac{3}{1}$, y $\dfrac{5}{-1}$ representan números racionales.

Definición 4

Sean $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

En la expresión $\dfrac{a}{b}$, "a" recibe el nombre de **numerador** y "b" recibe el nombre de **denominador**. Y la expresión $\dfrac{a}{b}$ recibe el nombre de **fracción**.

Consideremos los siguientes ejemplos ilustrativos:

1.) Como $3 \div 1 = 3$ entonces $\dfrac{3}{1} = 3$

2.) Como $-6 \div 1 = -6$ entonces $\dfrac{-6}{1} = -6$

3.) Como $-50 \div 1 = -50$ entonces $\dfrac{-50}{1} = -50$

4.) Sea $a \in \mathbb{Z}$. Como $a \div 1 = a$ entonces $\dfrac{a}{1} = a$

Los ejemplos $(1), (2), (3)$ son casos particulares del ejemplo (4), esto nos permite enunciar el siguiente resultado.

Todo número entero es un número racional, es decir el conjunto de los números enteros es subconjunto del conjunto de los números racionales y escribimos:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Expansión decimal de un número racional

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

Si para un número representado como $\dfrac{a}{b}$ se realiza la división de a por b, se obtiene otra representación para dicho número la cual recibe el nombre de **expansión decimal**.

Ejemplo 2

Determine la expansión decimal de $\dfrac{5}{4}$

Solución

Dividimos 5 por 4

$$\begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{-4} & 1.25 \\ 10 & \\ \underline{-8} & \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

La expansión decimal de $\dfrac{5}{4}$ es 1.25

es decir, $\dfrac{5}{4} = 1.25$

Ejemplo 3

Determine la expansión decimal de $\dfrac{-3}{8}$

Solución

Dividimos 3 por 8

$$\begin{array}{r|l} 3 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{-0} & 0.375 \\ 30 & \\ \underline{-24} & \\ 60 & \\ \underline{-56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

La expansión decimal de $\dfrac{-3}{8}$ es -0.375

es decir, $\dfrac{-3}{8} = -0.375$

Observemos que en los dos ejemplos anteriores el residuo (final) que se obtiene después de varias divisiones es cero (0), por lo que decimos que 1.25 y 0.375 son expansiones decimales **periódicas finitas** o simplemente expansiones decimales finitas.

Definición 5

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$
Si al dividir a por b se obtiene como residuo final cero, se dice que $\dfrac{a}{b}$ tiene una expansión decimal finita.

Analicemos los siguientes ejemplos donde al dividir el numerador por el denominador no es posible obtener un residuo final igual a cero.

Ejemplo 4

Determine la expansión decimal de:

a.) $\dfrac{2}{11}$ b.) $\dfrac{-7}{6}$

Solución

a.) $\dfrac{2}{11}$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2 & 11 \\ \cline{3-3}
 & \underline{-0} & 0.1818... \\
\longrightarrow & 20 & \\
 & \underline{-11} & \\
 & 90 & \\
 & \underline{-88} & \\
\longrightarrow & 20 & \\
 & \underline{-11} & \\
 & 90 & \\
 & \underline{-88} & \\
\longrightarrow & 2 &
\end{array}
$$

Residuo que se repite

Por lo que $\dfrac{2}{11} = 0.1818...$, donde los tres puntos significan que el término 18 se repite indefinidamente y en ese caso escribimos: $\dfrac{2}{11} = 0.\overline{18}$ (la barra horizontal sobre 18 indica que 18 se repite indefinidamente)

b.) $\dfrac{-7}{6}$

$$
\begin{array}{llr|l}
 & & 7 & \underline{\;6\;\;\;\;\;\;\;\;} \\
 & & \underline{-6} & 1.1666... \\
 & & 10 & \\
 & & \underline{-6} & \\
 & \longrightarrow & 40 & \\
 & & \underline{-36} & \\
\text{Residuo} & \longrightarrow & 40 & \\
\text{que} & & \underline{-36} & \\
\text{se} & \longrightarrow & 40 & \\
\text{repite} & & \underline{-36} & \\
 & \longrightarrow & 40 & \\
 & & \underline{-36} & \\
 & \longrightarrow & 4 &
\end{array}
$$

Por lo que $\dfrac{-7}{6} = -1.1666...$, donde los tres puntos significan que el dígito 6 se repite indefinidamente y escribimos: $\dfrac{-7}{6} = -1.1\,\overline{6}$ (observemos que solo el 6 se repite)

Note que en el ejemplo 3, al obtener las expansiones decimales de los números dados no se llega a un residuo final cero, pero a partir de cierto momento, los residuos se repiten, lo que a su vez implica que un dígito - o un grupo de dígitos - del cociente, se repiten (en el ejemplo 3 se repiten 18 y 6 respectivamente) por lo que decimos que $0.\overline{18}$ y $-1.1\overline{6}$ son expansiones decimales periódicas **infinitas**.

Definición 6

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$.
Si al dividir a por b no es posible obtener como residuo final cero, se dice $\dfrac{a}{b}$ tiene una expansión **decimal periódica infinita**.

Los resultados obtenidos en los ejemplos $(1), (2), (3)$ son casos especiales del siguiente hecho.

Todo número racional se puede representar por una expansión decimal periódica finita o por una expansión decimal infinita periódica (o simplemente por una expansión decimal periódica).

Ejercicios 1

Para cada uno de los números siguientes determine su expansión decimal e indique si ésta es finita o periódica infinita.

a.) $\dfrac{-17}{3}$ *b.)* $\dfrac{1}{20}$ *c.)* $\dfrac{-3}{7}$ *d.)* $\dfrac{13}{6}$ *e.)* $\dfrac{421}{100}$

De lo anterior ya sabemos que todo número racional se puede expresar por medio de una expansión decimal periódica (finita o infinita).

Pero, ¿es cierto lo inverso?, o sea ¿toda expansión decimal periódica (finita o infinita) representa un número racional?
Antes de dar una respuesta a estas preguntas analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5

Determine si $0.\overline{23}$ representa un número racional.

Solución

Sean $n = 0.\overline{23}$ entonces $n = 0.232323...$
$n = 0.23\overline{23}$

como se repiten los dígitos multiplicamos por 100 a ambos miembros de la igualdad.

$100\,n = 100(0.23\overline{23})$, realizando la operación

$100\,n = 23.\overline{23}$

Tomemos $100\,n = 23.\overline{23}$ y $n = 0.\overline{23}$, y restemos término a término

$99\,n = 23$

por lo que:

$n = \dfrac{23}{99}$

Por lo tanto $0.\overline{23}$ representa un número racional y $0.\overline{23} = \dfrac{23}{99}$

Ejemplo 6

Determine si -0.456 representa un número racional.

Solución

Observe que en este caso la expansión decimal es finita.

Sea $n = -0.456$

Multiplicando por 1000 a ambos miembros de la igualdad se tiene.

$1000\,n = -465$

por lo que:

$n = \dfrac{-456}{1000}$

Por lo tanto -0.456 representa a un número racional y $-0.456 = \dfrac{-456}{1000}$

Ejemplo 7

Determine si $4.53\overline{1}$ representa un número racional.

Solución

Sea $n = 4.53\overline{1}$

Multipliquemos por 100 a ambos miembros de la igualdad

$100\,n = 453.\overline{1}$

Multipliquemos por 10 a ambos miembros de la igualdad

$1000\,n = 4521.\overline{1}$

Tomemos $1000\,n = 4521.\overline{1}$ y $100\,n = 453.\overline{1}$ y restemos término a término

$1000\,n = 4531.\overline{1}$

$-100\,n = -453.\overline{1}$

$900\,n = 4078$ por lo que

$n = \dfrac{4078}{900}$

Por lo tanto $4.53\overline{1}$ representa un número racional y $4.53\overline{1} = \dfrac{4078}{900}$

Los ejemplos $(4), (5)$ y (6) son casos particulares del siguiente resultado:

Todo número con decimal periódica (finita o infinita)
representa un número racional

Ejercicios 2

Determine el número racional que representa cada una de las siguientes expansiones decimales:

a.) $4,\overline{12}$ *b.*) $0,\overline{325}$ *c.*) $-1,6\overline{2}$ *d.*) $1,3\overline{45}$ *e.*) $-2,505$

1.4 El conjunto de los números Irracionales

Dados los resultados anteriores tenemos que todo número que se representa por una expansión decimal periódica (finita o infinita) es un número racional, pero cabe hacerse dos preguntas:

¿Existen expansiones decimales que no sean períodicas?, y si existen, ¿qué números representan?

Para contestar la primera pregunta consideremos las siguientes expansiones decimales:

a.) 0.20 200 2000 20000 200000 2...

b.) 5.7822 3222 42222 5222222 6...

Observe que en las dos expansiones decimales anteriores, éstas no son periódicas y por los resultados anteriores estas expansiones no representan números racionales.

Las expansiones decimales (a) y (b) anteriores reciben el nombre de **expansiones decimales infinitas no periódicas**.

Para contestar la segunda pregunta tenemos:

Definición 7

Los números que se pueden representar por expansiones decimales infinitas no períodicas reciben el nombre de **números irracionales**.

El conjunto cuyos elementos son los números irracionales, recibe el nombre de conjunto de los números irracionales y se denota con el símbolo $\mathbb{I}$.

Observación: Por la definición de número racional y la de número irracional se tiene que **no existen números que sean racionales e irracionales a la vez**, simbólicamente esto se indica de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

1.5 El conjunto de los números Reales

Definición 8

La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, recibe el nombre de conjunto de los números reales y se denota con el símbolo $\mathbb{R}$, simbólicamente escribimos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

1.5.1 Operaciones definidas en el conjunto de los números reales

En el conjunto de los números reales están definidas dos operaciones, que llamaremos **adición** y **multiplicación**.

Decir que la adición y la multiplicación son operaciones definidas en el conjunto de los números reales significa que si dos números reales se relacionan mediante alguna de estas dos operaciones el resultado es un número real.

Propiedades de adición en el conjunto de los números reales

A_1 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b = b + a$ (la adicción es conmutativa)

Por ejemplo: $5 + 3 = 3 + 5$

A_2 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$ entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$ (la adición es asociativa)

Por ejemplo: $7 + (6 + 2) = (7 + 6) + 2$

A_3 Existe 0, $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a,\ a \in \mathbb{R},\ a + 0 = 0 + a = a$ (0 es el elemento neutro aditivo)

Por ejemplo: $\dfrac{-3}{5} + 0 = \dfrac{-3}{5}$

A_4 Para todo $a, a \in \mathbb{R}$ existe $-a,\ -a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (cada número real posee inverso aditivo)

Por ejemplo: el inverso aditivo de -8 es 8 pues $-8 + 8 = 0$

Propiedades de la multiplicación en el conjunto de los números reales

M_1 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot b = b \cdot a$ (la multiplicación es conmutativa)

Por ejemplo: $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$

M_2 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (la multiplicación es asociativa)

Por ejemplo: $-5 \cdot (2 \cdot 1) = (-5 \cdot 2) \cdot 1$

M_3 Existe 1; $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a,\ a \in \mathbb{R},\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 es el elemento neutro multiplicativo)

Por ejemplo: $4 \cdot 1 = 4$

M_4 Para todo a, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe a^{-1}, $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (cada número real diferente de 0 posee inverso multiplicativo).

Con $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

Por ejemplo: $15 \cdot \dfrac{1}{15} = 1$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Por ejemplo: $-11 \cdot (3 + 9) = (-11) \cdot 3 + (-11) \cdot 9$

La sustracción definida en el conjunto de los números reales

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Llamaremos sustracción de a y b, y denotaremos $a - b$ a la operación definida por:

$$a - b = a + (-b)$$

Por ejemplo:

a.) $5 - 3 = 5 + (-3)$

b.) $\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{7} = \dfrac{5}{4} + \dfrac{-1}{7}$

La división definida en el conjunto de los números reales

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Se define la división de a por b y se denota $a \div b$ a la operación definida por:

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Como se dijo anteriormente $a \div b$ se denota como $\dfrac{a}{b}$ es decir:

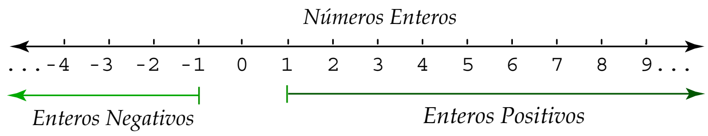
$$a \div b = \frac{a}{b}$$

Observación: Recuerde que si $\frac{a}{b}$ representa un número real entonces b tiene que ser diferente de cero, pues la división por cero no está definida matemáticamente.

1.5.2 Orden en el conjunto de los números reales

Representación de los números reales

Es posible establecer una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta (recta numérica) de la siguiente manera: dada una recta, se selecciona un punto arbitrario de ésta para representar el cero (0) y otro punto a la derecha del cero para representar el uno (1). Luego dividimos toda la recta en segmentos que tengan la misma longitud que el segmento de cero a uno, para así representar los números enteros, los números $1, 2, 3, 4, ...$ (en este orden) a la derecha del cero y los números $-3, -2, -1, ...$ (en este orden) a la izquierda del cero.



Los restantes números reales se representan en esta recta, usando su expansión decimal tal como se muestra en el ejemplo 8.

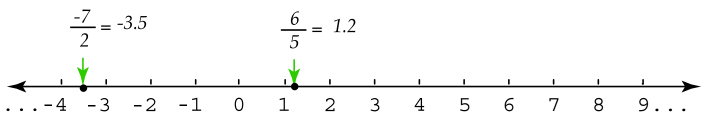
■ Ejemplo 8

Represente en la recta numérica los números $\frac{6}{5}$ y $\frac{-7}{2}$

Solución

$\frac{6}{5} = 1.2 \qquad$ y $\qquad \frac{-7}{2} = -3.5$

Usando estos resultados, podemos representar en la recta numérica $\frac{6}{5}$ y $\frac{-7}{2}$ de la siguiente manera.



■ Definición 9

En una recta numérica el punto que representa el cero recibe el nombre de **origen**.

■ Definición 10

1.) Los números reales que se representan a la derecha del origen se llaman **números reales positivos**.

2.) Los números reales que se representan a la izquierda del origen se llaman **números reales negativos**.

La relación "menor que" en el conjunto de los números reales

En el conjunto de los números reales se define una relación, llamada "menor que", de la siguiente manera.

Definición 11

Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Se dice que a es menor que b, y se escribe $a < b$, si $a - b$ es un número negativo.

Por ejemplo:

a.) $2 < 3$ pues $2 - 3 = -1$ y -1 es negativo

b.) $-3 < 1$ pues $-3 - 1 = -4$ y -4 es negativo

c.) $-5 < -2$ pues $-5 - (-2) = -3$ y -3 es negativo

d.) $-6 < 0$ pues $-6 - 0 = -6$ y -6 es negativo

De la definición de la relación "menor que" se tiene que todo número negativo es menor que cero (ver ejemplo d)

La relación "mayor que" en el conjunto de los números reales

Definición 12

Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$, se dice que a es mayor que b, y se escribe $a > b$, si $a - b$ es un número positivo.

Por ejemplo:

a.) $5 > 2$ pues $5 - 2 = 3$ y 3 es positivo

b.) $3 > -1$ pues $3 - (-1) = 4$ y 4 es positivo

c.) $-2 > -4$ pues $-2 - (-4) = 2$ y 2 es positivo

d.) $7 > 0$ pues $7 - 0 = 7$ y 7 es positivo

De la definición de la relación "mayor que" se tiene que todo número positivo es mayor que cero (ver ejemplo d)

Algunas propiedades de la relación "menor que"

O_1 Si $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ entonces se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones: $a < b,\ b < a,\ a = b$

O_2 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

O_3 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < a \cdot b$

O_4 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $0 < a \cdot b$

O_5 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$ y $0 < b$ entonces $a \cdot b < 0$

O_6 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $0 < a$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$

O_7 Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$ entonces $0 < -a$

O_8 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ entonces $-b < -a$

O_9 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$. Si $0 < \dfrac{a}{b}$ entonces $0 < a \cdot b$

O_{10} Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$. Si $\dfrac{a}{b} < 0$ entonces $a \cdot b < 0$

O_{11} Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

O_{12} Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ c > 0$. Si $a < b$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$

O_{13} Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ c < 0$. Si $a < b$ entonces $b \cdot c < a \cdot c$

Observación:

1.) Si en cada una de las propiedades anteriores se sustituye el símbolo "$<$" por el símbolo "$>$"; las propiedades que se obtienen son ciertas (y corresponden a la relación "mayor que")

2.) Si a y b son números reales: decir que "a es menor que b" es equivalente a decir que "b es mayor que a".

Simbólicamente se escribe:

$$\text{Sean } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$$

$$a < b \Leftrightarrow b > a$$

Por ejemplo:

a.) $2 < 3$ es equivalente a $3 > 2$

b.) $-1 > -5$ es equivalente a $-5 < -1$

c.) $-2 < 0$ es equivalente a $0 > -2$

Notación: Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. La expresión "$a < b$ ó $a = b$" usualmente se escribe $a \leq b$.

La expresión "$a \leq b$" se lee "a" es menor o igual que "b".

Observación:

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Para que "$a \leq b$" sea verdadera basta con que se cumpla una y sólo una de las siguientes condiciones:

1.) $a < b$;

2.) $a = b$

Ejemplo 9

a.) $4 \leq 6$ es verdadera pues $4 < 6$

b.) $2 \leq 2$ es verdadera pues $2 = 2$

c.) $5 \leq 3$ es falsa pues no se cumple $5 < 3$ ni $5 = 3$

Notación: Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. La expresión "$a > b$ o $a = b$" usualmente se escribe $a \geq b$.

La expresión "$a \geq b$" se lee "a" es mayor o igual que "b".

Observación: Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Para que "$a \geq b$" sea verdadera basta con que se cumpla una y sólo una de las siguientes condiciones:

1.) $a > b$;

2.) $a = b$

Ejemplo 10

a.) $3 \geq -2$ es verdadera pues $3 > -2$

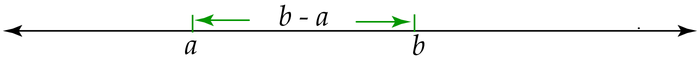
b.) $-2 \geq 0$ es falsa pues no se cumple que $-2 > 0$ ni $-2 = 0$

c.) $6 \geq 6$ es verdadera pues $6 = 6$

Valor absoluto en el conjunto de los números reales

■ **Definición 13**

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $a \leq b$; se llama distancia entre a y b, al número no negativo $b - a$.



Notemos que la distancia entre dos números reales diferentes entre sí es un número positivo, pues el menor se resta del mayor.

Véanse los siguientes ejemplos:

1.) La distancia entre 1 y 4 es 3, pues $4 - 1 = 3$

2.) La distancia entre 2 y -3 es 5, pues $2 - (-3) = 5$

3.) La distancia entre -7 y -3 es 4, pues $-3 - (-7) = 4$

Ejercicios 3

Para cada uno de los casos siguientes determine la distancia entre los números a y b si:

1.) $a = 2;\ b = 9$

2.) $a = -3;\ b = 5$

3.) $a = 0;\ b = 6$

4.) $a = 2;\ b = -7$

5.) $a = -1;\ b = -9$

6.) $a = -4;\ b = 0$

Supongamos que se desea calcular la distancia entre 0 y un número real x cualquiera. A esta distancia la denotaremos por $|\ x\ |$ y se llama **valor absoluto de x**.

Así: $|\ x\ |$ indica la distancia entre x y 0

Ejemplo 11

a.) $\mid 3 \mid = 3 - 0 = 3$ es decir $\mid 3 \mid = 3$

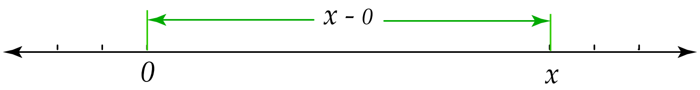
b.) $\mid 0 \mid = 0 - 0 = 0$ es decir $\mid 0 \mid = 0$

c.) $\mid -5 \mid = 0 - (-5) = 5$ es decir $\mid -5 \mid = 5$

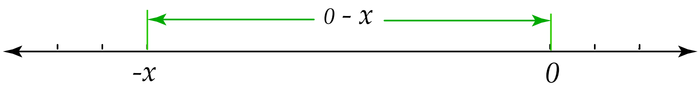
d.) $\mid 5 \mid = 5 - 0 = 5$ es decir $\mid 5 \mid = 5$

En general, sea $x \in \mathbb{R}$

1.) Si $x > 0$; tenemos $\mid x \mid = x - 0 = x$, es decir si $x > 0$ entonces $\mid x \mid = x$



2.) Si $x < 0$; tenemos $\mid x \mid = 0 - x = -x$, es decir si $x < 0$ entonces $\mid x \mid = -x$



3.) Si $x = 0$; tenemos $\mid x \mid = 0 - 0 = 0$, es decir $\mid 0 \mid = 0$

Así tenemos la siguiente definición

Definición 14

Para cada número real x, definimos su valor absoluto, y lo representamos por $\mid x \mid$ de la manera siguiente:

a.) $\mid x \mid = x$ si $x \geq 0$ ó

b.) $\mid x \mid = -x$ si $x < 0$

Ejercicios 4

Usando la definición de valor absoluto, calcule:

a.) $\mid 11 \mid$

b.) $\mid 21 \mid$

c.) $\mid -13 \mid$

d.) $\mid -109 \mid$

e.) $\mid 0 \mid$

f.) $\mid -115 \mid$

1.6 Aritmética en el Conjunto de los Números Reales

Introducción

Los temas presentados anteriormente nos dan una visión acerca del conjunto de los números reales, las operaciones que en este conjunto se definen y las propiedades que éstas poseen.

Nuestro objetivo en esta sección es lograr que el estudiante adquiera destrezas en la realización de las operaciones básicas en el conjunto de los números reales (adición, sustracción, multiplicación y división). Para esto enunciamos algunas propiedades en el conjunto de los números naturales, enteros, racionales y en general en el conjunto de los números reales, así como los algoritmos que se utilizan para realizar dichas operaciones.

Queremos enfatizar la importancia de los temas que en esta sección se desarrollan, pues ellos constituyen una base fundamental para un buen desempeño y así obtener una mejor comprensión por parte de los estudiantes de los temas que estudiaremos en el capítulo siguiente.

1.7 Propiedades de los números enteros

1.7.1 Operaciones definidas en el conjunto de los números enteros

Nota:

1.) Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$ entonces decimos que a tiene signo positivo $(+)$

2.) Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a < 0$ entonces decimos que a tiene signo negativo $(-)$

Generalmente al representar los números enteros positivos el signo $(+)$ se omite, no así para los números negativos los cuales al ser representados siempre debe indicárseles el signo $(-)$.

1.7.2 Adición de los números enteros

Caso 1: **Adición de números enteros de igual signo**

En este caso, se suman sus valores absolutos y al resultado se le hace corresponder el signo de ambos números.

■ **Ejemplo 12**

Determine el resultado que se obtiene al sumar -8 y -5

Solución

$|-8| = 8$, $|-5| = 5$; además el signo de -8 y -5 es negativo $(-)$ por lo que:

$-8 + -5 = -(8+5) = -13$ O sea, $-8 + -5 = -13$

■ **Ejemplo 13**

Determine el resultado que se obtiene al sumar -9 y -11

Solución

$|-9| = 9$, $|-11| = 11$; además el signo de -9 y -11 es negativo $(-)$ por lo que:

$-9 + -11 = -(9 + 11) = -20$ O sea, $-9 + -11 = -20$

■ **Ejemplo 14**

Determine el resultado que se obtiene al sumar 27 y 4

Solución

$|27| = 27$, $|4| = 4$; además el signo de 27 y 4 es positivo $(+)$ por lo que:

$27 + 4 = 31$

Los ejemplos (1), (2) y (3) son casos particulares del siguiente resultado:

Si $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{aligned} -a + -b &= -(a + b) \\ a + b &= +(a + b) \end{aligned}$$

Caso 2: **Adición de números enteros con distinto signo**

En este caso, el resultado viene dado por la diferencia de los valores absolutos de ambos números (el mayor menos el menor) a cuyo resultado se le hace corresponder el signo del número de mayor valor absoluto.

■ **Ejemplo 15**

Determine el resultado que se obtiene al sumar -8 y 9

Solución

$|-8| = 8$, $|9| = 9$; de donde: $|9| > |-8|$ y como 9 tiene signo positivo $(+)$ entonces:

$-8 + 9 = 9 - 8 = 1$ es decir, $-8 + 9 = 1$

■ **Ejemplo 16**

Determine el resultado que se obtiene al sumar 5 y -12

Solución

$\mid 5 \mid = 5, \ \mid -12 \mid = 12$; de donde: $\mid -12 \mid > \mid 5 \mid$ y como -12 tiene signo negativo $(-)$ entonces:

$5 + -12 = -(12 - 5) = -7$ es decir, $5 + -12 = -7$

Ejemplo 17

Determine el resultado que se obtiene al sumar -6 y 2

Solución

$\mid -6 \mid = 6, \ \mid 2 \mid = 2$; de donde: $\mid -6 \mid > \mid 2 \mid$ y como -6 tiene signo negativo $(-)$ entonces:

$-6 + 2 = -(6 - 2) = -4$ es decir, $-6 + 2 = -4$

Ejercicios 5

1.) Escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

1.) $-14 + 72$
3.) $12 + (-12)$
2.) $-128 + (-29)$
4.) $-142 + 67$
5.) $27 + (-32)$
6.) $25 + 13$

2.) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Usando el hecho de que $a - b = a + (-b)$ escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

1.) $-121 - 15$
2.) $-40 - 70$
3.) $-1 - 4$

1.7.3 Multiplicación de números enteros

Recordemos que para $a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}$ se tiene que :

1.) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < a \cdot b$

2.) Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $0 < a \cdot b$

3.) Si $a < 0$ y $0 < b$ entonces $a \cdot b < 0$

4.) Si $0 < a$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$

Las propiedades (1) y (2) se pueden resumir diciendo:

Si a y b tienen igual signo entonces a $\cdot$ b es positivo

Por ejemplo

a.) $(-8) \cdot (-6) = 48$
b.) $(8) \cdot (-6) = -48$
c.) $(-8) \cdot 6 = -48$
d.) $12 \cdot 5 = 60$
e.) $(-7) \cdot (-9) = 63$
f.) $(-3)(-4)(-1) = -12$

Notación: Sea $a \in \mathbb{Z}$, entonces:

a.) $(-1)a = -a$

b.) $-(-a) = a$

Por ejemplo

a.) $(-1)5 = -5$
b.) $(-1)3 = -3$
c.) $-(-12) = 12$
d.) $-(-25) = 25$

■ **Ejemplo 18**

Escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $8 - (-6)$

Solución

$$\begin{aligned} 8 - (-6) &= 8 + -(-6) \\ &= 8 + 6 \\ &= 14 \end{aligned}$$

$\therefore\ 8 - (-6) = 14$

b.) $-17 - (-13)$

Solución

$$\begin{aligned} -17-(-13) &= -17+-(-13) \\ &= -17+13 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$\therefore \quad -17-(-13)=-4$

c.) $-(-4)-3$

Solución

$$\begin{aligned} -(-4)-3 &= 4-3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore \quad -(-4)-3=1$

Ejemplo 19

Escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $6-(-5)-9$

Solución

$$\begin{aligned} 6-(-5)-9 &= 6+5-9 \\ &= 11-9 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\therefore \quad 6-(-5)-9=2$

b.) $-1-(-2)+30$

Solución

$$\begin{aligned} -1-(-2)+30 &= -1+2+30 \\ &= 1+30 \\ &= 31 \end{aligned}$$

$\therefore \quad -1-(-2)+30=31$

Ejercicios 6

Escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-16-(-8)$
b.) $-(-9)+3$
c.) $-(-6)-(-1)$
d.) $-(-11)+5-2$
e.) $-3-(-4)-(-3)$
f.) $2-13-6$
g.) $25-28+-(5)$
h.) $2-(-1)+3$
i.) $1-2-6+8$

1.7.4 Operaciones combinadas

Consideremos la expresión $2+3\cdot 5$

El resultado de realizar las operaciones puede ser 25 (si se realiza la suma primero y luego el producto) o bien 17 (si se realiza el producto primero y luego la suma). Sólo uno de los resultados debe ser válido.

Convenio 1

En una expresión que no involucre paréntesis y en la cual aparecen conjuntamente el producto y la suma (o resta) se entenderá que el producto ha de realizarse primero.

Lo anterior se expresa brevemente de la siguiente forma:

"La multiplicación tiene prioridad sobre la adición y la sustracción"

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} 2+3\cdot 5 &= 2+15 \\ &= 2+15 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$\therefore \quad 2+3\cdot 5=17$

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} 6-4\cdot 7 &= 6-28 \\ &= -22 \end{aligned}$$

$\therefore \quad 6-4\cdot 7=-22$

■ **Ejemplo 20**

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $7 \cdot 2 - 13$

Solución

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2 - 13 &= 14 - 13 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que, $7 \cdot 2 - 13 = 1$

b.) $3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3$

Solución

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3 &= 6 - 20 - 3 \\ &= -14 - 3 \\ &= -17 \end{aligned}$$

Por lo que, $3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3 = -17$

Ejercicios 7

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-8 \cdot 7 + 12 \cdot 3 - 6$

b.) $11 + 6(-7) - 4 \cdot 3$

c.) $-8 \cdot (-4) - 5 \cdot (-3) - 10$

d.) $2 \cdot (3) + 5 - 3 \cdot 8$

Convenio 2

En una expresión que involucre paréntesis se deben realizar primero las operaciones indicadas dentro del paréntesis.

■ **Ejemplo 21**

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-5 + 4 \cdot (2 - 7)$

Solución

$$\begin{aligned} -5+4\cdot(2-7) &= -5+4\cdot(-5)\\ &= -5+(-20)\\ &= -25\end{aligned}$$

Por lo que, $\quad -5+4\cdot(2-7) = -25$

b.) $-2\cdot(-12)-3\cdot(5-6)+4$

Solución

$$\begin{aligned} -2\cdot(-12)-3\cdot(5-6)+4 &= 24-3(-1)+4\\ &= 24+3+4\\ &= 31\end{aligned}$$

Por lo que, $\quad -2\cdot(-12)-3\cdot(5-6)+4 = 31$

Ejercicios 8

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $(-2-8)\cdot 5+4$

b.) $-2-(-2+6)\cdot 5$

c.) $12\cdot(3-6)-6\cdot(6+7)$

d.) $-(3-3)\cdot 5+3\cdot(2-7)$

Cuando se presenta un **paréntesis dentro de otro paréntesis** procedemos a realizar las operaciones indicadas en el paréntesis interno y así sucesivamente hasta obtener el número correspondiente a la expresión.

Ejemplo 22

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-2+3\cdot[6-2\cdot(3-12)]$

Solución

$$\begin{aligned} -2+3\cdot[6-2\cdot(3-12)] &= -2+3\cdot[6-2\cdot(-9)]\\ &= -2+3\cdot[6+18]\\ &= -2+3\cdot[24]\\ &= -2+72\\ &= 70\end{aligned}$$

Por lo que, $-2+3\cdot[6-2\cdot(3-12)]=70$

b.) $-\{6+7\cdot(5-2\cdot 4)+4\}$

Solución

$$\begin{aligned}
-\{6+7\cdot(5-2\cdot 4)+4\} &= -\{6+7\cdot(5-8)+4\}\\
&= -\{6+7\cdot(-3)+4\}\\
&= -\{6-21+4\}\\
&= -\{-11\}\\
&= 11
\end{aligned}$$

Por lo que, $-\{6+7\cdot(5-2\cdot 4)+4\}=11$

Ejercicios 9

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $2\cdot[3\cdot(7-11)-21]-4$

b.) $4-5\cdot[3\cdot(5-2)+8-2\cdot 6]$

Ejemplo 23

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $5-2\cdot[3\cdot(7-4)-(-12+3)]-6$

Solución

$$\begin{aligned}
5-2\cdot[3\cdot(7-4)-(-12+3)]-6 &= 5-2\cdot[3\cdot(3)-(-9)]-6\\
&= 5-2\cdot[9+9]-6\\
&= 5-2\cdot(18)-6\\
&= 5-36-6\\
&= -31-6\\
&= -37
\end{aligned}$$

Por lo que, $5-2\cdot[3\cdot(7-4)-(-12+3)]-6=-37$

b.) $-7\cdot(3-4\cdot 2)+2\cdot[-2\cdot(-6-1)+3]$

Solución

$$\begin{aligned}
-7\cdot(3-4\cdot 2)+2\cdot[-2\cdot(-6-1)+3]\} &= -7\cdot(3-8)+2\cdot[-2\cdot(-7)+3]\}\\
&= -7\cdot(-5)+2\cdot[14+3]\}\\
&= 35+2\cdot(17)\\
&= 35+34\\
&= 69
\end{aligned}$$

Por lo que, $-7\cdot(3-4\cdot 2)+2\cdot[-2\cdot(-6-1)+3]=69$

Ejercicios 10

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-3[4(3-2)-(-5+16)+12]-16$

b.) $5-2\cdot[(5-7)+(3-2)-1]\cdot(-1)$

c.) $1-8\cdot[10\cdot(-15-2)-17]+6\cdot(-7-84)$

d.) $5-2\cdot(3-11)\cdot(-4)[5-(6-9)]$

Ejemplo 24

Determine el número que representa la expresión: $12-\{-2+3\cdot[4-(-8+12)+1]-2\}+3$

Solución

$$\begin{aligned}
12-\{-2+3\cdot[4-(-8+12)+1]-2\}+3 &= 12-\{-2+3\cdot[4-(4)+1]-2\}+3\\
&= 12-\{-2+3\cdot[1]-2\}+3\\
&= 12-\{-2+3-2\}+3\\
&= 12-\{-1\}+3\\
&= 12+1+3\\
&= 16
\end{aligned}$$

Por lo que, $12-\{-2+3\cdot[4-(-8+12)+1]-2\}+3=16$

Ejercicios 11

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones.

a.) $-\{-10 \cdot [7 \cdot 8 - (5 - 9)] + 17\} + 5$

b.) $-22 + 15 - 17 - 14 + 35$

c.) $32 - 77 - 22 + 14$

d.) $-8 - 22 - 14 + 25$

e.) $2(13 - 2) + [\{3 - 4 + (2 - 7)\} - 8] - 6$

f.) $8 - 6 \cdot [5 \cdot (6 - 3 \cdot \{-3 \cdot (5 - 2)\} + 2) - 1] + 7$

g.) $3 \cdot [2 \cdot \{-(3 - 2) + 7 \cdot 4 - 5 \cdot (11 - 6)\} + 8] - 2$

Observación: La adición, la sustracción y la multiplicación son operaciones definidas en el conjunto de los números enteros, esto es, si se relacionan dos números enteros, por alguna de estas operaciones el resultado es un número entero. Pero la división no es una operación definida en el conjunto de los números enteros pues, por ejemplo:

a.) $3 \div 2 = 1.5$ y 1.5 no es un número entero

b.) $-7 \div 3 = -2.\overline{3}$ y $-2.\overline{3}$ no es un número entero

c.) $5 \div (-4) = -1.25$ y -1.25 no es un número entero

Sin embargo, para el conjunto de los números enteros, tenemos el siguiente resultado.

1.7.5 Algoritmo de la división

Si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ entonces existen c y r; con $c \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ tales que: $a = b \cdot c + r$, con $r < b$ $(*)$

Nota: Con respecto a la igualdad anterior el número c es el cociente, y el número r es el residuo que se obtiene al dividir a por b.

Consideremos los siguientes ejemplos:

1.) Realizando la división de 150 por 6 tenemos que:

$$\begin{array}{r|l}
150 & \underline{\;6\;} \\
\underline{-12} & 25 \\
30 & \\
\underline{-30} & \\
0 &
\end{array}$$

Como $0 < 6$, el procedimento de división se detiene.

El cociente es 25 y el residuo es 0, y además por el algoritmo de la división: $150 = 6 \cdot 25 + 0$

2.) Realizando la división de 23 por 4 tenemos que:

$$\begin{array}{r|l} 23 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{-20} & 5 \\ 3 & \end{array}$$

Como $3 < 4$, el procedimento de división se detiene.

El cociente es 5 y el residuo es 3, y además por el algoritmo de la división: $23 = 4 \cdot 5 + 3$

Ejercicios 12

Por medio de la división determine el cociente c y el residuo r para cada uno de los casos siguientes:

a.) $49 = 5 \cdot c + r$

b.) $476 = 7 \cdot c + r$

c.) $135 = 45 \cdot c + r$

d.) $9 = 15 \cdot c + r$

1.7.6 Divisibilidad

■ Definición 15

Sean $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$. Se dice que **:** a **es divisible por** b, si al dividir $\mid a \mid$ por $\mid b \mid$, se tiene como cociente un número natural c, y como residuo 0.

■ Ejemplo 25

Determine si 72 es divisible por 6:

Solución

Como $\mid 72 \mid = 72$, $\mid 6 \mid = 6$ y al realizar la división de 72 por 6 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 72 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{-6} & 12 \\ 12 & \\ \underline{-12} & \\ 0 & \end{array}$$

El residuo es 0 y el cociente es 12 (un número natural). Por lo tanto 72 es divisible por 6.

■ Ejemplo 26

Determine si 37 es divisible por -5:

Solución

Como $|\ 37\ | = 37$, y $|\ -5\ | = 5$ y al realizar la división de 37 por 5 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 37 & \underline{\ 5\ } \\ \underline{-35} & 7 \\ 2 & \end{array}$$

El residuo es 2 y el cociente es 7 (un número natural); al ser el residuo diferente de cero, 37 no es divisible por -5.

Ejemplo 27

Determine si -135 es divisible por 7:

Solución

Como $|\ -135\ | = 135$, $|\ 7\ | = 7$ y al realizar la división de 135 por 7 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 135 & \underline{\ 7\ \ } \\ \underline{-7} & 19 \\ 65 & \\ \underline{-63} & \\ 2 & \end{array}$$

El cociente es 19 y el residuo es 2, al ser el residuo diferente de 0, -135 no es divisible por 5.

Ejemplo 28

Determine si -51 es divisible por -3:

Solución

Como $|\ -51\ | = 51$ y $|\ -3\ | = 3$ y al realizar la división de 51 por 3 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 51 & \underline{\ 3\ \ } \\ \underline{-3} & 17 \\ 21 & \\ \underline{-21} & \\ 0 & \end{array}$$

El cociente es 17 y el residuo es 0, por lo tanto 51 es divisible por -3.

Ejercicios 13

Realizando la división correspondiente conteste las siguientes preguntas:

1.) ¿Es 154 divisible por 7? Justifique su respuesta.

2.) ¿Es 39 divisible por -12? Justifique su respuesta.

3.) ¿Es -104 divisible por -13? Justifique su respuesta.

4.) ¿Es -71 divisible por 17? Justifique su respuesta.

1.7.7 Algunos criterios de divisibilidad

De acuerdo con el concepto de divisibilidad estudiado anteriormente se tiene que para determinar si un número entero a es divisible por un número entero b, debe realizarse la división de $|\ a\ |$ por $|\ b\ |$. Si el residuo que se obtiene al realizar esta división es cero, entonces a es divisible por b. Si este residuo es diferente de cero entonces a no es divisible por b. Este procedimiento resulta ser un poco largo cuando las cantidades consideradas son "muy grandes".

A continuación enunciaremos algunos criterios de divisibilidad que nos permitirán determinar, en forma abreviada, algunos casos en que un número entero a es divisible por un número natural b.

Para los criterios que siguen entenderemos por dígitos de nuestro sistema de numeración decimal los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Criterio de la divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por 2, si y sólo sí si el dígito de las unidades es divisible por 2.

Por ejemplo:

a.) 374 es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (4) es divisible por 2.

b.) 5620 es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (0) es divisible por 2.

c.) 537 no es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (7) no es divisible por 2.

d.) -238 es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (8) es divisible por 2.

e.) -159 no es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (9) no es divisible por 2.

Ejercicios 14

Usando el criterio anterior determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 2.

a.) 1268

b.) -35794

c.) 9237

d.) 2450

e.) -379

f.) -475

Nota:

1.) Si un número entero es divisible por 2 recibe el nombre de **número par**.

2.) Si un número entero no es divisible por 2, recibe el nombre de **número impar**.

Criterio de la divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por 3 si y sólo sí la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Por ejemplo:

a.) 504 es divisible por 3, pues $5 + 0 + 4 = 9$ y 9 es divisible por 3.

b.) 957 es divisible por 3, pues $9 + 5 + 7 = 21$ y 21 es divisible por 3.

c.) -375 es divisible por 3, pues $3 + 7 + 5 = 15$ y 15 es divisible por 3.

d.) -218 no es divisible por 3, pues $2 + 1 + 8 = 11$ y 11 no es divisible por 3.

e.) -4523 no es divisible por 3, pues $4 + 5 + 2 + 3 = 14$ y 14 no es divisible por 3.

Observe que en los casos (c), (d) y (e) anteriores para aplicar el criterio de divisibilidad, no se toma en cuenta el signo $(-)$

Ejercicios 15

Usando el criterio de divisibilidad por 3, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 3.

a.) 374

b.) -1047

c.) 1983

d.) 17983

e.) -5383

f.) -285

Criterio de la divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por 5, si el dígito de las unidades es 5 (cinco) o es 0 (cero).

Por ejemplo:

a.) 725 es divisible por 5, pues el dígito de las unidades es 5.

b.) 490 es divisible por 5, pues el dígito de las unidades es 0.

c.) -468 no es divisible por 5, pues el dígito de las unidades no es 5, ni es 0.

Ejercicios 16

Usando el criterio de la divisibilidad por 5, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 5.

a.) -1345
b.) 753
c.) 920
d.) -5554
e.) -41270
f.) 11235

Criterio de la divisibilidad por 7

Un número entero n es divisible por 7 si y sólo sí la resta entre, el valor absoluto del número que se obtiene al suprimir el dígito de las unidades de n y el doble del dígito de las unidades es divisible por 7.

Ejemplo 29

Determine si 182 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de 182 es 2 y el doble de este dígito es 4; además: $18 - 4 = 14$

Como 14 es divisible por 7, entonces 182 es divisible por 7.

Ejemplo 30

Determine si 426 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de 426 es 6 y el doble de este dígito es 12; además: $42 - 12 = 30$

Como 30 **no** es divisible por 7, entonces 426 **no** es divisible por 7.

Ejemplo 31

Determine si 108 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de 108 es 8 y el doble del dígito es 16; además: $10 - 16 = -6$

Como -6 **no** es divisible por 7, entonces 108 **no** es divisible por 7.

Ejemplo 32

Determine si 119 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de 119 es 9 y el doble del dígito es 18; además: $11 - 18 = -7$

Como -7 es divisible por 7, entonces 119 es divisible por 7.

Ejemplo 33

Determine si -263 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de -263 es 3 y el doble del dígito es 6, $\mid -26 \mid = 26$ y además: $26 - 6 = 20$

Como 20 **no** es divisible por 7, entonces -263 **no** es divisible por 7.

Ejemplo 34

Determine si -385 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de -385 es 5 y el doble del dígito es 10, $\mid -38 \mid = 38$ y además: $38 - 10 = 28$

Como 28 es divisible por 7, entonces -385 es divisible por 7.

Ejercicios 17

Usando el criterio de la divisibilidad por 7, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 7.

a.) 161
b.) -277
c.) 581
d.) -669
e.) -735
f.) 806

Criterio de la divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por 11 si y sólo sí la diferencia entre la suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares y la suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es divisible por 11.

Ejemplo 35

Determine si 8349 es divisible por 11

Solución

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: $8 + 4 = 12$.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: $3 + 9 = 12$, además: $12 - 12 = 0$

Como 0 es divisible por 11, entonces 8349 es divisible por 11.

Ejemplo 36

Determine si -7293 es divisible por 11

Solución

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: $7 + 9 = 16$.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: $2 + 3 = 5$, además: $16 - 5 = 11$

Como 11 es divisible por 11, entonces -7293 es divisible por 11.

Ejemplo 37

Determine si 7869 es divisible por 11

Solución

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: $7 + 6 = 13$.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: $8 + 9 = 17$, además: $13 - 17 = -4$

Como -4 no es divisible por 11, entonces 7869 no es divisible por 11.

Ejercicios 18

Usando el criterio de la dibisibilidad por 11, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 11.

a.) 23716
b.) -37631
c.) -133375
d.) 66687
e.) 17983
f.) -21813

1.7.8 Múltiplos y factores de un número entero

Definición 16

Sean $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, si $a = b \cdot c$ se dice que a es un número múltiplo de b y c; además b y c son factores o divisores de a.

Ejemplo 38

1.) Como $45 = 9 \cdot 5$ entonces 45 es un múltiplo de 9 y 5 , 9 es un factor o divisor de 45.

2.) Como $37 = 1 \cdot 37$ entonces 37 es un múltiplo de 37 y 1, entonces 1 y 37 son factores o divisores de 37.

3.) Como $-42 = -6 \cdot 7$ entonces -42 es un múltiplo de -6 y 7 entonces -6 y 7 son factores o divisores de -42.

Definición 17

Sean $a \in \mathbb{Z}$ y b un factor de a. Si $b \in \mathbb{N}$ entonces b recibe el nombre de factor natural de a.

Ejemplo 39

1.) Como $-30 = -2 \cdot 15$ y $15 \in \mathbb{N}$ entonces 15 recibe el nombre de factor natural de -30.

2.) Como $77 = 11 \cdot 7$ y $11 \in \mathbb{N}$, $7 \in \mathbb{N}$ entonces 11 y 7 reciben el nombre de factores naturales de 77.

Ejemplo 40

Determine los factores (divisores) naturales de 14

Solución

14 es divisible únicamente por $1, -1, -2, 7, -7, 14$ y -14 por lo tanto los factores (divisores) naturales de 14 son:
$1, 2, 7$ y 14.

Ejemplo 41

Determine todos los factores (divisores) naturales de 6

Solución

6 es divisible únicamente por $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ y -6 entonces los factores (divisores) naturales son:
$1, 2, 3$ y 6.

Ejemplo 42

Determine todos los factores (divisores) naturales de 17

Solución

17 es divisible únicamente por $1, -1, 17$ y -17 entonces los factores (divisores) naturales de 17 son 1 y 17.

Ejercicios 19

1.) Determine todos los factores naturales de 36

2.) Determine todos los factores naturales de 39

3.) Determine todos los factores naturales de 43

Observación:

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces siempre se cumple que $1,\ -1,\ n$ y $-n$ son factores o divisores de n.
Pues: $n = 1 \cdot n,\ \ n = (-1) \cdot (-n)$

1.7.9 Números primos y números compuestos

■ **Definición 18**

Sea $n \in \mathbb{N},\ \ n > 1$.
Se dice que n es un **número primo**, si sus únicos factores (divisores) naturales son 1 y n.

■ **Ejemplo 43**

a.) 23 es un número primo pues sus únicos factores (divisores) naturales son 1 y 23.

b.) 77 no es un número primo pues sus factores naturales son $1,\ 7,\ 11$ y 77.

Ejercicios 20

1.) Escriba los números naturales primos menores que 30.

2.) ¿Es 43 un número primo? Justifique su respuesta.

3.) ¿Es 69 un número primo? Justifique su respuesta.

4.) ¿Cuáles números naturales pares son números primos?

■ **Definición 19**

Sea $n \in \mathbb{N},\ \ n > 1$.

Se dice que n es un **número compuesto**, si n **no** es un número primo.

Ejercicios 21

Escriba cinco números naturales compuestos.

■ **Definición 20**

Sea $a \in \mathbb{Z}$
Si c es un factor natural de a y c es un número primo se dice que c es un factor primo de a.

Ejemplo 44

a.) $15 = 5 \cdot 3$ y $5,\ 3$ son números primos por lo que 5 y 3 son factores primos de 15

b.) $42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, como $2,\ 3$ y 7 son números primos y a su vez son factores de 42, entonces $2,\ 3$ y 7 son factores primos de 42.

Ejercicios 22

Determine los factores primos, de los siguientes números:

a). 6   *b*.) 10   *c*.) -55 *d*.) -140 *e*.) -73

1.7.10 Representación de un número compuesto como el producto de números primos

Aceptemos sin demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1

Todo número natural compuesto se puede expresar como producto de números primos.
A la representación de un número natural como el producto de factores primos la llamaremos **factorización prima** o **factorización completa** del número.

Aceptaremos además que la factorización prima de un número natural es única, salvo el orden de los factores.

Existen diferentes formas de ir indicando el procedimiento para la obtención de la factorización prima de un número natural. Estas formas lo que buscan es simplificar el trabajo, pero todos conducen a un mismo resultado. A continuación indicamos una forma, que consideramos simplifica bastante el trabajo y a la vez permite obtener la factorización completa de un número en una forma ordenada.

Ejemplo 45

Determine la factorización prima de 300

Solución

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Así $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

Ejemplo 46

Determine la factorización prima de 105

Solución

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Así $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Ejercicios 23

Para cada uno de los números, determine su factorización prima:

a.) 504 *b.*) 1170 *c.*) 735 *d.*) 154 *e.*) 675

1.7.11 Máximo divisor común

Los conjuntos cuyos elementos son los divisores naturales de 12 y 18 respectivamente son:

$D_{12}: \left\{ \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, 4, \boxed{6}, 12 \right\}$

$D_{18}: \left\{ \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{6}, 9, 18 \right\}$

Encerrados en un rectángulo aparecen los números que pertenecen a ambos conjuntos, al mayor de estos números lo llamaremos **máximo divisor común** de 12 y 18, en este caso 6, y escribimos M.D.C.$(12, 18) = 6$

En general si a, b, ..., c son números naturales y el máximo divisor común de ellos es k entonces escribimos:

$$\text{M.D.C.}(a,\ b,\ ...,\ c) = k$$

Ejemplo 47

Determine M.D.C.(12, 40, 56)

Solución

$D_{12}: \left\{ 1,\ 2,\ 3,\ \boxed{4}, 6,\ 12 \right\}$

$D_{40}: \left\{ 1,\ 2,\ \boxed{4}, 5,\ 8,\ 10,\ 20,\ 40 \right\}$

$D_{56}: \left\{ 1,\ 2,\ \boxed{4}, 7,\ 8,\ 14,\ 28,\ 56 \right\}$

Así obtenemos que M.D.C.(12, 40, 56) $= 4$

■ Definición 21

El máximo divisor común de dos o más números naturales es el mayor número natural que es divisor de cada uno de los números dados.

Ejercicios 24

Verifique que:

1.) M.D.C. (54, 90) $= 6$

2.) M.D.C. (5, 25, 90) $= 5$

El procedimiento que hemos visto para determinar el máximo divisor común de dos o más números no es muy práctico cuando se trabaja con cantidades grandes.

Podemos obtener el mismo resultado con el procedimiento que se presenta en el siguiente ejemplo.

■ Ejemplo 48

Determine M.D.C.(2520, 720, 540)

Solución

El procedimiento se basa en escribir los divisores primos comunes de los tres números en una columna a la derecha de la línea vertical.

$$\begin{array}{rrr|l}
2520 & 720 & 540 & 2 \\
1260 & 360 & 270 & 2 \\
630 & 180 & 135 & 3 \\
210 & 60 & 45 & 3 \\
70 & 20 & 15 & 5 \\
14 & 4 & 3 &
\end{array}$$

El M.D.C de los tres números dados al inicio se obtiene multiplicando los números que están a la derecha de la línea vertical, o sea:

M.D.C.(2520, 720, 540) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

Así, M.D.C.(2520, 720, 540) $= 180$

Ejercicios 25

1.) Determine M.D.C.(2745, 5400, 3780)

2.) Determine M.D.C.(2478, 29190, 9360)

1.7.12 Mínimo múltiplo común

Los conjuntos cuyos elementos son los múltiplos naturales de 3 y 2 son respectivamente:

$$M_3 = \left\{ 3, \boxed{6}, 9, \boxed{12}, 15, \boxed{18}, 21, \boxed{24}, ... \right\}$$

$$M_2 = \left\{ 2, 4, \boxed{6}, 8, 10, \boxed{12}, 14, 16, \boxed{18}, 20, 22, \boxed{24}, 26, ... \right\}$$

Encerrados en un rectángulo aparecen los números que pertenecen a ambos conjuntos, al menor de todos estos números se le asigna el nombre de **mínimo múltiplo común** de 3 y 2, en este caso 6, y escribimos m.m.c.$(3, 2) = 6$

En general si a, b, ..., c son números naturales y el mínimo múltiplo común de ellos es r entonces escribimos.

$$\text{m.m.c.}(a,\ b,\ ...,\ c) = r$$

Ejemplo 49

Determine m.m.c.(12, 18, 24)

Solución

$$M_{12} : \left\{ 12, 24, 36, 48, 60, \boxed{72}, 84, 96, 108, 120, 132, 144, ... \right\}$$

$$M_{18} : \left\{ 18, 36, 54, \boxed{72}, 90, 108, 126, 144, 162, ... \right\}$$

$$M_{24} : \left\{ 24, 48, \boxed{72}, 96, 120, 144, 168 ... \right\}$$

Así obtenemos que m.m.c.(12, 18, 24) $= 72$

Definición 22

El mínimo múltiplo común de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de cada uno de los números dados.

El procedimiento que hemos visto para determinar el mínimo múltiplo común de dos o más números no es muy práctico cuando se trabaja con cantidades grandes.

Podemos obtener el mismo resultado con el procedimiento que se presenta en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 50

Determine m.m.c.(12, 28, 24)

Solución

El procedimiento se basa en escribir los factores primos de al menos uno de los tres números en una columna a la derecha de la línea vertical.

12	18	24	2
6	9	12	2
3	9	6	2
3	9	3	3
1	3	1	3
1	1	1	

Observe que el procedimiento se "detiene" cuando el número que se obtiene en cada una de las columnas a la izquierda de la línea vertical es 1.

El mínimo múltiplo común de los números dados se obtiene multiplicando los números que están a la derecha de la línea vertical, o sea:

m.m.c.(12, 18, 24) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

Así m.m.c.(12, 18, 24) $= 72$

Ejercicios 26

Determine:

1.) m.m.c.(14, 22)
2.) m.m.c.(12, 17, 20)
3.) m.m.c.(24, 40, 56)
4.) m.m.c.(120, 360, 180)
5.) m.m.c.(121, 64)
6.) m.m.c.(91, 39)

Teorema 2

Sean $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ tales que a y b **no** tienen factores primos comunes entonces m.m.c. $(a, b) = a \cdot b$

En tal caso decimos que a y b son primos relativos o coprimos entre sí.

Por ejemplo:

1.) 2 y 3 son primos relativos entre sí $\Longrightarrow$ m.m.c. $(3, 2) = 6$

2.) 15 y 7 son primos relativos entre sí. $\Longrightarrow$ m.m.c. $(15, 7) = 105$

Ejercicios 27

1.) Determine si 32 y 35 son primos relativos entre sí.

2.) Determine si 66 y 55 son primos relativos entre sí.

1.8 Propiedades de los números racionales

Recordemos que el conjunto cuyos elementos son los números que se pueden representar por $\dfrac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ recibe el nombre de **conjunto de los números racionales** y se denota con el símbolo $\mathbb{Q}$. Así:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Definición 23

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$

En $\dfrac{a}{b}$; el número representado por a se llama **numerador**, el número representado por b se llama **denominador**, la expresión $\dfrac{a}{b}$ recibe el nombre de fracción.

1.8.1 Fracciones equivalentes

Definición 24

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

Las fracciones $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ reciben el nombre de fracciones equivalentes (entre sí) si representan al mismo número racional y en tal caso escribimos $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Ejemplo 51

Determine si $\dfrac{4}{8}$ es equivalente a $\dfrac{1}{2}$

Solución

$\dfrac{4}{8} = 0.5$ pues $4 \div 8 = 0.5$

$\dfrac{1}{2} = 0.5$ pues $1 \div 2 = 0.5$

Por lo que $\dfrac{4}{8}$ y $\dfrac{1}{2}$ representan un mismo número racional es decir, son fracciones equivalentes entre sí, es decir $\dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo 52

Determine cuáles de las fracciones $\dfrac{5}{20}$, $\dfrac{16}{4}$ y $\dfrac{2}{8}$ son equivalentes a $\dfrac{3}{12}$

Solución

$\dfrac{3}{12} = 0.25$ pues $3 \div 12 = 0.25$

$\dfrac{5}{20} = 0.25$ pues $5 \div 20 = 0.25$

$\dfrac{16}{4} = 4$ pues $16 \div 4 = 4$

$\dfrac{2}{8} = 0.25$ pues $2 \div 8 = 0.25$

De donde se concluye que $\dfrac{3}{12}$ es equivalente a $\dfrac{5}{20}$ y a $\dfrac{2}{8}$, es decir $\dfrac{3}{12} = \dfrac{5}{20}$ y $\dfrac{3}{12} = \dfrac{2}{8}$

Ejercicios 28

Determine cuáles de las fracciones $\dfrac{-2}{6}$, $\dfrac{-3}{9}$ y $\dfrac{-6}{2}$ son equivalentes entre sí:

En los ejemplos (54) y (55) anteriores obtuvimos que:

$\dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{12} = \dfrac{5}{20}$ y $\dfrac{3}{12} = \dfrac{2}{8}$

Observe que:

a.) $\dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ y también se cumple que $4 \cdot 2 = 8 \cdot 1$

b.) $\dfrac{3}{12} = \dfrac{5}{20}$ y también se cumple que $3 \cdot 20 = 12 \cdot 5$

c.) $\dfrac{3}{12} = \dfrac{2}{8}$ y también se cumple que $3 \cdot 8 = 12 \cdot 2$

Los casos (a), (b) y (c) anteriores son ejemplos donde se aplicó el siguiente criterio, el cual se puede usar para determinar si dos fracciones son equivalentes entre sí:

Sean $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Ejemplo 53

a.) Determine si $\dfrac{-3}{5}$ es equivalente a $\dfrac{-21}{35}$

b.) Determine si $\dfrac{3}{18}$ es equivalente a $\dfrac{15}{9}$

c.) Determine si $\dfrac{-5}{2}$ es equivalente a $\dfrac{-10}{2}$

Solución

a.) $\dfrac{-3}{5}$ es equivalente a $\dfrac{-21}{35}$ es decir, $\dfrac{-3}{5} = \dfrac{-21}{35}$, pues se cumple que $-3 \cdot 35 = 5(-21)$

b.) $\dfrac{3}{18}$ no es equivalente a $\dfrac{15}{9}$ es decir, $\dfrac{3}{18} \neq \dfrac{15}{9}$, pues se tiene que $3 \cdot 9 \neq 18 \cdot 15$

c.) $\dfrac{-5}{2}$ no es equivalente a $\dfrac{-10}{2}$ es decir, $\dfrac{-5}{2} \neq \dfrac{-10}{2}$, pues se tiene que $-5 \cdot 2 \neq -10 \cdot 2$

Ejercicios 29

1. Determine cuáles pares de las fracciones siguientes son equivalentes entre sí:

   a.) $\dfrac{6}{7}$ y $\dfrac{8}{9}$

   b.) $\dfrac{35}{-21}$ y $\dfrac{-5}{3}$

   c.) $\dfrac{3}{1}$ y $\dfrac{57}{19}$

   d.) $\dfrac{25}{4}$ y $\dfrac{4}{25}$

2. Usando el resultado anterior verifique que:

   Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ entonces se cumple que:

   a.) $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$ $\qquad$ *b.)* $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b}$

Nota:

En adelante, por las igualdades anteriores obtenidas en el ejercicio 25, parte (2), trabajaremos con fracciones equivalentes cuyo denominador sea positivo.

1.8.2 Simplificación de fracciones

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Simplificar la fracción $\dfrac{a}{b}$ consiste en dividir el numerador y el denominador de dicha fracción por un mismo número natural n, $n \geq 2$ y n un factor común de a y b. Obtenemos así la fracción:

$$\frac{a \div n}{b \div n}$$

la cual es equivalente a $\dfrac{a}{b}$ y escribimos

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div n}{b \div n}$$

Ejemplo 54

Simplifique las siguientes fracciones:

a.) $\dfrac{46}{28}$ b.) $\dfrac{-39}{27}$ c.) $\dfrac{15}{4}$

Solución

a.) $\dfrac{46}{28}$

Dividiendo el numerador y el denominador por 2 tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{46}{28} &= \frac{46 \div 2}{28 \div 2} \\ &= \frac{23}{14} \end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{46}{28} = \frac{23}{14}$$

b.) $\dfrac{-39}{27}$

Dividiendo el numerador y el denominador por 3 tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{-39}{27} &= \frac{-39 \div 3}{27 \div 3}\\ &= \frac{-13}{9}\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{-39}{27} = \frac{-13}{9}$$

c.) $\dfrac{15}{4}$

En este caso 15 y 4 no tienen factores comunes mayores que 2, por esta razón decimos que $\dfrac{15}{4}$ no se puede simplificar.

1.8.3 Fracciones canónicas y fracciones reducibles

Consideremos $\dfrac{9}{15}$, el máximo divisor común de 9 y 15 es 3, utilizando esto podemos simplificar $\dfrac{9}{15}$ de la manera siguiente:

$$\frac{9}{15} = \frac{9 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5} \quad \text{es decir;} \quad \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Ahora si consideramos $\dfrac{3}{5}$ observemos que M.D.C. $(3,5) = 1$, por lo cual $\dfrac{3}{5}$ no se puede simplificar.

Definición 25

Decimos que un número racional está representado por una fracción canónica $\dfrac{a}{b}$, si el máximo divisor común de $|a|$ y $|b|$ es 1.
Así con respecto al caso anterior $\dfrac{3}{5}$ es la fracción canónica de $\dfrac{9}{15}$.

Nota

La fracción canónica correspondiente a un número racional se conoce también con el nombre de fracción irreducible.

Teorema 3

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Si M.D.C. $(|a|\ ,\ |b|) = k$ entonces la fracción $\dfrac{a \div k}{b \div k}$ es una fracción canónica

Ejemplo 55

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{42}{105}$ b.) $\dfrac{-84}{30}$

Solución

a.) $\dfrac{42}{105}$ Calculemos M.D.C. $(42\ ,\ 105)$

$$\begin{array}{cc|c} 42 & 105 & 3 \\ 14 & 35 & 7 \\ 2 & 5 & \end{array}$$

Por lo que M.D.C. $(42, 105) = 3 \cdot 7 = 21$

Así pues

$$\begin{aligned} \frac{42}{105} &= \frac{42 \div 21}{105 \div 21} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

De donde la fracción canónica correspondiente a $\dfrac{42}{105}$ es $\dfrac{2}{5}$ es decir;

$$\frac{42}{105} = \frac{2}{5}$$

b.) $\dfrac{-84}{30}$ Calculemos M.D.C. $(|-84|\ ,\ |30|)$ es decir; M.D.C. $(84, 30)$

$$\begin{array}{cc|c} 84 & 30 & 2 \\ 42 & 15 & 3 \\ 14 & 5 & \end{array}$$

Por lo que M.D.C. $(84, 30) = 2 \cdot 3 = 6$

Así pues

$$\begin{aligned} \frac{-84}{30} &= \frac{-84 \div\ 6}{30 \div 6} \\ &= \frac{-14}{5} \end{aligned}$$

De donde la fracción canónica correspondiente a $\dfrac{-84}{30}$ es $\dfrac{-14}{5}$ es decir;

$$\frac{-84}{30} = \frac{-14}{5}$$

Ejercicios 30

Determine la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\dfrac{81}{54}$ 3.) $\dfrac{75}{225}$ 5.) $\dfrac{-68}{17}$

2.) $\dfrac{-17}{23}$ 4.) $\dfrac{-171}{189}$ 6.) $\dfrac{675}{1260}$

1.8.4 Amplificación de fracciones

Amplificar una fracción $\dfrac{a}{b}$ consiste en multiplicar el numerador y el denominador de dicha fracción por un mismo número entero n, $n \geq 2$, obteniéndose así la fracción:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

la cual es equivalente a $\dfrac{a}{b}$ y escribimos

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

Por ejemplo:

Si en la fracción $\dfrac{3}{4}$ multiplicamos el numerador y el denominador por 5 obtenemos: $\dfrac{15}{20}$, y decimos en este caso que $\dfrac{15}{20}$ es una amplificación de $\dfrac{3}{4}$ es decir; $\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{20}$

Ejercicios 31

Haciendo uso de la amplificación de fracciones determine tres fracciones equivalentes a:

1.) $\dfrac{5}{3}$	3.) 1	5.) -2	7.) $\dfrac{7}{6}$	9.) $\dfrac{-11}{4}$
2.) -1	4.) $\dfrac{25}{10}$	6.) 0	8.) 6	10.) $\dfrac{-75}{7}$

1.8.5 Representación de números racionales usando el mínimo denominador común

■ **Definición 26**

El mínimo múltiplo común de los denominadores de dos o más fracciones recibe el nombre de mínimo denominador común de dichas fracciones.

■ **Ejemplo 56**

Determine el mínimo denominador común de $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{4}{9}$ y $\dfrac{-3}{2}$

Solución

El m.m.c. $(6, 9, 2) = 18$, por lo que por la definición anterior tenemos que 18 es el mínimo denominador común de $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{4}{9}$ y $\dfrac{-3}{2}$

Ejercicios 32

Para cada uno de los casos siguientes determine el mínimo denominador común de las fracciones dadas:

1.) $\dfrac{-5}{3}$ y $\dfrac{2}{7}$

2.) $\dfrac{-3}{5}$, $\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{-7}{15}$

3.) $\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{2}{14}$ y $\dfrac{5}{3}$

4.) $\dfrac{13}{18}$, $\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{-3}{54}$ y $\dfrac{5}{6}$

Ejemplo 57

Considere las fracciones $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{-7}{6}$ y $\dfrac{8}{10}$ $(*)$

a.) Determine el mínimo denominador común de las fracciones anteriores.

b.) Escriba los números racionales representados en $(*)$ por medio de fracciones equivalentes cuyo denominador sea el mínimo denominador.

Solución

a.) Como m.m.c. $(3, 6, 10) = 30$ entonces 30 es el mínimo denominador común de: $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{-7}{6}$ y $\dfrac{8}{10}$

b.) Amplificando las fracciones dadas en $(*)$ podemos obtener fracciones cuyo denominador sea el mínimo denominador común o sea; 30, de la manera siguiente:

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{50}{30} \text{ , es decir; } \frac{5}{3} = \frac{50}{30}$$

$$\frac{-7}{6} = \frac{-7 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{-35}{30} \text{ , es decir; } \frac{-7}{6} = \frac{-35}{30}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{48}{30} \text{ , es decir; } \frac{8}{5} = \frac{48}{30}$$

Ejercicios 33

En cada uno de los casos siguientes escriba los números racionales dados, por medio de fracciones, cuyo denominador sea el mínimo denominador común de las fracciones dadas:

1.) $\dfrac{-5}{7}$, $\dfrac{3}{14}$ y $\dfrac{-7}{21}$

2.) $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{-2}{15}$, $\dfrac{7}{60}$ y -1

3.) $\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{-5}{3}$, -2 y 1

4.) $\dfrac{3}{44}$, $\dfrac{-2}{121}$ y $\dfrac{25}{77}$

1.9 Algoritmos de las operaciones definidas en $\mathbb{Q}$

1.9.1 Adición de números racionales

: Caso 1

Algoritmo de la adición para números racionales representados por fracciones de igual denominador:

Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{b} \in \mathbb{Q}$ entonces $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$

En general:

Si $\dfrac{a_1}{b} \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{a_2}{b} \in \mathbb{Q}$, ... , $\dfrac{a_n}{b} \in \mathbb{Q}$ entonces

$$\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \frac{a_3}{b} + ... + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b}$$

Ejemplo 58

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} + \dfrac{6}{7}$ b.) $\dfrac{5}{4} + \dfrac{12}{4} + \dfrac{-3}{4}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned} \frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{6}{7} &= \frac{3+2+6}{7} \\ &= \frac{11}{7} \end{aligned}$$

Como m.m.c. $(11, 7) = 1$, $\dfrac{11}{7}$ es la fracción canónica correspondiente a $\dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} + \dfrac{6}{7}$

b.)
$$\begin{aligned} \frac{5}{4} + \frac{12}{4} + \frac{-3}{4} &= \frac{5+12+-3}{4} \\ &= \frac{17-3}{4} \\ &= \frac{14}{4} \\ &= \frac{14 \div 2}{4 \div 2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Como m.m.c. $(7, 2) = 1$, $\dfrac{7}{2}$ es la fracción canónica correspondiente a $\dfrac{5}{4} + \dfrac{12}{4} + \dfrac{-3}{4}$

Ejercicios 34

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}$

2.) $\dfrac{11}{5} + \dfrac{-6}{5} + \dfrac{-30}{5} + \dfrac{1}{5}$

3.) $\dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13} + \dfrac{-4}{13}$

4.) $\dfrac{-1}{11} + \dfrac{-3}{11} + \dfrac{-2}{11}$

: Caso 2

Algoritmo de la adición para números racionales representados por fracciones cuyos denominadores no son iguales entre sí.

Para sumar números racionales representados por fracciones cuyos denominadores no son iguales entre sí, se procede de la siguiente manera:

i.) Se determina el mínimo denominador común de las fracciones dadas.

ii.) Se representa cada uno de los números racionales dados, por medio de una fracción cuyo denominador sea el número obtenido en (i).

iii.) Se procede como en Caso 1

Ejemplo 59

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{15}$ b.) $\dfrac{18}{7} + \dfrac{-3}{2}$

Solución

a.) $\dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{15}$

El mínimo denominador común de 6 y 5 es 30 por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{6} + \frac{7}{15} &= \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} \\
&= \frac{25}{30} + \frac{14}{30} \\
&= \frac{25 + 14}{30} \\
&= \frac{39}{30} \\
&= \frac{39 \div 3}{30 \div 3} \\
&= \frac{13}{10}
\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{15} = \frac{13}{10}$$

b.) $\dfrac{18}{7} + \dfrac{-3}{2}$

El mínimo denominador común de 7 y 2 es 14, por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{18}{7} + \frac{-3}{2} &= \frac{18 \cdot 2}{7 \cdot 2} + \frac{-3 \cdot 7}{2 \cdot 7} \\
&= \frac{36}{14} + \frac{-21}{14} \\
&= \frac{36 + -21}{14} \\
&= \frac{36 - 21}{14} \\
&= \frac{15}{14}
\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{18}{7} + \frac{-3}{2} = \frac{15}{4}$$

Ejercicios 35

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{9}$

2.) $\frac{7}{8} + \frac{11}{2} + \frac{-19}{6} + \frac{3}{4}$

3.) $5 + \frac{3}{5}$

4.) $-1 + \frac{7}{9}$

5.) $\frac{-4}{3} + \frac{-2}{7}$

6.) $\frac{5}{8} + \frac{-1}{8} + \frac{-5}{7}$

7.) $\frac{5}{12} + \frac{7}{8} + \frac{-5}{24} + \frac{-25}{6}$

8.) $\frac{-6}{13} + \frac{2}{13} + \frac{-11}{13}$

9.) $1 + \frac{9}{7} + \frac{-12}{14}$

10.) $\frac{5}{4} + -3 + \frac{6}{5} + 2$

Otro procedimiento que se puede usar para sumar dos o más números racionales lo aporta el siguiente teorema:

■ Teorema 4

Sean $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Prueba

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \\
&= \frac{ad + cb}{b \cdot d}
\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{b \cdot d}$$

Ejemplo 60

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{7}{6} + \dfrac{-3}{4}$ b.) $\dfrac{-3}{10} + \dfrac{-11}{6}$ c.) $\dfrac{5}{8} + \dfrac{2}{7}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{7}{6} + \frac{-3}{4} &= \frac{7 \cdot 4 + (-3) \cdot 6}{6 \cdot 4} \\
&= \frac{28 + -18}{24} \\
&= \frac{28 - 18}{24} \\
&= \frac{10}{24} \\
&= \frac{10 \div 2}{24 \div 2} \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned}
\frac{-3}{10} + \frac{-11}{6} &= \frac{(-3) \cdot 6 + (-11) \cdot 10}{10 \cdot 6} \\
&= \frac{-18 + -110}{60} \\
&= \frac{-128}{60} \\
&= \frac{-128 \div 4}{60 \div 4} \\
&= \frac{-32}{15}
\end{aligned}$$

c.)
$$\begin{aligned}
\frac{5}{8} + \frac{2}{7} &= \frac{5 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{8 \cdot 7} \\
&= \frac{35 + 16}{56} \\
&= \frac{51}{56}
\end{aligned}$$

Nota

El procedimiento para sumar números racionales, dado en el teorema anterior se puede generalizar para más de dos sumandos, pero para estos casos se recomienda utilizar, el procedimiento enunciado en el Caso 2.

1.9.2 Sustración de números racionales

Recordemos que si $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ entonces $p - q = p + (-q)$.

En particular si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ entonces: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}$

■ **Ejemplo 61**

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\frac{6}{7} - \frac{3}{4}$ b.) $\frac{5}{6} - \frac{2}{6}$ c.) $\frac{3}{12} - \frac{5}{6} - \frac{7}{8}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned} \frac{6}{7} - \frac{3}{4} &= \frac{6}{7} + \frac{-3}{4} \\ &= \frac{6 \cdot 4 + (-3) \cdot 7}{7 \cdot 4} \\ &= \frac{24 - 21}{28} \\ &= \frac{3}{28} \end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned} \frac{5}{6} - \frac{2}{6} &= \frac{5}{6} + \frac{-2}{6} \\ &= \frac{5 + -2}{6} \\ &= \frac{5 - 2}{6} \\ &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{3 \div 3}{6 \div 3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c.)}\ \frac{3}{12}-\frac{5}{6}-\frac{7}{8} &= \frac{3}{12}+\frac{-5}{6}+\frac{-7}{8}\\
&= \frac{3\cdot 2}{12\cdot 2}+\frac{-5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{-7\cdot 3}{8\cdot 3}\\
&= \frac{6}{24}+\frac{-20}{24}+\frac{-21}{24}\\
&= \frac{6-20-21}{24}\\
&= \frac{-35}{24}
\end{aligned}$$

(nota: aquí se usó que: $m.m.c.(12,6,8)=24$)

Ejercicios 36

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\dfrac{5}{2}-\dfrac{81}{2}$

2.) $\dfrac{3}{125}-\dfrac{4}{400}$

3.) $\dfrac{5}{8}-\dfrac{7}{4}+6$

4.) $\dfrac{58}{9}-\dfrac{28}{9}+\dfrac{7}{5}$

5.) $\dfrac{11}{42}-\dfrac{5}{49}-\dfrac{6}{70}$

6.) $\dfrac{-1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}$

7.) $\dfrac{4}{38}-\dfrac{6}{19}+1$

8.) $4-\dfrac{7}{5}-\dfrac{1}{6}$

9.) $-3+\dfrac{7}{9}+4$

1.9.3 Algoritmo de la multiplicación de números racionales

Si $\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ entonces se tiene que:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

■ **Ejemplo 62**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{-3}{5}\cdot\dfrac{2}{7}$ b.) $2\cdot\dfrac{11}{9}$ c.) $\dfrac{-6}{4}\cdot\dfrac{-7}{9}$ d.) $\dfrac{-2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}$

Solución

$$\begin{aligned}
\text{a.)}\ \frac{-3}{5}\cdot\frac{2}{7} &= \frac{-3\cdot 2}{5\cdot 7}\\
&= \frac{-6}{35}
\end{aligned}$$

b.) $2 \cdot \dfrac{11}{9} = \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{11}{9}$

$= \dfrac{2 \cdot 11}{1 \cdot 9}$

$= \dfrac{22}{9}$

c.) $\dfrac{-6}{4} \cdot \dfrac{-7}{9} = \dfrac{(-6) \cdot (-7)}{4 \cdot 9}$

$= \dfrac{42}{36}$

$= \dfrac{42 \div 6}{36 \div 6}$

$= \dfrac{7}{6}$

d.) $\dfrac{-2}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{(-2) \cdot 1}{3 \cdot 4}$

$= \dfrac{-2}{12}$

$= \dfrac{-2 \div 2}{12 \div 2}$

$= \dfrac{-1}{6}$

En general:

Si $\dfrac{a_1}{b_1} \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, ... , $\dfrac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Q}$ entonces:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \ \dots \ \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ \cdots \ \cdot b_n}$$

Ejemplo 63

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{-7}{6} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot 2$ b.) $\dfrac{-2}{9} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3}{2}$

Solución

a.) $$\frac{-7}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{-7\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 1} = \frac{-42}{30} = \frac{-42\div 6}{30\div 6} = \frac{-7}{5}$$

b.) $$\frac{-2}{9}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2} = \frac{-2\cdot 1\cdot 3}{9\cdot 6\cdot 2} = \frac{-6}{108} = \frac{-6\div 6}{108\div 6} = \frac{-1}{18}$$

Ejercicios 37

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\frac{7}{8}\cdot\frac{16}{21}$

2.) $-4\cdot\frac{-14}{5}$

3.) $\frac{15}{7}\cdot\frac{-4}{6}$

4.) $\frac{6}{7}\cdot 8\cdot\frac{-7}{16}$

5.) $\frac{-9}{2}\cdot\frac{-11}{2}\cdot\frac{-4}{6}$

6.) $\frac{-3}{5}\cdot -15$

1.9.4 Algoritmo de la división de números racionales

Sean $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ Entonces se cumple que:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo 64

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\frac{-3}{5}\div\frac{4}{3}$

b.) $\frac{-5}{4}\div -6$

c.) $3\div\frac{7}{6}$

Solución

a.) $$\begin{aligned} \frac{-3}{5} \div \frac{4}{3} &= \frac{-3 \cdot 3}{5 \cdot 4} \\ &= \frac{-9}{20} \end{aligned}$$

b.) $$\begin{aligned} \frac{-5}{4} \div -6 &= \frac{-5}{4} \div \frac{-6}{1} \\ &= \frac{-5 \cdot 1}{4 \cdot (-6)} \\ &= \frac{-5}{-24} \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

c.) $$\begin{aligned} 3 \div \frac{7}{6} &= \frac{3}{1} \div \frac{7}{6} \\ &= \frac{3 \cdot 6}{1 \cdot 7} \\ &= \frac{18}{7} \end{aligned}$$

Recordemos que al inicio del folleto se mencionó que: Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, y $b \neq 0$ entonces:

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

En particular si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, y $\frac{c}{d} \neq 0$ entonces:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad (1)$$

Además por el algoritmo de la división

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (2)$$

Por lo que de (1) y (2) obtenemos que:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo 65

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{7}{6}}$ b.) $\dfrac{3}{\frac{2}{7}}$ c.) $\dfrac{\frac{-13}{4}}{6}$

Solución

a.)
$$\dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{7}{6}} = \frac{-5 \cdot 6}{4 \cdot 7}$$
$$= \frac{-30}{28}$$
$$= \frac{-30 \div 2}{28 \div 2}$$
$$= \frac{-15}{14}$$

Así:

$$\dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{7}{6}} = \frac{-15}{14}$$

b.)
$$\dfrac{3}{\frac{2}{7}} = \dfrac{\frac{3}{1}}{\frac{2}{7}}$$
$$= \frac{3 \cdot 7}{1 \cdot 2}$$
$$= \frac{21}{2}$$

Así:

$$\dfrac{3}{\frac{2}{7}} = \frac{21}{2}$$

$$\text{c.)}\ \frac{\frac{-13}{4}}{6} = \frac{\frac{-13}{4}}{\frac{6}{1}} = \frac{-13 \cdot 1}{4 \cdot 6} = \frac{-13}{24}$$

Así:

$$\frac{\frac{-13}{4}}{6} = \frac{-13}{24}$$

Ejercicios 38

Escriba la fracción canónica correspondiente:

1.) $\frac{-2}{3} \div 4$

2.) $-6 \div \frac{-2}{3}$

3.) $\frac{7}{9} \div \frac{-5}{4}$

4.) $\frac{6}{4} \div \frac{1}{5}$

5.) $\frac{3}{\frac{1}{2}}$

6.) $\frac{-1}{\frac{5}{4}}$

7.) $\frac{\frac{-7}{6}}{4}$

8.) $\frac{\frac{-17}{3}}{2}$

1.9.5 Operaciones combinadas

Cuando una expresión involucra varias operaciones, con el fin de evitar ambigüedad, las operaciones deben realizarse con los siguientes convenios:

Convenio 1

En una expresión que no involucra paréntesis deben realizarse primero todas las multiplicaciones y divisiones, en orden, de izquierda a derecha. A continuación se realizan todas las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Convenio 2

En una expresión que involucra paréntesis deben realizarse primero las operaciones indicadas dentro del paréntesis.

■ **Ejemplo 66**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{7}{9}-\dfrac{1}{36}$

b.) $\left[\dfrac{1}{5}+\dfrac{6}{5}\right]\div\dfrac{2}{3}$

c.) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{6}{5}\div\dfrac{2}{3}$

d.) $\dfrac{-8}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\div\dfrac{3}{10}$

e.) $\dfrac{7}{12}\div\dfrac{-14}{3}\div\dfrac{-5}{4}$

f.) $\dfrac{-5}{4}\div 2\cdot\dfrac{8}{15}\div\dfrac{1}{3}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{36} &= \frac{28}{27}-\frac{1}{36}\\
&= \frac{112-3}{108}\\
&= \frac{109}{108}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{36} = \frac{109}{108}$$

b.)
$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{5}+\frac{6}{5}\right]\div\frac{2}{3} &= \frac{1+6}{5}\div\frac{2}{3}\\
&= \frac{7}{5}\cdot\frac{3}{2}\\
&= \frac{21}{10}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left[\frac{1}{5}+\frac{6}{5}\right]\div\frac{2}{3} = \frac{21}{10}$$

c.)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}+\frac{6}{5}\div\frac{2}{3} &= \frac{1}{5}+\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2}\\
&= \frac{1}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{1}\\
&= \frac{1}{5}+\frac{9}{5}\\
&= \frac{1+9}{5}\\
&= \frac{10}{5}\\
&= 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{5}+\frac{6}{5}\div\frac{2}{3} = 2$$

d.) $$\begin{aligned} \frac{-8}{5}\cdot\frac{3}{4}\div\frac{3}{10} &= \frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{1}\div\frac{3}{10} \\ &= \frac{-6}{5}\div\frac{3}{10} \\ &= \frac{-6}{5}\cdot\frac{10}{3} \\ &= \frac{-2}{1}\cdot\frac{2}{1} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{-8}{5}\cdot\frac{3}{4}\div\frac{3}{10} = -4$$

e.) $$\begin{aligned} \frac{7}{12}\div\frac{-14}{3}\div\frac{-5}{4} &= \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{-14}\div\frac{-5}{4} \\ &= \frac{7}{12}\cdot\frac{-3}{14}\div\frac{-5}{4} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{2}\div\frac{-5}{4} \\ &= \frac{-1}{8}\div\frac{-5}{4} \\ &= \frac{-1}{8}\cdot\frac{4}{-5} \\ &= \frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{5} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{7}{12}\div\frac{-14}{3}\div\frac{-5}{4} = \frac{1}{10}$$

f.) $$\begin{aligned}\frac{-5}{4}\div 2\cdot\frac{8}{15}\div\frac{1}{3} &= \frac{-5}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}\div\frac{1}{3}\\ &= \frac{-5}{8}\cdot\frac{8}{15}\div\frac{1}{3}\\ &= \frac{-1}{1}\cdot\frac{1}{3}\div\frac{1}{3}\\ &= \frac{-1}{3}\div\frac{1}{3}\\ &= \frac{-1}{3}\cdot\frac{3}{1}\\ &= \frac{-3}{3}\\ &= -1\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{-5}{4}\div 2\cdot\frac{8}{15}\div\frac{1}{3} = -1$$

Ejercicios 39

Determine la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\div\frac{3}{2}$

2.) $\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right]\div\frac{1}{6}$

3.) $\left[4-\frac{1}{3}\right]\div\frac{11}{6}$

4.) $\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$

5.) $2\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{2}\cdot 4-1$

6.) $\frac{5}{6}\div\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\right]$

7.) $\left[7+\frac{25}{8}\right]\div\left[14+\frac{25}{4}\right]$

8.) $\left[60-\frac{1}{8}\right]\div\left[30-\frac{1}{16}\right]$

9.) $2\cdot\frac{3}{5}-4\cdot 3+2\div(3-5)$

■ **Ejemplo 67**

Determine la fracción canónica correspondiente a: $1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(-10+\frac{15}{4}\right)-1\right]\right\}$

Solución

$$
\begin{aligned}
1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(-10+\frac{15}{4}\right)-1\right]\right\} &= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(\frac{-40+15}{4}\right)-1\right]\right\} \\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(\frac{-25}{4}\right)-1\right]\right\} \\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{1}{1}\left(\frac{-5}{2}\right)-1\right]\right\} \\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1-\frac{5}{2}-1\right]\right\} \\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3-4-10-4}{4}\right]\right\} \\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{-15}{4}\right]\right\} \\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2+\frac{15}{4}\right\} \\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{\frac{8+15}{4}\right\} \\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\frac{23}{4} \\
&= 1+\frac{2}{1}-\frac{23}{4} \\
&= \frac{4+8-23}{4} \\
&= \frac{-11}{4}
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 68**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

$$
\frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{14}{3}-\left(\frac{7}{21}+\frac{14}{3}\right)\right]+\frac{1}{12}\right\}
$$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{14}{3}-\left(\frac{7}{21}+\frac{14}{3}\right)\right]+\frac{1}{12}\right\} &= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{14}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{14}{3}\right)\right]+\frac{1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{14}{3}-\frac{15}{3}\right]+\frac{1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{-1}{3}\right]+\frac{1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-20+4+1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-15}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{4}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}-\frac{30}{4}\\
&= \frac{-72-150}{20}\\
&= \frac{-222}{20}\\
&= \frac{-111}{10}
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 69**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}}{8}$ b.) $\dfrac{\dfrac{2}{5}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}}$

Solución

$$\text{a.)}\quad \frac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}}{8} = \frac{\dfrac{3+4}{12}}{8} = \frac{\dfrac{7}{12}}{8} = \frac{7}{(12)(8)} = \frac{7}{96}$$

$$\text{b.)}\quad \frac{\dfrac{2}{5}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}} = \frac{\dfrac{2}{5}}{\dfrac{4-5}{6}} = \frac{\dfrac{2}{5}}{\dfrac{-1}{6}} = \frac{(2)(6)}{(5)(-1)} = \frac{12}{-5} = \frac{-12}{5}$$

Ejemplo 70

Determine la fracción canónica correspondiente a:

$$\text{a.)}\quad \frac{\dfrac{1}{2} \div \dfrac{3}{4} \div \dfrac{3}{2}}{\left(1-\dfrac{1}{3}\right) \div \left(1-\dfrac{1}{5}\right)}$$

$$\text{b.)}\quad \frac{\dfrac{-3}{2}\cdot 2-3}{3-2\div\left(1+\dfrac{1}{4}\right)}$$

Solución

a.)

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \div \frac{3}{2}}{\left(1-\frac{1}{3}\right) \div \left(1-\frac{1}{5}\right)} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) \div \frac{3}{2}}{\left(\frac{3-1}{3}\right) \div \left(\frac{5-1}{5}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3} \div \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \div \frac{3}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}} \\
&= \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}} \\
&= \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{6}} \\
&= \frac{(4)(6)}{(9)(5)} \\
&= \frac{(4)(2)}{(3)(5)} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

b.)
$$\frac{\frac{-3}{2}\cdot 2-3}{3-2\div\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{-3}{2}\cdot\frac{2}{1}-3}{3-2\div\left(\frac{4+1}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-3}{1}\cdot\frac{1}{1}-3}{3-2\div\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$= \frac{-3-3}{3-\frac{2}{1}\div\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{-6}{3-\frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}}$$

$$= \frac{-6}{3-\frac{8}{5}}$$

$$= \frac{-6}{\frac{15-8}{5}}$$

$$= \frac{-6}{\frac{7}{5}}$$

$$= \frac{\frac{-6}{1}}{\frac{7}{5}}$$

$$= \frac{-30}{7}$$

1.9.6 Potencias en el conjunto de los números reales

Los números reales que se representan cantidades muy grandes o bien cantidades muy pequeñas son de uso frecuente en campos como la Física, la Química y la Astronomía, por ejemplo:

1. La distancia de nuestra galaxia a la constelación Osa Mayor es de 24.230.000.000.000.000.000 km.

2. El diámetro del núcleo de un átomo de un núcleo de carbón es: $0,000000000006096$ cm.

Dado lo incómodo que resulta trabajar con estos números, cuando son representados en la forma anterior, es que la matemática proporcionó a dichas ciencias una notación que permitiera simplificar y agilizar los cálculos con números como los mencionados.

Definición 27

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Se define la enésima potencia de a y se denota a^n, como el número que viene dado por:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n \text{ veces a}}$$

O sea

$$a^n \ = \ \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n \text{ veces a}}$$

y se dice que la expresión a^n es una representación exponencial o notación exponencial de la enésima potencia de a.

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define:

i.) $a^1 = a$

ii.) $a^0 = 1 \quad$ con $a \neq 0$

y se dice que: $\left\{ \begin{array}{l} a^1 \ \text{ es una notación exponencial de } a \\ \\ a^0 \ \text{ es una notación exponencial de } 1 \end{array} \right.$

Ejemplo 71

a.) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, o sea; $2^3 = 8$ y en este caso decimos que 2^3 es una notación exponencial de 8.

b.) $(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5) = 625$; o sea; $(-5)^4 = 625$ y este caso decimos que $(-5)^4$ es una notación exponencial de 625.

c.) $(14)^1 = 14$ (Por definición) y en este caso decimos que $(14)^1$ es una notación exponencial de 14.

d.) $(-8)^0 = 1$ (Por definición) y en este caso decimos que $(-8)^0$ es una notación exponencial de 1.

Ejercicios 40

Represente en notación exponencial, el número correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$	3.) $(-2)(-2)(-2)$	5.) 25
2.) -27	4.) 17	6.) 144

Definición 28

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tales que $a^n \in \mathbb{R}$.

En la expresión a^n : $\begin{cases} \text{“}n\text{” recibe el nombre de exponente.} \\ \text{“}a\text{” recibe el nombre de base.} \end{cases}$

Ejemplo 72

a.) En la expresión $\left(\dfrac{7}{5}\right)^2$, 2 es el exponente y $\dfrac{7}{5}$ es la base.

b.) En la expresión $\left(\dfrac{-11}{3}\right)^6$, 6 es el exponente y $\dfrac{-11}{3}$ es la base.

Ejercicios 41

Represente cada uno de los siguientes números en notación exponencial, de tal forma que la base sea un número primo.

1.) 49

2.) 128

3.) 343

4.) 1

5.) 29

6.) 625

1.9.7 Propiedades de las potencias

Considere los dos ejemplos siguientes:

a.) $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$

b.) $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right) = \left[\left(\dfrac{-1}{5}\right) \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right) \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right)\right] \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right) = \dfrac{-1}{5} \cdot \dfrac{-1}{5} \cdot \dfrac{-1}{5} \cdot \dfrac{-1}{5} \cdot = \left(\dfrac{-1}{5}\right)^4$

Estos ejemplos son casos particulares de la siguiente propiedad.

Propiedad 1

Sean $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, si $a^m \in \mathbb{R}$, $a^n \in \mathbb{R}$ entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejercicios 42

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de los siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $2^3 \cdot 2^7 = 2^k$

2.) $(-3)^2 \cdot (-3) = (-3)^k$

3.) $5^k \cdot 5^3 = 5^7$

4.) $7 \cdot 7^k = 7^1$

Considere los dos ejemplos siguientes:

a.)
$$\begin{aligned}(9^2)^3 &= 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2\\ &= (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9)\\ &= 9^6\end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^3\right]^2 &= \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^3\\ &= \left[\left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)\right]\\ &= \left(\frac{-2}{3}\right)^6\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Propiedad 2

Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ y si $a^m \in \mathbb{R}$ entonces:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejercicios 43

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de las siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $\left(5^2\right)^3 = 5^k$

2.) $\left(7^k\right)^4 = 7^{20}$

3.) $\left(13^2\right)^k = 13^{12}$

4.) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^4\right]^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^k$

■ **Definición 29**

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; $m \in \mathbb{N}$ Se define a^{-m} de la manera siguiente:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

■ **Ejemplo 73**

a.) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$

b.) $(-5)^{-11} = \dfrac{1}{(-5)^{11}}$

c.) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}$

d.) $(-6)^{-1} = \dfrac{1}{(-6)^1}$

Ejercicios 44

Usando la propiedad anterior determine el valor (o valores) de k en cada uno de los siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $(-7)^{-3} = \dfrac{1}{k^3}$

2.) $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^k}$

3.) $k^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$

4.) $k^{-4} = \dfrac{1}{(-5)^4}$

Considere los dos ejemplos siguientes:

a.)
$$\begin{aligned}\frac{6^5}{6^3} &= \frac{6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6}{6\cdot 6\cdot 6}\\ &= 6\cdot 6\\ &= 6^2\end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned}\frac{8^4}{8^7} &= \frac{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}\\ &= \frac{1}{8\cdot 8\cdot 8}\\ &= \frac{1}{8^3}\\ &= 8^{-3}\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Propiedad 3

Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejercicios 45

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de las siguientes casos, para que la igualdad sea verdadera.

1.) $\dfrac{5^7}{5^4} = 5^k$

2.) $\dfrac{(-3)^4}{(-3)^6} = (-3)^k$

3.) $\dfrac{(4)^7}{(k)^5} = 4^2$

4.) $\dfrac{7^3}{7^5} = 7^k$

5.) $\dfrac{(11)^6}{(11)^k} = (11)^{-2}$

6.) $\dfrac{6^k}{6^5} = 6$

Considere los dos ejemplos siguientes:

a.) $$\begin{aligned}(3\cdot 5)^4 &= (3\cdot 5)\cdot(3\cdot 5)\cdot(3\cdot 5)\cdot(3\cdot 5)\\ &= (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\cdot(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\\ &= 3^4\cdot 5^4\end{aligned}$$

b.) $$\begin{aligned}(-2\cdot 6)^3 &= (-2\cdot 6)\cdot(-2\cdot 6)\cdot(-2\cdot 6)\\ &= [(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]\cdot(6\cdot 6\cdot 6)\\ &= (-2)^3\cdot 6^3\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Propiedad 4

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in N$, si $a^n \in \mathbb{R}$, $b^n \in \mathbb{R}$ entonces

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejercicios 46

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de las siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $(4\cdot 7)^3 = 4^k \cdot 7^3$

2.) $(6\cdot 9)^k = 6^5 \cdot 9^5$

3.) $(8\cdot k)^4 = 8^4 \cdot 7^4$

4.) $\left(\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{3}{5}\right)^7 = k^7 \cdot \dfrac{3}{5}^7$

Considere los dos ejemplos siguientes:

$$\text{a.)}\ \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}$$

$$= \frac{5\cdot 5\cdot 5}{(4\cdot 4\cdot 4)}$$

$$= \frac{5^3}{4^3}$$

$$\text{b.)}\ \left(\frac{-9}{7}\right)^4 = \left(\frac{-9}{7}\right)\cdot\left(\frac{-9}{7}\right)\cdot\left(\frac{-9}{7}\right)\cdot\left(\frac{-9}{7}\right)$$

$$= \frac{(-9)\cdot(-9)\cdot(-9)\cdot(-9)}{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}$$

$$= \frac{(-9)^4}{7^4}$$

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Propiedad 5

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left[\frac{a}{b}\right]^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejercicios 47

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de las siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{2^5}{3^k}$

2.) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^k = \dfrac{-27}{64}$

3.) $\left(\dfrac{2}{k}\right)^3 = \dfrac{8}{125}$

4.) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^6 = \dfrac{5^{2+k}}{64}$

Notación

Si $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $a^n \in \mathbb{R}$, entonces

$$-a^n = -(a^n)$$

Por ejemplo

$$\text{a.)}\ -5^3 = -(5^3)$$

$$= -(5\cdot 5\cdot 5)$$

$$= -125$$

b.) $$\begin{aligned} -2^6 &= -(2^6) \\ &= -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) \\ &= -64 \end{aligned}$$

Ejercicios 48

En cada uno de los siguientes casos, escriba en notación decimal el número que corresponde a m, para que la igualdad sea verdadera.

1.) $m = -7^2$	5.) $m = -(7)^2$
2.) $m = -3^4$	6.) $m = -(3)^4$
3.) $m = -2^5$	7.) $m = -(2)^5$
4.) $m = -4^3$	8.) $m = -(4)^3$

Observacion importante: Considere los siguientes ejemplos:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{a.) } -3^2 & = -(3^2) & = -(9) \\ \text{b.) } (-3)^2 & = (-3)(-3) & = 9 \end{array}\right\} \quad \text{Caso I}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{c.) } -2^5 & = -(2^5) & = -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) & = -32 \\ \text{d.) } (-2)^5 & = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) & = -32 & \end{array}\right\} \quad \text{Caso II}$$

En los ejemplos presentados anteriormente caso I y caso II podemos observar que en general, NO siempre se cumple que $-a^n = (-a)^n$.

Ejercicios 49

Sea $a \in \mathbb{R},\;\; a \neq 0,\;\; n \in \mathbb{N},\;\; a^n \in \mathbb{R}$

1. ¿Qué condiciones debe cumplir n para que $-a^n$ sea igual a $(-a^n)$?
2. ¿Qué condiciones debe cumplir n para que $-a^n$ sea diferente a $(-a^n)$?

Observe cada una de las siguientes igualdades:

a.) $(-7)^2 = 49$	d.) $(-2)^6 = 64$
b.) $2^4 = 16$	e.) $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$
c.) $(-3)^4 = 81$	f.) $(-1)^{10} = 1$

Los ejemplos anteriores son casos particulares del siguiente resultado:

Si $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, n par y $a^n \in \mathbb{R}$ entonces $a^n \geq 0$

Así, si $a \in \mathbb{R}$ entonces $a^2 \geq 0$, $a^4 \geq 0$, $a^6 \geq 0$, ...

Ejemplo 74

Determine la fracción canónica correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7}$

b.) $\dfrac{3 + 2^{-1}}{5 \cdot 2^{-1}}$

c.) $\dfrac{-3^{-2}}{\left(1 + \dfrac{4}{3}\right)^2}$

d.) $\dfrac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}}$

e.) $\left[\dfrac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2$

f.) $\dfrac{2^3 + 2^5 - \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1}}{2^4 \cdot 3}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7} &= \frac{2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5}{2^7 \cdot 3^2} \\
&= \frac{2^6 \cdot 3^5}{2^7 \cdot 3^2} \\
&= \frac{2^6}{2^7} \cdot \frac{3^5}{3^2} \\
&= 2^{6-7} \cdot 3^{5-2} \\
&= 2^{-1} \cdot 3^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 27 \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7} = \frac{27}{2}$$

$$\text{b.)}\quad \frac{3+2^{-1}}{5\cdot 2^{-1}} = \frac{3+\dfrac{1}{2}}{5\cdot\dfrac{1}{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{6+1}{2}}{\dfrac{5}{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{7}{2}}{\dfrac{5}{2}}$$

$$= \frac{(7)\cdot(2)}{(2)\cdot(5)}$$

$$= \frac{7}{5}$$

Por lo que:

$$\frac{3+2^{-1}}{5\cdot 2^{-1}} = \frac{7}{5}$$

$$\text{c.)}\quad \frac{-3^{-2}}{\left[1+\dfrac{4}{3}\right]^2} = \frac{-3^{-2}}{\left[\dfrac{3+4}{3}\right]^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{(3)^2}}{\left[\dfrac{7}{3}\right]^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{9}}{\dfrac{7^2}{3^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{-1}{9}}{\dfrac{49}{9}}$$

$$= \frac{(-1)(9)}{(9)(49)}$$

$$= \frac{-1}{49}$$

Por lo que:

$$\frac{-3^{-2}}{\left[1+\dfrac{4}{3}\right]^2} = \frac{-1}{49}$$

d.)
$$\begin{aligned}
\frac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}} &= \frac{-(25)^6 \cdot (2 \cdot 7)^{10} \cdot 1}{7^{10} \cdot (2 \cdot 5)^{10}} \\
&= \frac{-(5^2)^6 \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}}{7^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}} \\
&= \frac{-(5^{12}) \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}}{5^{10} \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}} \\
&= \frac{-(5^{12})}{5^{10}} \cdot \frac{2^{10}}{2^{10}} \cdot \frac{7^{10}}{7^{10}} \\
&= -(5^{12-10}) \cdot 2^{10-10} \cdot 7^{10-10} \\
&= -(5^2) \cdot 2^0 \cdot 7^0 \\
&= -(25) \cdot 1 \cdot 1 \\
&= -25
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}} = -25$$

e.)
$$\begin{aligned}
\left[\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 &= \left[\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot (2^2)^2}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 \\
&= \left[\frac{2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 \\
&= \left[\frac{2^6 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 \\
&= \left[\frac{2^6}{2^4} \cdot \frac{3^5}{3^2}\right]^2 \\
&= \left[2^{6-4} \cdot 3^{5-2}\right]^2 \\
&= \left[2^2 \cdot 3^3\right]^2 \\
&= (2^2)^2 \cdot (3^3)^2 \\
&= 2^4 \cdot 3^6 \\
&= 11664
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\left[\frac{2^2\cdot 3^5\cdot 4^2}{2^4\cdot 3^2}\right]^2 = 11664$$

f.) $$\frac{2^3+2^5-\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1}}{2^4\cdot 3} = \frac{2^3+2^5-\dfrac{1}{\dfrac{1}{8}}}{2^4\cdot 3}$$

$$= \frac{2^3+2^5-8}{2^4\cdot 3}$$

$$= \frac{8-8+2^5}{2^4\cdot 3}$$

$$= \frac{2^5}{2^4\cdot 3}$$

$$= \frac{2^5}{2^4}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= 2^{5-4}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Por lo que:

$$\frac{2^3+2^5-\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1}}{2^4\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Ejercicios 50

Determine la fracción canónica correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\dfrac{(3^4)^3 \cdot (3^2)^4}{(-3)^{15} \cdot 3^4}$

2.) $\dfrac{(-3)^7 \cdot 3^9}{(-3)^{15} \cdot 3^4}$

3.) $\dfrac{1 - 3^{-1} - 2 \cdot 3^{-2}}{3^{-1} + 3^{-2}}$

4.) $\dfrac{1 + 4^{-1} - 2 \cdot 4^{-2}}{6 \cdot 4^{-2} + 1 + 5 \cdot 4^{-1}}$

5.) $\dfrac{(2 - 3 \cdot 7)^{-1}}{5 + 3^{-1}}$

6.) $\dfrac{25^6 \cdot 14^{10}}{-7^{10} \cdot 10^{10}}$

7.) $\dfrac{35^{11} \cdot 49^4 \cdot (-12)^{-31}}{10^{12} \cdot 6^{30} \cdot (-14)^{20}}$

8.) $\dfrac{-3 \cdot 4^{-1} + 1 + 2 \cdot 4^{-2}}{4^{-1} - 2 \cdot 4^{-2}}$

9.) $\dfrac{2 + 7 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2}}{2 + 3 \cdot 5^{-1} - 2 \cdot 5^{-2}}$

10.) $\dfrac{\dfrac{1}{2} + \left[\dfrac{3}{4}\right]^2}{\dfrac{-5^2}{4}}$

Teorema 5

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{a^{-n} \cdot c}{b^{-m} \cdot d} = \frac{b^m \cdot c}{a^n \cdot d}$$

Ejemplo 75

Determine la fracción canónica correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{6^{-5} \cdot 2^3}{3^{-4}}$ b.) $\dfrac{2^{-3} \cdot 14^{-2} \cdot 7^2}{2^{-5}}$ c.) $\dfrac{2^{-4} \cdot 3^{-1}}{10^{-3} \cdot 3^{-2} \cdot 5^4}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{6^{-5}\cdot 2^{3}}{3^{-4}} &= \frac{3^{4}\cdot 2^{3}}{6^{5}}\\
&= \frac{3^{4}\cdot 2^{3}}{(2\cdot 3)^{5}}\\
&= \frac{3^{4}\cdot 2^{3}}{2^{5}\cdot 3^{5}}\\
&= \frac{1}{2^{5-3}\cdot 3^{5-4}}\\
&= \frac{1}{2^{2}\cdot 3^{1}}\\
&= \frac{1}{4\cdot 3}\\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{6^{-5}\cdot 2^{3}}{3^{-4}} = \frac{1}{12}$$

b.)
$$\begin{aligned}
\frac{2^{-3}\cdot 14^{-2}\cdot 7^{2}}{2^{-5}} &= \frac{2^{5}\cdot 7^{2}}{2^{3}\cdot 14^{2}}\\
&= \frac{2^{5}\cdot 7^{2}}{2^{3}\cdot (2\cdot 7)^{2}}\\
&= \frac{2^{5}\cdot 7^{2}}{2^{3}\cdot 2^{2}\cdot 7^{2}}\\
&= \frac{2^{5}}{2^{3}\cdot 2^{2}}\\
&= \frac{2^{5}}{2^{5}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2^{-3}\cdot 14^{-2}\cdot 7^{2}}{2^{-5}} = 1$$

c.) $$\begin{aligned}\frac{2^{-4}\cdot 3^{-1}}{10^{-3}\cdot 3^{-2}\cdot 5^{4}} &= \frac{10^{3}\cdot 3^{2}}{2^{4}\cdot 3^{1}\cdot 5^{4}}\\ &= \frac{(5\cdot 2)^{3}\cdot 3^{2}}{2^{4}\cdot 3\cdot 5^{4}}\\ &= \frac{5^{3}\cdot 2^{3}\cdot 3^{2}}{2^{4}\cdot 3\cdot 5^{4}}\\ &= \frac{3^{2-1}}{2^{4-3}\cdot 5^{4-3}}\\ &= \frac{3^{1}}{2^{1}\cdot 5^{1}}\\ &= \frac{3}{2\cdot 5}\\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2^{-4}\cdot 3^{-1}}{10^{-3}\cdot 3^{-2}\cdot 5^{4}} = \frac{3}{10}$$

Ejercicios 51

Determine la fracción canónica correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\dfrac{4^{-3}\cdot 6^{2}}{2^{-8}\cdot 3^{2}}$

2.) $3-\dfrac{4^{-2}}{3^{-1}}$

3.) $\dfrac{10^{-2}\cdot 6^{-30}\cdot 35^{11}\cdot 49^{4}}{(-14)^{20}\cdot(-12)^{-31}}$

4.) $\dfrac{-6^{-3}\cdot 4^{3}}{2^{5}\cdot 3^{-2}}$

5.) $\dfrac{(-7)^{2}\cdot 3^{-5}}{(14)^{2}\cdot 3^{-4}}$

6.) $\dfrac{21^{27}\cdot(-35)^{14}\cdot 8^{9}}{(-45)^{-13}\cdot 14^{13}\cdot 12^{10}\cdot 27^{14}}$

7.) $\dfrac{10^{2}\cdot(-5)^{-2}\cdot(-2)^{-5}}{5\cdot(-3)^{0}}$

8.) $\dfrac{5}{2}+\dfrac{2\cdot 3^{-2}}{2^{-1}}$

1.9.8 Raíz enésima de un número real

■ Definición 30

Sea $a\in\mathbb{R},\ \ a\geq 0,\ \ n\in\mathbb{N},\ \ n>1$.

Se define a la raíz enésima de a y se denota $a^{1/n}$, como el número real positivo b que cumple la igualdad: $b^{n} = a$.

Simbólicamente tenemos:

$$a^{1/n} = b \iff b^{n} = a$$

■ Ejemplo 76

a.) $8^{\frac{1}{3}} = 2$ pues $2^3 = 8$; en este caso decimos que 2 es la raíz cúbica de 8

b.) $625^{\frac{1}{4}} = 5$ pues $5^4 = 625$; en este caso decimos que 5 es la raíz cuarta de 625

c.) $49^{\frac{1}{2}} = 7$ pues $7^2 = 49$; en este caso decimos que 7 es la raíz cuadrada de 49

Notación.

Sea $a \in \mathbb{R}, \;\; a \geq 0, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; n > 1$

La raíz enésima de a también se denota $\sqrt[n]{a}$ es decir:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Por ejemplo

a.) La raíz cúbica de 8 se puede denotar como $8^{\frac{1}{3}}$ ó $\sqrt[3]{8}$, es decir: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$

b.) La raíz cuarta de 625 se puede denotar como $625^{\frac{1}{4}}$ ó $\sqrt[4]{625}$, es decir: $625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}$

Así usando el hecho de que $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ La realción (1) se expresa así:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Por ejemplo

a.) $\sqrt[2]{121} = 11$ pues $11^2 = 121$

b.) $\sqrt[5]{32} = 2$ pues $2^5 = 32$

c.) $\sqrt[3]{343} = 7$ pues $7^3 = 343$

■ **Definición 31**

Sea $a \in \mathbb{R}, \;\; a \geq 0, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; n > 1$

En la expresión $\sqrt[n]{a}$:
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{“}n\text{” recibe el nombre de índice.} \\ \text{“}a\text{” recibe el nombre de subradical.} \\ \text{“}\sqrt{\ }\text{” es el símbolo de radical.} \end{array} \right.$$

■ **Ejemplo 77**

a.) En $\sqrt[7]{29}$, 7 es el índice del radical y 29 es el subradical.

b.) En $\sqrt[5]{64}$, 5 es el índice del radical y 64 es el subradical.

c.) En $\sqrt[4]{81}$, 4 es el índice del radical y 81 es el subradical.

Propiedad 6

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

Entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Demostración:

1.) Demostraremos que $\sqrt[n]{a^n} = a$

Sea $x = a^n$, entonces, por definición $\sqrt[n]{x} = a$

Así:

$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{x} = a$

O sea; $\sqrt[n]{a^n} = a$

2.) Demostraremos que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Sea $x = \sqrt[n]{a}$, entonces, por definición $x^n = a$

Así:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = x^n = a$

O sea; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Observación

De los resultados anteriores se obtiene que:

Si $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in I\mathbb{N}$, $n > 1$ entonces:

$$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

Ejemplo 78

Escriba en notación decimal la raíz cuarta de 81

Solución

Factoricemos 81

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

De aquí se tiene que $81 = 3^4$,
por lo que: $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$,
es decir: la raíz cuarta de 81 es 3.

Ejemplo 79

Escriba en notación decimal la raíz sexta de 64

Solución

Factoricemos 64

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

De aquí se tiene que $64 = 2^6$,
por lo que: $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$,
es decir: la raíz sexta de 64 es 2.

Ejemplo 80

Escriba en notación decimal la raíz tercera de 125

Solución

Factoricemos 125

125	5
25	5
5	5
1	

De aquí se tiene que $125 = 5^3$,
por lo que: $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$,
es decir: la raíz tercera de 125 es 5.

Notación:

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, entonces $\sqrt[2]{a}$ se acostumbra escribir como $\sqrt{a}$, es decir, cuando el índice de un radical es 2, este se omite.

Teorema 6

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ entonces la raíz enésima de a es única.

Ejercicios 52

Escriba en notación decimal el número correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\sqrt{(-5)^2}$ 2.) $\sqrt{5^2}$ 3.) $\sqrt{25}$

Hasta ahora hemos trabajado con radicales en donde el subradical es un número real positivo, la siguiente definición extiende el concepto de raíz enénesima, al caso en el que el subradical es un número real negativo, para esto, es necesario imponer algunas condiciones al indice del radical.

Definición 32

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, n impar.

Se define la raíz enésima de a y se denota $a^{1/n}$, como el número real negativo b que cumple la igualdad $b^n = a$.

Simbólicamente tenemos:

$a^{1/n} = b \Longleftrightarrow b^n = a$ $\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a$

Ejemplo 81

a.) $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$

b.) $\sqrt[5]{-32} = -2$ pues $(-2)^5 = -32$

c.) $\sqrt[7]{-1} = -1$ pues $(-1)^7 = -1$

Observación importante: Si n es un número natural par entonces: La raíz enésima de un número real negativo NO está definida en el conjunto de los números reales.

Simbólicamente tenemos:

Sea $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $n > 1$, n par, si $a < 0$ entonces:

$$\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$$

Por ejemplo, $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$

En efecto, supongamos que existe un número real b tal que: $\sqrt{-16} = b$, entonces debe cumplirse que $-16 = b^2$.

De aquí se observa que esta igualdad nunca es cierta pues: b^2 es positivo y -16 es negativo.

Por lo tanto: $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$

En forma similar se puede demostrar que:

$\sqrt[4]{-8}$, $\sqrt[6]{-11}$, $\sqrt[10]{-135}$, $\sqrt[8]{-1000}, ...,$ no están definidas en el conjunto de los números reales.

Propiedad 7

Si $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, n impar, entonces se cumple que: $\sqrt[n]{-a}, = -\sqrt[n]{a}$

Ejemplo 82

Escriba en notación decimal el número correspondiente a $\sqrt[3]{-343}$

Solución

Por la propiedad anterior tenemos que:

$\sqrt[3]{-343} = -\sqrt[3]{343}$ y factorizando 343 tenemos:

$$\begin{array}{l|l} 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $343 = 7^3$,
y por lo tanto: $\sqrt[3]{-343} = -\sqrt[3]{343} = -\sqrt[3]{7^3} = -7$,
o sea;
$\sqrt[3]{-343} = -7.$

Ejemplo 83

Escriba en notación decimal el número correspondiente a $\sqrt[5]{-243}$

Solución

Por la propiedad anterior tenemos que:

$\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243}$ y factorizando 243 tenemos:

$$\begin{array}{l|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $243 = 3^5$,
y por lo tanto: $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -\sqrt[5]{3^5} = -3$,
o sea;
$\sqrt[5]{-243} = -3.$

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, n par, se define la raíz enésima de a^n como el valor absoluto de a.

Simbólicamente tenemos: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$; si n es par.

Por ejemplo

a.) $\sqrt[4]{(-3)^4} \;=\; |-3| \;=\; 3$ es decir; $\sqrt[4]{(-3)^4} \;=\; 3$

b.) $\sqrt[6]{3^6} \;=\; |3| \;=\; 3$ es decir; $\sqrt[6]{3^6} \;=\; 3$

c.) $\sqrt{(-1)^2} \;=\; |-1| \;=\; 1$ es decir; $\sqrt{(-1)^2} \;=\; 1$

Ejercicios 53

Escriba en notación decimal el número correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\sqrt[3]{-125}$

2.) $\sqrt[4]{625}$

3.) $\sqrt{(-3)^2}$

4.) $\sqrt[7]{-128}$

5.) $\sqrt[7]{128}$

6.) $\sqrt[5]{(-7)^5}$

7.) $\sqrt{(-9)^2}$

8.) $\sqrt[3]{-27}$

9.) $\sqrt[6]{(-7)^6}$

Propiedad 8

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tales que $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representan números reales entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

!Cuidado¡

No siempre se cumple que: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Por ejemplo, observe que: $\sqrt{\dfrac{-4}{-1}} \neq \dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}}$ pues $\sqrt{\dfrac{-4}{-1}}$ si está definida en $\mathbb{R}$

$$\sqrt{\frac{-4}{-1}} \;=\; \sqrt{4} \;=\; 2 \text{ es decir } \sqrt{\frac{-4}{-1}} \;=\; 2$$

pero $\sqrt{-4}$ y $\sqrt{-1}$ NO representan números reales.

■ **Ejemplo 84**

El número $\sqrt[3]{\dfrac{-32}{243}}$ puede ser representado por una fracción canónica, determine dicha fracción (use la propiedad anterior)

Solución

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{\frac{-32}{243}} &= \frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[5]{243}} \\ &= \frac{-\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} \\ &= \frac{-\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[5]{3^5}} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[5]{\frac{-32}{243}} = \frac{-2}{3}$$

Ejercicios 54

Cada una de las expresiones siguientes representa a un número real, el cual puede ser representado por una fracción canónica, en cada caso determine la fracción canónica correspondiente (use la propiedad anterior)

1.) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

2.) $\sqrt{\frac{25}{81}}$

3.) $\sqrt[3]{\frac{-125}{343}}$

4.) $\sqrt[5]{\frac{243}{3125}}$

Propiedad 9

Sea $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tales que $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representan números reales entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

!Cuidado¡

No siempre se cumple que: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Ejercicios 55

Escriba dos ejemplos para los cuales no se cumple la propiedad anterior, en cada caso justifique su respuesta.

■ **Ejemplo 85**

Haciendo uso de la propiedad anterior escriba en notación decimal el número correspondiente a $\sqrt{225}$.

Solución

Factorizando 225 tenemos:

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

De aquí se tiene que $225 = 3^2 \cdot 5^2$,
y por lo tanto: $\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} = 3 \cdot 5 = 15$,
es decir;
$\sqrt{225} = 15$.

Ejemplo 86

Haciendo uso de la propiedad anterior escriba en notación decimal el número correspondiente a $\sqrt[3]{-216}$.

Solución

$\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216}$; Factorizando 216 tenemos:

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

De aquí se tiene que $216 = 2^3 \cdot 3^3$,
y por lo tanto: $\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = -\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = -2 \cdot 3 = -6$,
es decir;
$\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -6$.

Ejercicios 56

Haciendo uso de la propiedad anterior escriba la notación decimal del número correspondiente a cada una de la siguientes expresiones:

1.) $\sqrt{441}$

2.) $\sqrt{1225}$

3.) $\sqrt[3]{-2744}$

4.) $\sqrt{1764}$

A continuación nuestro objetivo es definir lo que vamos a entender por potencias en el que el exponente es un número racional.

Definición 33

Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $n > 1$, tales que $\sqrt[m]{a}$ representa un número real, entonces se cumple que:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m} \quad y \quad \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{n/m}$$

Ejemplo 87

a.) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

b.) $\sqrt{4^3} = 4^{\frac{3}{2}}$

c.) $\left(\sqrt[6]{3}\right)^7 = 3^{\frac{7}{6}}$

d.) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{5}}$

1.9.9 Propiedades

Las propiedades enunciadas anteriormente para potencias en los cuales el exponente es un número entero, también son válidas para potencias en las cuales el exponente es un número racional; a saber:

1.) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

2.) $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}, \; a \neq 0$

3.) $a^{\frac{-m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, \; a \neq 0$

4.) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$

5.) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

6.) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}, \; b \neq 0$

■ **Ejemplo 88**

Usando las propiedades de los radicales y las potencias con exponente racional, verifique cada una de las siguientes igualdades.

a.) $\sqrt{1296} = 36$ b.) $\sqrt[5]{\dfrac{2^{10}}{3^{15}}} = \dfrac{4}{27}$

Solución

a.) $\sqrt{1296}$

1296	2
648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

De aquí se tiene que $1296 = 2^4 \cdot 3^4$,
por lo que: $\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^4} = 2^{\frac{4}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{2}} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$,
es decir; $\sqrt{1296} = 36$.

b.)
$$\sqrt[5]{\frac{2^{10}}{3^{15}}} = \frac{\sqrt[5]{2^{10}}}{\sqrt[5]{3^{15}}} = \frac{2^{\frac{10}{5}}}{3^{\frac{15}{5}}} = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$$

es decir;

$$\sqrt[5]{\frac{2^{10}}{3^{15}}} = \frac{4}{27}$$

Ejercicios 57

Usando las propiedades de los radicales y las potencias con exponentes racionales, verifique cada una de las siguientes igualdades.

1.) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^9} = 108$

2.) $\sqrt[3]{2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 120$

3.) $\sqrt[5]{\dfrac{7^{10} \cdot 11^5}{3^{15}}} = \dfrac{539}{27}$

4.) $\sqrt[9]{\dfrac{3^{18} \cdot 5^9}{4^9 \cdot 2^{27}}} = \dfrac{45}{32}$

Propiedad 10

Sean $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tales que $\sqrt[n]{a}$ representa un número real, entonces:

$$c \cdot \sqrt[n]{a} + d \cdot \sqrt[n]{a} = (c + d)\sqrt[n]{a}$$

Esta propiedad es una consecuencia de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en el conjunto de los números reales.

■ **Ejemplo 89**

Usando la propiedad anterior realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-\sqrt{7} + 6\sqrt{7}$

b.) $2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[4]{6} + 5\sqrt[3]{-6} + \sqrt[4]{6}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned} -\sqrt{7} + 6\sqrt{7} &= (-1)\sqrt{7} + 6\sqrt{7} \\ &= (-1 + 6)\sqrt{7} \\ &= 5\sqrt{7} \end{aligned}$$

o sea; $-\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

b.) $2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[4]{6} + 5\sqrt[3]{-6} + \sqrt[4]{6}$

$$= (2\sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{-6}) + (-4\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6})$$

$$= (2\sqrt[3]{6} - 5\sqrt[3]{6}) + (-4\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6})$$

$$= (2 - 5)\sqrt[3]{6} + (-4 + 1)\sqrt[4]{6}$$

$= -3\sqrt[3]{6} \quad + \quad (-3)\sqrt[4]{6}$

$= -3\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[4]{6}$ o sea

$$2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[4]{6} + 5\sqrt[3]{-6} + \sqrt[4]{6} = -3\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[4]{6}$$

Teorema 7

Sean $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tales que $\sqrt[n]{a}$ representa un número real, si existe b, $b > 0$, tal que $a = b^n \cdot c$ entonces: $\sqrt[n]{a} = b \cdot \sqrt[n]{c}$. Es decir como: $a = b^n \cdot c$ tenemos que:

$$\sqrt[n]{b^n \cdot c} = b \cdot \sqrt[n]{c}$$

y en tal caso decimos que el factor b fue extraído del radical.

Demostración

como $a = b^n \cdot c$ entonces

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= \sqrt[n]{b^n \cdot c} && \text{, por teorema} \\ &= \sqrt[n]{b^n} \cdot \sqrt[n]{c} && \text{, por teorema} \\ &= b \cdot \sqrt[n]{c} \end{aligned}$$

Ejemplo 90

a.) $\sqrt{5^2 \ 3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b.) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

c.) $\sqrt[5]{-64} = -\sqrt[5]{64} = -\sqrt[5]{2^6} = -\sqrt[5]{2^5 \cdot 2} = -(\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2}) = -2\sqrt[5]{2}$

d.) $\sqrt{360} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$

Definición 34

Se dice que el radical $\sqrt[n]{a}$ está expresado de su forma más simple si no es posible extraer del radical algún factor primo de a.

Ejemplo 91

Exprese en su forma más simple cada uno de los siguientes radicales:

a.) $\sqrt{72}$ b.) $\sqrt[3]{135}$ c.) $\sqrt[5]{-96}$

Solución

a.) $\sqrt{72}$

como $72 = 2^3 \cdot 3^2$

entonces:

$$\begin{aligned}
\sqrt{72} &= \sqrt{2^3 \cdot 3^2} \\
&= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} \\
&= 2\sqrt{3^2 \cdot 2} \\
&= 2 \cdot 3\sqrt{2} \\
&= 6\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Solución

b.) $\sqrt[3]{135}$

como $135 = 3^3 \cdot 5$

entonces:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{135} &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$\sqrt[3]{135} = 3 \cdot \sqrt[3]{5}$

Solución

c.) $\sqrt[5]{-96}$

como $96 = 2^5 \cdot 3$

entonces:

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{-96} &= -\sqrt[5]{96} \\
&= -\sqrt[5]{2^5 \cdot 3} \\
&= -2\sqrt[5]{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$\sqrt[5]{-96} = -2\sqrt[5]{3}$

Ejercicios 58

Exprese los radicales involucrados en cada una de las siguientes expresiones en su forma más simple y realice las operaciones indicadas:

a.) $\sqrt{45} + \sqrt{80}$

b.) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$

c.) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

d.) $\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{2^5 \cdot 3^4} + 2\sqrt[3]{2^8 \cdot 3} - \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^4}$

Solución

a.) $\sqrt{45} + \sqrt{80}$

Factorizando 45 y 80 tenemos que:

$45 = 3^2 \cdot 5$ y $80 = 2^4 \cdot 5$

Así:

$$\begin{aligned}
\sqrt{45} + \sqrt{80} &= \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} \\
&= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{5} \\
&= 3 \cdot \sqrt{5} + 2^{\frac{4}{2}} \cdot \sqrt{5} \\
&= 3 \cdot \sqrt{5} + 2^2 \cdot \sqrt{5} \\
&= 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \\
&= (3 + 4)\sqrt{5} \\
&= 7\sqrt{5}
\end{aligned}$$

es decir: $\sqrt{45} + \sqrt{80} = 7\sqrt{5}$

b.) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$

Factotizando 54, 16 y 128 tenemos que:

$54 = 3^3 \cdot 2$; $16 = 2^4$ y $128 = 2^7$

Así

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} \\
&= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2^{\frac{6}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 4 \cdot \sqrt[3]{2} \\
&= (3 - 2 + 4)\ \sqrt[3]{2} \\
&= 5 \cdot \sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

es decir:

$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} = 5 \cdot \sqrt[3]{2}$

c.) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

Factorizando 18 y 20 tenemos que:

$18 = 3^2 \cdot 2$ y $50 = 5^2 \cdot 2$

Así:

$$\begin{aligned}
\sqrt{18} - \sqrt{50} &= \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{5^2 \cdot 2} \\
&= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} \\
&= 3 \cdot \sqrt{2} - 5 \cdot \sqrt{2} \\
&= -2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

es decir:

$\sqrt{18} - \sqrt{50} = -2\sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
d.)\ \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4}+2\sqrt[3]{2^8\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6\cdot 3^4} &= \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 3}\ +\ \sqrt[3]{2^6\cdot 2^2\cdot 3}\ -\ \sqrt[3]{2^6\cdot 3^3\cdot 3}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 3}\ +\ 2\sqrt[3]{2^6\cdot 2^2\cdot 3}\ -\ \sqrt[3]{2^6\cdot 3^3\cdot 3}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3}+2\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{4\cdot 3}+2\cdot 2^{\frac{6}{3}}\cdot\sqrt[3]{4\cdot 3}-2^{\frac{6}{3}}\cdot 3\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{6}{4}\cdot\sqrt[3]{12}\ +\ 2\cdot 2^2\cdot\sqrt[3]{12}\ -\ 2^2\cdot 3\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{12}\ +\ 8\sqrt[3]{12}\ -\ 12\sqrt[3]{3}\\
&= (\frac{3}{2}+8)\sqrt[3]{12}\ -\ 12\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{19}{2}\sqrt[3]{12}\ -\ 12\sqrt[3]{3}
\end{aligned}
$$

es decir:

$$\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4}\ +\ 2\cdot\sqrt[3]{2^8\cdot 3}\ -\ \sqrt[3]{2^6\cdot 3^4}=\frac{19}{2}\cdot\sqrt[3]{12}\ -\ 12\sqrt[3]{3}$$

Ejercicios 59

Exprese los radicales involucrados en cada una de las siguientes expresiones en su forma más simple, y realice las operaciones indicadas:

1.) $\sqrt{108}\ -\ \sqrt{75}$

2.) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}\ +\ \sqrt[3]{54}$

3.) $5\sqrt[3]{81}\ -\ \sqrt[3]{56}\ +\ \sqrt[3]{192}$

4.) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{24}\ +\ \frac{1}{5}\sqrt[3]{375}\ +\ \frac{1}{7}\sqrt[3]{1029}$

5.) $3\sqrt[3]{40}\ +\ \sqrt[3]{135}\ -\ \sqrt[3]{625}$

6.) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}\ +\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{54}\ -\ \frac{2}{5}\sqrt[3]{250}$

1.9.10 Productos de radicales de diferente índice

Considere los ejemplos *a.*) y *b.*) siguientes:

a.) De acuerdo a la notación usada, $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$

Pero además, por ampliación de fracciones se tiene que:

$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}$; de aquí que

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^2}$; o sea que $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^2}$

b.) Por notación de páginas (96-97), $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$

Pero además, por ampliación de fracciones se tiene que:

$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5}$; de aquí que

$\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{5}{4 \cdot 5}} = \sqrt[4 \cdot 5]{7^5}$, o sea que $\sqrt[4]{7} = \sqrt[4 \cdot 5]{7^5}$

Los ejemplos *a.*) y *b.*) anteriores son casos particulares de la siguiente propiedad:

Teorema 8

Si $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ n > 1,\ k > 1$; tales que $\sqrt[n]{a}$ representa un número real entonces:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= a^{1/n} \\ &= a^{\frac{k}{nk}} \qquad , \text{ pues } \tfrac{1}{n} = \tfrac{k}{nk} \\ &= \sqrt[n \cdot k]{a^k} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$

Ejemplo 92

Escriba el número representado por $\sqrt[7]{2}$, por medio de un radical de índice 21.

Solución

Por el teorema anterior:

$\sqrt[7]{2} = \sqrt[7 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[21]{2^3} = \sqrt[21]{8}$ es decir: $\sqrt[7]{2} = \sqrt[21]{8}$

Ejemplo 93

Escriba el número representado por $\sqrt[6]{10}$, por medio de un radical de índice 24.

Solución

Por el teorema anterior:

$\sqrt[6]{10} = \sqrt[6\cdot 4]{10^4} = \sqrt[24]{10^4}$

es decir: $\sqrt[6]{10} = \sqrt[24]{10^4}$

Ejercicios 60

1.) Escriba el número representado por $\sqrt{7}$, por medio de un radical de índice 10.

2.) Escriba el número representado por $\sqrt[11]{2}$, por medio de un radical de índice 25.

3.) Escriba el número representado por $\sqrt[5]{3}$, por medio de un radical de índice 25.

Considere los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 94

Escriba los números representados por $\sqrt[4]{2}$ y $\sqrt[6]{5}$ por medio de un radical cuyo índice sea el mínimo múltiplo común de 4 y 6.

Solución

Como m.m.c (4,6)=12 entonces:

i.) $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4\cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{8}$ *ii.)* $\sqrt[6]{5} = \sqrt[6\cdot 2]{5^2} = \sqrt[12]{25}$

es decir: $\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{8}$ y $\sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{25}$

Ejemplo 95

Escriba los números representados por $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{4}$ y $\sqrt[6]{5}$

Por medio de radicales cuyo índice sea el mínimo común de 2, 5 y 6.

Solución

Como m.m.c $(2,\ 5,\ 6) = 30$ entonces:

$i.)\quad \sqrt{3} = \sqrt[2\cdot 15]{3^{15}} = \sqrt[30]{3^{15}}$; es decir $\sqrt{3} = \sqrt[30]{3^{15}}$

$ii.)\quad \sqrt[5]{4} = \sqrt[5\cdot 6]{4^{6}} = \sqrt[30]{4^{6}}$; es decir $\sqrt[5]{4} = \sqrt[30]{4^{6}}$

$iii.)\quad \sqrt[6]{5} = \sqrt[6\cdot 5]{5^{5}} = \sqrt[30]{5^{5}}$; es decir $\sqrt[6]{5} = \sqrt[30]{5^{5}}$

Ejercicios 61

a.) Escriba los números representados por $\sqrt[14]{5}$, $\sqrt[21]{2}$ por medio de radicales cuyo índice sea m.m.c. (14, 21)

b.) Escriba los números representados por $\sqrt[24]{7}$, $\sqrt[9]{3}$ y $\sqrt[18]{2}$ por medio de radicales cuyo índice sea m.m.c. (24, 9, 18)

c.) Escriba los números representados por $\sqrt[7]{5}$, $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt{3}$ por medio de radicales cuyo índice sea m.m.c. (7, 3, 2)

Teorema 9

Sean $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$, sea m.m.c. $(m, n) = k$ y sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$, tales que $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representan números reales, entonces:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[k]{a^p \cdot b^r} \text{ ; donde } k = m \cdot p,\ k = r \cdot n$$

Demostración.

Si m.m.c. $(m, n) = k$ entonces existen p, r con $p \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ tales que:

$k = m \cdot p$ y $k = n \cdot r$, así pues

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[m\cdot p]{a^p} \cdot \sqrt[m\cdot r]{b^r} \quad \text{, como } k = m \cdot p \text{ y } k = r \cdot n \\ &= \sqrt[k]{a^p} \cdot \sqrt[k]{b^r} \\ &= \sqrt[k]{a^p \cdot b^r} \end{aligned}$$

es decir: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[k]{a^p \cdot b^r}$

Ejemplo 96

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y exprese el resultado en forma más simple:

a.) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$ *b.*) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[6]{32}$

Solución

a.) Como m.m.c. $(2,3) = 6$ entonces:

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= \sqrt[3]{2} \\
&= \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} \\
&= \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} \\
&= \sqrt[6]{125 \cdot 4} \\
&= \sqrt[6]{500}
\end{aligned}$$

es decir: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{500}$

b.) Como m.m.c. $(4,6) = 12$ entonces:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[6]{32} &= \sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{32^2} \\
&= \sqrt[12]{(8)^3 \cdot (32)^2} \\
&= \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^5)^2} \\
&= \sqrt[12]{2^9 \cdot 2^{10}} \\
&= \sqrt[12]{2^{19}} \\
&= \sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^7} \\
&= 2 \cdot \sqrt[12]{2^7} \\
&= 2 \cdot \sqrt[12]{128}
\end{aligned}$$

es decir: $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[6]{32} = 2 \cdot \sqrt[12]{128}$

Ejercicios 62

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y exprese el resultado en su forma más simple:

1.) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{12}$ 2.) $\sqrt[7]{9} \cdot \sqrt[3]{36}$ 3.) $\sqrt[12]{13} \cdot \sqrt[4]{2}$

4.) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{-5}$ 3.) $\sqrt[-3]{6} \cdot \sqrt[3]{36}$ 6.) $\sqrt[7]{6} \cdot \sqrt[5]{9}$

Capítulo 2

Expresiones Algebraicas

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
· · ·
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

2.1 Expresiones Algebraicas . . . 3
2.2 Operaciones con expresiones algebraicas . . . 6
2.2.1 Suma de monomios semejantes . . . 6
2.2.2 Multiplicación de Monomios . . . 10
2.2.3 Simplificación de fracciones con monomios . . . 11
2.3 Polinomios . . . 17
2.3.1 División de polinomios en una variable . . . 19
2.3.2 División Sintética . . . 25
2.4 Factorización de Polinomios . . . 28
2.4.1 Técnicas de factorización . . . 29
2.5 Factorización de polinomios en una variable . . . 45
2.5.1 Factorización de polinomios de grado 2 . . . 45
2.5.2 Factorización de polinomios de grado mayor que 2, con coeficientes enteros . . . 54
2.6 Fracciones Racionales en una Variable . . . 61
2.6.1 Fracciones Racionales en una Variable . . . 61
2.6.2 Simplificación de fracciones racionales . . . 62
2.6.3 Operaciones con fracciones racionales . . . 64
2.7 Racionalización de expresiones algebraicas . . . 79
2.7.1 Racionalización del denominador de expresiones algebraicas . . . 79

2.1 Expresiones Algebraicas

■ **Definición 1**

Dentro del proceso de solución de un ejercicio, problema o exposición de una teoría, un símbolo (generalmente una letra) que se usa para representar un número real arbitrario se llama *variable real.*

■ **Definición 2**

Dentro del proceso de solución de un ejercicio o problema, un simbolo que se usa para representar un número real fijo se llama *constante real.*

■ **Definición 3**

Se llama expresión algebraica a toda constante, variable o bien a toda combinación de constantes y potencias de variables que estén ligadas por alguno de los símbolos $+, -, \cdot$ y $\div$ en un número finito.

Notación: Si a es una constante o una variable y b una variable entonces ab indica el producto de a y b o sea:

$$ab = a \cdot b$$

Ejemplo 1

Ejemplo de expresiones algebraicas

a.) $\dfrac{3x^2y^4}{z^2x}$

b.) $\dfrac{a+b}{a-c}$

c.) $x^3y^2 + \sqrt[3]{5}xy$

d.) m

e.) $\dfrac{-3}{2}\sqrt{5}$

e.) $a^3 + a^2b^{-3} + z^{-2}$

Definición 4

Se llama valor númerico de una expresión algebraica al número que se obtiene al sustituir cada una de sus variables por el valor que se les halla asignado de antemano, y de efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo 2

a.) Determine el valor numérico de $-x^2 + 3x - 4$, si $x = 2$.

b.) Determine el valor numérico de $-6ax^3y^2$ si $a = 5, x = 1, y = -2$

Solución

a.) Sustituyendo la x por el valor asignado en $-x^2 + 3x - 4$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} -(2)^2 + 3(2) - 4 &= -4 + 6 - 4 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Por lo que si $x = 2$, el valor numérico de $-x^2 + 3x - 4$, es -2.

b.) Sustituyendo las variables a, x, y por los valores asignados, en $-6ax^3y^2$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} -6(5)(1)^3(-2)^2 &= -6(5)(1)(4) \\ &= -120 \end{aligned}$$

Por lo que: si $a = 5,\ x = 1,\ y = -2$, el valor numérico de $-6ax^3y^2$ es -120.

Ejercicios 1

Determine el valor numérico correspondiente, en cada una de las siguientes expresiones:

1.) $-2x^2 + ax - b$, si $x = -3$, $a = -2$, $b = -7$

2.) $3x^3 + \dfrac{ax}{c} + 3$, si $x = -1$, $a = 49$, $c = 7$

3.) $\dfrac{3}{5}x^3y^2z$, si $x = \dfrac{-1}{2}$, $y = \dfrac{-3}{4}$, $z = \dfrac{5}{3}$

4.) $\sqrt[3]{x}\, y^{-2}\, z$, si $x = -8$, $y = 2$, $z = \dfrac{1}{4}$

Definición 5

Se llama monomio a toda constante o bien, a toda expresión algebraica, en la cual las potencias de las variables son de exponentes enteros positivos y están relacionados únicamente por la multiplicación y además no contiene letras en el denominador.

Ejemplo 3

Ejemplos de monomios

a.) $-6\,x^7\,y^2\,z$ *b.)* $\dfrac{x}{\sqrt{3}+1}$ *c.)* $\dfrac{-7+\sqrt{2}}{3}\; a\,b\,c$ *d.)* 5

Ejemplo 4

Ejemplos de expresiones algebraicas que no son monomios

a.) $6 + x$ b.) $\dfrac{x+4}{y^3}$ c.) $9\,x^{-3}\,y^2$ d.) $3\,z^{\frac{1}{2}}$

En un monomio se puede distinguir el factor numérico (coeficiente) y el factor literal.

Ejemplo 5

a.) En $4x^2y^3z$, 4 es el factor numérico y x^2y^3z es el factor literal.

b.) En $\dfrac{-3x^2z^5}{4}$, $\dfrac{-3}{4}$ es el factor numérico y x^2z^5 es el factor literal.

c.) En $\dfrac{1}{5}\,x^2(-2)\,z^4\,4\,z^2$, $\dfrac{-8}{5}$ es el factor numérico y $x^2\,z^6$ es el factor literal.

Notación: Si x es una variable o una constante entonces:

$$1 \cdot x = x \qquad \text{y} \qquad -1 \cdot x = -x$$

Tomando en cuenta esta notación tenemos que:

Si el coeficiente de un monomio o de una expresión algebraica es 1 o -1, no escribimos el 1.

Ejemplo 6

a.) En $x^2\, y$ el coeficiente es 1

b.) En $-a^3\, b^5\, c^2$ el coeficiente es -1.

Definición 6

Si dos o más monomios tienen igual factor literal, entonces se dice que son semejantes entre sí.

Ejemplo 7

a.) Los monomios $6\, x^5\, y^2,\ \dfrac{1}{3}\, x^5\, y^2,\ \dfrac{-2x^5y^2}{9}$, son semejantes entre sí.

b.) Los monomios $7\, a^2\, x^3,\ 4\, a^5\, x^3,\ \dfrac{-2}{3} a^5\, x^3$, no son semejantes entre sí.

2.2 Operaciones con expresiones algebraicas

Realizar operaciones con expresiones algebraicas, consiste básicamente en aplicar las propiedades de las operaciones definidas en el conjunto de los números reales (asociatividad, conmutatividad, distributividad, etc) así como las propiedades de las potencias y de los radicales.

Con el fin de lograr una mejor comprensión del tema, por parte del estudiante, primero nos abocaremos a realizar operaciones con monomios, para posteriormente efectuar operaciones con expresiones algebraicas en general.

2.2.1 Suma de monomios semejantes

La suma de monomios semejantes entre sí, es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la suma de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.

Ejemplo 8

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

a.) $2x^2 + 4x^2 - 3x^2$

Solución

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x^2 - 3x^2 &= (2 + 4 - 3)x^2 \\ &= 3x^2 \\ \therefore\ 2x^2 + 4x^2 - 3x^2 &= 3x^2 \end{aligned}$$

b.) $-2ax + \frac{3}{5}ax + ax$

Solución

$$\begin{aligned} -2ax + \frac{3}{5}ax + ax &= \left(-2 + \frac{3}{5} + 1\right)ax \\ &= \frac{-10 + 3 + 5}{5}\,ax \\ \therefore\ -2ax + \frac{3}{5}ax + ax &= \frac{-2}{5}\,ax \end{aligned}$$

Ejercicios 2

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

1.) $4a^3 - \frac{a^3}{2} + a^3$

2.) $-4xy^3 - 5xy^3 + \sqrt{2}\,xy^3$

3.) $\frac{5}{4}ab - \frac{2}{3}ab + \frac{1}{5}ab$

4.) $-11x^2y^2 + x^2y^2 + \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{1}{3}x^2y^2$

Nota: En general la suma de monomios no semejantes entre sí no es igual a un monomio.

Ejemplo 9

Realice las siguientes operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

a.) $12a^2y^2 + 10ax + 3a^2y^2 - 5ax$

Solución

$$\begin{aligned} 12a^2y^2 + 10ax + 3a^2y^2 - 5ax &= (12a^2y^2 + 3a^2y^2) + (10ax - 5ax) \\ &= (12 + 3)\, a^2y^2 + (10 - 5)\, ax \\ &= 15a^2y^2 + 5ax \end{aligned}$$

$$\therefore\ 12a^2y^2 + 10ax + 3a^2y^2 - 5ax = 15a^2y^2 + 5ax$$

b.) $4x^2y - 5ay + 2ya - yx^2$

Solución

$$\begin{aligned} 4x^2y - 5ay + 2ya - yx^2 &= 4x^2y - x^2y - 5ay + 2ay \\ &= (4 - 1)x^2y + (-5 + 2)ay \\ &= 3x^2y - 3ay \end{aligned}$$

$$\therefore\ 4x^2y - 5ay + 2ya - yx^2 = 3x^2y - 3ay$$

Ejercicios 3

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

1.) $-3xy^2 + x^2y - \frac{1}{2}\,xy^2 + \frac{2}{3}\,x^2y$

2.) $a^3 - a^2 + a - 1 + a^2 - a + 1$

3.) $2b^2 + 4bc - 3c + \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{4}\,bc$

4.) $\sqrt{3}\,ab^2 + 2a^2b - \frac{1}{\sqrt{3}}\,ab^2$

■ **Ejemplo 10**

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{-(x-2)}{4} + \dfrac{5(x+3)}{2} - x$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{-(x-2)}{4} + \frac{5(x+3)}{2} - x &= \frac{-(x-2)+2[5(x+3)]-4x}{4} \\
&= \\
&= \frac{-x+2+2[5x+15]-4x}{4} \\
&= \\
&= \frac{-x+2+10x+30-4x}{4} \\
&= \\
&= \frac{(-x+10x-4x)+(2+30)}{4}
\end{aligned}$$

$$\therefore \; \frac{-(x-2)}{4} + \frac{5(x+3)}{2} - x = \frac{5x+32}{4}$$

b.) $14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)]$

Solución

$$\begin{aligned}
14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] &= 14x - 3x + 2 - [5x + 2 - x + 1] \\
&= 14x - 3x + 2 - [4x + 3] \\
&= 14x - 3x + 2 - 4x - 3 \\
&= (14x - 3x - 4x) + (2 - 3) \\
&= 7x - 1
\end{aligned}$$

$$\therefore \; 14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] = 7x - 1$$

c.) $(-4x^3y + 19xy^3 - y^3 + 6a^2b^2) - (-y^2 - 40xy^3 + 2a^2b^2 - 15x^3y)$

Solución

$(-4x^3y + 19xy^3 - y^3 + 6a^2b^2) - (-y^2 - 40xy^3 + 2a^2b^2 - 15x^3y)$

$= (-4x^3y + 19xy^3 - y^3 + 6a^2b^2) + y^2 + 40xy^3 - 2a^2b^2 + 15x^3y$

$= (-4x^3y + 15x^3y) + (19xy^3 + 40xy^3) - y^3 + (6a^2b^2 - 2a^2b^2) + y^2$

$= 11x^3y + 59xy^3 - y^3 + 4a^2b^2 + y^2$

$\therefore\ (-4x^3y + 19xy^3 - y^3 + 6a^2b^2) - (-y^2 - 40xy^3 + 2a^2b^2 - 15x^3y) \quad = \quad 11x^3y + 59xy^3 - y^3 + 4a^2b^2 + y^2$

Ejercicios 4

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

1.) $2t - 3\{t + 2[t - (t + 5)] + 1\}$

2.) $3 + 2(a + b) - [a - b - 5(a + 3b)]$

3.) $a - 2\{-(b - c) + 2[a + 3(b + c)]\}$

4.) $3x(2x^2 - xy) + x - x(x + 5xy)$

2.2.2 Multiplicación de Monomios

El producto de dos o más monomios es igual a un monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el producto de los factores literales de los monomios dados.

■ **Ejemplo 11**

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

a.) $(4x^2y^3)\left(\frac{2}{3}x^3y^3z\right)$

Solución

$$\begin{aligned}(4x^2y^3)\left(\frac{2}{3}x^3y^3z\right) &= \left(4\cdot\frac{2}{3}\right)(x^2y^3x^3y^3z)\\ &= \frac{8}{3}(x^5y^6z)\end{aligned}$$

$$\therefore\ (4x^2y^3)\left(\frac{2}{3}x^3y^3z\right) = \frac{8}{3}(x^5y^6z)$$

b.) $\left(\dfrac{-2xy}{3}\right)\left(\sqrt{3}xy^2\right)\left(\dfrac{3}{2}ax^3y\right)$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-2xy}{3}\right)\left(\sqrt{3}xy^2\right)\left(\frac{3}{2}ax^3y\right) &= \left(\frac{-2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(xyxy^2ax^3y\right)\\
&= \frac{-6\sqrt{3}}{6}\,(x^5y^4a)\\
&= -\sqrt{3}\;x^5\,y^4\,a
\end{aligned}$$

$$\therefore\;\left(\frac{-2xy}{3}\right)\left(\sqrt{3}xy^2\right)\left(\frac{3}{2}ax^3y\right) = -\sqrt{3}\;x^5\,y^4\,a$$

Ejercicios 5

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

1.) $(3x^2)\,(-x^3y)\,(-a^2x)$

2.) $(\dfrac{-1}{2}\,x^2y)\,(\dfrac{-3}{5}\,xy^2)\,(\dfrac{10}{3}\,x^3a)$

3.) $(2a)^5\,(-a^2)\,(-3a^3)\,(4a)$

4.) $(-a^m)\,(2ab)\,(-3a^2b^n)$

2.2.3 Simplificación de fracciones con monomios

Una fracción con monomio (o cociente de monomios) está simplificada si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i.) Las fracciones formadas por los coeficientes de los monomios involucrados están expresadas en su forma más simple.

ii.) Las variables que aparecen en el numerador son diferentes de las que aparecen en el denominador y no se repiten.

iii.) Las potencias de las variables involucradas tienen exponentes positivos.

Ejemplo 12

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{72x^4y^3}{48x^2y^5}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{72\,x^4y^3}{48\,x^2y^5} &= \frac{2^3\,\cdot\,3\,\cdot\,3x^4\,y^3}{2^3\,\cdot\,3\,\cdot\,2x^2y^5}\\
&= \frac{3x^4y^3}{2x^2y^5}\\
&= \frac{3x^4\,\cdot\,x^{-2}}{2y^5\,\cdot\,y^{-3}}\\
&= \frac{3\,x^2}{2\,y^2}
\end{aligned}$$

b.) $\dfrac{\sqrt[3]{3}x^4y^5z}{\sqrt[3]{81}x^4y^7z}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{3}\,x^4y^5z}{\sqrt[3]{81}\,x^4y^7z} &= \frac{\sqrt[3]{3}\,x^4y^5z}{\sqrt[3]{3^4}\,x^4y^7z}\\
&= \frac{\sqrt[3]{3}\,x^4y^5z}{3\sqrt[3]{3}\,x^4y^7z}\\
&= \frac{x^4y^5z}{3\,x^4y^7z}\\
&= \frac{x^4\,x^{-4}\,z\,z^{-1}}{3\,y^7\,y^{-5}}\\
&= \frac{x^0\;z^0}{3y^2}\\
&= \frac{1}{3y^2}
\end{aligned}$$

(*) En la solución de estos ejemplos haremos uso del hecho de que:

i.) $\dfrac{x^{-n}\,\cdot\,c}{d} = \dfrac{c}{x^n\,\cdot\,d}$ *ii.)* $\dfrac{x^n\,\cdot\,c}{d} = \dfrac{c}{x^{-n}\,\cdot\,d}$

Las cuales se pueden demostrar usando el hecho que: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Ejercicios 6

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\dfrac{12\,a^2b^3}{60\,a^3b^5x^6}$ 2.) $\dfrac{\sqrt[3]{135}\,ax^3}{\sqrt[3]{40}\,ax^3}$ 3.) $\dfrac{63\,a^4b^{10}c^{12}}{21\ a^8c^2}$

A continuación nuestro objetivo es realizar operaciones con expresiones algebraicas en general, para esto se siguen procedimientos similares a los usados al efectuar operaciones con monomios.

Ejemplo 13

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

a.) $(-26\,a\,x^{\frac{1}{2}}\,y)\,(\frac{1}{2}\,x^{-2}\,y^{\frac{1}{3}}\,z)$

Solución

$$
\begin{aligned}
\left(-26\,a\,x^{\frac{1}{2}}y\right)\left(\frac{1}{2}\,x^{-2}\,y^{\frac{1}{3}}\,z\right) &= (-26)\left(\frac{1}{2}\right)(a\,x^{\frac{1}{2}}\,y)\,(x^{-2}\,y^{\frac{1}{3}}\,z) \\
&= -13\,a\,x^{\frac{-3}{2}}\,y^{\frac{4}{3}}\,z \\
&= \frac{-13\,a\,y^{\frac{4}{3}}\,z}{x^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \left(-26\,a\,x^{\frac{1}{2}}y\right)\left(\frac{1}{2}\,x^{-2}\,y^{\frac{1}{3}}\,z\right) = \frac{-13\,a\,y^{\frac{4}{3}}\,z}{x^{\frac{3}{2}}}
$$

b.) $(\sqrt[3]{2}\ x^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{-2}{3}})^3\ (\frac{-1}{4}\,x^{-1}\,y)$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{-2}{3}}\right)^3\ \left(\frac{-1}{4}\,x^{-1}y\right) &= \left(2\,x^{\frac{3}{2}}\,y^{-2}\right)\ \left(\frac{-1}{4}\,x^{-1}y\right)\\
&= (2)\left(\frac{-1}{4}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\ y^{-2}\right)\left(x^{-1}\,y\right)\\
&= \frac{-1}{2}\ x^{\frac{1}{2}}\ y^{-1}\\
&= \frac{-x^{\frac{1}{2}}}{2\,y}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left(\sqrt[3]{2}\,x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{-2}{3}}\right)^3\ \left(\frac{-1}{4}\,x^{-1}y\right) = \frac{-x^{\frac{1}{2}}}{2\,y}$$

c.) $\sqrt[4]{8\,vs^2}\ -\ \sqrt{27\,v^2\,s}\ +\ \sqrt{2\,v\,s^2}$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{8\,vs^2}\ -\ \sqrt{27\,v^2\,s}\ +\ \sqrt{2\,v\,s^2} &= \sqrt{2^3\,vs^2}\ -\ \sqrt{3^3\,v^2\,s}\ +\ \sqrt{2\,v\,s^2}\\
&= \sqrt{2^2\cdot 2\,vs^2}\ -\ \sqrt{3^2\cdot 3\,v^2\,s}\ +\ \sqrt{2\,v\,s^2}\\
&= |2|\ |s|\ \sqrt{2v}\ -\ |3|\ |v|\ \sqrt{3s} + |s|\ \sqrt{2v}\\
&= 2\ |s|\ \sqrt{2v}\ -\ 3\ |v|\ \sqrt{3s} + |s|\ \sqrt{2v}\\
&= 3\ |s|\ \sqrt{2v}\ -\ |3|\ |v|\ \sqrt{3s}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sqrt{8\,vs^2}\ -\ \sqrt{27\,v^2\,s}\ +\ \sqrt{2\,v\,s^2} = 3\ |s|\ \sqrt{2v}\ -\ 3\ |v|\ \sqrt{3s}$$

En la solución de estos ejemplos se usó el hecho de que:

(i) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$; si n es par y

(ii) $\sqrt[n]{a^n} = a$; si n es impar

d.) $\sqrt[4]{5\ m^{\frac{-2}{3}}\ n^4\,q^6}\ \cdot\ \sqrt[3]{2\,m^{\frac{1}{2}}\ n^3\,q^5}$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{5\,m^{\frac{-2}{3}}\,n^4\,q^6}\;\cdot\;\sqrt[3]{2\,m^{\frac{1}{2}}\,n^3\,q^5} &= \sqrt[4]{5\,m^{\frac{-2}{3}}\,n^4\,q^4\,q^2}\;\cdot\;\sqrt[3]{2\,m^{\frac{1}{2}}\,n^3\,q^3\,q^2}\\
&= |n|\,|q|\sqrt[4]{5\,m^{\frac{-2}{3}}\,q^2}\;\cdot\;n\;q\sqrt[3]{2\,m^{\frac{1}{2}}\,q^2}\\
&= |n|\,|q|\,n\,q\;\sqrt[4]{5\,m^{\frac{-2}{3}}\,q^2}\;\cdot\;\sqrt[3]{2\,m^{\frac{1}{2}}\,q^2}\\
&= |n|\,|q|\,n\,q\;\sqrt[12]{(5\,m^{\frac{-2}{3}}\,q^2)^3}\;\cdot\;\sqrt[12]{(2\,m^{\frac{1}{2}}\,q^2)^4}\\
&= |n|\,|q|\,n\,q\;\sqrt[12]{5^3\,m^{-2}\,q^6}\;\cdot\;\sqrt[12]{2^4\,m^2\,q^8}\\
&= |n|\,|q|\,n\,q\;\sqrt[12]{2000\,m^0\,q^{14}}\\
&= |n|\,|q|\,n\,q\;\sqrt[12]{2000\,q^{12}\,q^2}\\
&= |n|\,|q|\,n\,q\,|q|\;\sqrt[12]{2000\,q^2}\\
&= |n|\,|q|^2\,n\,q\;\sqrt[12]{2000\,q^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore\;\sqrt[4]{5\,m^{\frac{-2}{3}}\,n^4\,q^6}\;\cdot\;\sqrt[3]{2\,m^{\frac{1}{2}}\,n^3\,q^5} = |n|\,q^2\,n\,q\;\sqrt[12]{2000\,q^2}$$

■ **Ejemplo 14**

Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{-2\,x^{-1}\,z^{-1}}{x^3\,y^{-2}\,z}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{-2\,x^{-1}\,z^{-1}}{x^3\,y^{-2}\,z} &= \frac{-2\,\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z}}{x^3\,\frac{1}{y^2}\,z}\\
&= \frac{\frac{-2}{x\,z}}{x^3\,z\,\frac{1}{y^2}}\\
&= \frac{-2\,y^2}{x\,z\,x^3\,z}\\
&= \frac{-2\,y^2}{x^4\,z^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{-2\,x^{-1}\,z^{-1}}{x^3\,y^{-2}\,z} = \frac{-2\,y^2}{x^4\,z^2}$$

b.) $\left(\dfrac{-2\,a^{-2}\,b^{-1}}{-4\,a^{-4}\,b^2}\right)^{-1}$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-2\,a^{-2}\,b^{-1}}{-4\,a^{-4}\,b^2}\right)^{-1} &= \left(\frac{-2\,a^4}{-4\,a^2\,b^2\,b}\right)^{-1}\\
&= \left(\frac{a^2}{2\,b^3}\right)^{-1}\\
&= \frac{a^{-2}}{2^{-1}\,b^{-3}}\\
&= \frac{2\ b^3}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left(\frac{-2\,a^{-2}\,b^{-1}}{-4\,a^{-4}\,b^2}\right)^{-1} = \frac{2\ b^3}{a^2}$$

c.) $\sqrt{\dfrac{9\,a^4\,x^{-4}}{25\,a^{-2}x^4}}$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{9\,a^4\,x^{-4}}{25\,a^{-2}x^4}} &= \sqrt{\frac{9\,a^4\,a^2}{25\,x^4x^4}} \\
\frac{\sqrt{9\,a^4\,a^2}}{\sqrt{25\,x^4x^4}} &= \frac{\sqrt{3^2\,a^2\,a^2\,a^2}}{\sqrt{5^2\,x^2\,x^2\,x^2\,x^2}} \\
&= \frac{|3|\;|a|\;|a|\;|a|}{|5|\;|x|\;|x|\;|x|\;|x|} \\
&= \frac{3\;|a|^3}{5\;|x|^4}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{9\,a^4\,x^{-4}}{25\,a^{-2}x^4}} = \frac{3\;|a|^3}{5\;x^4}$$

Ejercicios 7

1.) Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

a.) $(\sqrt{75}\,x\,y^{\frac{3}{2}})\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\;y^{\frac{1}{2}}}{5\sqrt{3}}\right)$

b.) $(4x\sqrt{a^3\;x^2})\;(2\sqrt{a^2\;x^3})$

c.) $\sqrt{8\,a^2\,b^2} - \sqrt{5\,a\,b^2} - 2\,c\sqrt{2} + 10\sqrt{2a}$

d.) $\sqrt{\dfrac{ab^2}{4c^2}} + \sqrt{\dfrac{9ab^4}{c^{-2}}} - \sqrt{a}$

e.) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2\,m^5\,n^3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{16\,m\,n^2}\right)$

f.) $\sqrt[3]{8\,a^6\,b^{-3}\,c^2} + \left(\dfrac{100\;a^4}{b^2\;c^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{-1}{2}}$

2.) Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{2\,a^2\,b^{-5}\,c^{-7}}{5\,a^{-3}\,b^{-4}c^{-6}}$

b.) $\left(\dfrac{3\,x\,y^2\,z^3}{x^{-1}\,y^{-2}\,z^{-3}}\right)^{-1}$

c.) $\sqrt{\dfrac{25\,x^{-2}\,y^3}{100\,x^{-4}\,y^2}}$

d.) $\dfrac{x\,y^{\frac{-1}{2}}\,z^{-3}}{4\,x^{\frac{-3}{4}}\,y^2\,z^{\frac{-2}{3}}}$

e.) $\sqrt[3]{\dfrac{16\,a^6\,b^{-2}\,c^{-1}\,d}{-125\,a^3\,b^{-1}\,c}}$

f.) $\sqrt[4]{\dfrac{243\,a^4\,c^8\,d^{-2}}{256\,c^{-4}\,d^2}}$

2.3 Polinomios

■ **Definición 7**

Se llama polinomio a toda expresión algebraica que es monomio o una suma de monomios.

Ejemplo 15

Ejemplos de polinomios

a.) 5

b.) $3\,x^2\,y$

c.) $\sqrt{5}\,x^3\,y^2\,z\,+\,4$

d.) 0

e.) $2xy^2\,+\,y\,+\,\dfrac{x}{3}$

f.) $\dfrac{xyw}{3}\,-\,\dfrac{xy}{2}\,-\,yw$

Definición 8

a.) Si un polinomio está formado por la suma de dos monomios no semejantes entre sí recibe el nombre de *binomio.*

b.) Si un polinomio está formado por la suma de tres monomios no semejantes entre sí (dos a dos) recibe el nombre de *trinomio.*

Ejemplo 16

a.) Son binomios:

i.) $x + 8$ *ii.)* $x^2 - 3y^2$ *iii.)* $\dfrac{x^2y}{7} + \dfrac{ab^2c}{\sqrt{5}}$

b.) Son trinomios:

i.) $a^2 - ab + b$ *ii.)* $y^2 + y + 1$ *iii.)* $a^2bc - 5b^2ac^2 + 8$

Definición 9

a.) Si un polinomio no involucra variable recibe el nombre de *polinomio constante.*

b.) Si un polinomio involucra n variables recibe el nombre de *polinomio en n variables*

Ejemplo 17

i.) $x^2y + x + y^2$ es un polinomio en dos variables.

ii.) $x^2 - 3x + 1$ es un polinomio en una variable.

iii.) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ es un polinomio constante.

1.) Dado un polinomio en una variable x; éste se puede denotar por alguna de las siguientes expresiones:

$A(x),\ B(x),\ C(x),\ ...,\ P(x),\ Q(x),\ ...,W(x)$

2.) Dado un polinomio en dos variables x e y; éste se puede denotar por alguna de las siguientes expresiones:

$A(x,y),\ B(x,y),\ C(x,y),\ ...,\ P(x,y),\ Q(x,y),\ ...,W(x,y)$

3.) Dado un polinomio en tres variables x, y, z; éste se puede denotar por alguna de las siguientes expresiones:

$A(x,y,z),\ B(x,y,z),\ C(x,y,z),\ ...,\ P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ ...,W(x,y,z)$

En forma análoga se denotan los polinomios en n variables

■ **Ejemplo 18**

a.) El polinomio $x^2 - 3x + 1$ se puede denotar por $A(x)$, y en tal caso escribimos $A(x) = x^2 - 3x + 1$.

b.) El polinomio $3a^2b - 2a + ab$ se puede denotar por $R(a,b)$, y en tal caso escribimos $R(a,b) = 3a^2b - 2a + ab$.

c.) El polinomio $xyz + x^2y^2z + yz + xz$ se puede denotar por $A(x,y,z)$, y en tal caso escribimos $A(x,y,z) = xyz + x^2y^2z + yz + xz$.

d.) El polinomio $xacyb + x^2ac + ybc$ se puede denotar por $P(a,b,c,x,y)$, y en tal caso escribimos $P(a,b,c,x,y) = xacyb + x^2ac + ybc$.

2.3.1 División de polinomios en una variable

Podemos observar que al efectuar la suma, la resta y el producto de dos polinomios, se obtiene otro polinomio. Sin embargo al dividir un polinomio por otro polinomio el resultado *no* necesariamente es un polinomio.

No obstante en cuanto a la división de polinomios se tiene el siguiente teorema:

■ **Teorema 1**

(Algoritmo de la división). Dados dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$, con $B(x) \neq 0$, existen únicos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$A(x) \,=\, B(x) \cdot Q(x) \,+\, R(x)$$

con el grado de $R(x)$ menor que el grado de $B(x)$ *o* $R(x) \,=\, 0$

$A(x)$ recibe el nombre de dividendo, $B(x)$ el de divisor, $Q(x)$ el de cociente y $R(x)$ el de residuo.

Los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ se obtiene al efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$ mediante el siguiente procedimiento.

Procedimiento para efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$

a.) Ordenar los polinomios $A(x)$ y $B(x)$, en forma descendente de acuerdo con el exponente de la variable.

b.) Se divide el primer sumando del dividendo (el de mayor exponente) por el primer sumando del divisor (el de mayor exponente); el resultado es un sumando del cociente.

c.) Se multiplica el sumando del cociente obtenido en el paso anterior por el divisor, y el resultado se resta del dividendo, obteniendo un residuo "parcial".

d.) Si el residuo obtenido en el paso anterior es cero o de grado menor que el divisor, ahí terminó el procedimiento, en caso contrario se repiten los pasos (a), (b), (c) y (d), pero tomando como dividendo el residuo obtenido en el paso anterior.

Ejemplo 19

Sea $A(x) = x^3 \,-\, 5x^2 \,+\, x \,-\, 1$ y $B(x) = x \,-\, 1$

Efectúe la división de $A(x)$ por $B(x)$, e indique el cociente y el residuo

Solución

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & x^3 & - & 5x^2 & + & x & - & 1 & & x-1 \\
- & (x^3 & - & x^2) & & & & & & \overline{x^2-4x-3} \\
\hline
 & & - & 4x^2 & + & x & - & 1 & & \\
 & - & (- & 4x^2 & + & 4x) & & & & \\
\hline
 & & & & - & 3x & - & 1 & & \\
 & & & - & (- & 3x & + & 3) & & \\
\hline
 & & & & & & - & 4 & &
\end{array}
$$

Aquí el cociente es $x^2 - 4x - 3$ y el residuo es -4.

Ejemplo 20

Efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$ donde $A(x) = 2 - x^5$; $B(x) = x^2 + x$

Solución

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
- & x^5 & + & 0x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & x^2+x \\
- & (-x^5 & - & x^4) & & & & & & & & & \overline{-x^3+x^2-x+1} \\
\hline
 & & & x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & - & (x^4 & + & x^3) & & & & & & & \\
\hline
 & & & & - & x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & & & - & (-x^3 & - & x^2) & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & & & & & - & (x^2 & + & x) & & & \\
\hline
 & & & & & & & & - & x & + & 2 &
\end{array}
$$

Aquí el cociente es $-x^3 + x^2 - x + 1$ y el residuo es $-x + 2$

Además:

$$-x^5 + 2 = (x^2 + x)(-x^3 + x^2 - x + 1) + (-x + 2)$$

Teorema 2

Sean $A(x)$, $B(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios tales que $B(x) \neq 0$

Si $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ entonces $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

Demostración

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{B(x) \cdot Q(x) + R(x)}{B(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{B(x) \cdot Q(x)}{B(x)} + \frac{R(x)}{B(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

Por lo que: $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

Ejemplo 21

a.) Como $x^3 - 5x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 - 4x - 3) - 4$

entonces por el teorema anterior se cumple que:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 - 4x - 3 - \frac{4}{x - 1}$$

b.) Como $-x^5 + 2 = (x^2 + x)(-x^3 + x^2 - x + 1) + (-x + 2)$

entonces por el teorema anterior se cumple que:

$$\frac{-x^5 + 2}{x^2 + x} = -x^3 + x^2 - x + 1 + \frac{-x + 1}{x^2 + x}$$

Ejercicios 8

Para cada par de polinomios $A(x)$ y $B(x)$ que se definen a continuación, realice la división de $A(x)$ por $B(x)$ e indique el cociente y el residuo que se obtiene al efectuar esta división.

1.) $A(x) = 6x^5 - 5x^4 - 7x^2 + 3$; $B(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 1$

2.) $A(x) = 2x^7 - 5x^5 + 8x^3 + 3x$; $B(x) = 2x^3 - x$

3.) $A(x) = x^3 - 5x^2 - 8x - 4$; $B(x) = x - 2$

4.) $A(x) = 3x - 5x^2 + 9 + x^3$; $B(x) = 3 - x$

5.) $A(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^3 + 1 - 3x$; $B(x) = -3x + x^2 + 1$

■ Definición 10

Sean $A(x)$ y $B(x)$ dos polinomios con $B(x) \neq 0$. Si al dividir $A(x)$ por $B(x)$ se obtiene como *residuo cero* entonces decimos que $A(x)$ *es divisible por* $B(x)$ y se cumple que: $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$; donde $Q(x)$ es el cociente que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$.

■ Ejemplo 22

Sean $A(x)$ y $B(x)$ polinomios tales que:

$A(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$; $B(x) = x^2 - 3x - 1$

Determine el cociente y el residuo que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$.
¿Es $A(x)$ divisible por $B(x)$?

Solución

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & - & 4x^2 & + & 2x & + & 1 & x^2 - 3x - 1 \\ \cline{9-9}
- & x^3 & + & 3x^2 & + & x & & & \\ \cline{1-8}
 & & & & & & & & x - 1 \\
 & & - & x^2 & + & 3x & + & 1 & \\
 & & & x^2 & - & 3x & - & 1 & \\ \cline{1-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Por lo que el cociente es $x - 1$ y el residuo es 0.
Como en este caso el residuo es 0, $A(x)$ es divisible por $B(x)$.

Ejercicios 9

Para cada par de polinomios $A(x)$ y $B(x)$ que se definen a continuación, determine el cociente y el residuo que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$.

¿Es $A(x)$ divisible por $B(x)$?. Justifique su respuesta.

1.) $A(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$; $B(x) = 1 + x^2$

2.) $A(x) = 5x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 7x - 2$; $B(x) = x + 2$

3.) $A(x) = 2x - 4x^2 + 3x^3 - 1$; $B(x) = 1 + 2x + x^2$

4.) $A(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$; $B(x) = -5 + 2x^3 + 2x - x^2$

Observación: Si $A(x)$ es un polinomio de grado n, con $n > 1$ y si $B(x)$ es un polinomio de grado 1, entonces al dividir $A(x)$ por $B(x)$ se obtiene:

a.) Como cociente un polinomio $Q(x)$ de grado $n-1$ y

b.) Como residuo una constante

Ejemplo 23

Si $A(x) = 2x^3 + x + 1$ y $B(x) = 2x + 1$

Al dividir $A(x)$ por $B(x)$ se tiene:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & 0x^2 & + & x & + & 1 & 2x+1 \\ \cline{9-9}
- & 2x^3 & - & x^2 & & & & & x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \\ \cline{1-8}
 & & - & x^2 & + & x & + & 1 & \\
 & & & x^2 & + & \frac{1}{2}x & & & \\ \cline{1-8}
 & & & & & \frac{3}{2}x & + & 1 & \\
 & & & & - & \frac{3}{2}x & - & \frac{3}{4} & \\ \cline{1-8}
 & & & & & & & \frac{1}{4} &
\end{array}$$

En este caso se tiene que $A(x)$ es un polinomio de grado 3 y el cociente es un polinomio de grado 2.
Además el residuo es una constante.

Teorema 3

Si $P(x)$ es un polinomio de grado n, $n > 1$ y $\alpha \in I\!R$ entonces $P(\alpha)$ es igual al residuo que se obtiene al dividir $P(x)$ por $x - \alpha$.

Demostración:

Como $P(x)$ y $x - \alpha$ son polinomios, por el algoritmo de la división, existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + R(x)$$

Pero por la observación anterior, $R(x)$ es una constante C o sea

(*) $P(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + C$; donde C es el residuo que se obtiene al dividir $P(x)$ por $x - \alpha$

Tenemos que demostrar que $P(\alpha) = C$

Suatituyendo la x por α en (*) se tiene:

$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)\, Q(\alpha) + C$

$P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + C$

$P(\alpha) = C$; que es lo que quería demostrar.

Ejemplo 24

Si $P(x) = 3x^2 + x + 1$ y $B(x) = x - 4$, al dividir $P(x)$ por $B(x)$ se tiene que:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 3x^2 & + & x & + & 1 & x-4 \\
\cline{7-7}
- & 3x^2 & + & 12x & & & \\
\cline{1-6}
 & & & & & & 3x+13 \\
 & & & 13x & + & 1 & \\
 & & - & 13x & + & 52 & \\
\cline{1-6}
 & & & & & 53 &
\end{array}
$$

En este caso tenemos que el residuo que se obtiene al dividir $3x^2 + x + 1$ por $x - 4$ es 53.

Luego:

$P(4) = 3(4)^2 + 4 + 1 = 3(16) + 4 + 1 = 48 + 4 + 1 = 53$, o sea $P(4) = 53$

Definición 11

Sea $P(x)$ un polinomio y sea α un número real, α es un cero de $P(x)$ si y sólo sí $P(\alpha) = 0$

Ejemplo 25

a.) Sea $P(x) = x^2 - x - 6$; se tiene que 3 y -2 son ceros de $P(x)$ porque:

$P(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$, así $P(3) = 0$

$P(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$, así $P(-2) = 0$

b.) Sea $A(x) = x^3 + 8$; se tiene que -2 es un cero de $A(x)$ porque:

$A(-2) = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$, así $P(-2) = 0$

2.3.2 División Sintética

La división sintética es un procedimiento "abreviado" para determinar el cociente y el residuo que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ de grado n, $n \geq 1$, por un polinomio de la forma $x - \alpha$, con $\alpha \in I\!R$, a partir de los coeficiente de $P(x)$ y el cero de $x - \alpha$.

El procedimiento que usaremos para realizar la división sintética de un polinomio $P(x)$, por un polinomio de la forma $x - \alpha$, lo ilustraremos a través de ejemplos.

Ejemplo 26

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios tales que:

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2; \quad Q(x) = x - 3$

Determine el cociente y el residuo que se obtiene al dividir $P(x)$ por $Q(x)$:

a.) Usando el método estudiado anteriormente (División larga)

b.) Usando división sintética

Solución

a.)

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 4x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 2 & & x-3 \\ \cline{10-10}
- & 4x^3 & + & 12x^2 & & & & & & \\ \cline{1-9}
 & & & & & & & & & 4x^2+15x+40 \\
 & & & 15x^2 & - & 5x & + & 2 & & \\
 & & - & 15x^2 & + & 45x & & & & \\ \cline{1-9}
 & & & & & 40x & + & 2 & & \\
 & & & & - & 40x & + & 120 & & \\ \cline{1-9}
 & & & & & & & 122 & & \\
\end{array}
$$

Por lo que al dividir $P(x)$ por $Q(x)$ se obtiene $4x^2 + 15x + 40$ como cociente y 122 como residuo.

b.) Usando división sintética, $P(x)$ se divide por $Q(x)$ de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lrrrr|ll}
\text{Coeficiente de } P(x) \Longrightarrow & 4 & 3 & -5 & 2 & \underline{3} & \Longrightarrow \text{Cero de } x-3 \\
 & & 12 & 45 & 120 & & \\ \cline{2-5}
\text{Coeficientes del cociente} \Longrightarrow & 4 & 15 & 40 & \underline{122} & & \longleftarrow \text{Residuo} \\
\end{array}
$$

Donde los números 4, 15 y 40 son los coeficientes del cociente y 122 el residuo de la división.

Observe que, según la parte (a) de este ejercicio, los números obtenidos en la tercera fila son los coeficientes del cociente y el residuo, como se muestra en el esquema anterior.

Los números representados en la primera fila son los coeficientes de $P(x)$ (dividendo) y el cero de $x-3$ (divisor).

Los números representados en la segunda fila se obtienen de la siguiente forma:

12 es el producto de 4 y 3

45 es el producto de 15 y 3

120 es el producto de 40 y 3

Los números representados en la tercera fila se obtienen de la siguiente forma:

4 es el coeficiente de x^3 en $P(x)$

15 es la suma de 3 y 12

40 es la suma de -5 y 45

122 es la suma de 2 y 120

■ Ejemplo 27

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios tales que: $P(x) = -8x^3 + x^4 - 16 + 2x$; $Q(x) = x - 8$.
Usando división sintética, determine el cociente $C(x)$ y el residuo $R(x)$ que se obtiene al dividir $P(x)$ por $Q(x)$.

Solución
Ordenando $P(x)$ en forma descendente de acuerdo a su grado, se obtiene:

$P(x) = x^4 - 8x^3 + 0x^2 + 2x - 16$, y realizando la división se tiene:

1	-8	0	2	-16	8
	8	0	0	16	
1	0	0	2	0	
				$\hookrightarrow$ *Residuo*	

Los números 1, 0, 0 y 2 son coeficientes del cociente. Y el número 0 es el residuo.

Por lo que $C(x) = x^3 + 0x^2 + 0x + 2$ o sea $C(x) = x^3 + 2$ y $R(x) = 0$

Nota: Observe que al realizar la división sintética, tanto los coeficientes del dividendo que son diferentes de cero, como los que son iguales a cero, deben escribirse.

■ Ejemplo 28

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios tales que: $P(x) = x^3 + x$ y $Q(x) = x + 4$
Usando división sintética determine el cociente $C(x)$ y $Q(x)$.

Solución
Como $P(x) = x^3 + 0x^2 + x + 0$ y el cero de $x + 4$ es -4, tenemos que:

1	0	1	0	-4
	-4	16	-68	
1	-4	17	-68	

Por lo tanto el cociente que se obtiene, al dividir $P(x)$ por $Q(x)$ es $x^2 - 4x + 17$ y el residuo es -68.

Ejercicios 10

Para cada par de polinomios $A(x)$ y $B(x)$ que se definen a continuación, determine por división sintética el cociente y el residuo que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$.

1. $A(x) = x^5 - 32;\quad B(x) = x - 2$
2. $A(x) = -7x^2 + 8x + 5x^3 + 1;\quad B(x) = x - 3$
3. $A(x) = x^3 + 27;\quad B(x) = x + 3$
4. $A(x) = x^3 + 2 - 3x;\quad B(x) = x + 5$
5. $A(x) = x^4 - x;\quad B(x) = x + 1$
6. $A(x) = 6 - 5x + 4x^2;\quad B(x) = x + 2$

Ejemplo 29

Sea $P(x)$ un polinomio tal que: $P(x) = x^5 - 3x^4 + 8x^2 - 2$; usando división sintética determine $P(-2)$ y $P(1)$

Solución
Recuerde que $P(\alpha)$ es igual al residuo que se obtiene al dividir $P(x)$ por $x - \alpha$.
Efectuando las divisiones correspondientes se tiene:

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 8 & 0 & -2 & -2 \\ & -2 & 10 & -20 & 24 & -48 & \\ \hline 1 & -5 & 10 & -12 & 24 & \boxed{-50} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -3 & 0 & 8 & 0 & -2 & 1 \\ & 1 & -2 & -2 & 6 & 6 & \\ \hline 1 & -2 & -2 & 6 & 6 & \boxed{4} & \end{array}$$

Por lo tanto $P(-2) = -50$ y $P(1) = 4$

Ejercicios 11

Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

Usando división sintética determine $P(1),\ P(2),\ P(-3),\ y\, P(-4)$.

2.4 Factorización de Polinomios

Definición 12

Sea $P(x)$ un polinomio no constante con coeficientes reales.

Si existen polinomios $A(x)$ y $B(x)$ no constantes, con coeficientes reales tales que $P(x) = A(x) \cdot B(x)$ entonces decimos que $P(x)$ es factorizable en el conjunto de los números reales.

Definición 13

Sean $A(x), B(x)$ y $P(x)$ polinomios no constantes con coeficientes reales. Si $P(x) = A(x) \cdot B(x)$ entonces decimos que $A(x)$ y $B(x)$ son factores de $P(x)$.

Definición 14

Sean $A(x), B(x)$ y $P(x)$ polinomios no constantes con coeficientes reales. Si $P(x) = A(x) \cdot B(x)$ entonces decimos que el producto indicado de $A(x)$ y $B(x)$ es una factorización de $P(x)$.

Ejemplo 30

a.) Como $x^2 + 2x = x(x + 2)$, entonces decimos que $x(x + 2)$ es una factorización de $x^2 + 2x$.

b.) Como $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$, entonces decimos que $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ es una factorización de $x^4 - 1$

Nota: Sea $P(x)$ un polinomio no constante con coeficientes reales; si no existen polinomios $A(x)$ y $B(x)$ no constantes con coeficientes reales y tales que $P(x) = A(x) \cdot B(x)$, entonces decimos que $P(x)$ no es factorizable en el conjunto de los números reales.

Definición 15

Sea $P(x)$ un polinomio no constante con coeficientes reales tal que $P(x) = A(x)_1 \cdot A(x)_2 \cdot A(x)_3 \cdots A(x)_n$ donde $A(x)_1 \cdot A(x)_2 \cdot A(x)_3 \cdots A(x)_n$ son polinomios no constantes con coeficientes reales. Decimos que el producto indicado $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots A_n$ es una factorización completa de $P(x)$ si cada uno de los polinomios $A(x)_1 \cdot A(x)_2 \cdot A(x)_3 \cdots A(x)_n$ no es factorizable en el conjunto de los números reales.

2.4.1 Técnicas de factorización

A continuación enfocaremos nuestra atención hacia el estudio de algunas técnicas que se utilizan en la factorización de polinomios.

Factorización por factor común

La factorización de polinomios por factor común consiste básicamente en la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, para esto recordemos que esta propiedad expresa:

Si $a \in I\!R$, $b \in I\!R$, $c \in I\!R$, entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

En forma más general,

Si $a \in I\!R$, $b_1 \in I\!R$, $b_2 \in I\!R$, $b_3 \in I\!R$, $\cdots$, $b_n \in I\!R$ entonces:

$a(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots b_n) = ab_1 + ab_2 + ab_3 + \cdots ab_n$ y en tal caso decimos que

$a(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots b_n)$ es una factorización de la expresión $ab_1 + ab_2 + ab_3 + \cdots ab_n$, y que a es un factor común de los sumandos $ab_1, ab_2, \cdots, ab_n$

Ejemplo 31

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

a.) $x^2 + xy$

b.) $6xa - 12xy$

c.) $a^2 + a$

Solución

a.) $x^2 + xy$

$= x \cdot x + xy$

$= x(x + y)$

Por lo que la factorización de $x^2 + xy$ es $x(x + y)$

es decir:

$x^2 + xy = x(x + y)$

b.) $6xa - 12xy$

$= 6x \cdot a - 6\,x\,2y$

$= 6x(a - 2y)$

Por lo que la factorización de $6xa - 12xy$ es $6x(a - 2y)$;

es decir:

$6xa - 12xy = 6x(a - 2y)$

c.) $a^2 + a$

$= a^2 + a$

$= a(a + 1)$

Por lo que la factorización de $a^2 + a$ es $a(a + 1)$

es decir:

$a^2 + a = a(a + 1)$

Ejemplo 32

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

a.) $x^2y^3z + x^3y^2z^2$

b.) $(3a + 15) - b(a + 5)$

c.) $a(x - y) + (y - x)$

d.) $14x^2 - 28x^3 + 56x^2y$

Solución

a.) $x^2y^3z + x^3y^2z^2$

$$\begin{aligned} x^2y^3z + x^3y^2z^2 &= x^2y^2yz + x^2xy^2zz \\ &= x^2y^2z(y + xz) \end{aligned}$$

Por lo que:

$$x^2y^3z + x^3y^2z^2 = x^2y^2z(y + xz)$$

b.) $(3a + 15) - b(a + 5)$

$$\begin{aligned}(3a + 15) - b(a + 5) &= (3a + 3 \cdot 5) - b(a + 5)\\ &= 3(a + 5) - b(a + 5)\\ &= (a + 5)(3 - b)\end{aligned}$$

Por lo que:

$$(3a + 15) - b(a + 5) = (a + 5)(3 - b)$$

c.) $a(x - y) + (y - x)$

$$\begin{aligned}a(x - y) + (y - x) &= a(x - y) + (-1)(x - y)(*)\\ &= (x - y)(a - 1)\end{aligned}$$

Por lo que:

$$a(x - y) + (y - x) = (x - y)(a - 1)$$

d.) $14x^2 - 28x^3 + 56x^2y$

$$\begin{aligned}14x^2 - 28x^3 + 56x^2y &= 14x^2 \cdot 1 - 14x^2 \cdot 2x + 14x^2 \cdot 4y\\ &= 14x^2\,(1 - 2x + 4y)\end{aligned}$$

Por lo que:

$$14x^2 - 28x^3 + 56x^2y = 14x^2\,(1 - 2x + 4y)$$

* Usando la propiedad distributiva se puede demostrar que: $a - b = (-1)\,(b - a)$

Ejercicios 12

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

1.) $abc + abc^2$

2.) $9a^2x^2 - 18ax^3$

3.) $6a^2 - 12a(x + 2)$

4.) $(2m - 4n) + m(m - 2n)$

5.) $x(x - 7) - (7 - x)$

6.) $(3x + 9y) + d(-x - 3y)$

Factorizar por agrupación

Dado un polinomio en el cual no existe un factor común no constante a todos los sumandos que lo componen, en algunos casos es posible obtener la factorización de dicho polinomio, realizando una "agrupación conveniente" de aquellos sumandos que poseen un factor común.

Ejemplo 33

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

a.) $5by - 5y + 2ba - 2a$

b.) $2x^2 - 3xy - 3y + 2x$

c.) $4a^2x + 3bm - 4ab - 3max$

d.) $2am - 2an + 2a - m + n - 1$

Solución

a.) $5by - 5y + 2ba - 2a$

$$\begin{aligned} 5by - 5y + 2ba - 2a &= (5by - 5y) + (2ba - 2a) \\ &= 5y(b - 1) + 2a(b - 1) \\ &= (b - 1)(5y + 2a) \end{aligned}$$

Por lo que:

$$5by - 5y + 2ba - 2a = (b - 1)(5y + 2a)$$

b.) $2x^2 - 3xy - 3y + 2x$

$$\begin{aligned}
2x^2 - 3xy - 3y + 2x &= 2x^2 - 3xy + (-3y) + 2x \\
&= (2x^2 - 3xy) + (-3y + 2x) \\
&= x(2x - 3y) + (-3y + 2x) \\
&= x(2x - 3y) + 1(2x - 3y) \\
&= (2x - 3y)(x + 1)
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$2x^2 - 3xy - 3y + 2x = (2x - 3y)(x + 1)$$

c.) $4a^2x + 3bm - 4ab - 3max$

$$\begin{aligned}
4a^2x + 3bm - 4ab - 3max &= (4a^2x - 4ab) + (3bm - 3max) \\
&= 4a(ax - b) + 3m(b - ax) \\
&= 4a(ax - b) + 3m(-1)(ax - b) \\
&= 4a(ax - b) + (-3m)(ax - b) \\
&= (ax - b)(4a - 3m)
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$4a^2x + 3bm - 4ab - 3max = (ax - b)(4a - 3m)$$

d.) $2am - 2an + 2a - m + n - 1$

$$\begin{aligned}
2am - 2an + 2a - m + n - 1 &= 2am - 2an + 2a - m + n - 1 \\
&= (2am - 2an + 2a) + (-m + n - 1) \\
&= 2a(m - n + 1) + (-m + n - 1) \\
&= 2a(m - n + 1) + (-1)(m - n + 1) \\
&= (m - n + 1)(2a - 1)
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$2am - 2an + 2a - m + n - 1 = (m - n + 1)(2a - 1)$$

Ejercicios 13

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

1.) $ab + a + b + 1$

2.) $6a^2 - 4ac - 15ab + 10bc$

3.) $a^3 - a^2c - ba^2 + abc$

4.) $2c^2 + 4cd - 3c - 6d$

5.) $ax - bx + by + a - ay - b$

6.) $cax + cby - cbx - cay$

Factorización por fórmulas notables

En esta sección enunciamos algunos teoremas en los cuales se establecen ciertas identidades, que denominaremos fórmulas notables, y que serán utilizadas para factorizar algunas expresiones algebraicas.

■ **Teorema 4**

Si $a \in I\!R$, $b \in I\!R$ entonces se cumple que:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\
&= a(a+b)+b(a+b)\\
&= a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b\\
&= a^2+ab+ab+b^2\\
&= a^2+2ab+b^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ y decimos que $(a+b)^2$ es factorización de la expresión $a^2+2ab+b^2$

Ejemplo 34

Usando el teorema anterior factorice cada una de las siguientes expresiones:

a.) $x^2+10x+25$

b.) $4x^2+20x+25$

c.) $9a^2+6a+1$

Solución

a.) $x^2+10x+25$

$$
\begin{aligned}
x^2+10x+25 &= (x)^2+2(x)(5)+5^2\\
&= (x+5)^2
\end{aligned}
$$

Por lo que la factorizacion de $x^2+10x+25$ es $(x+5)^2$

$$\therefore\ x^2+10x+25 = (x+5)^2$$

b.) $4x^2+20x+25$

$$
\begin{aligned}
4x^2+20x+25 &= (2x)^2+2(2x)(5)+5^2\\
&= (2x+5)^2
\end{aligned}
$$

Por lo que la factorizacion de $4x^2+20x+25$ es $(2x+5)^2$

$$\therefore\ 4x^2+20x+25 = (2x+5)^2$$

c.) $9a^2 + 6a + 1$

$$\begin{aligned} 9a^2+6a+1 &= (3a)^2+2(3a)(1)+1^2 \\ &= (3a+1)^2 \end{aligned}$$

Por lo que la factorizacion de $9a^2+6a+1$ es $(3a+1)^2$

$$\therefore\ 9a^2+6a+1 = (3a+1)^2$$

Ejercicios 14

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

1.) $25x^2+30x+9$

2.) $4r^6+12r^3s^2+9s^4$

3.) $a^2+8ab+16b^2$

4.) $2x^2+2\sqrt{2}x+1$

5.) $\dfrac{c^2}{9}+\dfrac{2c}{d}+\dfrac{9}{d^2}$

6.) $\dfrac{9h^2}{16}+\dfrac{4hk}{3}+\dfrac{64k^2}{81}$

Teorema 5

Si $a \in I\!R,\ b \in I\!R$ entonces se cumple que: $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Demostración

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\ &= [a+(-b)][a+(-b)] \\ &= a[a+(-b)]+(-b)[a+(-b)] \\ &= a\,a\cdot\ +a(-b)+(-ba)+(-b)(-b) \\ &= a^2-ab-ab+b^2 \\ &= a^2-2ab+b^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ y decimos que $(a-b)^2$ es la factorización de la expresión $a^2-2ab+b^2$.

Ejemplo 35

Usando el teorema anterior factorice cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{x^2}{4} - \sqrt{3}x + 3$

b.) $9x^2y^2 - 12xy + 4$

c.) $3a^2 - 2\sqrt{6}ab + 2b^2$

Solución

a.) $\dfrac{x^2}{4} - \sqrt{3}x + 3$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} - \sqrt{3}x + 3 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2}\right)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 \\ &= \left(\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $\dfrac{x^2}{4} - \sqrt{3}x + 3$ es $\left(\dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\right)^2$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{4} - \sqrt{3}x + 3 = (\dfrac{x}{2} - \sqrt{3})^2$

b.) $9x^2y^2 - 12xy + 4$

$$\begin{aligned} 9x^2y^2 - 12xy + 4 &= (3xy)^2 - 2(3xy)(2) + (2)^2 \\ &= (3xy - 2)^2 \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $9x^2y^2 - 12xy + 4$ es $(3xy - 2)^2$

$\therefore\ 9x^2y^2 - 12xy + 4 = (3xy - 2)^2$

c.) $3a^2 - 2\sqrt{6}ab + 2b^2$

$$\begin{aligned} 3a^2 - 2\sqrt{6}ab + 2b^2 &= (\sqrt{3}a)^2 - 2(\sqrt{3}a)(\sqrt{2}b) + (\sqrt{2}b)^2 \\ &= (\sqrt{3}a - \sqrt{2}b)^2 \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $3a^2 - 2\sqrt{6}ab + 2b^2$ es $(\sqrt{3}a - \sqrt{2}b)^2$

$\therefore\ 3a^2 - 2\sqrt{6}ab + 2b^2 = (\sqrt{3}a - \sqrt{2}b)^2$

Ejercicios 15

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

1.) $20x^2 - 2\sqrt{5}xy + \dfrac{y^2}{4}$

2.) $x^2y^2z^2 - z + \dfrac{1}{4x^2y^2}$

3.) $\dfrac{1}{x^2} + 4y^2 - \dfrac{4y}{x}$

4.) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{10x}{3} + 25$

5.) $\dfrac{4n^2}{9} - 20nm + 25m^2$

6.) $x^2 - 2\sqrt{2}xy + 2y^2$

■ Teorema 6

Si $a \in I\!R$, $b \in I\!R$ entonces se cumple que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b) \\
&= a[a + (-b)] + b[a + (-b)] \\
&= a \cdot a + a(-b) + b \cdot a + b(-b) \\
&= a^2 - ab + ab - b^2 \\
&= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ y decimos que $(a+b)(a-b)$ es la factorización de la expresión $a^2 - b^2$.

■ Ejemplo 36

Usando el teorema anterior factorice cada una de las siguientes expresiones:

a.) $4x^2 - y^2$

b.) $3x^2 - \dfrac{c^2}{25}$

c.) $(3+2b)^2 - (c-4)^2$

d.) $9x^2 - 12x - 4 - y^2$

Solución

a.) $4x^2 - y^2$

$$\begin{aligned} 4x^2 - y^2 &= (2x)^2 - y^2 \\ &= (2x+y)(2x-y) \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $(4x^2 - y^2)$ es $(2x+y)(2x-y)$
$\therefore\ (4x^2 - y^2) = (2x+y)(2x-y)$

b.) $3x^2 - \dfrac{c^2}{25}$

$$\begin{aligned} 3x^2 - \frac{c^2}{25} &= (\sqrt{3}x)^2 - (\frac{c}{5})^2 \\ &= (\sqrt{3}x + \frac{c}{5})(\sqrt{3} - \frac{c}{5}) \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $3x^2 - \dfrac{c^2}{25}$ es
$(\sqrt{3}x + \frac{c}{5})(\sqrt{3} - \frac{c}{5})$
$\therefore\ 3x^2 - \dfrac{c^2}{25} = (\sqrt{3}x + \frac{c}{5})(\sqrt{3} - \frac{c}{5})$

c.) $(3+2b)^2 - (c-4)^2$

$$\begin{aligned} (3+2b)^2 - (c-4)^2 &= [(3+2b)+(c-4)][(3+2b)-(c-4)] \\ &= (3+2b+c-4)(3+2b-c+4) \\ &= (2b+c-1)(2b-c+7) \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $(3+2b)^2 - (c-4)^2$ es $(2b+c-1)(2b-c+7)$

$\therefore\ (3+2b)^2 - (c-4)^2 = (2b+c-1)(2b-c+7)$

d.) $9x^2 - 12x + 4 - y^2$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x + 4 - y^2 &= (9x^2 - 12x + 4) - y^2 \\ &= [(3x)^2 - 2(3x)(2) + (2)^2] - y^2 \\ &= (3x-2)^2 - y^2 \\ &= [(3x-2)+y][(3x-2)-y] \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $9x^2 - 12x + 4 - y^2$ es $[(3x-2)+y][(3x-2)-y]$

$\therefore\ 9x^2 - 12x + 4 - y^2 = [(3x-2)+y][(3x-2)-y]$

Ejercicios 16

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

1.) $5x^2 - 8$

2.) $9c^2 - 4a^2 - 4ab - b^2$

3.) $\dfrac{4}{9}r^2 - \dfrac{25}{16}s^2$

4.) $(6a+5b)^2 - (4c+7d)^2$

5.) $(a+b)^2 - 4c^2$

6.) $\dfrac{2}{3}y^2 - \dfrac{5}{4}$

Teorema 7

Si $a \in I\!R,\ \ b \in I\!R$ entonces se cumple que:

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2) \\
&= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + (-a^2b) + a^2b + ab^2 - ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + (-a^2b + a^2b) + (ab^2 - ab^2) + b^3 \\
&= a^3 + b^3
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$ y decimos que $(a+b)(a^2-ab+b)(*)$ es la factorización de la expresión $a^3 + b^3$.

(*) $a^2 - ab + b^2$ no es factorizable en el conjunto de los números reales, lo cual será estudiado posteriormente.

Ejemplo 37

Usando el teorema anterior factorice cada una de las siguientes expresiones:

a.) $27 + p^3$

b.) $8p^3 + 125q^3$

c.) $x^3 + 2$

d.) $5a^3 + 2b^3$

Solución

a.) $27 + p^3$

$$\begin{aligned} 27 + p^3 &= (3)^3 + p^3 \\ &= (3 + p)(3^2 - 3p + p^2) \\ &= (3 + p)(9 - 3p + p^2) \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $27 + p^3$ es $(3 + p)(9 - 3p + p^2)$

$\therefore\ 27 + p^3 = (3 + p)(9 - 3p + p^2)$

b.) $8p^3 + 125q^3$

$$\begin{aligned} 8p^3 + 125q^3 &= (2p)^3 + (5q)^3 \\ &= (2p + 5q)[(2p)^2 - (2p)(5q) + (5q)^2] \\ &= (2p + 5q)(4p^2 - 10pq + 25q^2 \end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $8p^3 + 125q^3$ es $(2p + 5q)(4p^2 - 10pq + 25q^2$

$\therefore\ 8p^3 + 125q^3 = (2p + 5q)(4p^2 - 10pq + 25q^2)$

c.) $x^3 + 2$

$$\begin{aligned} x^3 + 2 &= x^3 + (\sqrt[3]{2})^3 \\ &= (x + \sqrt[3]{2})[x^2 - x\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2] \\ &= (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \end{aligned}$$

Por lo que la factorizacón de $x^3 + 2$ es $(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$

$\therefore\ x^3 + 2 = (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$

d.) $5a^3 + 2b^3$

$$\begin{aligned}
5a^3 + 2b^3 &= (\sqrt[3]{5}a)^3 + (\sqrt[3]{2}b)^3 \\
&= [\sqrt[3]{5}a + \sqrt[3]{2}b][(\sqrt[3]{5}a)^2 - \sqrt[3]{5}a\sqrt[3]{2}b + (\sqrt[3]{2}b)^2] \\
&= (\sqrt[3]{5}a + \sqrt[3]{2}b)(\sqrt[3]{25}a^2 - \sqrt[3]{10}ab + \sqrt[3]{4}b^2)
\end{aligned}$$

Por lo que la factorización de $5a^3 + 2b^3$ es $(\sqrt[3]{5}a + \sqrt[3]{2}b)(\sqrt[3]{25}a^2 - \sqrt[3]{10}ab + \sqrt[3]{4}b^2)$

$\therefore\ 5a^3 + 2b^3 = (\sqrt[3]{5}a + \sqrt[3]{2}b)(\sqrt[3]{25}a^2 - \sqrt[3]{10}ab + \sqrt[3]{4}b^2)$

Ejercicios 17

Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones:

1.) $x^3 + 27y^3$

2.) $a + a^4$

3.) $x^3 + 5$

4.) $81a^7 + 24a^3$

5.) $7a^3b^3 + 11$

6.) $(2a - b)^3 + 8$

■ Teorema 8

Si $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ entonces se cumple que: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= [a + (-b)][a^2 + ab + b^2] \\
&= a(a^2 + ab + b^2) + (-b)(a^2 + ab + b^2) \\
&= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\
&= a^3 + (a^2b - a^2b) + (ab^2 - ab^2) - b^3 \\
&= a^3 - b^3
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ y decimos que $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ es la factorización de la expresión $a^3 - b^3$.

(*) $a^2 + ab + b^2$ no es factorizable en el conjunto de los números reales.

■ Ejemplo 38

Usando el teorema anterior factorice cada una de las siguientes expresiones:

a.) $x^3 - 8$

b.) $a^3 - 7$

c.) $54x^3 - 2y^3$

d.) $3a^3b^3 - 125$

Solución

a.) $x^3 - 8$

$x^3 - 8$

$= x^3 - 2^3$

$= (x-2)(x^2 + 2x + 2^2)$

$= (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

Por lo que la factorización de $x^3 - 8$

es $(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

$\therefore\ x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

b.) $a^3 - 7$

$a^3 - 7$

$= a^3 - (\sqrt[3]{7})^3$

$= (a - \sqrt[3]{7})[a^2 + a\sqrt[3]{7} + (\sqrt[3]{7})^2]$

$= (a - \sqrt[3]{7})(a^2 + a\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})$

Por lo que la factorización de $a^3 - 7$ es

$(a - \sqrt[3]{7})(a^2 + a\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})$

$\therefore\ a^3 - 7 = (a - \sqrt[3]{7})(a^2 + a\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})$

c.) $54x^3 - 2y^3$

$54x^3 - 2y^3$

$= 2(27x^3 - y^3)$

$= 2[(3x)^3 - y^3]$

$= 2[3x - y][(3x)^2 + 3xy + y^2]$

$= 2(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

Por lo que la factorización de $54x^3 - 2y^3$ es

$2(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

$\therefore\ 54x^3 - 2y^3 = 2(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$

d.) $3a^3b^3 - 125$

$3a^3b^3 - 125$

$= (\sqrt[3]{3}ab)^3 - 5^3$

$= [\sqrt[3]{3}ab - 5][(\sqrt[3]{3}ab)^2 + \sqrt[3]{3}ab \cdot 5 + 5^2]$

$= (\sqrt[3]{3}ab - 5)(\sqrt[3]{9}a^2b^2 + 5\sqrt[3]{3}ab + 25)$

Por lo que la factorización de $3a^3b^3 - 125$ es

$(\sqrt[3]{3}ab - 5)(\sqrt[3]{9}a^2b^2 + 5\sqrt[3]{3}ab + 25)$

$\therefore\ 3a^3b^3 - 125 = (\sqrt[3]{3}ab - 5)(\sqrt[3]{9}a^2b^2 + 5\sqrt[3]{3}ab + 25)$

Ejercicios 18

Factorice totalmente cada una de las siguientes expresiones:

1.) $a^3 - 64 + b^3$

2.) $4a^5 - 32a^2b^3$

3.) $a^3 - 11$

4.) $a^3 - (b-1)^3$

5.) $8a^2b^3 - 7$

6.) $16x^5 - 2x^2$

2.5 Factorización de polinomios en una variable

2.5.1 Factorización de polinomios de grado 2

Enunciaremos en esta sección dos métodos los cuales usaremos para factorizar polinomios de una variable, de grado 2 (del tipo $ax^2 + bx + c$). Uno de estos métodos se conoce con el nombre de *factorización por completación de cuadrados*, y el otro método se conoce con el nombre de *factorización por fórmula general.*

Completación de cuadrados

Este procedimiento nos permitirá obtener a partir de una expresión de la forma $x^2 + bx + c$, una expresión de la forma $\left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 + k$

Teorema 9

Si b y c son constantes reales y x es una variable real, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c &= \left[x^2 + 2(x)\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] - \frac{b^2}{4} + c \\
&= \left[x^2 + bx + \frac{b^2}{4}\right] - \frac{b^2}{4} + c \\
&= x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c \\
&= x^2 + bx + c
\end{aligned}$$

por lo que:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

así por ejemplo, usando el teorema anterior se tiene que:

a) $x^2 + 6x + 5 = \left(x + \dfrac{6}{2}\right)^2 - \dfrac{6^2}{4} + 5$

b) $x^2 - 3x + 2 = x^2 + (-3)x + 2 = \left(x + \dfrac{-3}{2}\right)^2 - \dfrac{(-3)^2}{4} + 2$

c) $x^2 - 8x - 7 = x^2 + (-8x) - 7 = \left(x + \dfrac{-8}{2}\right)^2 - \dfrac{(-8)^2}{4} + -7$

d) $x^2 + x - 1 = x^2 + x + (-1) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1^2}{4} + -1$

Factorización por completación de cuadrados

■ **Ejemplo 39**

Usando la completación de cuadrados factorice cada una de las siguientes expresiones:

a)x^2+5x+4 b) x^2+4x+2 c) $4x^2+8x-5$ d) $3x^2-7x+2$

Solución

$$\begin{aligned}
\text{a.) } x^2+5x+4 &= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5^2}{4} + 4\\
&= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{16}{4}\\
&= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\\
&= \left[\left(x+\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\right]\left[\left(x+\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2}\right]\\
&= \left(x+\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)\\
&= \left(x + \frac{2}{2}\right)\left(x + \frac{8}{2}\right)\\
&= (x+1)(x+4)
\end{aligned}$$

Por lo que la factorización de x^2+5x+4 es $(x+1)(x+4)$

$\therefore\ x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$

$$
\begin{aligned}
\text{b.) } x^2+4x+2 &= \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - \frac{4^2}{4} + 2 \\
&= (x+2)^2 - \frac{16}{4} + 2 \\
&= (x+2)^2 - 4 + 2 \\
&= (x+2)^2 - 2 \\
&= (x+2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 \\
&= \left[(x+2) - \sqrt{2}\right]\left[(x+2) + \sqrt{2}\right] \\
&= \left(x+2 - \sqrt{2}\right)\left(x+2 + \sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo que la factorización de x^2+4x+2 es $\left(x+2 - \sqrt{2}\right)\left(x+2 + \sqrt{2}\right)$

$\therefore\ x^2+4x+2 = \left(x+2 - \sqrt{2}\right)\left(x+2 + \sqrt{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
\text{c.) } 4x^2+8x-5 &= 4\left(x^2+2x-\frac{5}{4}\right) \\
&= 4\left[\left(x+\frac{2}{2}\right)^2 - \frac{2^2}{4} - \frac{5}{4}\right] \\
&= 4\left[(x+1)^2 - \frac{4}{4} - \frac{5}{4}\right] \\
&= 4\left[(x+1)^2 - \frac{9}{4}\right] \\
&= 4\left[(x+1)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \\
&= 4\left[(x+1) - \frac{3}{2}\right]\left[(x+1) + \frac{3}{2}\right] \\
&= 4\left(x+1 - \frac{3}{2}\right)\left(x+1 + \frac{3}{2}\right) \\
&= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo que la factorización de $4x^2+8x-5$ es $4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$\therefore\ 4x^2+8x-5 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
\text{d) } 3x^2 - 7x + 2 &= 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}\right)\\
&= 3\left[\left(x - \frac{\frac{7}{3}}{2}\right)^2 - \frac{\left(\frac{-7}{3}\right)^2}{4} + \frac{2}{3}\right]\\
&= 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{\frac{49}{9}}{4} + \frac{2}{3}\right]\\
&= 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} + \frac{2}{3}\right]\\
&= 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} + \frac{24}{36}\right]\\
&= 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right]\\
&= 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right]\\
&= 3\left(x - \frac{7}{6} - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{7}{6} + \frac{5}{6}\right)\\
&= 3\left(x - \frac{12}{6}\right)\left(x - \frac{2}{6}\right)\\
&= 3\,(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ x^2 - 7x + 2 = 3\,(x-2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Ejercicios 19

Usando la completación de cuadrados factorice cada una de las siguientes expresiones:

1.) $x^2 + x - 6$	3) $2x^2 - 5x + 2$	5) $2x^2 - 12x - 15$
2.) $x^2 - 4x + 1$	4) $-2x^2 + x + 1$	6) $2x^2 - 3x - 3$

Fórmula General:

La fórmula general es un procedimiento que se usa para factorizar polinomios de la forma ax^2 + b$x + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$.

Teorema 10

(Teorema del factor) Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, $n \geq 1$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$:

a.) Si α es un cero de $P(x)$, (P$(\alpha) = 0$), entonces $x - \alpha$ es un factor de $P(x)$.

b.) Si $x - \alpha$ es un factor de $P(x)$, entonces α es un cero de $P(x)$.

Demostración:

a.) Supongamos que α es un cero de $P(x)$, debemos demostrar que $x - \alpha$ es un factor de $P(x)$.

Por el algoritmo de la división existen únicos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, $R(x)$ constante real tales que :

$P(x) = (x - \alpha)\ Q(x) + R(x)$; sustituyendo x por α se tiene

$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)\ Q(\alpha) + R(x)$

$P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + R(x)$

$P(\alpha) = R($x$)$, pero como $P(\alpha) = 0$ entonces $R(x) = 0$ y se cumple que:

$P(\alpha) = (x - \alpha)\ Q(x)$, de donde se tiene que $x - \alpha$ es un factor de $P(x)$

b.) Supongamos que $x - \alpha$ es un factor de $P(x)$, debemos demostrar que α es un cero de $P(x)$, o sea $P(\alpha) = 0$

Si $x - \alpha$ es un factor de $P(x)$, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$P(x) = (x - \alpha)\ Q(x)$, de donde se tiene que

$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)\ Q(\alpha)$

$P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha)$

$P(\alpha) = 0$; que es lo que se quería demostrar

Ejemplo 40

Sea $P(x)$ tal que $P(x) = x^3 - 2x + 1$, observe que $P(1) = 1^3 - 2(1) + 1$, o sea $P(1) = 0$, por lo que $x - 1$ debe ser un factor de $P(x)$. En efecto, realizando la división de $P(x)$ por $x - 1$ se tiene que:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Por lo tanto:
$x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$ y se cumple que $x - 1$ es un factor de $P(x)$

Consecuencias del teorema anterior

Sea $P(x)$ tal que $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Si $P(x)$ no tiene ceros reales, entonces $P(x)$ no es factorizable en $\mathbb{R}$.

Definición 16

Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$, el número $b^2 - 4ac$, recibe el nombre de <u>discriminante de $P(x)$.</u>

Notación

El discriminante de $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ se denota por el símbolo: Δ; o sea:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ejemplo 41

Calcule el discriminante de cada uno de los siguientes polinomios:

a.) $4x^2 + 5x + 8$	b.) $x^2 - x - 2$	c.) $4x^2 - 4x + 1$
d.) $4x^2 - 2x$	e.) $3x^2 + 5$	f.) $-2x^2 + 7x - 3$

Solución

a.) $4x^2 + 5x + 8$

En este caso:

$\Delta = 5^2 - 4(4)(8)$

$\Delta = 25 - 128$

$\Delta = -103$

b.) $x^2 - x - 2$

En este caso:

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2)$

$\Delta = 1 + 8$

$\Delta = 9$

c.) $4x^2 - 4x + 1$

En este caso:

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1)$

$\Delta = 16 - 16$

$\Delta = 0$

d.) $4x^2 - 2x$

En este caso:

$\Delta = (-2)^2 - 4(4)(0)$

$\Delta = 4 - 0$

$\Delta = 4$

e.) $3x^2 + 5$

En este caso:

$\Delta = (0)^2 - 4(3)(5)$

$\Delta = 0 - 60$

$\Delta = -60$

f.) $-2x^2 + 7x - 3$

En este caso:

$\Delta = 7^2 - 4(-2)(-3)$

$\Delta = 49 - 24$

$\Delta = 25$

Ejercicios 20

Calcule el discriminante de cada uno de los siguientes polinomios:

1.) $-3x^2+3x-\dfrac{3}{2}$

2.) $9x^2-30x+25$

3.) x^2+4

4.) $12x-x^2$

5.) $\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{4}$

6.) $5x-2x^2+4$

■ **Teorema 11**

Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x)=ax^2+bx+c$, con $a\neq 0$ y $\Delta=b^2-4ac$

i.) Si $\Delta<0$ entonces $P(x)$ no es factorizable en el conjunto de los números reales

ii.) Si $\Delta=0$ entonces $P(x)$ es factorizable en el conjunto de los números reales y su factorización viene dada por:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

iii.) Si $\Delta>0$ entonces $P(x)$ es factorizable en el conjunto de los números reales y su factorización viene dada por:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta);\ \alpha=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ \text{ y }\ \beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
P(x) &= ax^2+bx+c\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]\quad(*)
\end{aligned}$$

a partir de aquí consideramos los tres casos siguientes:

i.) Si $\Delta < 0$ entonces $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, por lo que $P(x) \neq 0, \forall x \in I\!R$

Debe aquí se deduce que $P(x)$ no tiene ceros reales y por lo tanto $P(x)$ no es factorizable (ver la consecuencia del teorema del factor anotado en la pagina anterior).

ii.) Si $\Delta = 0$ entonces por $(*)$

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{0}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - 0\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

o sea:

$$\boxed{\text{Si } \Delta = 0 \text{ entonces } ax^2+bx+c \;=\; = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

iii.) Si $\Delta > 0$ entonces volviendo a $(*)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)^2\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right] \\ &= a\left[x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \\ &= a\left[x-\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ &= a(x-\alpha)(x-\beta) \text{ donde } \alpha \;=\; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \; \beta \;=\; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

o sea:

$$\boxed{\text{Si } \Delta > 0 \text{ entonces: } \; ax^2+bx+c \;=\; a(x-\alpha)(x-\beta) \text{ donde } \alpha \;=\; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \; \beta \;=\; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

■ Ejemplo 42

Factorice (si es posible) cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-2x^2+3x-4$ b.) x^2+4 c.) $-4x^2+20x-25$

d.) $-2x^2 - 6x$ e.) $2x^2 + 5x - 3$ f.) $x^2 - x - 3$

Solución

a.) $-2x^2 + 3x - 4$

En este caso:

$\Delta = 3^2 - 4(-2)(-4)$

$\Delta = 9 - 32$

$\Delta = -23$

Como $\Delta < 0$ entonces $-2x^2 + 3x - 4$ no es factorizable en el conjunto de los números reales

b.) $x^2 + 4$

En este caso:

$\Delta = (0)^2 - 4(1)(4)$

$\Delta = 0 - 16$

$\Delta = -16$

Como $\Delta < 0$ entonces $x^2 + 4$ no es factorizable en el conjunto de los números reales

c.) $-4x^2 + 20x - 25$

En este caso:

$\Delta = (20)^2 - 4(-4)(-25)$

$\Delta = 400 - 400$

$\Delta = 0$

Como $\Delta = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} -4x^2 + 20x - 25 &= -4\left(x + \frac{-20}{2 \cdot 4}\right)^2 \\ &= -4\left(x - \frac{20}{8}\right)^2 \\ &= -4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore\ -4x^2 + 20x - 25 = -4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

d.) $-2x^2 - 6x$

En este caso:

$\Delta = (-6)^2 - 4(-2)(0)$

$\Delta = 36$

Como $\Delta > 0$ entonces

$-2x^2 - 6x = -2(x - \alpha)(x - \beta)$ con:

$\alpha = \dfrac{-(-6) - \sqrt{36}}{2(-2)}$;

$\beta = \dfrac{-(-6) + \sqrt{36}}{2(-2)}$

$\alpha = \dfrac{6 - 6}{-4}$; $\beta = \dfrac{6 + 6}{-4}$

$\alpha = 0$; $\beta = -3$

$\therefore\ -2x^2 - 6x = -2(x - 0)(x + 3)$

$-2x^2 - 6x = -2x(x + 3)$

Nota: La expresión $-2x^2 - 6x$ se puede factorizar en un menor número de pasos usando la factorización por factor común.

e.) $2x^2+5x-3$

En este caso:

$\Delta = (5)^2 - 4(2)(-3)$

$\Delta = 25 + 24$

$\Delta = 49$

Como $\Delta > 0$ entonces

$2x^2+5x-3 = 2(x-\alpha)(x-\beta)$ con:

$\alpha = \dfrac{-5-\sqrt{49}}{2(2)};$

$\beta = \dfrac{-5+\sqrt{49}}{2(2)}$

$\alpha = \dfrac{-5-7}{4}; \qquad \beta = \dfrac{-5+7}{4}$

$\alpha = -3; \qquad \beta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 2x^2+5x-3 = 2(x+3)(x-\dfrac{1}{2})$

f.) x^2-x-3

En este caso:

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-3)$

$\Delta = 1 + 12$

$\Delta = 13$

Como $\Delta > 0$ entonces

$x^2-x-3 = 1\cdot(x-\alpha)(x-\beta)$ con:

$\alpha = \dfrac{-(-1)-\sqrt{13}}{2(1)};$

$\beta = \dfrac{-(-1)+\sqrt{13}}{2(1)}$

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}; \qquad \beta = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\therefore\ x^2-x-3 = \left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Ejercicios 21

Factorice (si es posible) cada una de las siguientes expresiones:

1.) $6x^2-13x+6$

2.) $2x^2-\sqrt{3}x+1$

3.) x^2+x+1

4.) $-3x^2+7x+20$

5.) $-2x^2-5x-3$

6.) $\dfrac{1}{4}x^2+x+1$

2.5.2 Factorización de polinomios de grado mayor que 2, con coeficientes enteros

A continuación nuestro objetivo es factorizar polinomios de grado mayor que dos, para lo cual haremos uso de: la división sintética, del procedimiento para factorizar polinomios de grado 2, del teorema del factor y de las siguientes proposiciones:

Propocisión 1

Si $P(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $P(x)$ tiene a lo sumo $\underline{n}$ ceros reales.

Ejemplo 43

a.) El polinomio x^3+1, es de grado 3 por lo que tiene a lo sumo 3 ceros reales.

b.) El polinomio $2x^4 - 4x^2 - 4$, es de grado 4 por lo que tiene a lo sumo 4 ceros reales.

Propiedad 1

Sea $P(x)$ un polinomio tal que: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$

Son números enteros. Y sean c y d números enteros tales que $\dfrac{c}{d}$ es una fracción canónica.

Si $\dfrac{c}{d}$ es un cero de $P(x)$ entonces, a_0 es divisible por c y a_n es divisible por d.

Nota: de la proposición anterior se deduce que todos los ceros racionales de $P(x)$ están contenidos en el conjunto D, donde:

$$D = \left\{\frac{c}{d} \in Q/c \text{ es un divisor de } a_0 \text{ y } d \text{ es un divisor de } a_n\right\}$$

(pero no necesariamente todo elemento de D es un cero de $P(x)$).

Para aplicar las proposiciones anteriores en la factorización de un polinomio $P(x)$, con:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

con $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$, números enteros, $a_n \neq 0$, $n \in I\!\!N$, $n > 2$ se sigue el siguiente procedimiento:

1.) Se determina el conjunto D_{a_0}, donde:

$$D_{a_0} = \{c \in Z/c \text{ es un divisor de } a_0\}$$

2.) Se determina el conjunto D_{a_n}, donde:

$$D_{a_n} = \{d \in I\!\!N/d \text{ es un divisor de } a_n\}$$

3.) Se forma el conjunto D, donde:

$$D = \left\{\frac{c}{d}/c \in D_{a_0} \text{ y } d \in D_{a_n}\right\}$$

4.) Entre los elementos de D se busca un α tal que $P(\alpha) = 0$.

5.) Se efectúa la división de $P(x)$ por $x - \alpha$, y se expresa la identidad

$\boxed{P(x) = (x - \alpha)C(x)}$

donde $C(x)$ es el cociente que se obtiene al dividir $P(x)$ por $x - \alpha$

6.) Si $C(x)$ de grado mayor que 2, se repiten los pasos 4 y 5 para $C(x)$.

7.) Si $C(x)$ es de grado 2, se utiliza alguno de los métodos de factorización de polinomios de este tipo.

■ Ejemplo 44

Factorice $P(x)$ (si se posible), donde:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Solución

En este caso:

$D_6 = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$ (divisores enteros de 6)

$D_1 = \{1\}$ (divisores naturales de 1)

$D = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$ cada elemento de D es el cociente de un elemento de D_6 y un elemento de D_1.

El paso siguiente es determinar algún α, $\alpha \in D$ tal que $P(\alpha) = 0$

Calculemos $P(-1)$, (por división sintética):

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & 1 & 6 & \underline{-1} \\ & -1 & 5 & -6 & \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $P(-1) = 0$ y además $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$

Como $x^2 - 5x + 6$ es de grado 2, podemos utilizar alguno de los métodos de factorización estudiados para polinomios de este tipo.

Por fórmula general se tiene que en $x^2 - 5x + 6$:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) \qquad \alpha = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} \qquad \beta = \frac{5 + \sqrt{1}}{2}$$

$$\Delta = 25 - 24 \qquad \alpha = \frac{4}{2} \qquad \beta = \frac{6}{2}$$

$$\Delta = 1 \qquad \alpha = 2 \qquad \beta = 3$$

por lo que:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ y como $x^3 - 4x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$

entonces $x^3 - 4x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$

Ejemplo 45

Factorice $P(x)$ (si se posible), donde:

$$P(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6x - 4$$

Solución

En este caso:

$D_{-4} = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$ Divisores enteros de -4

$D_2 = \{1, 2\}$ Divisores naturales de 2

$D = \left\{1, -1, 2, -2, 4, -4, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right\}$

El paso siguiente es determinar algún α, $\alpha \in D$, tal que $P(\alpha) = 0$

Calculemos $P(1)$ por división sintética:

$$\begin{array}{ccccc|l} 2 & 0 & -4 & -6 & -4 & 1 \\ & 2 & 2 & -2 & -8 & \\ \hline 2 & 2 & -2 & -8 & \boxed{\mathbf{-12}} & \end{array}$$

Como $P(1) = -12$, $x - 1$ no es un factor de $P(x)$

Calculemos $P(-1)$ por división sintética:

$$\begin{array}{ccccc|l} 2 & 0 & -4 & -6 & -4 & -1 \\ & -2 & 2 & 2 & 4 & \\ \hline 2 & -2 & -2 & -4 & \boxed{\mathbf{0}} & \end{array}$$

De aquí se tiene que $P(-1) = 0$ y además

$$2x^4 - 4x^2 - 6x - 4 = (x + 1)(2x^3 - 2x^2 - 2x - 4) \ (*)$$

Sea $C(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$ que es un polinomio de grado 3, debemos encontrar un β, $\beta \in D$ tal que $C(\beta) = 0$

Calculemos $C(2)$ por división sintética:

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -2 & -2 & -4 & 2 \\ & 4 & 4 & 4 & \\ \hline 2 & 2 & 2 & \boxed{\mathbf{0}} & \end{array}$$

De aquí se tiene que $C(2) = 0$ y además

$$2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = (x - 2)(2x^2 + 2x + 2) \ (**)$$

Como $2x^2 + 2x + 2$ es de grado 2, podemos utilizar alguno de los métodos de factorización estudiados para polinomios de este tipo.

Por fórmula general se tiene que en $2x^2 + 2x + 2$

$\Delta = (2)^2 - 4(2)(2)$

$\Delta = 4 - 16$

$\Delta = -12$

Como $\Delta < 0$ entonces $2x^2 + 2x + 2$ <u>no</u> es factorizable en el conjunto de los números reales.

Así, por $(*)$ y $(**)$ se tiene que:

$2x^4 - 4x^2 - 6x - 4 = (x + 1)(2x^3 - 2x^2 - 2x - 4)$

$\therefore\ 2x^4 - 4x^2 - 6x - 4 = (x + 1)(x - 2)(2x^2 + 2x + 2)$

■ Ejemplo 46

Factorice $P(x)$ (si se posible), donde:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$$

Solución
Factorizando $P(x)$ por factor común se tiene que:

$$P(x) = x(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) \ (*)$$

Sea $P_1(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$, para $P_1(x)$ se tiene:

$D_8 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

$D_1 = \{1\}$

$D = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

Calculando $P_1(1)$ y $P_1(-1)$ se tiene que

$P_1(1) = 3$ y $P_1(-1) = 9$

Calculemos $P_1(2)$ (por división sintética):

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & -4 & 8 & 2 \\ & 2 & 0 & -8 & \\ \hline 1 & 0 & -4 & \boxed{\mathbf{0}} & \end{array}$$

De aquí se tiene que $P_1(2) = 0$ y además

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)\left(x^2-4\right)$$

y como $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ entonces

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x-2)(x+2) \ (**)$$

Así por $(*)$ y $(**)$ se tiene que:

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x = x(x-2)(x-2)(x+2)$$

Ejemplo 47

Factorice $P(x)$ (si se posible), donde:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$$

Solución
En este caso:

$$D_3 = \{1, -1, 3, -3\}$$

$$D_1 = \{1\}$$

$$D = \{1, -1, 3, -3\}$$

Calculando $P(1)$, $P(-1)$, $P(3)$ y $P(-3)$ se tiene que:

$$P(1) = 12, \qquad P(-1) = 2, \qquad P(3) = 78, \qquad P(-3) = 0$$

Dividiendo $P(x)$ por $(x+3)$, (usando división sintética), obtenemos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 4 & 4 & 3 & -3 \\ & -3 & -3 & -3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \boxed{\mathbf{0}} & \end{array}$$

y por lo tanto:

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = (x+3)\left(x^2 + x + 1\right)$$

factorice, si es posible, $x^2 + x + 1$, para esto se tiene que:

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1)$$
$$\Delta = 1 - 4$$
$$\Delta = -3$$

Como $\Delta < 0$ entonces $x^2 + x + 1$ no es factorizable en el conjunto de los números reales.

Así se tiene que:

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = (x+3)\left(x^2 + x + 1\right)$$

Ejemplo 48

Factorice $P(x)$ (si se posible), donde:

$$P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$$

Solución

En este caso:

$$D_{-9} = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$$
$$D_1 = \{1\}$$
$$D = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$$

Calculando $P(1)$ y $P(-1)$ se tiene que: $P(1) = -16$, $P(-1) = -16$

Calculemos $P(3)$ por división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & 0 & -8 & 0 & -9 & \underline{3} \\
 & 3 & 9 & 3 & 9 & \\
\hline
1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

De aquí se tiene que $P(3) = 0$ y además:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x-3)\left(x^3 + 3x^2 + x + 3\right)$$

Sea $P_1(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

Como 1 y -1 no son ceros de $P(x)$, tampoco lo son de $P_1(x)$; por lo que los posibles ceros de $P_1(x)$ serían los restantes elementos de D.

Calculando $P_1(3)$ se tiene que $P_1(3) = 60$

Calculemos $P_1(-3)$ por división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ \cline{5-5} & -3 & 0 & -3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & \boxed{\mathbf{0}} & \end{array}$$

De aquí se tiene que $P_1(-3) = 0$ y además

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x+3)(x^2+1)$$

factoricemos, si es posible $x^2 + 1$

Para $x^2 + 1$ se tiene que:

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(1)$$

$$\Delta = -4$$

Como $\Delta < 0$, entonces $x^2 + 1$ no es factorizable en el conjunto de los números reales.

Así se tiene que:

$x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x+3)(x^2+1)$ y por lo tanto $x^4 - 8x^2 - 9 = (x-3)(x+3)\left(x^2+1\right)$

Ejercicios 22

Factorice, si es posible, cada uno de los siguientes polinomios $P(x)$ que se definen a continuación.

1.) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

2.) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$

3.) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

4.) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$

5.) $P(x) = x^3 - 12x + 16$

6.) $P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

7.) $P(x) = 6x^3 + 23x^2 + 9x - 18$

8.) $P(x) = 5x^3 + 9x^2 - 7x + 1$

2.6 Fracciones Racionales en una Variable

2.6.1 Fracciones Racionales en una Variable

■ **Definición 17**

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios en una variable. La expresión $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ recibe el nombre de fracción racional, $P(x)$ recibe el nombre de numerador y $Q(x)$ recibe el nombre de denominador de la fracción.

■ **Ejemplo 49**

Son fracciones racionales las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$ b.) $\dfrac{x^2-1}{3x^3-2x^2+x-1}$ c.) $\dfrac{1}{x^3+1}$

d.) $\dfrac{x+1}{x+4}$ e.) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ f.) $\dfrac{x+3\,(x-1)}{x+3}$

2.6.2 Simplificación de fracciones racionales

Diremos que una fracción racional está expresada en su forma más simple, cuando el numerador y el denominador de dicha fracción no tienen factores comunes. Para simplificar fracciones racionales haremos uso del siguiente resultado:

Resultado

Si $P(x)$, $Q(x)$ y $C(x)$ son polinomios entonces se cumple que:

$$\frac{P(x)\cdot C(x)}{Q(x)\cdot C(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)};\text{ para todo } x,\text{ tal que } C(x)\neq 0$$

Ejemplo 50

Simplifique, si es posible, cada una de las siguientes fracciones racionales:

a.) $\dfrac{2x-6}{2x^2-18}$ b.) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ c.) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4\,(x-1)}$

d.) $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$ e.) $\dfrac{x^2-9\,(x-2)}{x-3\,(x-2)}$ f.) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}\frac{2x-6}{2x^2-18}&=\frac{2\,(x-3)}{2\,(x^2-9)}\\&=\frac{2\,(x-3)}{2\,(x-3)\,(x+3)}\\&=\frac{1}{x+3},\text{ si } x-3\neq 0\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2x-6}{2x^2-18}=\frac{1}{x+3},\text{ si } x\neq 3$$

b.) $$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+2x+4}{x+2}, \text{ si } x-2 \neq 0$$

Por lo que:

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}, \text{ si } x \neq 2$$

c.) $$\frac{x^2-4}{x^2-4(x-1)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2-4x+4}$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+2)}{(x-2)}, \text{ si } x-2 \neq 0$$

Por lo que:

$$\frac{x^2-4}{x^2-4(x-1)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}, \text{ si } x \neq 2$$

d.) $$\begin{aligned} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} &= \frac{\left(x^3+2x^2\right)-(x+2)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2(x+2)-(x+2)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x+2)\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= x+2 \text{ , si } x-1 \neq 0 \text{ y } x+1 \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} = x+2, \text{ si } x \neq 1 \text{ y } x \neq -1$$

$$
\begin{aligned}
\text{e.)}\quad \frac{x^2-9(x-2)}{x-3(x-2)} &= \frac{x^2-9x+18}{x-3x+6} \\
&= \frac{(x-6)(x-3)}{-2x+6} \\
&= \frac{(x-6)(x-3)}{-2(x-3)} \\
&= \frac{x-6}{-2}\ \text{, si } x-3 \neq 0
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{x^2-9(x-2)}{x-3(x-2)} = \frac{x-6}{-2}, \text{ si } x \neq 3$$

$$
\begin{aligned}
\text{f.)}\quad \frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} &= \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+4)} \\
&= \frac{x-2}{x+4};\ \text{si } x+3 \neq 0
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} = \frac{x-2}{x+4}, \text{ si } x \neq -3$$

Ejercicios 23

Simplifique, si es posible, cada una de las siguientes fracciones racionales.

1.) $\dfrac{(m-2)^2}{m^2-4}$

2.) $\dfrac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}$

3.) $\dfrac{x^2-4(x-1)}{x^2-4}$

4.) $\dfrac{a^3+1}{a^4-a^3+a-1}$

5.) $\dfrac{a^3-3a^2+3a-1}{a^2-2a+1}$

6.) $\dfrac{(x+3)(x+12)}{x+3\cdot x+12}$

7.) $\dfrac{x^2+x-6}{(2x-7)^2}$

8.) $\dfrac{x+1-x^3-x^2}{x^3-x-2x^2+2}$

9.) $\dfrac{x\cdot x-25}{x^3-5x}$

2.6.3 Operaciones con fracciones racionales

Para realizar operaciones con fracciones racionales usaremos los procedimientos utilizados para realizar operaciones con números racionales. Así:

Si $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{B(x)}$ son fracciones racionales entonces son verdaderas las siguientes igualdades:

1.) $\dfrac{A(x)}{B(x)} + \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot D(x) + C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}$

2.) $\dfrac{A(x)}{B(x)} - \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot D(x) - C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}$

3.) $\dfrac{A(x)}{B(x)} \cdot \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}$

4.) $\dfrac{A(x)}{B(x)} \div \dfrac{C(x)}{D(x)} = \dfrac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$

Notación

$$\frac{A(x)}{B(x)} \div \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{\frac{A(x)}{B(x)}}{\frac{C(x)}{D(x)}} \quad \text{por lo que} \quad \frac{\frac{A(x)}{B(x)}}{\frac{C(x)}{D(x)}} = \frac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$$

Ejemplo 51

Sean $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1}$; $\qquad \dfrac{R(x)}{S(x)} = \dfrac{x^2+2x-3}{3x+6}$

Determine:

a) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \cdot \dfrac{R(x)}{S(x)}$ $\qquad$ b) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \div \dfrac{R(x)}{S(x)}$

En cada caso exprese el resultado como una fracción racional en su forma más simple.

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} &= \frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+2x-3}{3x+6} \\
&= \frac{\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2+2x-3\right)}{\left(x^2-1\right)(3x+6)} \\
&= \frac{[(x+3)(x+2)][(x+3)(x-1)]}{[(x-1)(x+1)]\cdot 3\,(x+2)} \\
&= \frac{(x+3)\,(x+3)}{3\,(x+1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{b.) } \frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)} &= \frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \div \frac{x^2+2x-3}{3x+6} \\
&= \frac{(x^2+5x+6)(3x+6)}{(x^2-1)(x^2+2x-3)} \\
&= \frac{[(x+3)\,(x+2)]\,3\,(x+2)}{(x^2-1)\,(x^2+2x-3)} \\
&= \frac{[(x+3)(x+2)]\,(3x+6)}{(x-1)\,(x+1)\,(x+3)\,(x-1)} \\
&= \frac{3\,(x+2)\,(x+2)}{(x-1)\,(x+1)\,(x-1)}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 52

Realice las operaciones indicadas en cada una de las expresiones siguientes y escriba la fracción racional resultante en su forma más simple:

a.) $\dfrac{3}{x-7} + \dfrac{2}{x+6}$ b.) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{1-x^2}$

Solución

$$
\begin{aligned}
\text{a.) } \frac{3}{x-7} + \frac{2}{x+6} &= \frac{3\,(x+6)+2\,(x-7)}{(x-7)\,(x+6)} \\
&= \frac{3x+18+2x-14}{(x-7)\,(x+6)} \\
&= \frac{5x+4}{(x-7)\,(x+6)}
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{3}{x-7} + \frac{2}{x+6} = \frac{5x+4}{(x-7)\,(x+6)}$$

b.) $$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{1-x^2} &= \frac{x\left(1-x^2\right) - 2x\,(x+1)}{(x+1)\,(1-x^2)} \\ &= \frac{x - x^3 - 2x^2 - 2x}{(x+1)\,(1-x^2)} \\ &= \frac{-x^3 - 2x^2 - x}{(x+1)\,(1-x^2)} \\ &= \frac{-x\left(x^2+2x+1\right)}{(x+1)\,(1-x^2)} \\ &= \frac{-x(x+1)^2}{(x+1)\,(1-x^2)} \\ &= \frac{-x\,(x+1)}{(1-x^2)} \\ &= \frac{-x\,(x+1)}{(1-x)\,(1+x)} \\ &= \frac{-x}{(1-x)} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2x}{1-x^2} = \frac{-x}{(1-x)}$$

A continuación enunciaremos un resultado que puede ser usado para sumar y restar fracciones racionales.

Resultado:

Si $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{B(x)}$ son fracciones racionales entonces son verdaderas las siguientes igualdades:

i.) $\dfrac{A(x)}{B(x)} + \dfrac{C(x)}{B(x)} = \dfrac{A(x)+C(x)}{B(x)}$

ii.) $\dfrac{A(x)}{B(x)} - \dfrac{C(x)}{B(x)} = \dfrac{A(x)-C(x)}{B(x)}$

Justificación del resultado:

i.) $$\begin{aligned} \frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{B(x)} &= \frac{A(x)\cdot B(x) + C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot B(x)} \\ &= \frac{[A(x)+C(x)]\,B(x)}{B(x)\cdot B(x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{A(x) + C(x)}{B(x)}$$

Por lo que:

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{B(x)} = \frac{A(x) + C(x)}{B(x)}$$

ii.) Justificación análoga a la anterior.

Nota: el resultado enunciado anteriormente se generaliza al caso en que se suman o restan tres o más fracciones racionales.

En los ejemplos siguientes ilustraremos el uso de este resultado al sumar o restar fracciones racionales.

■ Ejemplo 53

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y escriba la fracción racional resultante en su forma más simple.

a.) $\dfrac{8x}{x+2} + \dfrac{-6x+4}{x+2}$

b.) $\dfrac{1+3b}{3ab} + \dfrac{-a+1}{a^2b} - \dfrac{b^2+1}{2ab^2}$

c.) $\dfrac{-3x+5}{x^2-25} + \dfrac{2}{x-5}$

d.) $\dfrac{x}{x^2-1} - \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

e.) $\dfrac{1}{x^2-16} + \dfrac{1}{x^2-5x+4} - \dfrac{2}{x^2+8x+16}$

f.) $\dfrac{1}{x^2-2x} - \dfrac{1}{x^2+2x} - \dfrac{4}{x^3-4x}$

g.) $\dfrac{2}{x^3-2} - \dfrac{x^2-x+1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{8x}{x+2} + \frac{-6x+4}{x+2} &= \frac{8x + (-6x) + 4}{x+2} \\
&= \frac{2x+4}{x+2} \\
&= \frac{2\,(x+2)}{x+2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{8x}{x+2} + \frac{-6x+4}{x+2} = 2$$

b.)
$$\begin{aligned}
\frac{1+3b}{3ab}+\frac{-a+1}{a^2b}-\frac{b^2+1}{2ab^2} &= \frac{1+3b}{3ab}\cdot\frac{2ab}{2ab}+\frac{-a+1}{a^2b}\cdot\frac{6b}{6b}-\frac{b^2+1}{2ab^2}\cdot\frac{3a}{3a}\\
&= \frac{(1+3b)\,(2ab)}{6a^2b^2}+\frac{(-a+1)\,6b}{6a^2b^2}-\frac{\left(b^2+1\right)3a}{6a^2b^2}\\
&= \frac{(1+3b)\,2ab+(-a+1)\,6b-\left(b^2+1\right)3a}{6a^2b^2}\\
&= \frac{2ab+6ab^2-6ab+6b-3ab^2-3a}{6a^2b^2}\\
&= \frac{-4ab+3ab^2+6b-3a}{6a^2b^2}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{1+3b}{3ab}+\frac{-a+1}{a^2b}-\frac{b^2+1}{2ab^2}=\frac{-4ab+3ab^2+6b-3a}{6a^2b^2}$$

c.)
$$\begin{aligned}
\frac{-3x-5}{x^2-25}+\frac{2}{x-5} &= \frac{-3x-5}{(x-5)\,(x+5)}+\frac{2}{x-5}\\
&= \frac{-3x-5}{(x-5)\,(x+5)}+\frac{2}{x-5}\cdot\frac{x+5}{x+5}\\
&= \frac{-3x-5}{(x-5)\,(x+5)}+\frac{2\,(x+5)}{(x-5)\,(x+5)}\\
&= \frac{-3x-5+2\,(x+5)}{(x-5)\,(x+5)}\\
&= \frac{-3x-5+2x+10}{(x-5)\,(x+5)}\\
&= \frac{-x+5}{(x-5)\,(x+5)}\\
&= \frac{-1\,(x-5)}{(x-5)\,(x+5)}\\
&= \frac{-1}{(x+5)}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{-3x-5}{x^2-25}+\frac{2}{x-5}=\frac{-1}{(x+5)}$$

d.) $$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{(x-1)^2} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{x+1}{(x-1)(x-1)}\\ &= \frac{x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-1}{x-1}-\frac{x+1}{(x-1)(x-1)}\cdot\frac{x+1}{x+1}\\ &= \frac{x(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}-\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)}\\ &= \frac{x(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)}\\ &= \frac{x^2-x-\left(x^2+2x+1\right)}{(x-1)^2(x+1)}\\ &= \frac{x^2-x-x^2-2x-1}{(x-1)^2(x+1)}\\ &= \frac{-3x-1}{(x-1)^2(x+1)}\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{x}{x^2-1}-\frac{x+1}{(x-1)^2}=\frac{-3x-1}{(x-1)^2(x+1)}$$

e.) $$\frac{1}{x^2-16}+\frac{1}{x^2-5x+4}-\frac{2}{x^2+8x+16}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{(x-4)(x+4)}+\frac{1}{(x-1)(x-4)}-\frac{2}{(x+4)^2}\\ &= \frac{1}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+4)}+\frac{1}{(x-1)(x-4)}\cdot\frac{(x+4)^2}{(x+4)^2}-\frac{2}{(x+4)^2}\cdot\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)}\\ &= \frac{(x-1)(x+4)+(x+4)^2-2(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)(x+4)^2}\\ &= \frac{x^2+4x-x-4+\left(x^2+8x+16\right)-2\left(x^2-4x-x+4\right)}{(x-1)(x-4)(x+4)^2}\\ &= \frac{x^2+3x-4+x^2+8x+16-2x^2+8x+2x-8}{(x-1)(x-4)(x+4)^2}\\ &= \frac{21x+4}{(x-1)(x-4)(x+4)^2}\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{1}{x^2-16}+\frac{1}{x^2-5x+4}-\frac{2}{x^2+8x+16}=\frac{21x+4}{(x-1)(x-4)(x+4)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\text{f.)}\ \frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2+2x}-\frac{4}{x^3-4x} &= \frac{1}{x\,(x-2)}-\frac{1}{x\,(x+2)}-\frac{4}{x\,(x^2-4)}\\
&= \frac{1}{x\,(x-2)}-\frac{1}{x\,(x+2)}-\frac{4}{x\,(x-2)\,(x+2)}\\
&= \frac{1}{x\,(x-2)}\cdot\frac{x+2}{x+2}-\frac{1}{x\,(x+2)}\cdot\frac{x-2}{x-2}-\frac{4}{x\,(x-2)\,(x+2)}\\
&= \frac{x+2}{x\,(x-2)\,(x+2)}-\frac{x-2}{x\,(x-2)\,(x+2)}-\frac{4}{x\,(x-2)\,(x+2)}\\
&= \frac{x+2-x+2-4}{x\,(x-2)\,(x+2)}\\
&= \frac{0}{x\,(x-2)\,(x+2)}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2+2x}-\frac{4}{x^3-4x}=0$$

$$
\text{g.)}\ \frac{2}{x^3-1}-\frac{x^2-x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{(x-1)\,(x^2+x+1)}-\frac{x^2-x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}
$$

x^2+x+1 *no es factorizable en el conjunto de los números reales.*

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{(x-1)\,(x^2+x+1)}-\frac{x^2-x+1}{x-1}\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}\\
&= \frac{2}{(x-1)\,(x^2+x+1)}-\frac{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)\,(x^2+x+1)}-\frac{(x+1)\,(x-1)}{(x^2+x+1)\,(x-1)}\\
&= \frac{2-\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)-(x+1)\,(x-1)}{(x-1)\,(x^2+x+1)}\\
&= \frac{2-\left(x^4+x^3+x^2-x^3-x^2-x+x^2+x+1\right)-\left(x^2-1\right)}{(x-1)\,(x^2+x+1)}\\
&= \frac{2-x^4-x^3-x^2+x^3+x^2+x-x^2-x-1-x^2+1}{(x-1)\,(x^2+x+1)}\\
&= \frac{x^4-2x^2+2}{(x-1)\,(x^2+x+1)}
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{2}{x^3-2}-\frac{x^2-x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^4-2x^2+2}{(x-1)\,(x^2+x+1)}$$

Ejemplo 54

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y escriba la fracción racional resultante en su forma más simple:

a.) $\dfrac{x-1 \;-\; \dfrac{12}{x-2}}{x+6 \;+\; \dfrac{16}{x-2}}$ b.) $\dfrac{\dfrac{3}{3+x}-\dfrac{3}{6+2x}}{\dfrac{3}{3-x}+\dfrac{3}{3+x}}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{x-1 \;-\; \dfrac{12}{x-2}}{x+6+\dfrac{16}{x-2}} &= \frac{\dfrac{(x-1)\,(x-2)-12}{x-2}}{\dfrac{(x+6)\,(x-2)+16}{x-2}}\\
&= \frac{\dfrac{x^2-2x-x+2-12}{x-2}}{\dfrac{x^2-2x+6x-12+16}{x-2}}\\
&= \frac{\dfrac{x^2-3x-10}{x-2}}{\dfrac{x^2+4x+4}{x-2}}\\
&= \frac{\left(x^2-3x-10\right)(x-2)}{(x^2+4x+4)\,(x-2)}\\
&= \frac{(x-5)\,(x+2)\,(x-2)}{(x+2)^2\,(x-2)}\\
&= \frac{x-5}{x+2}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{x-1 \;-\; \dfrac{12}{x-2}}{x+6 \;+\; \dfrac{16}{x-2}}=\frac{x-5}{x+2}$$

b.) $$\frac{\dfrac{3}{3+x}-\dfrac{3}{6+2x}}{\dfrac{3}{3-x}+\dfrac{3}{3+x}} = \frac{\dfrac{6}{2(3+x)}-\dfrac{3}{6+2x}}{\dfrac{3}{3-x}+\dfrac{3}{3+x}}$$

$$= \frac{\dfrac{6-3}{2(3+x)}}{\dfrac{3(3+x)+3(3-x)}{(3-x)(3+x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{3}{2(3+x)}}{\dfrac{9+3x+9-3x}{(3-x)(3+x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{3}{2(3+x)}}{\dfrac{18}{(3-x)(3+x)}}$$

$$= \frac{3(3-x)(3+x)}{2(3+x)18}$$

$$= \frac{3-x}{12}$$

Por lo que:

$$\frac{\dfrac{3}{3+x}-\dfrac{3}{6+2x}}{\dfrac{3}{3-x}+\dfrac{3}{3+x}} = \frac{3-x}{12}$$

Ejercicios 24

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y escriba la fracción racional resultante en su forma más simple:

1.) $\dfrac{\left(x^3+1\right)\left(x^2-1\right)}{(x-1)^2(x+1)^3}$

2.) $\dfrac{x^3-121x}{x^2-49} \div \dfrac{x^2-11x}{x+7}$

3.) $\dfrac{y^2-y-6}{2y^2+12y+16} \cdot \dfrac{-y^2-2y+8}{2-y}$

4.) $\dfrac{1}{m^3-8} - \dfrac{1}{(m-2)^3}$

5.) $\dfrac{1}{(n-1)^2} + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{(n-1)^3} - \dfrac{1}{n}$

6.) $\dfrac{1}{y-1} + \dfrac{2y}{y^2-1} - \dfrac{3y^2}{y^3-1}$

7.) $\dfrac{x+1}{x^2-\dfrac{4}{x}-6} - \dfrac{x-4}{x^2-4x+3} + \dfrac{x+4}{x^2+x-2}$

8.) $\left[x+3 - \dfrac{5}{x-1}\right]\left[x-2 + \dfrac{5}{x+4}\right]$

9.) $\left[\dfrac{a+1}{a-1} + \dfrac{a-1}{a+1}\right] \div \left[\dfrac{a+1}{a-1} - \dfrac{a-1}{a+1}\right]$

10.) $\dfrac{\dfrac{10x+4}{x}}{\dfrac{4}{x^2}-25}$

11.) $\dfrac{1-x + \dfrac{x^2}{1+x}}{1 - \dfrac{1}{1+x}}$

12) $\dfrac{2x^2+2x}{2x^2} \cdot \dfrac{x^2-3x}{x^2-2x-3}$

13) $\dfrac{a^3-27}{a^2-4} \div \dfrac{a^2+3a+9}{a-2}$

14) $\left[\dfrac{a^2-16a+64}{a^2-64} \cdot \dfrac{a^3-9a^2+8a}{2a^2-128}\right] \div \dfrac{a^2+a}{2}$

15) $\dfrac{n^2-6n}{3n^2-27} + \dfrac{3}{2n-6} - \dfrac{n}{4n+12}$

16) $\dfrac{x}{x^2+x-2} - \dfrac{3}{x^2+2x-3} - \dfrac{x}{x^2+5x+6}$

17) $\dfrac{2}{r+r^2} - \dfrac{1}{r-r^2} - \dfrac{1-3r}{r-r^3}$

18) $\dfrac{y^3}{27-y^3} - \dfrac{y}{3-y}$

19) $\left[3 - \dfrac{6}{x+2}\right]\left[1+\dfrac{1}{x}\right] \div \left[\dfrac{x+1}{2x+4}\right]$

20) $\left[\dfrac{x+3}{x-1} - x\right]\left[2x + \dfrac{x^2}{x+1}\right] \div \left[\dfrac{2x}{x-1} - x\right]$

21) $\dfrac{\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x-1}{x^2+2x-3}}$

22) $\dfrac{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}{x-\dfrac{16}{x}}$

A continuación nuestro objetivo es efectuar operaciones con expresiones algebraicas que involucran potencias enteras negativas y con expresiones algebraicas de varias variables.

Para esto, haremos uso de las propiedades de las potencias, y de los procedimientos que se usan para realizar operaciones con fracciones racionales, como se ilustra en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 55

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y escriba el resultado en su forma más simple:

a.) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$

b.) $\dfrac{\left(x^{-2}-4y^{-2}\right)^{-1}}{x-\dfrac{xy}{y+2x}}$

c.) $\dfrac{x}{y+3}-\dfrac{x^2-1}{xy+3x}-\dfrac{1-6x}{y^2-9}$

d.) $\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)$

e.) $\dfrac{\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}}\div\dfrac{x+y}{x\cdot y}$

f.) $\dfrac{2x^{-6}}{(x+1)^2x^{-4}-(2x+1)x^{-4}}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} &= \frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}\\
&= \frac{\dfrac{b+a}{ab}}{\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}}\\
&= \frac{(b+a)\,a^2b^2}{(b^2-a^2)\,ab}\\
&= \frac{(b+a)\,a^2b^2}{(b+a)\,(b-a)\,ab}\\
&= \frac{ab}{(b-a)}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}=\frac{ab}{(b-a)}$$

$$\text{b.)}\quad \frac{\left(x^{-2}-4y^{-2}\right)^{-1}}{x\;-\dfrac{xy}{y+2x}} \quad = \quad \frac{\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{y^2}\right)^{-1}}{\dfrac{x}{1}-\dfrac{xy}{y+2x}}$$

$$= \quad \frac{\left(\dfrac{y^2-4x^2}{x^2y^2}\right)^{-1}}{\dfrac{x\,(y+2x)-xy}{y+2x}}$$

$$= \quad \frac{\dfrac{x^2y^2}{y^2-4x^2}}{\dfrac{xy+2x^2-xy}{y+2x}}$$

$$= \quad \frac{x^2y^2\,(y+2x)}{(y^2-4x^2)\,(xy+2x^2-xy)}$$

$$= \quad \frac{x^2y^2\,(y+2x)}{(y-2x)\,(y+2x)\,(2x^2)}$$

$$= \quad \frac{y^2}{2\,(y-2x)}$$

Por lo que:

$$\frac{\left(x^{-2}-4y^{-2}\right)^{-1}}{x\;-\dfrac{xy}{y+2x}} = \frac{y^2}{2\,(y-2x)}$$

$$\text{c.)}\quad \frac{x}{y+3}-\frac{x^2-1}{xy+3x}-\frac{1-6x}{y^2-9} \quad = \quad \frac{x}{y+3}-\frac{x^2-1}{x\,(y+3)}-\frac{1-6x}{(y+3)\,(y-3)}$$

$$= \quad \frac{x\,[x\,(y-3)]-\left(x^2-1\right)(y-3)-(1-6x)\,x}{x\,(y+3)\,(y-3)}$$

$$= \quad \frac{x\,(xy-3x)-\left(x^2y-3x^2-y+3\right)-\left(x-6x^2\right)}{x\,(y+3)\,(y-3)}$$

$$= \quad \frac{x^2y-3x^2-x^2y+3x^2+y-3-x+6x^2}{x\,(y+3)\,(y-3)}$$

$$= \quad \frac{6x^2-x+y-3}{x\,(y+3)\,(y-3)}$$

Por lo que:

$$\frac{x}{y+3}-\frac{x^2-1}{xy+3x}-\frac{1-6x}{y^2-9} = \frac{6x^2-x+y-3}{x\,(y+3)\,(y-3)}$$

d.)
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)\div\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right) &= \left[\frac{1\,(x+y)-1\,(x-y)}{(x-y)\,(x+y)}\right]\div\left[\frac{1\,(x+y)+1\,(x-y)}{(x-y)\,(x+y)}\right]\\
&= \frac{x+y-x+y}{(x-y)\,(x+y)}\div\frac{x+y+x-y}{(x-y)\,(x+y)}\\
&= \frac{2y}{(x-y)\,(x+y)}\div\frac{2x}{(x-y)\,(x+y)}\\
&= \frac{2y\,(x-y)\,(x+y)}{2x\,(x-y)\,(x+y)}\\
&= \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)\div\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)=\frac{y}{x}$$

e.)
$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}}\div\frac{x+y}{xy} &= \frac{\dfrac{x\cdot x^2+y\cdot y^2}{x^2y^2}}{\dfrac{1\cdot y^2-1\,(xy)+1\cdot x^2}{x^2y^2}}\div\frac{x+y}{xy}\\
&= \frac{\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}}{\dfrac{y^2-xy+x^2}{x^2y^2}}\div\frac{x+y}{xy}\\
&= \frac{\left(x^3+y^3\right)x^2y^2}{\left(y^2-xy+x^2\right)x^2y^2}\div\frac{x+y}{xy}\\
&= \frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)x^2y^2}{\left(y^2-xy+x^2\right)x^2y^2}\div\frac{x+y}{xy}\\
&= (x+y)\div\frac{x+y}{xy}\\
&= \frac{(x+y)\,xy}{x+y}\\
&= xy
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}}\div\frac{x+y}{xy}=xy$$

$$
\begin{aligned}
\text{f.)}\ \frac{2x^{-6}}{(x+1)^2x^{-4}-(2x+1)x^{-4}} &= \frac{\dfrac{2}{x^6}}{\dfrac{(x+1)^2}{x^4}-\dfrac{2x+1}{x^4}}\\
&= \frac{\dfrac{2}{x^6}}{\dfrac{(x+1)^2-(2x+1)}{x^4}}\\
&= \frac{2x^4}{x^6\left[(x+1)^2-(2x+1)\right]}\\
&= \frac{2x^4}{x^6\left(x^2+2x+1-2x-1\right)}\\
&= \frac{2x^4}{x^6x^2}\\
&= \frac{2x^4}{x^8}\\
&= \frac{2}{x^4}
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{2x^{-6}}{(x+1)^2x^{-4}-(2x+1)x^{-4}}=\frac{2}{x^4}$$

Ejercicios 25

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y escriba el resultado en su forma más simple:

1.) $\left(x^{-1}-y^{-1}\right)^{-1}\div\left(x^{-1}y^{-1}\right)^{-1}$

2.) $(x+y)^{-2}(x+y)^3\left(x^2y^3\right)^{-2}$

3.) $\left[\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}\right]^{-1}$

4.) $\left(\dfrac{a^{-2}-2b^{-1}}{a^{-4}-4b^{-2}}\right)^{-1}\cdot(b-2a)^{-1}$

5.) $\dfrac{1+\dfrac{3b}{a-2b}}{1+\dfrac{b}{a-2b}}$

6.) $\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{-1}\cdot\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1}$

7.) $\dfrac{x^2}{x-y}\div\dfrac{1}{x^{-1}-y^{-1}}$

8.) $\dfrac{\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\div\left(x^{-2}-y^{-2}\right)^{-1}$

9.) $\left(ax^{-2}+b^{-1}\right)^3\left(b^{-3}x^{-6}\right)^{-1}\left(ab+x^2\right)^{-3}$

10.) $\left(\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}\right)+\dfrac{xy}{x^2-y^2}$

2.7 Racionalización de expresiones algebraicas

2.7.1 Racionalización del denominador de expresiones algebraicas

Dada una expresión algebraica cuyo denominador involucra radicales, se llama racionalización del denominador de dicha expresión al proceso por el cual se determina otra expresión algebraica que no involucra radicales en el denominador y que es equivalente a la expresión algebraica dada.

Nota:

En algunas expresiones algebraicas que involucran radicales se puede racionalizar el numerador o el denominador de dichas expresiones, según sea el caso y el objetivo que se desea alcanzar.

El concepto y los procedimientos que se usan para racionalizar el numerador y el denominador de expresiones algebraicas son análogas, por está razón en este texto, nos dedicaremos a racionalizar únicamente el denominador de expresiones algebraicas.

El estudiante podrá generalizar el concepto y los procedimientos requeridos para racionalizar el numerador de expresiones algebraicas.

Caso I

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando la siguiente propiedad:

Si a $\in I\!R$, $n \in I\!N$, $n \geq 2$ y $\sqrt[n]{a} \in I\!R$ entonces $\sqrt[n]{a^n} = a$

■ **Ejemplo 56**

En cada una de las siguientes expresiones, racionalice el denominador y simplifique el resultado.

a.) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ b.) $\dfrac{15}{\sqrt[5]{3^2}}$ c.) $\dfrac{-3}{2\sqrt[3]{6^4}}$

d.) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$ e.) $\dfrac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}}$ f.) $\dfrac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}}$

Solución

a.) $$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{10^2}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Por lo que:

$$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

b.) $$\frac{15}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{15}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{15\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{15\sqrt[5]{3^3}}{3} = 5\sqrt[5]{3^3}$$

Por lo que:

$$\frac{15}{\sqrt[5]{3^2}} = 5\sqrt[5]{3^3}$$

c.) $$\frac{-3}{2\sqrt[3]{6^4}} = \frac{-3}{2\sqrt[3]{6^3 \cdot 6}} = \frac{-3}{2 \cdot 6\sqrt[3]{6}} = \frac{-3}{12\sqrt[3]{6}} \cdot \frac{\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^2}} = \frac{-3\sqrt[3]{6^2}}{12\sqrt[3]{6^3}} = \frac{-3\sqrt[3]{6^2}}{12 \cdot 6} = \frac{-\sqrt[3]{6^2}}{24}$$

Por lo que:

$$\frac{-3}{2\sqrt[3]{6^4}} = \frac{-\sqrt[3]{6^2}}{24}$$

d.) $$\frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} = \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\left(x^2-4\right)\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{x-2}}{x-2} = (x+2)\sqrt{x-2}$$

Por lo que:

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} = (x+2)\sqrt{x-2}$$

e.) $$\frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}} = \frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[7]{x^4}} = \frac{2x^2\sqrt[7]{x^4}}{5\sqrt[7]{x^7}} = \frac{2x^2\sqrt[7]{x^4}}{5x} = \frac{2x\sqrt[7]{x^4}}{5}$$

Por lo que:

$$\frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}} = \frac{2x\sqrt[7]{x^4}}{5}$$

f.) $$\frac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}} = \frac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{\sqrt[5]{(3x-1)^3}} = \frac{(3x-1)\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2\sqrt[5]{(3x-1)^5}} = \frac{(3x-1)\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2\,(3x-1)} = \frac{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2}$$

Por lo que:

$$\frac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}} = \frac{\sqrt[5]{(3x-1)^3}}{2}$$

Ejercicios 26

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

1.) $\dfrac{-27}{\sqrt{6}}$

2.) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{6-4x}}$

3.) $\dfrac{21}{\sqrt[5]{7^3}}$

4.) $\dfrac{3x-3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$

5.) $\dfrac{-15}{2\sqrt[3]{3^5}}$

6.) $\dfrac{4-x^2}{2\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Caso II

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando la siguiente propiedad:

Si $a \in I\!R$, $b \in I\!R$, entonces se cumple que: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

■ Ejemplo 57

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

a.) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

b.) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

c.) $\dfrac{3}{2+\sqrt{10}}$

d.) $\dfrac{7+4x}{2\sqrt{x-2}+1}$

e.) $\dfrac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}}$

f.) $\dfrac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\
&= \frac{-1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{-1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \frac{-1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3} \\
&= \frac{-1\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{-1} \\
&= \sqrt{2}-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$$

b.)
$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2} \\
&= \sqrt{7}+\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \sqrt{7}+\sqrt{5}$$

c.) $$\begin{aligned} \frac{3}{2+\sqrt{10}} &= \frac{3}{2+\sqrt{10}} \cdot \frac{2-\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}} \\ &= \frac{3\left(2-\sqrt{10}\right)}{\left(2+\sqrt{10}\right)\left(2-\sqrt{10}\right)} \\ &= \frac{3\left(2-\sqrt{10}\right)}{(2)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2} \\ &= \frac{3\left(2-\sqrt{10}\right)}{4-10} \\ &= \frac{3\left(2-\sqrt{10}\right)}{-6} \\ &= \frac{2-\sqrt{10}}{-2} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{3}{2+\sqrt{10}} = \frac{2-\sqrt{10}}{-2}$$

d.) $$\begin{aligned} \frac{7+4x}{2\sqrt{x+2}-1} &= \frac{7+4x}{2\sqrt{x+2}-1} \cdot \frac{2\sqrt{x+2}+1}{2\sqrt{x+2}+1} \\ &= \frac{(7+4x)\left(2\sqrt{x+2}+1\right)}{\left(2\sqrt{x+2}-1\right)\left(2\sqrt{x+2}+1\right)} \\ &= \frac{(7+4x)\left(2\sqrt{x+2}+1\right)}{\left(2\sqrt{x+2}\right)^2-(1)^2} \\ &= \frac{(7+4x)\left(2\sqrt{x+2}+1\right)}{4(x+2)-1} \\ &= \frac{(7+4x)\left(2\sqrt{x+2}+1\right)}{4x+8-1} \\ &= \frac{(7+4x)\left(2\sqrt{x+2}+1\right)}{4x+7} \\ &= 2\sqrt{x+2}+1 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{7+4x}{2\sqrt{x+2}-1} = 2\sqrt{x+2}+1$$

e.)
$$
\begin{aligned}
\frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}} &= \frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}}\cdot\frac{2x-3\sqrt{y}}{2x-3\sqrt{y}}\\
&= \frac{\left(9y-4x^2\right)\left(2x-3\sqrt{y}\right)}{\left(2x+3\sqrt{y}\right)\left(2x-3\sqrt{y}\right)}\\
&= \frac{\left(9y-4x^2\right)\left(2x-3\sqrt{y}\right)}{(2x)^2-\left(3\sqrt{y}\right)^2}\\
&= \frac{\left(9y-4x^2\right)\left(2x-3\sqrt{y}\right)}{4x^2-9y}\\
&= \frac{-\left(4x^2-9y\right)\left(2x-3\sqrt{y}\right)}{4x^2-9y}\\
&= -\left(2x-3\sqrt{y}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}} = -\left(2x-3\sqrt{y}\right)$$

f.)
$$
\begin{aligned}
\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} &= \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\
&= \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}\\
&= \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}\\
&= \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{x-(x+1)}\\
&= \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{x-x-1}\\
&= \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{-1}\\
&= -3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} = -3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$$

Ejercicios 27

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

1.) $\dfrac{4}{\sqrt{13}-\sqrt{7}}$

2.) $\dfrac{1-x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

3.) $\dfrac{-118}{\sqrt{3}+11}$

4.) $\dfrac{11-2x}{3-2\sqrt{x+1}}$

5.) $\dfrac{2}{2\sqrt{5}+3\sqrt{7}}$

6.) $\dfrac{x^2-16y}{x+4\sqrt{y}}$

Caso III

Expresiones algebraicas que se racionalizan aplicando alguna de las siguientes propiedades:

Si $a \in I\!R$, $b \in I\!R$, entonces se cumple que:

i.) $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$

ii.) $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$

Ejemplo 58

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

a.) $\dfrac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}$

b.) $\dfrac{-6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}$

c.) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{7}-3}$

d.) $\dfrac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3}$

e.) $\dfrac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}}$

f.) $\dfrac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}} &= \frac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}\\
&= \frac{14\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{5}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}\\
&= \frac{14\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{10}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{2+5}\\
&= \frac{14\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{10}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{7}\\
&= 2\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{10}+\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{14}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}} = 2\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 - \sqrt[3]{10} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]$$

b.) $$\begin{aligned}
\frac{-6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}} &= \frac{-6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2} \\
&= \frac{-6\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{7}\,\sqrt[3]{5} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{5}\right)^3} \\
&= \frac{-6\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{35} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{7-5} \\
&= \frac{-6\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{35} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]}{2} \\
&= -3\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{35} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{-6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}} = -3\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{35} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right]$$

c.) $$\begin{aligned}
\frac{10}{\sqrt[3]{7}-3} &= \frac{10}{\sqrt[3]{7}-3} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{7}\cdot 3 + 3^2}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + \sqrt[3]{7}\cdot 3 + 3^2} \\
&= \frac{10\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + 3\sqrt[3]{7} + 3^2\right]}{\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 - 3^3} \\
&= \frac{10\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + 3\sqrt[3]{7} + 9\right]}{7-27} \\
&= \frac{10\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + 3\sqrt[3]{7} + 9\right]}{-20} \\
&= \frac{-\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + 3\sqrt[3]{7} + 9\right]}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{10}{\sqrt[3]{7}-3} = \frac{-\left[\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 + 3\sqrt[3]{7} + 9\right]}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\text{d.)}\frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3} &= \frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3}\cdot\frac{\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3+(3)^2}{\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-2\sqrt[3]{x-2}\cdot 3+(3)^2}\\
&= \frac{(8x+11)\left[\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+(3)^2\right]}{\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^3+(3)^3}\\
&= \frac{(8x+11)\left[\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9\right]}{8\,(x-2)+27}\\
&= \frac{(8x+11)\left[\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9\right]}{8x-16+27}\\
&= \frac{(8x+11)\left[\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9\right]}{8x+11}\\
&= \left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{8x+11}{2\sqrt[3]{x-2}+3}=\left(2\sqrt[3]{x-2}\right)^2-6\sqrt[3]{x-2}+9$$

$$
\begin{aligned}
\text{e.) }\frac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}} &= \frac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}}\cdot\frac{(2\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2}{(2\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2}\\
&= \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}\cdot 3\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{(2\sqrt[3]{x})^3-\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^3}\\
&= \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{8x-27\,(x-1)}\\
&= \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{8x-27x+27}\\
&= \frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{-19x+27}
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{x+3}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x-1}}=\frac{(x+3)\left[(2\sqrt[3]{x})^2+6\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-1}+\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)^2\right]}{-19x+27}$$

$$
\begin{aligned}
\text{f.)}\ \frac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}} &= \frac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}} \cdot \frac{(2)^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2}{(2)^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2} \\
&= \frac{\left(25-x^2\right)\left[(2)^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{(2)^3-\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3} \\
&= \frac{\left(25-x^2\right)\left[2^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{8-(x+3)} \\
&= \frac{\left(25-x^2\right)\left[(2)^2+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{8-x-3} \\
&= \frac{\left(25-x^2\right)\left[4+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{5-x} \\
&= \frac{(5-x)(5+x)\left[4+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]}{5-x} \\
&= (5+x)\left[4+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$\frac{25-x^2}{2-\sqrt[3]{x+3}} = (5+x)\left[4+2\sqrt[3]{x+3}+\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2\right]$$

Nota: para racionalizar este tipo de expresiones debe tenerse claro la propiedad que se debe aplicar en cada caso, observese por ejemplo que la propiedad (i) se usó en los ejemplos (b), (c), (e) y (f), y que la propiedad (ii) se usó en los ejemplos (a) y (d).

Ejercicios 28

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

1.) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{11}}$

2.) $\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

3.) $\dfrac{-3}{\sqrt[3]{7}+2}$

4.) $\dfrac{16+250x}{2+5\sqrt[3]{x}}$

5.) $\dfrac{-26}{3-\sqrt[3]{5}}$

6.) $\dfrac{38x-108}{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x+2}}$

A continuación racionalizaremos algunas expresiones en las cuales se combinan los métodos estudiados anteriormente.

Ejemplo 59

En cada una de las siguientes expresiones racionalice el denominador y simplifique el resultado.

a.) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}$

b.) $\dfrac{-2}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}$

c.) $\dfrac{x^4-x^2y^2}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}$

d.) $\dfrac{x+2}{2+\sqrt{\sqrt{x}-1}}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}} &= \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}\\
&= \frac{\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}}\\
&= \frac{\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{1-\sqrt{x}}\\
&= \frac{\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\\
&= \frac{\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}\\
&= \frac{\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x}\\
&= \frac{(x-1)(x+1)\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\left(1+\sqrt{x}\right)}{-(x-1)}\\
&= -(x+1)\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\left(1+\sqrt{x}\right)
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}} = -(x+1)\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\left(1+\sqrt{x}\right)$$

b.)
$$\begin{aligned}
\frac{-2}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}} &= \frac{-2}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}\cdot\frac{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}\\
&= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}{\sqrt{(2-3\sqrt[3]{y})^2}}\\
&= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}{2-3\sqrt[3]{y}}\\
&= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}}{2-3\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{(2)^2+2\cdot 3\sqrt[3]{y}+\left(3\sqrt[3]{y}\right)^2}{(2)^2+2\cdot 3\sqrt[3]{y}+(3\sqrt[3]{y})^2}\\
&= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}\left[4+6\sqrt[3]{y}+(3\sqrt[3]{y})^2\right]}{(2)^3-(3\sqrt[3]{y})^3}\\
&= \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}\left[4+6\sqrt[3]{y}+(3\sqrt[3]{y})^2\right]}{8-27y}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{-2}{\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}} = \frac{-2\sqrt{2-3\sqrt[3]{y}}\left[4+6\sqrt[3]{y}+(3\sqrt[3]{y})^2\right]}{8-27y}$$

$$
\begin{aligned}
\text{c.)}\ \frac{x^4 - x^2y^2}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} &= \frac{x^4 - x^2y^2}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \\
&= \frac{\left(x^4 - x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} \\
&= \frac{\left(x^4 - x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} \\
&= \frac{\left(x^4 - x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}}{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= \frac{\left(x^4 - x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2\right]} \\
&= \frac{\left(x^4 - x^2y^2\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\left(x-y\right)} \\
&= \frac{x^2\left(x+y\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\left(x-y\right)} \\
&= \frac{x^2\left(x-y\right)\left(x+y\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x\left(x-y\right)} \\
&= x\left(x+y\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$
\frac{x^4 - x^2y^2}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = x\left(x+y\right)\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)
$$

$$\text{d.)}\quad \frac{x+2}{2+\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{x+2}{2+\sqrt{\sqrt{x}-1}} \cdot \frac{2-\sqrt{\sqrt{x}-1}}{2-\sqrt{\sqrt{x}-1}}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{(2)^2-\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)^2}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{4-\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{4-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{5-\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)}{5-\sqrt{x}} \cdot \frac{5+\sqrt{x}}{5+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\left(5+\sqrt{x}\right)}{(5)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\left(5+\sqrt{x}\right)}{25-x}$$

Por lo que:

$$\frac{x+2}{2+\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{(x+2)\left(2-\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\left(5+\sqrt{x}\right)}{25-x}$$

Ejercicios 29

En cada una de las siguientes expresiones racionales, racionalice el denominador y simplifique el resultado.

1.) $\dfrac{x^2-4y^2}{\sqrt{x+2\sqrt{y}}}$

2.) $\dfrac{3a+2b}{\sqrt[3]{9a^2}-\sqrt[3]{6ab}+\sqrt[3]{4b^2}}$

4.) $\dfrac{x^3-y}{\sqrt[3]{x-\sqrt[3]{y}}}$

5) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}$

7.) $\dfrac{5a-5b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

8.) $\dfrac{a+b}{2\sqrt[3]{3a+3b}}$

3.) $\dfrac{3y-15}{2-\sqrt[3]{3+y}}$

6.) $\dfrac{4y+32}{\sqrt[3]{y}+2}$

9.) $\dfrac{3x^2-3}{\sqrt[3]{3x^2-5x-2}-\sqrt[3]{1-5x}}$

Capítulo 3

Ecuaciones Algebraicas

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
· · ·
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

3.1 Ecuaciones . . . 3
3.1.1 Ecuaciones lineales con una incógnita . . . 7
3.1.2 Algunas “transformaciones” que se pueden usar para obtener ecuaciones equivalentes entre sí 8
3.2 Ecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un producto de factores lineales y el otro miembro es cero . . . 12
3.3 Ecuación Cuadrática . . . 13
3.4 Ecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor o igual que tres . 21
3.5 Ecuaciones que involucran fracciones racionales . . . 31
3.6 Ecuación Radical . . . 40
3.7 Aplicación de las ecuaciones a la solución de problemas . . . 55
3.7.1 Problemas que implican proporciones . . . 57
3.7.2 Problemas que implican porcentajes . . . 60
3.7.3 Problemas sobre mezclas . . . 64
3.7.4 Problemas que implican la realización de trabajo . . . 66
3.7.5 Problemas que implican movimiento a velocidad uniforme . . . 68
3.7.6 Problemas que involucran conceptos económicos . . . 71
3.7.7 Problemas diversos . . . 74

3.1 Ecuaciones

Recordemos que en una expresión algebraica no constante, a las variables se les puede asignar valores reales para obtener así el valor numérico de la expresión dada:

■ **Ejemplo 1**

1. En la expresión $3x^2bc$ a las variables x, b, c se les puede asignar cualquier valor real, y el resultado siempre es un número real.

2. Si en $\dfrac{x^2+4}{x-2}$ a x le asignamos el valor de 2, es decir $x = 2$ entonces la expresión resultante **no** representa un número real. (Recuerde que si el denominador de una fracción es cero, entonces ésta no representa un número real). Se puede demostrar que si se sustituye x por cualquier valor real diferente de 2, el resultado es un número real.

3. En $\sqrt{x-3}$ se puede demostrar que si x se sustituye por cualquier número real menor que 3 entonces la expresión resultante no representa un número real (a modo de ejemplo probar con $x = 0, x = 1$).
(Recuerde que la raíz cuadrada de un número negativo **no** representa un número real)

Los casos (2) y (3) anteriores son ejemplos que ilustran el hecho que para algunas expresiones algebraicas no constantes, existen números reales, que al ser sustituidos por las variables correspondientes en la expresión dada, hacen que el resultado obtenido **no** represente un número real.

Ejercicios 1

1. Para cada uno de los casos siguientes, escriba los números reales que al ser sustituidos por la variable en la expresión dada, hacen que el resultado obtenido no represente un número real.

   a) $\dfrac{1}{x-2}$ c) $\dfrac{x+2}{x}$ e) $\dfrac{-2}{x(x-4)}$

   b) $\dfrac{2x+3}{-x+5}$ d) $\dfrac{x}{x+3}$ f) $\dfrac{x-2}{(x+3)(x-1)(4-x)}$

2. Para cada uno de los casos siguientes, escriba cinco números reales, que al ser sustituidos por la variable en la expresión dada, hacen que el resultado obtenido no represente un número real.

   a) $\sqrt{x+1}$ c) $\sqrt{-x}$ e) $\sqrt{-x+4}$

   b) $\sqrt[4]{2x-3}$ d) $\sqrt[6]{-x+2}$ f) $\sqrt[8]{x-10}$

■ Definición 1

Dada una expresión algebraica de una sola variable y M un subconjunto del conjunto de los números reales, cuyos elementos son aquellos números que al ser sustituidos en la expresión algebraica dada el resultado, no representa un número real, entonces el conjunto D, definido por:

$$D = \mathbb{R} - M$$

recibe el nombre de **dominio de la variable** para la expresión algebraica dada.

Esto significa que al dominio de la variable en una expresión algebraica, pertenecen únicamente los números reales que al ser sustituidos por la variable hacen que el resultado obtenido represente un número real.

■ Ejemplo 2

Determine el dominio de la variable para cada una de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2x+1}{x-9}$

b) $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$

Solución

a) En $\dfrac{2x+1}{x-9}$ si x se sustituye por 9 se obtiene como resultado una expresión que no representa un número real. Además se puede demostrar que 9 es el único valor de x para el cual $\dfrac{2x+1}{x-9}$ no representa un número real. Así tenemos que el dominio para x en la expresión $\dfrac{2x+1}{x-9}$ es $\mathbb{R}-\{9\}$ es decir:

$$D = \mathbb{R}-\{9\}$$

Lo anterior significa que a x en $\dfrac{2x+1}{x-9}$ se le puede asignar cualquier valor real, diferente de 9.

b) En $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$, si x se sustituye por 1 o por -1, se obtiene como resultado una expresión que no representa un número real.

Además se puede demostrar que 1 y -1 son los únicos valores de x para los cuales $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$ no representa un número real. Así tenemos que para x en la expresión $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$ es $\mathbb{R}-\{1,-1\}$ es decir :

$$D = \mathbb{R}-\{-1,1\}$$

Lo anterior significa que a x en $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$ se le puede asignar cualquier valor real, diferente de 1 y de -1.

Ejercicios 2

Determine el dominio de la variable para cada una de las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{4}{x-5}$
2. $\dfrac{-x+4}{(x+2)(-x-5)}$
3. $\dfrac{x}{x^2-9}$
4. $\dfrac{x}{x(x+3)}$

■ Definición 2

Una igualdad entre dos expresiones algebraicas donde al menos una de las expresiones involucran variables, recibe el nombre de ecuación.

■ Ejemplo 3

a) $2x^2y + 3y = 5$

b) $\sqrt{x^2+1} = x + 2$

c) $\dfrac{m+2}{m-1} = 3$

d) $\dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{5y}{2} + 1$

e) $a^3 - 3x^2b + b^2 = 0$

f) $5 = \dfrac{8x\sqrt{y}}{z}$

Definición 3

En una ecuación las variables reciben el nombre de incógnitas.

Definición 4

En una ecuación de una incógnita cualquier número que esté contenido en el dominio de la incógnita y que al ser sustituido en la ecuación hace que la igualdad sea verdadera, es **una solución de la ecuación**.

Ejemplo 4

1. En $x + 2 = 3$, el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$, además si x se sustituye por 1, se obtiene la igualdad verdadera $1 + 2 = 3$, por lo que 1 es una solución de la ecuación $x + 2 = 3$

2. En $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$, el dominio de x es $\mathbb{R} - \{0\}$, un valor de x que hace que la igualdad $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$ sea verdadera es 2 y como 2 es un elemento de $\mathbb{R} - \{0\}$ entonces 2 es **una** solución de la ecuación dada.

3. En $\dfrac{2}{x+1} = x$, el dominio de x es $\mathbb{R} - \{-1\}$, $\dfrac{2}{1+1} = 1$ es una igualdad verdadera, y como 1 es un elemento de $\mathbb{R} - \{-1\}$ entonces 1 es una solución de la ecuación $\dfrac{2}{x+1} = x$

Definición 5

Dada una ecuación de una incógnita, el subconjunto S del dominio de la incógnita que contiene únicamente las soluciones de la ecuación dada recibe el nombre de **conjunto solución.**

Lo anterior afirma que si S es el conjunto solución de una ecuación, entonces en S están todas las soluciones y todo elemento de S es una solución de la ecuación dada.

Ejemplo 5

1. En $2x + 1 = 7$, el dominio de x es $\mathbb{R}$, un valor de x que hace que la igualdad $2x + 1 = 7$ sea verdadera es 3 y como 3 es un elemento de $\mathbb{R}$ y además se puede demostrar que 3 es la única solución de la ecuación dada, entonces su conjunto solución es $\{3\}$ es decir:

$$S = \{3\}$$

2. En $\dfrac{(x-4)(x+3)}{x-5} = 0$ el dominio de x es $\mathbb{R} - \{5\}$, 4 y -3 son dos soluciones de la ecuación dada. Como 4 y -3 son elementos de $\mathbb{R} - \{5\}$ y además se puede demostrar que 4 y -3 son las únicas soluciones de la ecuación dada, entonces su conjunto solución es $\{4, -3\}$ es decir:

$$S = \{4, -3\}$$

Definición 6

Resolver una ecuación significa determinar su conjunto solución.

3.1.1 Ecuaciones lineales con una incógnita

Definición 7

Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$. Se llama ecuación lineal o de primer grado con una incógnita a toda ecuación que se puede llevar a la forma la forma $ax + b = c$.

Ejemplo 6

1. $-3x + 2 = 0$
2. $\dfrac{2}{5}(x-2) = 0$
3. $x + \sqrt{3}$

Definición 8

Si dos ecuaciones lineales con una incógnita tienen el mismo conjunto solución, decimos que son equivalentes entre sí.

Ejemplo 7

1. El conjunto solución de $2x + 3 = 13$ es $\{5\}$

   El conjunto solución de $4x + 6 = 26$ es $\{5\}$

   Como $2x + 3 = 13$ y $4x + 6 = 26$ tienen el mismo conjunto solución, entonces son equivalentes entre sí.

2. El conjunto solución de $3x + 5 = x - 3$ es $\{-4\}$

   El conjunto solución de $x = -4$ es $\{-4\}$

   Como $3x + 5 = x - 3$ y $x = -4$ tienen el mismo conjunto solución, entonces son equivalentes entre sí.

Para resolver algunas ecuaciones lineales usaremos el concepto de ecuaciones equivalentes. Para esto "transformaremos" la ecuación en otras equivalentes a la original, hasta obtener una ecuación de la forma $x = c$, donde x es una incógnita y c es una constante real.

3.1.2 Algunas "transformaciones" que se pueden usar para obtener ecuaciones equivalentes entre sí

1. **Intercambiar miembros de la ecuación**

   La ecuación $ax + b = c$ es equivalente a la ecuación $c = ax + b$

2. **Sumar el mismo número a ambos miembros de la igualdad**

   La ecuación $ax + b = c$ es equivalente a la ecuación $ax + b + d = c + d$

3. **Multiplicar ambos miembros de la igualdad por un mismo número (diferente de cero)**

   La ecuación $ax + b = c$ es equivalente a la ecuación $d \cdot (ax + b) = d \cdot c\,;\ d \neq 0$

4. **Algunas propiedades de la adición y la multiplicación definidas en $\mathbb{R}$**

   (conmutativa, asociativa, etc.)

Veamos algunos ejemplos que se resuelven usando las propiedades anteriores:

■ **Ejemplo 8**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x + 7 = 11$

   Solución

   $$\begin{aligned} x + 7 + -7 &= 11 + -7 \\ x + 0 &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   Por lo que el conjunto solución de $x + 7 = 11$ es $\{\ 4\}$

2. $5x - 2 = 6$

   Solución

$$\begin{aligned}
5x-2+2 &= 6+2\\
5x+0 &= 8\\
5x &= 8\\
\frac{1}{5}\cdot 5x &= \frac{1}{5}\cdot 8\\
\frac{5}{5}x &= \frac{8}{5}\\
x &= \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $5x-2=6$ es $\left\{\frac{8}{5}\right\}$

3. $-2x+5=7$

   Solución

$$\begin{aligned}
-2x+5-5 &= 7-5\\
-2x+0 &= 2\\
-2x &= 2\\
\frac{-1}{2}\cdot -2x &= \frac{-1}{2}\cdot 2\\
\frac{2}{2}x &= \frac{-2}{2}\\
x &= -1
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $-2x+5=7$ es { -1}

4. $\frac{-x}{4}-\frac{1}{3}=1$

   Solución

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} &= 1+\frac{1}{3}\\
\frac{-x}{4}+0 &= \frac{4}{3}\\
\frac{-x}{4} &= \frac{4}{3}\\
-4\cdot\frac{-x}{4} &= -4\cdot\frac{4}{3}\\
\frac{4}{4}\cdot x &= \frac{-16}{3}\\
x &= \frac{-16}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $\frac{-x}{4}-\frac{1}{3}=1$ es $\left\{\frac{-16}{3}\right\}$

Nota: en el proceso de resolución de ecuaciones no es necesario enumerar todas las transformaciones que se realicen, pues a veces se pueden “dejar de escribir” algunos pasos.

Ejemplo 9

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $-3x+2=-4$

   Solución

   $$\begin{aligned} -3x+2 &= -4 \\ -3x &= -4+(-2) \\ -3x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{-3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Por lo que el conjunto solución es $\{2\}$

2. $3x+4=2x-6$

   Solución

   $$\begin{aligned} 3x+4 &= 2x-6 \\ -2x+(3x+4) &= -6 \\ -2x+3x+4 &= -6 \\ x+4 &= -6 \\ x &= -6+(-4) \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{-10\}$

Ejemplo 10

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2-\{1+2[3-x]\}=0$

   Solución

$$\begin{aligned}
2-\{1+2[3-x]\} &= 0\\
2-\{1+6-2x\} &= 0\\
2-\{7-2x\} &= 0\\
2-7+2x &= 0\\
-5+2x &= 0\\
2x &= 0+5\\
2x &= 5\\
x &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

2. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{5x+1}{6}=\dfrac{1}{6}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}-\frac{5x+1}{6} &= \frac{1}{6}\\
\frac{2-(5x+1)}{6} &= \frac{1}{6}\\
\frac{2-5x-1}{6} &= \frac{1}{6}\\
\frac{1-5x}{6} &= \frac{1}{6}\\
1-5x &= \frac{6}{6}\\
1-5x &= 1\\
-5x &= 1-1\\
-5x &= 0\\
x &= \frac{0}{-5}\\
x &= 0
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0\}$

Ejercicios 3

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x+1=-5$

b) $2-\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=4$

c) $\dfrac{-x}{2}-3=0$

d) $x-\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{x+1}{2}$

e) $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{1}{4}=1$

f) $\left(3-\dfrac{x}{2}\right)-\left(1-\dfrac{x}{3}\right)=7-\left(x-\dfrac{x}{2}\right)$

3.2 Ecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un producto de factores lineales y el otro miembro es cero

Para resolver este tipo de ecuaciones haremos uso de la siguiente propiedad:

Propiedad 1

Sean $a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \in \mathbb{R}, ...,\ a_n \in \mathbb{R}$

Si $a_1 .\ a_2 .\ a_3 ...\ a_n = 0$ entonces $a_1 = 0$ ó $a_2 = 0$ ó $a_3 = 0$, ..., ó $a_n = 0$

Estudiemos algunos ejemplos en los cuales se ilustran el uso de esta propiedad.

Ejemplo 11

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $(x+7)(x+5) = 0$

   Solución

   $(x+7)(x+5) = 0$

   Entonces

   $$\begin{array}{rclcrcl} (x+7) & = & 0 & \text{ó} & (x+5) & = & 0 \\ x & = & -7 & \text{ó} & x & = & -5 \end{array}$$

   Por lo que el conjunto solución es $\{-7, -5\}$

2. $-4x(3x+2)(-x+6) = 0$

   Solución

   $-4x(3x+2)(-x+6) = 0$

   $$\begin{array}{rclcrclcrcl} -4x & = & 0 & \text{ó} & (3x+2) & = & 0 & \text{ó} & (-x+6) & = & 0 \\ x & = & \dfrac{0}{-4} & \text{ó} & 3x & = & -2 & \text{ó} & -x & = & -6 \\ x & = & 0 & \text{ó} & x & = & \dfrac{-2}{3} & \text{ó} & x & = & 6 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{0, \dfrac{-2}{3}, 6\right\}$

Ejercicios 4

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $(x-2)\left(3x+\dfrac{3}{2}\right)=0$

2. $3x(x-8)(3x-1)=0$

3. $(5x+1)(2x)(x-6)(-4x+3)=0$

A continuación nuestro objetivo es resolver ecuaciones, en las cuales uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor que uno. En el proceso de resolución de este tipo de ecuaciones haremos uso de los métodos de factorización estudiados anteriormente, con el fin de obtener una ecuación equivalente a la original, la cual se puede resolver por medio de la propiedad anterior. Por esto veamos diferentes tipos de ecuaciones que se pueden presentar.

3.3 Ecuación Cuadrática

■ **Definición 9**

Sean a, b, c y d constantes reales con $a \neq 0$. Se llama ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado con una incógnita a toda ecuación que se puede llevar a la forma:

$$ax^2 + bx + c = d$$

■ **Ejemplo 12**

1. $3x^2 - x + 1 = 0$

2. $4x^2 - 1 = 3$

3. $6x^2 + 4x = -1$

4. $x^2 + x + 1 = 9$

Veamos algunos ejemplos resueltos, donde se ilustran algunas técnicas que pueden usar para resolver ecuaciones cuadráticas y algunas ecuaciones que "se pueden transformar" a la forma cuadrática.

■ **Ejemplo 13**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 3x = 0$

2. $x^2 - 1 = 0$

3. $x^2 - 6x + 9 = 0$

4. $x^2 - 9 = -1$

5. $x^2 + 2x - 3 = 5x - 3$

6. $4x^2 + 2x = -2x - 1$

Solución

1. $x^2 + 3x = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x &=& 0 & \text{ó} & x+3 &=& 0 \\ x &=& 0 & \text{ó} & x &=& -3 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0, -3\}$

2. $x^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x-1 &=& 0 & \text{ó} & x+1 &=& 0 \\ x &=& 1 & \text{ó} & x &=& -1 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{1, -1\}$

3. $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ (x-3)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x - 3 &=& 0 & \text{ó} & x - 3 &=& 0 \\ x &=& 3 & \text{ó} & x &=& 3 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{3\}$

4. $x^2 - 9 = -1$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= -1 \\ x^2 - 9 + 1 &= 0 \\ x^2 - 8 &= 0 \\ x^2 - (\sqrt{8})^2 &= 0 \\ \left(x - \sqrt{8}\right)\left(x + \sqrt{8}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x - \sqrt{8} &=& 0 & \text{ó} & x + \sqrt{8} &=& 0 \\ x &=& \sqrt{8} & \text{ó} & x &=& -\sqrt{8} \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{\sqrt{8}, -\sqrt{8}\right\}$

5. $x^2 + 2x - 3 = 5x - 3$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 5x - 3 \\ x^2 + 2x - 3 - 5x + 3 &= 0 \\ x^2 - 3 &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \quad \text{ó} \quad x-3 = 0 \\ x & = & 0 \quad \text{ó} \quad x = 3 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0, 3\}$

6. $4x^2 + 2x = -2x - 1$

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 + 2x & = & -2x - 1 \\ 4x^2 + 2x + 2x + 1 & = & 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 & = & 0 \\ (2x+1)^2 & = & 0 \\ (2x+1)(2x+1) & = & 0 \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x+1 & = & 0 & \text{ó} & 2x+1 & = & 0 \\ 2x & = & -1 & \text{ó} & 2x & = & -1 \\ x & = & \dfrac{-1}{2} & \text{ó} & x & = & \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

Ejercicios 5

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 3 = 0$

b) $3x^2 + 27x = 0$

c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

d) $x^2 + 10x = 2x^2 - 5x$

e) $x^2 + 6x - 3 = -x^2 + 10x - 5$

f) $x^2 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{3}x$

Observe que dentro del proceso de resolución de las ecuaciones anteriores hemos usado, según el caso, de los métodos de factorización: factor común y fórmula notable, esto por las características particulares que presentaban las expresiones algebraicas involucradas en cada una de las ecuaciones.

A continuación estudiaremos un procedimiento, que nos permite, en general resolver cualquier ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$.

■ **Teorema 1**

Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$, tal que $ax^2 + bx + c = 0$ y $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales, es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\emptyset$

2. Si $\Delta = 0$ entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución, la cual viene dada por $\dfrac{-b}{2a}$, es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

3. Si $\Delta > 0$ entonces $ax^2+bx+c = 0$ tiene dos soluciones, las cuales vienen dadas por $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Demostración:

1. Si $\Delta < 0$ entonces $ax^2 + bx + c = 0$ **no** es factorizable en $\mathbb{R}$, es decir $ax^2 + bx + c \neq 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$

   Por lo que $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, o equivalente su conjunto solución es $\emptyset$.

2. Si $\Delta = 0$ entonces $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

   Así que:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0\\
a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= 0\\
a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) &= 0
\end{aligned}$$

   Luego como $a \neq 0$, debe darse que:

$$\begin{array}{rrclcrcl}
 & x + \dfrac{b}{2a} & = & 0 & \text{ó} & x + \dfrac{b}{2a} & = & 0\\
\Longrightarrow & x & = & \dfrac{-b}{2a} & \text{ó} & x & = & \dfrac{-b}{2a}
\end{array}$$

   Por lo que :

   Si $\Delta = 0$ entonces el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

3. Si $\Delta > 0$ entonces $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ con $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Así tenemos que:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
a(x-\alpha)(x-\beta) &= 0
\end{aligned}
$$

Luego como $a \neq 0$, debe darse que:

$$
\begin{array}{rrclcrcl}
 & x-\alpha & = & 0 & \text{ó} & x-\beta & = & 0 \\
\Longrightarrow & x & = & \alpha & \text{ó} & x & = & \beta
\end{array}
$$

y como $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

entonces $x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ó $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Por lo que:

Si $\Delta > 0$ entonces el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

Ejemplo 14

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $2x^2 + 5x - 12 = 0$
2. $-x^2 - x + 1 = 0$
3. $2x^2 - 3x + 2 = 0$
4. $x^2 - 1 = x - 2$
5. $3x^2 + 3x + 3 = x + 4$
6. $-2x^2 + 5x - 4 = -x^2 - x + 5$

Solución

1. $2x^2 + 5x - 12 = 0$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 5^2 - 4(2)(-12) \\
\Delta &= 25 - (8)(-12) \\
\Delta &= 25 + 96 \\
\Delta &= 121
\end{aligned}
$$

Como $\Delta > 0$ entonces la ecuación correspondiente tiene dos soluciones

$$\begin{array}{rclcrcl}
\alpha & = & \dfrac{-5-\sqrt{121}}{2(2)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-5+\sqrt{121}}{2(2)} \\
\alpha & = & \dfrac{-5-11}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-5+11}{4} \\
\alpha & = & \dfrac{-16}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6}{4} \\
\alpha & = & -4 & \text{y} & \beta & = & \dfrac{3}{2}
\end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{-4, \dfrac{3}{2}\right\}$

2. $-x^2 - x + 1 = 0$

$$\begin{array}{rcl}
\Delta & = & (-1)^2 - 4(-1)(1) \\
\Delta & = & 1 - (-4) \\
\Delta & = & 1 + 4 \\
\Delta & = & 5
\end{array}$$

Como $\Delta > 0$ entonces la ecuación correspondiente tiene dos soluciones

$$\begin{array}{rclcrcl}
\alpha & = & \dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2(-1)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-(-1)+\sqrt{5}}{2(-1)} \\
\alpha & = & \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2} \\
\alpha & = & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}
\end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

3. $2x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\begin{array}{rcl}
\Delta & = & (-3)^2 - 4(2)(2) \\
\Delta & = & 9 - 16 \\
\Delta & = & -7
\end{array}$$

Como $\Delta < 0$, entonces la ecuación correspondiente no tiene solución en $\mathbb{R}$, por lo que el conjunto solución es $\varnothing$

4. $x^2 - 1 = x - 2$

$$\begin{aligned} x^2-1 &= x-2 \\ x^2-1-x+2 &= 0 \\ x^2-x+1 &= 0 \\ \Delta &= (-1)^2-4(1)(1) \\ \Delta &= 1-4 \\ \Delta &= -3 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$ la ecuación correspondiente no tiene solución en $\mathbb{R}$, por lo que el conjunto solución es $\varnothing$

5. $3x^2+3x+3=x+4$

$$\begin{aligned} 3x^2+3x+3 &= x+4 \\ 3x^2+3x+3-x-4 &= 0 \\ 3x^2+2x-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2)^2-4(3)(-1) \\ \Delta &= 4+12 \\ \Delta &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-2-\sqrt{16}}{2(3)} & \text{y} \quad \beta &= \frac{-2+\sqrt{16}}{2(3)} \\ \alpha &= \frac{-2-4}{6} & \text{y} \quad \beta &= \frac{-2+4}{6} \\ \alpha &= \frac{-6}{6} & \text{y} \quad \beta &= \frac{2}{6} \\ \alpha &= -1 & \text{y} \quad \beta &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{-1, \dfrac{1}{3}\right\}$

6. $-2x^2+5x-4=-x^2-x+5$

$$\begin{aligned} -2x^2+5x-4 &= -x^2-x+5 \\ -2x^2+5x-4+x^2+x-5 &= 0 \\ -x^2+6x-9 &= 0 \\ \Delta &= (6)^2-4(-1)(-9) \\ \Delta &= 36-36 \\ \Delta &= 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta = 0$, entonces la ecuación correspondiente tiene una única solución real

$$\alpha = \frac{-6}{2(-1)}$$
$$\alpha = \frac{-6}{-2}$$
$$\alpha = 3$$

Por lo que el conjunto solución es $\{3\}$

Ejercicios 6

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $-5x^2 + x - 1 = 0$

b) $x^2 - 12x + 35 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $3x^2 + 4x = 0$

e) $5x^2 - 3 = 0$

f) $4x^2 - 7x - 2 = 0$

g) $x^2 - 2x + 1 = -x^2 - 2x + 5$

h) $x^2 - 2x = x + 3$

i) $x^2 = -x^2 + 2x - 5$

3.4 Ecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor o igual que tres

En la resolución de este tipo de ecuaciones haremos uso de los conceptos de factorización ya estudiados, addemás de los procedimientos usados para resolver ecuaciones cuadráticas, así como de la propiedad 1.

■ **Ejemplo 15**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^3 - 5x = 0$

2. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

3. $x^3 - 2x^2 + x = 0$

Solución

1. $x^3 - 5x = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 5x &= 0 \\ x(x^2 - 5) &= 0 \\ x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} x &=& 0 & \text{ó} & x - \sqrt{5} &=& 0 & \text{ó} & x + \sqrt{5} &=& 0 \\ x &=& 0 & \text{ó} & x &=& \sqrt{5} & \text{ó} & x &=& -\sqrt{5} \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

2. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 9x - 18 &= 0 \\ (x^3 + 2x^2) + (-9x - 18) &= 0 \\ x^2(x + 2) - 9(x + 2) &= 0 \\ (x^2 - 9)(x + 2) &= 0 \\ (x - 3)(x + 3)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} x - 3 &=& 0 & \text{ó} & x + 3 &=& 0 & \text{ó} & x + 2 &=& 0 \\ x &=& 3 & \text{ó} & x &=& -3 & \text{ó} & x &=& -2 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{3, -3, -2\}$

3. $x^3 - 2x^2 + x = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x &= 0 \\ x(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ x(x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x & = & 0 & \text{ó} & x-1 & = & 0 \\ x & = & 0 & \text{ó} & x & = & 1 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0, 1\}$

Ejercicios 7

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^4 + 5x^2 = 0$

2. $8x^3 - 8x^2 + 2x = 0$

3. $x^4 - 3x^2 = x - 3$

Nuestro objetivo en los ejemplos siguientes es mostrar el uso de la división sintética, como un procedimiento que se puede utilizar para resolver ecuaciones (con soluciones racionales, en las cuales uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor que dos con coeficientes enteros).

■ **Ejemplo 16**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

   Haciendo $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

   a) $D_{-2} = \{-1, 1, 2, -2\}$ (divisores enteros de -2)

   b) $D_2 = \{1, 2\}$ (divisores naturales de 2)

   c) $D = \{-1, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -2\}$ (cada elemento de D es un posible cero racional de $P(x)$)

   d) Calculemos $P(-1)$

   $$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -3 & -2 & -1 \\ & -2 & -1 & 4 & \\ \hline 2 & 1 & -4 & 2 & \end{array}$$

   Como $P(-1) = 2$ entonces -1 no es cero de $P(x)$

e) Calculemos $P(1)$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -3 & -2 & 1 \\ & 2 & 5 & 2 & \\ \hline \underbrace{2 \quad 5 \quad 2}_{2x^2+5x+2} & & & 0 & \end{array}$$

Como $P(1) = 0$, entonces se tiene que: $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(2x^2 + 5x + 2)$

Por lo que :

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ (x - 1)(2x^2 + 5x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$x - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0 \text{ (es decir } x = 1 \text{ es una solución de } P(x) = 0) \quad (*)$$

f) Resolvamos $2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4(2)(2) \\ \Delta &= 25 - 16 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllllll} \alpha & = & \dfrac{-5-\sqrt{9}}{2(2)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-5+\sqrt{9}}{2(2)} \\ \alpha & = & \dfrac{-5-3}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-5+3}{4} \\ \alpha & = & \dfrac{-8}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-2}{4} \\ \alpha & = & -2 & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-1}{2} \quad (**) \end{array}$$

$\therefore$ El conjunto solución de $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ es $\left\{1, -2, \dfrac{-1}{2}\right\}$ por (*) y (**)

2. $x^3 + 7x^2 + 13x + 6 = 0$

Haciendo $P(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 6$

a) $D_6 = \{-1, 1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$ (divisores enteros de 6)

b) $D_1 = \{1\}$ (divisores naturales de 1)

c) $D = \{-1, 1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$ (posibles ceros racionales de $P(x)$)

d) Verifique que: $P(-1) = -1$, $P(1) = 27$, $P(2) = 68$, es decir -1, 1, 2 no son ceros de $P(x)$

e) Calculemos $P(-2)$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 7 & 13 & 6 & -2 \\ & -2 & -10 & -6 & \\ \hline \underbrace{1 \quad 5 \quad 3}_{x^2+5x+3} & & & 0 & \end{array}$$

Como $P(-2) = 0$, entonces se tiene que: $x^3 + 7x^2 + 13x + 6 = (x+2)(x^2+5x+3)$

Por lo que :

$$\begin{aligned} x^3 + 7x^2 + 13x + 6 &= 0 \\ (x+2)(x^2+5x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{array}{rclcrcl} x+2 &=& 0 & \text{ó} & x^2+5x+3 &=& 0 \\ x &=& -2 & \text{ó} & x^2+5x+3 &=& 0 \end{array}$$

(es decir $x = -2$ es una solución de $P(x) = 0$) (*)

f) Resolvamos $x^2 + 5x + 3 = 0$

$$\begin{array}{rcl} \Delta &=& 5^2 - 4(1)(3) \\ \Delta &=& 25 - 12 = 13 \\ \alpha &=& \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2(1)} \quad \text{y} \quad \beta = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2(1)} \\ \alpha &=& \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} \qquad (**) \end{array}$$

$\therefore$ El conjunto solución de $x^3 + 7x^2 + 13x + 6 = 0$ es $\left\{-2, \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$ por (*) y (**)

En los casos resueltos anteriormente se puede notar que en la resolución de las ecuaciones se manifiesta el siguiente resultado.

Resultado 1

Sea $P(x)$ un polinomio y α un cero de $P(x)$, es decir $P(\alpha) = 0$, entonces α es una solución de la ecuación $P(x) = 0$ Veamos como se usa este resultado en la solución de ecuaciones:

■ Ejemplo 17

Resolver:

1. $-6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

   Haciendo $P(x) = -6x^3 + 7x^2 - 1$

a) $D_{-1} = \{-1, 1\}$ (divisores enteros de -1)

b) $D_{-6} = \{1, 2, 3, 6\}$ (divisores naturales de -6)

c) $D = \left\{-1, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$ (posibles ceros racionales de $P(x)$ y por el resultado anterior posibles soluciones de $P(x) = 0$)

d) Verifique que: $P(-1) = 12,\ P(-1) \neq 0,$ por lo que -1 no es solución de la ecuación $P(x) = 0$

e) Calculemos $P(1)$

$$\begin{array}{cccc|c} -6 & 7 & 0 & -1 & 1 \\ & -6 & 1 & 1 & \\ \hline \underbrace{-6 \quad 1 \quad 1}_{-6x^2+x+1} & & & 0 & \end{array}$$

Como $P(1) = 0$, entonces 1 es una solución de $P(x) = 0$ y $-6x^3+7x^2-1 = (x-1)(-6x^2+x+1)$ (*)

f) Resolvamos $-6x^2 + x + 1 = 0$

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1^2 - 4(-6)(1) \\
\Delta &= 1 + 24 = 25 \\
\alpha &= \frac{-1-\sqrt{25}}{2(-6)} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-1+\sqrt{25}}{2(-6)} \\
\alpha &= \frac{-1-5}{-12} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-1+5}{-12} \\
\alpha &= \frac{-6}{-12} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{4}{-12} \\
\alpha &= \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-1}{3} \quad (**)
\end{aligned}$$

El conjunto solución de $-6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$ es $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{32}\right\}$ por (*) y (**)

2. $3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x - 4 = 0$

Haciendo $P(x) = 3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x - 4$

a) $D_{-4} = \{-1, 1, 2, -2, 4, -4\}$ (divisores enteros de -4)

b) $D_3 = \{3, 1\}$ (divisores naturales de 3)

c) $D = \left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, 1, -1, 2, -2, 4, -4\right\}$ (Posibles soluciones de $P(x) = 0$)

d) Calculemos $P\left(\dfrac{-1}{3}\right)$

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & -8 & 9 & -8 & -4 & \dfrac{-1}{3} \\ & -1 & 3 & -4 & 4 & \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\underbrace{3 \quad -9 \quad 12 \quad -12}_{3x^3-9x^2+12x-12}} & 0 & \end{array}$$

Como $P\left(\dfrac{-1}{3}\right) = 0$, entonces $\dfrac{-1}{3}$ es una solución de $P(x) = 0$, además se cumple que

$3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x - 4 = \left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(3x^3 - 9x^2 + 12x - 12\right)$

e) Resolvamos $3x^3 - 9x^2 + 12x - 12 = 0$

Haciendo $Q(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12x - 12$

Recuerde que los posibles ceros racionales de $Q(x)$, es decir las posibilidades soluciones racionales de $Q(x) = 0$ son elementos de D (ver apartado c)

i) Verifique que $D = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{-4}{3}, 1 \text{ y } -1\right\}$ no contiene ceros racionales de $Q(x)$

ii) Calculemos $Q(2)$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -9 & 12 & -12 & 2 \\ & 6 & -6 & 12 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underbrace{3 \quad -3 \quad 6}_{3x^2-3x+6}} & 0 & \end{array}$$

$3x^3 - 9x^2 + 12x - 12 = (x-2)(3x^2 - 3x + 6)$

Como $Q(2) = 0$, entonces 2 es una solución de $Q(x) = 0$ y por lo tanto también es solución de $P(x) = 0$

iii) Resolvamos $3x^2 - 3x + 6 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4(3)(6) \\ \Delta &= 9 - 72 \\ \Delta &= -63 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$ entonces $3x^2 - 3x + 6 = 0$ no tiene soluciones reales, por lo tanto el conjunto solución de $3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x - 4 = 0$ es $\left\{\dfrac{-1}{3}, 2\right\}$

Ejemplo 18

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^3 + 16x^2 - 7x + 10 = -x^3 + (4x+1)^2$

   Solución

   NOTA: En la resolución de este ejemplo omitiremos el cálculo de las divisiones, así como de los posibles ceros de los polinomios correspondientes.

$$
\begin{array}{rrcl}
 & x^3 + 16x^2 - 7x + 10 & = & -x^3 + (4x+1)^2 \\
\Longrightarrow & x^3 + 16x^2 - 7x + 10 & = & -x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \\
\Longrightarrow & 2x^3 - 15x + 9 & = & 0
\end{array}
$$

   Haciendo $P(x) = 2x^3 - 15x + 9$

   a) Calculemos $P(-3)$

$$
\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & -15 & 9 & -3 \\
 & -6 & 18 & -9 & \\
\hline
\underbrace{2 \quad -6 \quad 3}_{2x^2-6x+3} & & & 0 &
\end{array}
$$

   $2x^3 - 15x + 9 = (x+3)(2x^2 - 6x + 3)$

   Como $P(-3) = 0,$ entonces -3 es una solución de $P(x) = 0$ (*)

   b) Resolvamos ahora $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta & = & (-6)^2 - 4(2)(3) \\
\Delta & = & 36 - 24 = 12
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\alpha & = & \dfrac{-(-6) - \sqrt{12}}{2(2)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-(-6) + \sqrt{12}}{2(2)} \\
\alpha & = & \dfrac{6 - \sqrt{12}}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6 + \sqrt{12}}{4} \\
\alpha & = & \dfrac{6 - \sqrt{4 \cdot 3}}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6 + \sqrt{4 \cdot 3}}{4} \\
\alpha & = & \dfrac{6 - 2\sqrt{3}}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{4} \\
\alpha & = & \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad (**)
\end{array}
$$

   Por (*) y (**) el conjunto solución de $2x^3 - 15x^2 + 9 = 0$ y por lo tanto también el de

   $x^3 + 16x^2 - 7x + 10 = -x^3 + (4x+1)^2$ es $\left\{-3, \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right\}$

2. $x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 20x = 0$

Solución

$$\begin{aligned} x^4+5x^3-4x^2-20x &= 0 \\ x(x^3+5x^2-4x-20) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$x=0$ ó $x^3+5x^2-4x-20=0$

Por lo que 0 es una solución de $x^4+5x^3-4x^2-20x=0$

a) Resolvamos $x^3+5x^2-4x-20=0$

Sea $P(x)=x^3+5x^2-4x-20$

i) Calculemos $P(-5)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & -20 & -5 \\ & -5 & 0 & 20 & \\ \hline \underbrace{1 \quad 0 \quad -4}_{x^2-4} & & & 0 & \end{array}$$

$x^3+5x^2-4x-20=(x+5)(x^2-4)$

Como $P(-5)=0$ entonces -5 es una solución de $P(x)=0$ y por lo tanto una solución de $x^4+5x^3-4x^2-20x=0$ (**)

ii) Resolvamos $x^2-4=0$

$$\begin{aligned} x^2-4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x-2 &=& 0 & \text{ó} & x+2 &=& 0 \\ x &=& 2 & \text{ó} & x &=& -2 \qquad (***) \end{array}$$

Por (*), (**) y (***) el conjunto solución de $x^4+5x^3-4x^2-10x=0$ es $\{0,-5,2,-2\}$

Ejercicios 8

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3+12x^2+36x=0$

b) $-5x^3+2x+3=0$

c) $-x^4+7x^2+6x=0$

d) $3x^3-x^2+15x-5=0$

e) $x^4+x^3=x^3-5x+6$

f) $2x^5-8x^4-3x+12=0$

g) $x^5-2x^4-10x^3+20x^2+9x-18=0$

h) $x^4-15x^2-10x+24=0$

i) $x^4+22x^2-75=0$

Recordemos que en la definición 5, se definió el conjunto solución de una ecuación, como aquel conjunto que está contenido en el dominio de la incógnita y que consta de los números reales que al ser sustituidos en la ecuación, da como resultado una identidad numérica.

En los ejemplos anteriores no determinamos explícitamente el dominio de la incógnita, debido a que en estos casos el dominio de la incógnita era el conjunto de los números reales. En esta sección nos interesa estudiar ecuaciones de las cuales el dominio de la incógnita puede ser un subconjunto propio de $\mathbb{R}$.

Pero, antes de empezar el estudio de este tipo de ecuaciones, es necesario tener presente las dos reglas siguientes.

Regla 1

Si en el proceso de la resolución de una ecuación se obtiene una igualdad verdadera, entonces el conjunto solución de la ecuación original es el dominio de la incógnita.

Regla 2

Si en el proceso de la resolución de una ecuación se obtiene una igualdad falsa, entonces el conjunto solución de la ecuación original es el conjunto vacío.

Ejemplo 19

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x - 2 - \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1} = 0$

   Solución

   El dominio de la incógnita es $\mathbb{R} - \{1\}$

   $$\begin{aligned} x - 2 - \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} &= 0 \\ x - 2 - (x-2) &= 0 \\ x - 2 - x + 2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

   Como el resultado es una igualdad verdadera y $x \neq 1$, entonces el conjunto solución es el dominio de la incógnita es decir $\mathbb{R} - \{1\}$ (ver Regla 1)

2. $x + 1 = x$

   Solución

   El dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x+1 &= x \\ x+1-x &= 0 \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

Como el resultado es una igualdad falsa entonces el conjunto solución es $\varnothing$ (ver Regla 2)

3. $3(x-2)+4(5-x) = -x+14$

   Solución

   El dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3(x-2)+4(5-x) &= -x+14 \\ 3x-6+20-4x &= -x+14 \\ -x+14 &= -x+14 \\ -x+14+x-14 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Como el resultado es una igualdad verdadera, entonces el conjunto solución es el dominio de la incógnita, es decir $\mathbb{R}$ (ver Regla 1)

3.5 Ecuaciones que involucran fracciones racionales

Recordemos que una fracción racional es una expresión de la forma $\dfrac{A(x)}{B(x)}$, con $A(x)$ y $B(x)$ polinomios y $B(x) \neq 0$.

Para resolver ecuaciones que involucran fracciones racionales haremos uso de los procedimientos utilizados en el Capítulo III y subsiguientes, así como de las siguientes propiedades:

Propiedad 2

Sea $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$. Entonces se cumple:

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{b} \implies a = c$

2. $\dfrac{a}{b} = 0 \implies a = 0$

■ **Ejemplo 20**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{3}{2x+6} = \dfrac{1}{x+3}$

Solución

En este caso debe cumplirse:

$2x+6 \neq 0$ y $x+3 \neq 0$ es decir $x \neq -3$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R} - \{-3\}$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x+6} &= \frac{1}{x+3} \\
\frac{3}{2(x+3)} &= \frac{1}{x+3} \\
\frac{3}{2(x+3)} &= \frac{1}{x+3} \cdot \frac{2}{2} \\
\frac{3}{2(x+3)} &= \frac{2}{2(x+3)} && \text{Aplicando la propiedad 2, apartado 1.} \\
3 &= 2
\end{aligned}$$

Como obtuvimos una igualdad falsa, entonces la ecuación original no tiene solución, es decir su conjunto solución es $\varnothing$ (ver Regla 2)

2. $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x-1} = \dfrac{4x-1}{2x(2x-1)}$

Solución

En este caso debe cumplirse que:

$2x \neq 0$ y $2x-1 \neq 0$ es decir $x \neq 0$ y $x \neq \dfrac{1}{2}$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x-1} &= \frac{4x-1}{2x(2x-1)}\\[2ex]
\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x-1}{2x-1}+\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{2x}{2x} &= \frac{4x-1}{2x(2x-1)}\\[2ex]
\frac{2x-1+2x}{2x(2x-1)} &= \frac{4x-1}{2x(2x-1)} \qquad \text{Aplicando la propiedad 2, apartado 1.}\\[2ex]
2x-1+2x &= 4x-1\\[1ex]
4x-1 &= 4x-1\\[1ex]
4x-1-4x+1 &= 0\\[1ex]
0 &= 0
\end{aligned}$$

Como el resultado es una igualdad verdadera y el dominio de la incógnita incógnita es $\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}$ tenemos que el conjunto solución de la ecuación es $\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}$ (ver Regla 1).

3. $\dfrac{2x^2-7x+16}{(x-2)(x+3)}-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x}{x+3}=0$

Solución

En este caso debe cumplirse que:

$x-2\neq 0$ y $x+3\neq 0$, es decir que $x\neq 2$ y $x\neq -3$. Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{2,-3\}$ (*)

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-7x+16}{(x-2)(x+3)}-\frac{2}{x-2}-\frac{x}{x+3} &= 0\\
\frac{2x^2-7x+16}{(x-2)(x+3)}-\frac{2}{x-2}\cdot\frac{x+3}{x+3}-\frac{x}{x+3}\cdot\frac{x-2}{x-2} &= 0\\
\frac{2x^2-7x+16}{(x-2)(x+3)}-\frac{2(x+3)}{(x-2)(x+3)}-\frac{x(x-2)}{(x+3)(x-2)} &= 0\\
\frac{2x^2-7x+16-2(x+3)-x(x-2)}{(x-2)(x+3)} &= 0 \qquad \text{Aplicando la propiedad 2, apartado 1.}\\
2x^2-7x+16-2(x+3)-x(x-2) &= 0\\
2x^2-7x+16-2x-6-x^2+2x &= 0\\
x^2-7x+10 &= 0\\
\Delta &= (-7)^2-4(1)(10)\\
\Delta &= 49-40\\
\Delta &= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2(1)} & \text{y} \quad \beta &= \frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2(1)}\\
\alpha &= \frac{7-3}{2} & \text{y} \quad \beta &= \frac{7+3}{2}\\
\alpha &= \frac{4}{2} & \text{y} \quad \beta &= \frac{10}{2}\\
\alpha &= 2 & \text{y} \quad \beta &= 5
\end{aligned}$$

Pero, como 2 no es un elemento del dominio de la incógnita (ver(*)), 2 no puede ser solución de ecuación original, por lo tanto el conjunto solución es $\{5\}$.

4. $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x+3}{x^2-1}=\dfrac{6}{x-1}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{x+3}{x^2-1} &= \frac{6}{x-1}\\
\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{6}{x-1}
\end{aligned}$$

En este caso tiene que cumplirse que:

$x+1\neq 0$ y $x-1\neq 0$, es decir que $x\neq -1$ y $x\neq 1$.

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{3}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1}+\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{6}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1}\\
\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+1)} \quad \text{Aplicando la propiedad 2, apartado 1.}\\
\frac{2(x-1)+3(x+1)+x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+1)}\\
2x-2+3x+3+x+3 &= 6x+6\\
6x+4 &= 6x+6\\
6x+4-6x-6 &= 0\\
-2 &= 0
\end{aligned}$$

Como obtuvimos una igualdad falsa, entonces la ecuación original no tiene solución, es decir el conjunto solución es $\varnothing$.

Ejemplo 21

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+x-2}+\dfrac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}-\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}=0$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x-2}+\frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}-\frac{x+5}{x^2+2x-3} &= 0\\
\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x+2)(x-1)}+\frac{x+1}{(x-1)(x+3)(x+2)}-\frac{x+5}{(x+3)(x-1)} &= 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

(*) Los denominadores de las fracciones racionales correspondientes han sido factorizados usando los métodos de factorización por fórmula general y por división sintética.

En este caso debe cumplirse que:

$x+2 \neq 0, x+3 \neq 0$ y $x-1 \neq 0$, es decir que $x \neq -2, x \neq -3$ y $x \neq 1$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R} - \{1, -2, -3\}$.

$$\frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{x+3}{x+3} + \frac{x+1}{(x-1)(x+3)(x+2)} - \frac{x+5}{(x+3)(x-1)} \cdot \frac{x+2}{x+2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x+3)} + \frac{(x+3)}{(x+2)(x+3)(x-1)} + \frac{x+1}{(x+2)(x+3)(x-1)} - \frac{(x+5)(x+2)}{(x+3)(x-1)(x+5)} &= 0 \\
\frac{(x+2)(x+3)+(x+3)+(x+1)-(x+5)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)} &= 0 \\
x^2+3x+2x+6+x+3+x+1-(x^2+2x+5x+10) &= 0 \\
x^2+3x+2x+6+x+3+x+1-x^2-2x-5x-10 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Como obtuvimos una igualdad verdadera, entonces la ecuación original tiene como conjunto solución el dominio de la incógnita, es decir $\mathbb{R} - \{1, -2, -3\}$.

2. $\dfrac{2}{x^2-x-6} + \dfrac{3}{x^2+x-2} = \dfrac{-x^2+7x-8}{x^3-2x^2-5x+6}$

Solución

$$\frac{2}{(x-3)(x+2)} + \frac{3}{(x+2)(x-1)} = \frac{-x^2+7x-8}{(x-1)(x-3)(x+2)}$$

En este caso debe cumplirse que:

$x-3 \neq 0,\ x+2 \neq 0,$ y $x-1 \neq 0$ es decir $x \neq 3,\ x \neq -2$ y $x \neq 1$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R} - \{3, -2, 1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(x-3)(x+2)}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{3}{(x+2)(x-1)}\cdot\frac{x-3}{x-3} &= \frac{-x^2+7x-8}{(x-1)(x-3)(x+2)}\\
\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-3)}+\frac{3(x-3)}{(x-1)(x+2)(x-3)} &= \frac{-x^2+7x-8}{(x-1)(x-3)(x+2)}\\
\frac{2(x-1)+3(x-3)}{(x-1)(x+2)(x-3)} &= \frac{-x^2+7x-8}{(x-1)(x-3)(x+2)}
\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad 2, apartado 1.

$$\begin{aligned}
2(x-1)+3(x-3) &= -x^2+7x-8\\
2x-2+3x-9 &= -x^2+7x-8\\
x^2-7x+8+2x-2+3x-9 &= 0\\
x^2-2x-3 &= 0\\
\Delta &= (-2)^2-4(1)(-3)\\
\Delta &= 4+12\\
\Delta &= 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2(1)} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2(1)}\\
\alpha &= \frac{2-4}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2+4}{2}\\
\alpha &= \frac{-2}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{6}{2}\\
\alpha &= -1 \quad \text{y} \quad \beta = 3
\end{aligned}$$

Pero, como 3 no es un elemento del dominio de la incógnita, 3 no puede ser solución de la ecuación original, por lo tanto el conjunto solución es $\{-1\}$

3. $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{x-1}-\dfrac{x+\dfrac{x+1}{x-1}}{x+1}-1=0$

Solución

$$\frac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{x-1}-\frac{x+\dfrac{x+1}{x-1}}{x+1}-1=0$$

En este caso debe cumplirse que:

$x+1\neq 0$, y $x-1\neq 0$, es decir $x\neq -1$, y $x\neq 1$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x(x+1)-(x-1)}{x+1}}{x-1}-\frac{\dfrac{x(x-1)+(x+1)}{x-1}}{x+1}-1 &= 0\\
\frac{\dfrac{x^2+x-x+1}{x+1}}{x-1}-\frac{\dfrac{x^2-x+x+1}{x-1}}{x+1}-1 &= 0\\
\frac{\dfrac{x^2+1}{x+1}}{x-1}-\frac{\dfrac{x^2+1}{x-1}}{x+1}-1 &= 0\\
\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-1 &= 0\\
\frac{x^2+1-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}-1 &= 0\\
\frac{x^2+1-x^2-1}{(x+1)(x-1)}-1 &= 0\\
\frac{0}{(x+1)(x-1)}-1 &= 0\\
0-1 &= 0\\
-1 &= 0
\end{aligned}$$

Como obtuvimos una igualdad falsa, entonces la ecuación original no tiene solución, es decir el conjunto solución es $\varnothing$

4. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1}=1$

Solución

$$\frac{1}{x+1}+\frac{x^2}{x^2+2x+1}-\frac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1} = 1$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}-\frac{x^2}{(x+1)^3} = 1 \qquad (*)$$

En este caso debe cumplirse que:

$x+1 \neq 0$, es decir $x \neq -1$.

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{-1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}+\frac{x^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x+1}-\frac{x^2}{(x+1)^3} &= 1\cdot\frac{(x+1)^3}{(x+1)^3}\\
\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}+\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^3}-\frac{x^2}{(x+1)^3} &= \frac{(x+1)^3}{(x+1)^3}\\
\frac{(x+1)^2+x^2(x+1)-x^2}{(x+1)^3} &= \frac{(x+1)^3}{(x+1)^3}\\
(x+1)^2+x^2(x+1)-x^2 &= (x+1)^3\\
x^2+2x+1+x^3+x^2-x^2 &= x^3+3x^2+3x+1\\
x^2+2x+1+x^3+x^2-x^2-x^3-3x^2-3x-1 &= 0\\
-2x^2-x &= 0\\
-x(2x+1) &= 0
\end{aligned}$$

$$-x = 0 \quad \text{ó} \quad 2x+1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = \frac{-1}{2}$$

Como 0 y $\dfrac{-1}{2}$ pertenecen al dominio de la incógnita, entonces el conjunto solución de la ecuación original es $\left\{0, \dfrac{-1}{2}\right\}$.

Ejercicios 9

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{3x}{x^2-25}=\dfrac{5x+10}{x^2-25}$

2. $\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2x+4}{2x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

3. $\dfrac{4}{3x-3}+\dfrac{1}{2x-2}=\dfrac{1}{2x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$

4. $2x-12+\dfrac{48x+142}{x^2+7x+12}=\dfrac{x}{x+4}-\dfrac{2}{x+3}$

5. $\dfrac{3x-1}{x^2+7x+12}-\dfrac{1}{2x+6}=\dfrac{7}{6x+24}+\dfrac{x^2+14x-31}{6x^2+42x+72}$

6. $x+\dfrac{4x}{12}=\dfrac{-36}{x^2-3x}$

7. $\dfrac{x+2}{2x+6}-\dfrac{3x-2}{6x+18}+\dfrac{x}{x^2-9}=\dfrac{-2}{3x-9}$

8. $\dfrac{(x+3)^2}{(x-3)^2}=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2(7x+1)}{x^2-2x-3}$

9. $\dfrac{3}{x^2+4}+\dfrac{2}{(x+2)^2}=\dfrac{5x^2+12x+20}{(x+2)^2(x^2+4)}$

10. $\dfrac{x-1}{3x-3}-\dfrac{x-2}{6x-6}+\dfrac{x^2+2x-6}{9x^2-9}$

11. $\dfrac{x-x^2}{\dfrac{x}{x+1}-x}=x^2-1$

12. $\dfrac{x}{x^2-5x+4}+\dfrac{2}{x^2-3x-4}=\dfrac{x^3+3x^2+x-3}{x^3-4x^2-x+4}$

13. $\dfrac{1+\dfrac{x}{x-1}}{1-\dfrac{x}{x-1}}=-2x+1$

3.6 Ecuación Radical

■ **Definición 10**

Se llama ecuación radical a aquella ecuación que involucra al menos, un radical cuyo subradical es una expresión algebraica no constante.

■ **Ejemplo 22**

Son ecuaciones radicales:

a) $\sqrt[3]{2x+1}=3$

b) $\sqrt[4]{y^3-2x}=x+5$

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+6}=x^2-7x$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{-x+2}{x+1}}+\sqrt[4]{y}=3$

e) $\sqrt{x+6}-2x=\sqrt{x}$

Nota: Las ecuaciones radicales que estudiaremos en este texto involucrarán solamente una incógnita.
Para resolver ecuaciones radicales usaremos el siguiente resultado.

Resultado 2

Sean $P(x)$, $Q(x)$ dos expresiones algebraicas en una variable x y sea α un número real.
Si α es una solución de la ecuación $P(x) = Q(x)$, entonces α es una solución de la ecuación $[P(x)]^n = [Q(x)]^n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Otra forma de enunciar el resultado anterior es el siguiente:

El conjunto de solución de $P(x) = Q(x)$, está contenido en el conjunto de solución de $[P(x)]^n = [Q(x)]^n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

El resultado anterior es una consecuencia de la siguiente propiedad de los números reales:

Propiedad

Sean $a \in \mathbb{R}\,,\; b \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N},\quad a = b \implies a^n = b^n$

Consideremos el siguiente ejemplo, en el cual se ilustra el resultado anterior.

Ejemplo 23

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2x + 1 = x + 3$

   Solución

$$\begin{aligned} 2x+1 &= x+3 \\ 2x+1-x-3 &= 0 \\ x-2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   El conjunto solución de $2x + 1 = x + 3$ es $\{2\}$

2. $(2x + 1)^2 = (x + 3)^2$

   Solución

$$\begin{aligned}
4x^2+4x+1 &= x^2+6x+9\\
4x^2+4x+1-x^2-6x-9 &= 0\\
3x^2-2x-8 &= 0\\
\Delta &= (-2)^2-4(3)(-8)\\
\Delta &= 100
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lclclcl}
\alpha & = & \dfrac{-(-2)-\sqrt{100}}{2(3)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-(-2)+\sqrt{100}}{2(3)}\\
\alpha & = & \dfrac{2-10}{6} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{2+10}{6}\\
\alpha & = & \dfrac{-4}{3} & \text{y} & \beta & = & 2
\end{array}$$

El conjunto solución de $(2x+1)^2=(x+3)^2$ es $\left\{2\,,\ \dfrac{-4}{3}\right\}$

En el caso anterior podemos observar que 2 es una solución de la ecuación $2x+1=x+3$ y también es una solución de la ecuación $(2x+1)^2=(x+3)^2$. Sin embargo, observemos que $\dfrac{-4}{3}$ es una solución de la ecuación $(2x+1)^2=(x+3)^2$, pero no es solución de $2x+1=x+3$, esto quiere decir que $\{2\}\subset\left\{2\,,\ \dfrac{-4}{3}\right\}$.

Observación

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos expresiones algebraicas en una variable, $\alpha\in\mathbb{R}$ *y* $n\in\mathbb{N}$. Si α es una solución de la ecuación $[P(x)]^n=[Q(x)]^n$, entonces α no necesariamente es solución de la ecuación $P(x)=Q(x)$.

Por ejemplo en el caso anterior $\dfrac{-4}{3}$ es solución de $(2x+2)^2=(x+3)^2$, pero no es solución de $2x+1=x+3$.

Convenio

Sea $[P(x)]^n=[Q(x)]^n$ una ecuación con variable x, y sea α un número real tal que α es una solución de $[P(x)]^n=[Q(x)]^n$, α es una solución de la ecuación $P(x)=Q(x)$ si y sólo si, al sustituir x por α en $P(x)=Q(x)$, se obtiene una igualdad verdadera.

■ Ejemplo 24

Resuelva cada una de las ecuaciones racionales:

a) $\sqrt{8-x^2}=x$ b) $\sqrt[3]{12x+8}=x+2$ c) $\sqrt[4]{x^4-2x-1}=x$

Solución

1. $\sqrt{8-x^2}=x$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{8-x^2})^2 &= x^2\\
8-x^2 &= x^2\\
8-2x^2 &= 0\\
2(4-x^2) &= 0\\
2(2-x)(2+x) &= 0
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{array}{rclcrcl}
2-x &=& 0 & \text{ó} & 2+x &=& 0\\
-x &=& -2 & \text{ó} & x &=& -2\\
x &=& 2 & \text{ó} & x &=& -2
\end{array}$$

Por lo que $x=2$ y $x=-2$ son las posibles soluciones.

Determinemos si 2 y -2 son solución de la ecuación $\sqrt{8-x^2}=x$

$$\begin{array}{rclcrcl}
x &=& 2 & \qquad & x &=& -2\\
\sqrt{8-(2)^2} &=& 2 & & \sqrt{8-(-2)^2} &=& -2\\
\sqrt{8-4} &=& 2 & & \sqrt{8-4} &=& -2\\
\sqrt{4} &=& 2 & & \sqrt{4} &=& -2\\
2 &=& 2 & & 2 &=& -2
\end{array}$$

¡Cierto! ¡Falso!

Como con $x=2$ se obtiene una igualdad verdadera y con $x=-2$ no, entonces 2 es solución y -2 no lo es.

Por lo anterior se concluye que $\{2\}$ es el conjunto solución de $\sqrt{8-x^2}=x$

Se obtuvo como consecuencia de que $a=b \implies a^n=b^n$, donde $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, y $n\in\mathbb{N}$.

Además el valor de n se escogió convenientemente igual al índice del radical (es decir $n=2$).

2. $\sqrt[3]{12x+8}=x+2$

Solución

$$\begin{aligned}
(\sqrt[3]{12x+8})^3 &= (x+2)^3\\
12x+8 &= (x+2)(x+2)(x+2)\\
12x+8 &= (x^2+4x+4)(x+2)\\
12x+8 &= x^3+6x^2+12x+8\\
0 &= x^3+6x^2+12x+8-12x-8\\
0 &= x^3+6x^2\\
0 &= x^2(x+6)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcllrcl} 0 & = & x^2 & \text{ó} & 0 & = & x+6 \\ 0 & = & x & \text{ó} & -6 & = & x \\ x & = & 0 & \text{ó} & x & = & -6 \end{array}$$

Por lo que $x = 0$ y $x = -6$ son las posibles soluciones.

Determinemos si 0 y -6 son solución de la ecuación $\sqrt[3]{12x+8} = x+2$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ \sqrt[3]{12(0)+8} & = & 0+2 \\ \sqrt[3]{0+8} & = & 2 \\ \sqrt[3]{8} & = & 2 \\ \sqrt[3]{2^3} & = & 2 \\ 2 & = & 2 \end{array}$$

¡Cierto!

$$\begin{array}{rcl} x & = & -6 \\ \sqrt[3]{12(-6)+8} & = & -6+2 \\ \sqrt[3]{-72+8} & = & -4 \\ \sqrt[3]{-64} & = & -4 \\ \sqrt[3]{(-4)^3} & = & -4 \\ -4 & = & -4 \end{array}$$

¡Cierto!

Como al sustituir $x = 0$ ó $x = -6$ en $\sqrt[3]{12x+8} = x+2$ obtenemos igualdades verdaderas, entonces 0 y -6 son soluciones de dicha ecuación.

Por lo anterior se concluye que $\{0, -6\}$ es el conjunto solución de $\sqrt[3]{12x+8} = x+2$

3. $\sqrt[4]{x^4 - 2x - 1} = x$

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt[4]{x^4 - 2x - 1})^4 & = & x^4 \\ x^4 - 2x - 1 & = & x^4 \\ x^4 - 2x - 1 - x^4 & = & 0 \\ -2x - 1 & = & 0 \\ -2x & = & 1 \\ x & = & \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

Por lo que $x = -\dfrac{1}{2}$ es una posible solución.

Determinemos si $\dfrac{-1}{2}$ es solución de la ecuación $\sqrt[4]{x^4 - 2x - 1} = x$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-1}{2} \\
\sqrt[4]{\left(\frac{-1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 1} &= \frac{-1}{2} \\
\sqrt[4]{\frac{1}{16} + \frac{2}{2} - 1} &= \frac{-1}{2} \\
\sqrt[4]{\frac{1}{16}} &= \frac{-1}{2} \\
\frac{1}{2} &= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

¡Falso!

es decir $\dfrac{-1}{2}$ no es solución de la ecuación.

Por lo anterior la ecuación $\sqrt[4]{x^4 - 2x - 1} = x$ no tiene solución, es decir, su conjunto solución es $\varnothing$.

Nota: Observe que en los ejemplos anteriores, en el proceso de resolución de ecuaciones radicales, con el fin de obtener una ecuación polinomial (la cual se puede resolver usando los conceptos estudiados anteriormente), se utilizó el resultado:

$$a = b \implies a^n = b^n \quad \text{donde } a \in \mathbb{R}\ , b \in \mathbb{R}\ , n \in \mathbb{N}$$

Ejercicios 10

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x - 3 = \sqrt{x - 1}$
2. $10\sqrt{x} = x + 9$
3. $-\sqrt{x - 1} = x$
4. $\sqrt{5x - 1} = 5 - x$
5. $-\sqrt{2x - 5} = 4 - x$
6. $\sqrt[3]{7 - 2x^2} = -3$

Antes de analizar otro tipo de ecuaciones radicales, veamos el siguiente caso:

$$\sqrt{x} + x = 3$$

Resolviendo la ecuación anterior, usando lo estudiado hasta ahora en ecuaciones radicales.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + x &= 3 \\
(\sqrt{x} + x)^2 &= 3^2 \\
(\sqrt{x})^2 + 2x\sqrt{x} + x^2 &= 9 \\
x + 2x\sqrt{x} + x^2 &= 9
\end{aligned}$$

Observemos que en esta útima ecuación tenemos todavía radicales, es decir, no hemos obtenido una ecuación polinomial, como sucedía en los ejemplos anteriores.

Así, para resolver ecuaciones del tipo anterior, se recomienda seguir el procedimiento que se enuncia a continuación:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios (o fracciones racionales) y $n \in \mathbb{N}$.

Para resolver ecuaciones del tipo:

$$\sqrt[n]{P(x)} + Q(x) = R(x)$$

se recomienda transformarlas a una ecuación del tipo:

$$\sqrt[n]{P(x)} = R(x) - Q(x)$$

A partir de la ecuación anterior se obtiene que:

$$\left[\sqrt[n]{P(x)}\right]^n = [R(x) - Q(x)]^n$$

La cual a su vez implica que:

$$P(x) = [R(x) - Q(x)]^n$$

que es una ecuación que se puede resolver por los métodos estudiados anteriormente.

Ejemplo 25

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x+2} + 2x - 1 = 4x$

   Solución

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+2} &= 4x-2x+1\\
\sqrt{x+2} &= 2x+1\\
(\sqrt{x+2})^2 &= (2x+1)^2\\
x+2 &= 4x^2+4x+1\\
4x^2+4x+1 &= x+2\\
4x^2+4x+1-x-2 &= 0\\
4x^2+3x-1 &= 0\\
\Delta &= (3)^2-4(4)(-1)\\
\Delta &= 9{+}16\\
\Delta &= 25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-3-\sqrt{25}}{8} = -1\\
\beta &= \frac{-3+\sqrt{25}}{8} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Posibles soluciones: $x=-1$ ó $x=\dfrac{1}{4}$

Prueba:

$x=-1$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-1+2}+2(-1)-1 &= 4(-1)\\
\sqrt{1}-2-1 &= -4\\
1-2-1 &= -4\\
-2 &= -4
\end{aligned}
$$

¡Falso!

$x=\dfrac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{4}+2}+2\left(\frac{1}{4}\right)-1 &= 4\left(\frac{1}{4}\right)\\
\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{1}{2}-1 &= 1\\
\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1 &= 1\\
2-1 &= 1\\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

¡Cierto!

Por lo tanto sólo $\dfrac{1}{4}$ es solución de $\sqrt{x+2}+2x-1=4x$ y su conjunto solución es $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

2. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{8}+x^2-16}+\dfrac{x}{2}-5=x-5$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}+x^2-16} &= x-5-\frac{x}{2}+5\\
\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}+x^2-16} &= \frac{x}{2}\\
\left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}+x^2-16}\right)^3 &= \left(\frac{x}{2}\right)^3\\
\frac{x^3}{8}+x^2-16 &= \frac{x^3}{8}\\
\frac{x^3}{8}+x^2-16-\frac{x^3}{8} &= 0\\
x^2-16 &= 0\\
(x-4)(x+4) &= 0
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl c rcl}
x-4 &=& 0 & \text{ó} & x+4 &=& 0\\
x &=& 4 & \text{ó} & x &=& -4
\end{array}$$

Prueba:

$x=4$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{4^3}{8}+4^2-16}+\frac{4}{2}-5 &= 4-5\\
\sqrt[3]{\frac{64}{8}+16-16}+2-5 &= -1\\
\sqrt[3]{8}-3 &= -1\\
2-3 &= -1\\
-1 &= -1
\end{aligned}$$

¡Cierto!

$x=-4$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{(-4)^3}{8}+(-4)^2-16}+\frac{(-4)}{2}-5 &= (-4)-5\\
\sqrt[3]{\frac{-64}{8}+16-16}+-2-5 &= -9\\
\sqrt[3]{-8}-7 &= -9\\
-2-7 &= -9\\
-9 &= -9
\end{aligned}$$

¡Cierto!

Por tanto -4 y 4 son soluciones $\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}+x^2-16}+\frac{x}{2}-5=x-5$ y su conjunto de solución es $\{-4\,,\,4\}$.

Ejercicios 11

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x-3-\sqrt{x-1}=0$

b) $\sqrt{6x+25}-x=3$

c) $\sqrt{x-12}-4=0$

d) $\sqrt{4x+29}-x-2=0$

e) $\sqrt{6x-9}+x=0$

f) $2\sqrt{2x+1}=3-x$

Ejemplo 26

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{\sqrt{x^4-7x^3+5x^2-x+6}}{x}+3=x$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^4-7x^3+5x^2-x+6}}{x} &= x-3\\
\left(\frac{\sqrt{x^4-7x^3+5x^2-x+6}}{x}\right)^2 &= (x-3)^2\\
\frac{x^4-7x^3+5x^2-x+6}{x^2} &= x^2-6x+9\\
x^4-7x^3+5x^2-x+6 &= x^2(x^2-6x+9)\\
x^4-7x^3+5x^2-x+6 &= x^4-6x^3+9x^2\\
x^4-7x^3+5x^2-x+6-x^4+6x^3-9x^2 &= 0\\
-x^3-4x^2-x+6 &= 0 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Resolviendo esta ecuación con división sintética tenemos que:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-1 & -4 & -1 & 6 & 1\\
 & -1 & -5 & -6 & \\
\hline
-1 & -5 & -6 & 0 &
\end{array}
$$

Por lo que 1 es solución de (*) y podemos expresarla como $(x-1)(-x^2-5x-6)=0$.

Resolviendo $-x^2-5x-6=0$

$$
\begin{array}{lclclcl}
\alpha & = & \dfrac{5-\sqrt{1}}{2(-1)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{5+\sqrt{1}}{2(-1)}\\
\alpha & = & \dfrac{5-1}{-2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{5+1}{-2}\\
\alpha & = & \dfrac{4}{-2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6}{-2}\\
\alpha & = & -2 & \text{y} & \beta & = & -3
\end{array}
$$

Prueba:

- $x=1$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1^4-7(1)^3+5(1)^2-1+6}}{1}+3 &= 1\\
\sqrt{1-7+5-1+6}+3 &= 1\\
\sqrt{4}+3 &= 1\\
2+3 &= 1\\
5 &= 1
\end{aligned}
$$

¡Falso!

Por tanto 1 no es solución de la ecuación.

- $x = -2$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(-2)^4 - 7(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) + 6}}{-2} + 3 &= -2 \\
\frac{\sqrt{16 + 56 + 20 + 2 + 6}}{-2} + 3 &= -2 \\
\frac{\sqrt{100}}{-2} + 3 &= -2 \\
\frac{10}{-2} + 3 &= -2 \\
-5 + 3 &= -2 \\
-2 &= -2
\end{aligned}
$$

¡Cierto!

Por tanto -2 es solución de la ecuación.

- $x = -3$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(-3)^4 - 7(-3)^3 + 5(-3)^2 - (-3) + 6}}{-3} + 3 &= -3 \\
\frac{\sqrt{81 + 189 + 45 + 3 + 6}}{-3} + 3 &= -3 \\
\frac{\sqrt{324}}{-3} + 3 &= -3 \\
\frac{18}{-3} + 3 &= -3 \\
-6 + 3 &= -3 \\
-3 &= -3
\end{aligned}
$$

¡Cierto!

Por tanto -3 es solución de la ecuación.

Por lo anterior tenemos que el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{\sqrt{x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6}}{x} + 3 = x$ es $\{-2\ ,\ -3\}$.

2. $-2+3\sqrt{3-x}-x+1=0$

   Solución

$$\begin{array}{rcl}
3\sqrt{3-x} & = & x-1+2 \\
3\sqrt{3-x} & = & x+1 \\
(3\sqrt{3-x}\,)^2 & = & (x+1)^2 \\
9(3-x) & = & x^2+2x+1 \\
27-9x & = & x^2+2x+1 \\
x^2+2x+1 & = & 27-9x \\
x^2+2x+1+9x-27 & = & 0 \\
x^2+11x-26 & = & 0 \\
\Delta & = & (11)^2-4(1)(-26) \\
\Delta & = & 121{+}104 \\
\Delta & = & 225
\end{array}$$

$$\begin{array}{lclclcl}
\alpha & = & \dfrac{-11-\sqrt{225}}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-11+\sqrt{225}}{2} \\
\alpha & = & \dfrac{-11-15}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-11+15}{2} \\
\alpha & = & \dfrac{-26}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{4}{2} \\
\alpha & = & -13 & \text{y} & \beta & = & 2
\end{array}$$

Prueba:

- $x=-13$

$$\begin{array}{rcl}
-2+3\sqrt{3-(-13)}-(-13)+1 & = & 0 \\
-2+3\sqrt{16}+13+1 & = & 0 \\
-2+3(4)+13+1 & = & 0 \\
-2+12+13+1 & = & 0 \\
24 & = & 0
\end{array}$$

¡Falso!

Por tanto -13 no es solución de la ecuación.

- $x=2$

$$\begin{aligned}
-2+3\sqrt{3-2}-2+1 &= 0\\
-2+3\sqrt{1}-2+1 &= 0\\
-2+3(1)-2+1 &= 0\\
-2+3-2+1 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

¡Cierto!

Por tanto 2 es solución de la ecuación.

Por lo anterior tenemos que el conjunto solución de $-2+3\sqrt{3-x}-x+1=0$ es $\{2\}$.

Ejercicios 12

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2\sqrt{x+\dfrac{5}{4}}+2x=-1$

2. $-x+\sqrt{-3x+16}+4=0$

3. $-x+2\sqrt{x+4}+4=0$

4. $\dfrac{-x+1}{\sqrt{-2x+2}}+x=0$

5. $x+2\sqrt{x-6}=5$

6. $x+4=-3\sqrt{2+x}$

En el ejemplo siguiente se ilustra el procedimiento a seguir en la resolución de ecuaciones radicales que involucren más de un radical no constante.

■ **Ejemplo 27**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$

   Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} &= 5-\sqrt{x+4} \\
(\sqrt{x-1})^2 &= (5-\sqrt{x+4})^2 \\
x-1 &= 25-10\sqrt{x+4}+x+4 \\
x-1-25-x-4 &= -10\sqrt{x+4} \\
-30 &= -10\sqrt{x+4} \\
\frac{-30}{-10} &= \sqrt{x+4} \\
3^2 &= (\sqrt{x+4}\,)^2 \\
9 &= x+4 \\
9-4 &= x \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Prueba:

$x = 5$

$$\begin{aligned}
\sqrt{5-1}+\sqrt{5+4} &= 5 \\
\sqrt{4}+\sqrt{9} &= 5 \\
2+3 &= 5 \\
5 &= 5
\end{aligned}$$

¡Cierto!

Por lo que el conjunto de solución de $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$ es $\{5\}$.

1. $2\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[6]{-128x+65}$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(2\sqrt[3]{x-1}\right)^6 &= \left(\sqrt[6]{-128x+65}\right)^6 \\
64\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^6 &= -128x+65 \\
64\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]^6 &= -128x+65 \\
64\,(x-1)^{\frac{6}{3}} &= -128x+65 \\
64\,(x-1)^2 &= -128x+65 \\
64\left(x^2-2x+1\right) &= -128x+65 \\
64x^2-128x+64+128x-65 &= 0 \\
64x^2-1 &= 0 \\
(8x-1)\,(8x+1) &= 0 \\
8x-1=0 \quad \text{ó} \quad 8x+1 &= 0
\end{aligned}$$

$$8x=1 \quad \text{ó} \quad 8x=-1$$

$$x=\frac{1}{8} \quad \text{ó} \quad x=\frac{-1}{8}$$

Por lo que las posible soluciones son $x=\dfrac{1}{8}$ y $x=\dfrac{-1}{8}$

Prueba

- $x=\dfrac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
2\sqrt[3]{\frac{1}{8}-1} &= \sqrt[6]{-128\left(\frac{1}{8}\right)+65} \\
2\sqrt[3]{\frac{-7}{8}} &= \sqrt[6]{-16+65} \\
-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{7} &= \sqrt[6]{49} \\
-\sqrt[3]{7} &= \sqrt[6]{7^2} \\
-\sqrt[3]{7} &= \sqrt[3]{7} \qquad \text{¡falso!}
\end{aligned}$$

- $x=\dfrac{-1}{8}$

$$\begin{aligned}
2\sqrt[3]{\frac{-1}{8}-1} &= \sqrt[6]{-128\cdot\frac{-1}{8}+65}\\
2\sqrt[3]{\frac{-9}{8}} &= \sqrt[6]{16+65}\\
2\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{-9} &= \sqrt[6]{81}\\
-\sqrt[3]{9} &= \sqrt[6]{9^2}\\
-\sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{9} \qquad \text{¡falso!}
\end{aligned}$$

Por lo anterior la ecuación $2\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{-128x+65}$ no tiene solución es decir su conjunto solución es $\varnothing$

Ejercicios 13

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}=1$

b) $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{3x+7}$

c) $\sqrt{3}\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}$

d) $\left(1+\sqrt{x}\right)^2+\left(1+\sqrt{x}\right)-6=0$

e) $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}-2=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$

f) $\sqrt{x+2}=\sqrt{x}+3$

3.7 Aplicación de las ecuaciones a la solución de problemas

¿Qué es un problema?

La palabra “problema” a menudo se emplea con un sentido equivocado en las clases de matemática. A menudo, determinado ejercicio es simple rutina para algunos individuos, mientras que para otros se convierte en tarea que requiere decisión y reflexión cuidadosa. Se ha dicho que: “Lo que para una persona es un problema para otra es un ejercicio y para una tercera un fracaso ”

Se considera que la existencia de ciertas condiciones determinan si una situación es un verdadero problema para determinado individuo, entre las cuales podemos mencionar:

i.) El camino para llegar a la meta deseada está bloqueado y los patrones fijos de conducta del individuo, sus respuestas habituales, no son sufientes para romper ese bloqueo.

ii.) Tiene que haber deliberación.

¿Porqué es importante la solución de problemas?

La realidad concreta no es simple, ni inalterable. Más bien cambia rápidamente. En un mundo tal, la capacidad de ajuste y solución de los propios problemas es de importancia primordial.

Si la vida fuera de una naturaleza tan constante que sólo tuviéramos que hacer unas cuantas tareas, una y otra vez de exactamente el mismo modo, el conocimiento de cómo resolver problemas podría resultar artificioso. Pues, todo lo que se tendría que hacer sería aprender cómo ejecutar las pocas tareas desde el primer momento.

En esta parte el objetivo es presentar situaciones planteadas en el lenguaje corriente, con el fin de que el estudiante se agilice con el proceso de trasladar situaciones al lenguaje matemático, y le sirva de preparación para próximos cursos de matemática, así como en aquellos cursos propios de la carrera donde el estudiante tenga que construir algunos modelos matemáticos.

¿Existe algún procedimiento modelo que se pueda usar para resolver todo problema, o más específicamente, toda situación planteada en el lenguaje corriente?

La respuesta es: no existe tal procedimiento.

Sin embargo, a menudo podemos seguir algunos pasos, los cuales nos pueden ayudar en la resolución de problemas:

Paso 1: Lea el problema cuidadosamente

Debe estar seguro de haber entendido el significado de todos los términos usados en el problema, es decir,**usted debe comprender el problema.**

Paso 2 : Determine cúales son las incógnitas

Con base en la lectura usted debe determinar, cuáles son los datos conocidos y cuáles datos son los que usted debe averiguar para resolver el problema. Represente cada uno de los datos desconocidos con una letra (incógnita).

Nota: En algunos casos un dibujo puede ayudar a comprender la situación.

Paso 3: Escriba la ecuación o el sistema de ecuaciones correspondientes

Relacione los datos conocidos con los datos desconocidos, estableciendo una ecuación o un sistema de ecuaciones.

Nota: A menudo es conveniente usar el menor número de incógnitas que sea posible

Paso 4: Resuelva las ecuaciones obtenidas

Usted debe resolver la ecuación o el sistema de ecuaciones que se obtuvo en el paso anterior.

Paso 5: Compruebe las soluciones obtenidas

Usted debe comprobar cada solución obtenida contra las condiciones establecidas en la situación expresada en lenguaje corriente.

Nota: Comprobar la solución en la ecuación misma no es suficiente, porque la ecuación podría no ser la correspondiente al problema.

Además debe escribir la respuesta del problema.

Recuerde: El procedimiento para resolver un problema mediante el uso de una ecuación no siempre es fácil y para lograr cierta aptitud se requiere una práctica considerable.

A continuación resolveremos algunos problemas, con ilustración:

3.7.1 Problemas que implican proporciones

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Se llama proporción a toda igualdad de la forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Donde:

i.) b y c reciben el nombre de **medios**

ii.) a y d reciben el nombre de **extremos**

Nota:

1. Si " $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ", entonces decimos que 'a es a b como c es a d', o que 'la razón de a a b' es como 'la razón de c a d'.

2. La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ también se denota como $a : b = c : d$ o $a : b :: c : d$.

   Diremos que "x" es inversamente proporcional a "y" si existe una constante positiva k tal que $xy = k$.

   Diremos que "x" es directamente proporcional a "y" si existe una constante positiva k tal que $\frac{x}{y} = k$, la constante k recibe el nombre de constante de proporcionalidad.

■ **Ejemplo 28**

La escala usada en la elaboración de un mapa de Centroamérica es: 1 cm es a 10 km (es decir 1 cm del mapa corresponde a 10 km en Centroamérica). ¿A qué distancia se encuentran dos ciudades que en el mapa están representadas con una distancia entre ellas de 2, 5 centímetros?´

Solución:

Sea: x el número de kilómetros entre las dos ciudades
Entonces tenemos que:

1 cm es a 2.5 cm como 10 km es a x kilómetros, es decir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2.5} &= \frac{10}{x} \\ \Longrightarrow 1x &= (10)(2.5) \\ \Longrightarrow x &= 25 \end{aligned}$$

Respuesta: Las ciudades están a 25 km de distancia.

■ Ejemplo 29

Una mezcla de fertilizantes se obtiene a partir de 3 onzas de nitrógeno, 2 onzas de potasa y 2 onzas de fosfato. ¿Cuántas onzas de la mezcla contendrán 60 onzas de nitrógeno?

Solución:

Observe que la relación de las onzas de nitrógeno al número total de onzas del que consta la mezcla es de $\dfrac{3}{7}$.

Sea: x el número de onzas de la mezcla que contiene 60 onzas de nitrógeno.

Entonces tenemos que: 3 es a 7 como 60 es a x, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{3}{7} &= \frac{60}{x} \\ \Longrightarrow 3x &= (60)(7) \\ \Longrightarrow x &= 140 \end{aligned}$$

Respuesta: 140 onzas de la mezcla contendrán 60 onzas de nitrógeno.

■ Ejemplo 30

Se sabe que la presión en el fondo de una piscina es directamente proporcional con la altura del agua.
Si la presión es $1\text{kg}\backslash\text{cm}^2$ cuando el agua tiene una altura de 10m, encontrar la presión sobre el fondo de una piscina cuya altura de agua es 1.35m.

Solución:

Como la presión es directamente proporcional a la altura del agua entonces: $\dfrac{1}{10} = k$

Por lo que la constante de proporcionalidad es $\dfrac{1}{10}$.

Sea: P la presión sobre el fondo de una piscina cuya altura es de 1.35m.
Entonces:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{10} &= \frac{P}{1.35} \\
\Longrightarrow (1.35)\left(\frac{1}{10}\right) &= \mathrm{P} \\
\Longrightarrow 0.135 &= \mathrm{P}
\end{aligned}
$$

Respuesta: La presión sobre el fondo para una altura de 1.35m es de 0.135 $\mathrm{kg/cm^2}$

■ **Ejemplo 31**

El número de días que se requieren para terminar un trabajo es inversamente proporcional al número de hombres empleados, si lo hacen con igual rapidez.
Si 5 hombres pueden terminar un trabajo en 16 días, ¿cuántos días les tomará a 8 hombres terminar el mismo trabajo?

Solución:

Sean: N número de días que requieren para el trabajo.
H número de hombres empleados

Como N es inversamente proporcional a H, entonces existe una constante K, tal que: $N \cdot H = K$

Por la información dada $16 \cdot 5 = K$, por lo tanto $K = 80$

Para $H = 8$, $N \cdot 8 = 80$. Por lo tanto $N = 10$

Respuesta: A 8 hombres les tomará 10 días terminar el trabajo.

Ejercicios 14

1. Se sabe que y varía en razón inversa de x. Si $y = 4$ cuando $x = 5$, determine el valor de y cuando $x = 12$.

2. Se sabe que y es directamente proporcional al cuadrado de x. Si $y = 4$ cuando $x = 6$, determine el valor de y cuando $x = 12$.

3. La Ley de Boyle establece que el volumen es inversamente proporcional a la presión si se mantiene constante la temperatura. Si el volumen de una masa gaseosa a cierta temperatura es 56cm^3 a una presión de 18kg, calcule el volumen cuando la presión es 16kg.

4. Una receta para un postre para 4 personas necesita 3 cucharadas de azúcar. ¿Cuanto azúcar necesita la receta si se quiere que sea para 5 personas?

5. Las dimensiones de una fotografía son 5cm por 7.5cm. En una ampliación el lado más corto es ampliado hasta 12.5cm. Determine la longitud del otro lado ampliado.

6. En el agua hay 16 gramos de oxígeno por cada 2 gramos de hidrógeno. ¿Cuántos gramos de oxígeno habrá en un volumen de agua que contiene 17 gramos de hidrógeno?

3.7.2 Problemas que implican porcentajes

Consideremos el siguiente caso:

1. 100 galones de una mezcla contienen 63 galones de agua.

2. Los bancos estatales pagan ₡ 20 anuales por cada ahorro de ₡ 100 que se realice.

En el caso (1) decimos que el 63 por ciento, $\dfrac{63}{100}$, de la mezcla es agua, o que 0.63 de la mezcla es agua, o que el porcentaje de agua que contiene la mezcla es de 63 por ciento.

En el caso (2) decimos que los bancos estatales pagan el 20 por ciento, $\dfrac{20}{100}$, anual por cada ahorro que se realice, o que los bancos pagan de intéres el 0.2 anual, de la cantidad que deposita, o que el intéres que pagan los bancos estatales de ahorro, es de 20 por ciento anual.

Definición 11

Sea $C \in \mathbb{R}$, se dice que P es el "x por ciento de C" si:

$$P = \frac{x}{100} \cdot C$$

ó

$$\frac{P}{C} = \frac{x}{100}$$

Nota:

i.) El x por ciento se denota $x\%$ y se calcula como $\dfrac{1}{100}\,x$

ii.) A veces se usa el nombre de porcentaje o "tanto por ciento" en vez de "x por ciento".

Ejemplo 32

Determine el 22% de 1210.

Solución:

Por la definición anterior si P denota 22% de 1210 entonces:

$$\begin{aligned} P &= \frac{22}{100}(1210) \\ P &= \frac{(22)(1210)}{100} \\ \Longrightarrow P &= 266.2 \end{aligned}$$

Respuesta: El 22% de 1210 es 266.2

Ejemplo 33

Determine el número para el cual su 25% es 60.

Solución:

Sea C el número para el cual el 25% es 60. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} 60 &= \frac{25}{100} \cdot C \\ \Longrightarrow (60)(100) &= 25 \cdot C \\ \Longrightarrow 6000 &= 25 \cdot C \\ \Longrightarrow \frac{6000}{25} &= C \\ \Longrightarrow 240 &= C \end{aligned}$$

Respuesta: El número que cumple que su 25% es 60 es 240

Ejemplo 34

Un vendedor obtiene una comisión del 5% por sus ventas.
¿Cuánto dinero obtiene el vendedor por comisión si sus ventas fueron de 55000 colones?.

Solución:

Por el enunciado del problema el vendedor obtiene una comisión de ¢ 5 por cada ¢ 100 y lo que debemos es determinar el 5 por ciento de ¢ 55000 por sus ventas.

Sea: P el dinero total obtenido como comisión por sus ventas o sea P es el 5% de 55000

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{5}{100}\right)(55000) \\ \Longrightarrow P &= (5)(550) \\ \Longrightarrow P &= 2750 \end{aligned}$$

Respuesta: El dinero obtenido por el vendedor por concepto de comisión es de ¢ 2750

■ **Ejemplo 35**

La compañía Salas y Rodríguez es una sociedad que tiene un capital de ¢ 2000000 colones. De esta cantidad a Salas le pertenecen ¢ 1100000. ¿Qué porcentaje de la sociedad le pertenece a Rodríguez?

Solución:

El capital que le corresponde a Rodríguez viene dado por: ¢ 2000000− ¢ 1100000, es decir ¢ 900000.

Si denotamos por P el porcentaje de la sociedad que le pertenece a Rodríguez, entonces:

$$\begin{aligned} P &= \frac{900000}{2000000} \\ \Longrightarrow P &= \frac{9}{20} \\ \Longrightarrow P &= 0.45 \\ \Longrightarrow P &= \frac{45}{100} \end{aligned}$$

Respuesta: El 45% de la sociedad pertenece a Rodríguez.

■ **Ejemplo 36**

El precio de venta del dólar durante el mes de Enero se mantuvo estable.

Posteriormente en el mes de Febrero subió en un 10%, para luego disminuir en 10% durante el mes de Marzo. Determine el precio de venta del dólar durante el mes de Enero, sabiendo que en Marzo se vendió a ₡ 59.40.

Solución:

Sea: P el precio de venta del dólar durante el mes de Enero, entonces el 10% de P, viene dado por:

$$\frac{10}{100} \cdot P \quad \text{es decir} \quad \frac{P}{10}$$

Así el precio de venta del dólar durante el mes de Febrero fue de:

$$P + \frac{10}{100} \cdot P \quad \text{es decir} \quad \frac{11P}{10}$$

A su vez el 10% de $\dfrac{11P}{10}$ viene dado por:

$$\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{11P}{10}\right) \quad \text{es decir} \quad \frac{11P}{100}$$

Así el precio de venta del dólar durante el mes de Marzo fue de:

$$\frac{11P}{10} - \frac{11P}{100} \quad \text{es decir} \quad \frac{99P}{100}$$

Pero de acuerdo con la información dada el precio de venta del dólar en Marzo fue de ₡ 59.40, es decir:

$$\begin{aligned} 59.40 &= \frac{99P}{100} \\ \Longrightarrow (59.40)\,(100) &= 99P \\ \Longrightarrow \quad P &= \frac{5940}{99} \\ \Longrightarrow \quad P &= 60 \end{aligned}$$

Respuesta: El precio de venta del dólar durante el mes de Marzo fue de ₡ 60.

Ejercicios 15

1. Una tienda de antigüedades compró dos artículos gastando en total ₡ 22500 y después los vendió y obtuvo un beneficio del 40%. ¿Cuánto pagó por cada artículo la persona que lo compró?

2. El 55% del peso de un hombre adulto es agua. ¿Cuántos kilogramos de agua tendrá un individuo que pesa 60 kilogramos?.

3. Un automóvil que pesa 3500 libras contiene 70 libras de cromo, 105 libras de plomo y 427 de caucho. ¿Qué porcentaje de su peso total es cromo?. Qué porcentaje de su peso total es cromo y plomo?

4. Si se hechó a perder el 30% de una carga compuesta de 1700 duraznos, determine el número de duraznos que no se echaron a perder.

5. Si se calcula el 24% de un cierto número, éste da 4.07. Determine cuál es el número.

6. ¿Qué cantidad de dinero colocada al 3% anual, produce un ingreso igual al que produce $\not\subset$ 1.500 colocados al 4%?

7. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que se duplique un capital invertido al 20% anual?

8. Una familia deposita en un banco $\not\subset$ 15.000, una parte de este dinero está colocada al 8% anual y la otra parte al 9% anual. Determine cuánto dinero se colocó al 8% y cuánto al 9% si se sabe que el interés total obtenido en un año es de $\not\subset$ 1.280.

3.7.3 Problemas sobre mezclas

"Muchos problemas implican la combinación de ciertas sustancias de concentración conocida, generalmente expresada en porcentajes, para formar una mezcla de concentración fija con respecto a una de las sustancias.

Otros implican la mezcla de ciertos artículos de diversos precios. En tales problemas debe recordarse que la cantidad total de una componente en una mezcla, es igual a la suma de las cantidades que de esa componente hay en cada una de las sustancias combinadas" (Rees, Paul K. y Sparks, Fred W. Álgebra Editorial Reverté. México, 1964, pág. 68).

■ **Ejemplo 37**

¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90% de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84% de alcohol?

Solución

Sea x: número de litros de la solución de 74% de alcohol que debe emplearse.

Entonces esta solución aporta un 74% de alcohol, es decir $\dfrac{74}{100}x$ es alcohol.

Además la solución de 90% de alcohol, aporta $\dfrac{90}{100}(5)$ litros de alcohol.

Así la mezcla total contendrá: $\dfrac{74}{100}x + \dfrac{90}{100}(5)$ de litros de alcohol (*).

También

$x+5$: número total de litros de la mezcla.

Entonces la mezcla total contendrá: $\dfrac{84}{100}(x+5)$ litros de alcohol (**)

Por (*) y (**):

$$\begin{aligned}
\frac{74x}{100} + \frac{90}{100}(5) &= \frac{84}{100}(x+5) \\
74x + 90(5) &= 84(x+5) \\
74x + 450 &= 84x + 420 \\
450 - 420 &= 84x - 74x \\
30 &= 10x \\
\frac{30}{10} &= x \\
3 &= x
\end{aligned}$$

Respuesta: A los 5 litros del líquido que contiene 90% de alcohol, se le deben agregar 3 litros de líquido que contenga 74% de alcohol para obtener una mezcla de 84% de alcohol.

■ Ejemplo 38

Se mezcla una cierta cantidad de café, cuyo precio es de ₡ 34.80 el kilo, con 80 kilos de otro café cuyo precio es de ₡ 50.40 el kilo, con el fin de obtener una mezcla que pueda venderse a ₡ 44.40 el kilo.
¿Cuántos kilos de café de ₡ 34.80 deben emplearse en la mezcla?

Solución

Sea x: número de kilos de café de ₡ 34.80 que deben emplearse en la mezcla.
$(34.80)x$: precio de venta de x kilos de ₡ 34.80

$(50.40)80$: precio de venta de 80 kilos de ₡ 50.40

$x+80$: número de kilos de café de ₡ 44.40

$44.40(x+80)$: precio de venta de $x+80$ kilos de ₡ 44.40

Entonces: $(34.80)x + (50.40)80 = 44.40(x + 80)$

$$\begin{aligned}
(34.80)x + (50.40)80 &= 44.40(x + 80) \\
34.80x + 4032 &= 44.40x + 3552 \\
4032 - 3552 &= 44.40x - 34.80x \\
4080 &= 9.6x \\
\frac{480}{9.6} &= x \\
x &= 50
\end{aligned}$$

Respuesta: Deben emplearse 50 kilos de café de ¢ 34.80 en la mezcla.

Ejercicios 16

1. Un químico agrega cierta cantidad de una solución de 86% de alcohol, a 11 litros de otra solución al 71% de alcohol y obtiene una solución al 77% de alcohol. Encuéntre la cantidad de litros de la primera solución que se agregaron a la segunda.

2. Hay chatarra de dos tipos de acero que contienen el 5% y el 40% de níquel. ¿Qué cantidad de chatarra de cada tipo se necesita para obtener 140 toneladas de acero que contenga el 30% de níquel?

3.7.4 Problemas que implican la realización de trabajo

“Los problemas que comprenden la rapidez para hacer determinadas labores, se pueden resolver frecuentemente encontrando primero la fracción del trabajo realizado por cada individuo en la unidad de tiempo y encontrando después la realización entre las fracciones.

Cuando se emplea este método, la unidad (representada por el 1) corresponde al trabajo total por realizar” (Rees, Paul K. y Sparks, Fred W. Álgebra. Editorial Reverté. México, 1964, pág. 66).

En la resolución de este tipo de problemas, para efectos de matematizar la “situación concreta” presentada, no se toman en cuenta algunas variables, las cuales se supone no alteran el resultado obtenido en el problema, o al menos se supone que el resultado que se obtiene si no se toman en cuenta estas variables, se aproxima bastante al obtenido en la realidad.

■ **Ejemplo 39**

Un operario puede pintar un techo en 10 horas y su ayudante puede hacerlo en 15 horas. ¿En cuánto tiempo pueden pintarlo trabajando los dos simultáneamente?

Solución

Sea: x número de horas que duran pintando el techo el operario y el ayudante cuando trabajan simultáneamente.

Si representamos con la unidad (1), el trabajo total a realizar.
Entonces:

$\dfrac{1}{x}$ representará la cantidad de trabajo que harán los dos juntos en una hora (*)

Pero como el operario tarda en pintar el techo 10 horas, $\dfrac{1}{10}$ será la parte del techo que pintará en una hora.

Similarmente el ayudante tarda en pintar el techo 15 horas por lo que:

$\dfrac{1}{15}$ será la parte del techo que pintará en una hora.

Entonces:

$\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}$: representará la cantidad de trabajo que harán los dos juntos en una hora (**)

De (*) y (**) tenemos que: $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{x}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{10}+\frac{1}{15} &= \frac{1}{x}\\
\frac{15+10}{150} &= \frac{1}{x}\\
\frac{25}{150} &= \frac{1}{x}\\
25x &= 150\\
x &= \frac{150}{25}\\
x &= 6
\end{aligned}
$$

Respuesta: Trabajando los dos simultáneamente pintan el techo en 6 horas.

■ Ejemplo 40

En una piscina la entrada de agua se puede hacer a través de dos tubos. Con el agua proveniente de uno de ellos se puede llenar en 12 horas y con solo el agua del otro tubo en 8 horas. ¿En cuánto tiempo se puede llenar la piscina si recibe agua de ambos tubos?

Solución

Sea x: número de horas que se requieren para llenar la piscina si recibe agua de los dos tubos.

$\dfrac{1}{x}$: representa la cantidad de agua que recibe la piscina por hora de los dos tubos (*)

$\dfrac{1}{12}$: representa la cantidad de agua, por hora, que recibe la piscina de uno de los tubos.

$\dfrac{1}{8}$: representa la cantidad de agua, por hora, que recibe la piscina del otro tubo.

$\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{8}$: representa la cantidad de agua que recibe la piscina por hora de los dos tubos (**)

De (*) y (**) tenemos que: $\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12}+\frac{1}{8} &= \frac{1}{x}\\
\frac{8+12}{96} &= \frac{1}{x}\\
\frac{20}{96} &= \frac{1}{x}\\
20x &= 96\\
x &= \frac{96}{20}
\end{aligned}$$

simplificando se obtiene que $x=\dfrac{24}{5}$, es decir $x=4+\dfrac{4}{5}$

Pero $\dfrac{4}{5}$ de hora es igual a $\dfrac{4}{5}(60)$ minutos, es decir 48 minutos.

Por lo que la piscina puede ser llenada usando los dos tubos en 4 horas y 48 minutos.

Ejercicios 17

1. ¿En cuántos días terminan determinado trabajo 8 hombres, si se sabe que trabajando 6 hombres lo terminan en 16 días?

2. Si A puede hacer una obra en 4 días, B en 6 días y C en 12 días. Determine cuánto tiempo duran haciendo la obra los tres juntos.

3. El Sr. Pérez puede descargar un camión en 50 minutos trabajando solo y el Sr. González puede descargarlo en 40 minutos. ¿En cuánto tiempo descargarán el camión trabajando juntos?

3.7.5 Problemas que implican movimiento a velocidad uniforme

"Generalmente los problemas de este tipo establecen una relación entre distancias recorridas, entre velocidades o entre tiempos empleados". La fórmula fundamental para resolver este tipo de problemas es: $d=v\cdot t$.

Donde d representa el número de unidades de distancia (distancia), v el número de distancia que se corre en una unidad de tiempo (velocidad) y t el tiempo. La fórmula anterior sólo es verdadera cuando la velocidad es constante, lo cual significa que dados cualesquiera intervalos de tiempo de igual longitud, la velocidad siempre es la misma, a tales movimientos se les llama movimientos de velocidad uniforme.

Ejemplo 41

A las 9 $a.m.$ un avión que viaja a una velocidad de 560 kilómetros por hora está a 104 kilómetros atrás de otro avión que viaja a 480 kilómetros por hora en la misma dirección. ¿Determine a qué hora alcanzará el avión que viaja a 560 kilómetros por hora al que viaja a 480 kilómetros por hora?

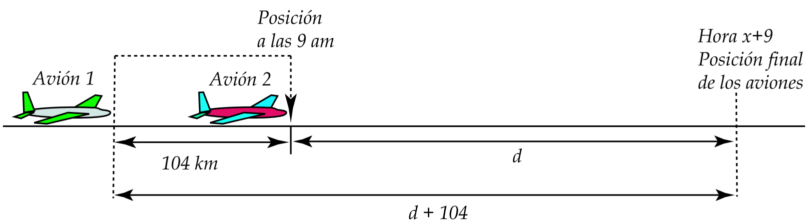
Solución

Sea x: número de horas que tarda el avión (1) en alcanzar al avión (2) a partir de las 9 $a.m.$ (ver figura.)

$x+9$: hora en que el primer avión alcanza al segundo.

d: distancia recorrida por el segundo avión desde las 9 $a.m.$ hasta el momento en que el otro avión lo alcanza.

$d+104$: distancia recorrida por el primer avión desde las 9 $a.m.$ hasta el momento en que alcanzó al segundo avión.



Con respecto al avión (1) tenemos que:

$d+104 = 560 \cdot x$ es decir $d = 560 \cdot x - 104$ (*)

Con respecto al avión (2) tenemos que: $d = 480 \cdot x$ (**)

De (*) y (**) tenemos que: $560x - 104 = 480x$

$$\begin{aligned} 560x - 104 &= 480x \\ 560x - 480x &= 104 \\ 80x &= 104 \\ x &= \frac{104}{80} \end{aligned}$$

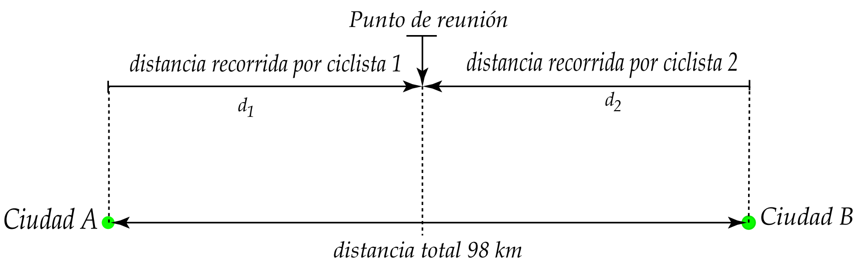
simplificando tenemos que $x = \dfrac{13}{10}$, es decir $x = 1 + \dfrac{3}{10}$

Por lo que el avión (1), a partir de las 9 horas, tarda 1 hora y $\frac{3}{10} \cdot 60$ minutos en alcanzar al avión (2) y como $\frac{3}{10} \cdot 60 = 18$, entonces el avión (1) alcanza al avión (2) a las 10 horas y 18 minutos.

Ejemplo 42

Dos ciudades A y B están separadas por una distancia de 98 kilómetros. Un ciclista sale de la ciudad A hasta la ciudad B a una cierta velocidad. A la misma hora que salió el ciclista anterior, salió otro de la ciudad B con rumbo a la ciudad A, a una velocidad de 1 kilómetro por hora más aprisa que el primer ciclista. Si ambos se encuentran después de 2 horas, determine la velocidad de cada uno.

Solución



Sea:

d_1: distancia recorrida por el ciclista que va de A a B, al cabo de 2 horas.

d_2: distancia recorrida por el ciclista que va de B a A, al cabo de 2 horas.

x: Velocidad del ciclista que va de A a B

$x+1$: Velocidad del ciclista que va de B a A

Entonces: $d_1 = x \cdot 2 \qquad d_2 = (x+1)2 \qquad d_1 + d_2 = 98$

Por lo que: $x \cdot 2 + (x+1)2 = 98$

$$\begin{array}{rcl}
x \cdot 2 + (x+1)2 & = & 98 \\
2x + 2x + 2 & = & 98 \\
4x & = & 98 - 2 \\
4x & = & 96 \\
x & = & \dfrac{96}{4} \\
x & = & 24
\end{array}$$

Respuesta: La velocidad del ciclista que va de A a B es de 24Km/h y la velocidad del ciclista que va de B a A es de 25Km/h.

Ejercicios 18

1. En la ciudad de México, un automóvil sale de Monterrey a las 13 horas con dirección a Torreón y otro sale de Torreón a Monterrey a las 14 horas del mismo día. En el camino se encuentran a las 16 horas.

   La velocidad del segundo automóvil era de 16 km/h menor que la del primero y las dos ciudades están a 392 km una de otra. Encuentre la velocidad de cada automóvil.

2. Cinco minutos después de haber ocurrido un accidente automovilístico y de haber huido el culpable, llega al lugar del accidente un automóvil de la policía, el cual inicia inmediatamente la persecución del culpable y lo alcanza después de 1 hora 10 minutos. Encuentre la velocidad de cada automóvil sabiendo que la del automóvil de la policía fue 8 km/h mayor que la del otro.

3. Una mujer recorre una distancia de 255 km en 5 horas. Va a una velocidad promedio de 45 km/h durante parte del viaje y a 55 km/h durante el resto del viaje. ¿Cuánto tiempo viajó la mujer a 45 km/h?

3.7.6 Problemas que involucran conceptos económicos

Algunos conceptos económicos

1. La demanda

   La relación que expresa las distintas cantidades de un bien que los compradores estarían dispuestos a, y podrían comprar a los precios alternativos posibles, durante un período dado de tiempo, si todas las restantes cosas permanecieran constantes, recibe el nombre de demanda.

2. La oferta

   La relación que expresa las distintas cantidades de una mercancía que los vendedores estarían dispuestos a, y podrían suministrar para la venta a precios alternativos posibles durante un período dado de tiempo, permaneciendo constante todo lo demás, recibe el nombre de oferta.

3. Equilibrio de mercado

   Cuando la cantidad demandada (demanda) es igual a la cantidad ofrecida (oferta), se dice que existe una situación de equilibrio de mercado.

4. Ingreso total $(I.T.)$

   Representa el ingreso monetario que los vendedores obtienen en la venta de sus productos. El ingreso total $(I.T.)$ viene dado por el precio del producto por unidad multiplicado con el número de unidades vendidas, es decir:

   $I.T. = x \cdot P(a)$, donde:

x: precio del bien a

$P(a)$: cantidad del bien a vendido (o demandado)

5. Costo fijo ($C.F.$)

   Son los costos que no varían cuando varía el volumen de producción de una empresa (incluye pago por alquiler, impuestos, etc.)

6. Costos variables ($C.V.$)

   Son los costos que varían directamente con el volumen de producción de una empresa.
   Así:

   $C.V. = x \cdot p$, donde:

   x: número de unidades producidas del bien a

   p : precio de los recursos usados para producir una unidad del bien a

7. Costo total ($C.T.$)

   Es la suma de los costos fijos con los costos variables, es decir:

   $C.T. = C.F. + C.V.$

8. Utilidad total ($U.T.$)

   Es la diferencia entre los ingresos totales con los costos totales, es decir:

   $U.T. = I.T. - C.T.$

9. Punto muerto de una empresa

   Cuando en una empresa los costos totales igualan la utilidad total, se dice que dicha empresa está en un punto muerto.

Ejemplo 43

Un fabricante de zapatos puede venderlos a ₡ 800 el par. Si tiene unos costos fijos totales de ₡ 4000, más unos costos de producción de ₡ 200 por cada par de zapatos que fabrica, determine cuántos pares de zapatos debe fabricar para obtener una utilidad total de ₡ 8000.

Solución

Sea x: número de zapatos que se deben fabricar para obtener una utilidad total de ₡ 8000

Entonces: $800x$: ingreso total por la venta de x pares de zapatos

$200x$: costo de fabricar x pares de zapatos

$200x + 4000$: costos totales

$800x - (200x + 4000)$: utilidad total por la venta de x pares de zapatos

Por las condiciones del problema nos interesa cuando:

$$800x - (200x + 4000) = 8000$$

$$800x - (200x + 4000) = 8000 \implies 800x - 200x - 4000 = 8000$$

$$\begin{aligned} 800x - 200x - 4.000 &= 8000 \\ 600x &= 8000 + 4000 \\ 600x &= 12000 \\ x &= \frac{12000}{600} \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Respuesta: Para que el fabricante tenga una utilidad total de ¢ 8000 debe fabricar 20 pares de zapatos.

■ Ejemplo 44

Una empresa ha determinado que a un precio x estaría dispuesta a ofrecer $3x + 40$ artículos para la venta de un bien A; asimismo, los consumidores estarían dispuestos a demandar $300 - 2x$ artículos del bien A al precio x.

Con base en la información anterior determine:

a) ¿A qué precio los consumidores no comprarían el bien A?

b) ¿Para qué precio del bien A la empresa alcanza su punto de equilibrio?

Solución

a) Si ningún consumidor compra el bien A, significa que la demanda es cero, es decir $300 - 2x = 0$

$$300 - 2x = 0 \implies -2x = -300$$

$$\begin{aligned} -2x &= -300 \\ x &= \frac{-300}{-2} \\ x &= 150 \end{aligned}$$

Respuesta: Los consumidores no comprarían artículos del bien A si su precio es de ¢ 150.

b) Para que la empresa alcance su punto de equilibrio debe suceder que la oferta sea igual a la demanda, o sea:

$$300 - 2x = 3x + 40$$

$$300 - 2x = 3x + 40 \implies 300 - 40 = 3x + 2x$$

$$\begin{aligned} 300-40 &= 3x+2x \\ 260 &= 5x \\ \frac{260}{5} &= x \\ 52 &= x \end{aligned}$$

Respuesta: La empresa alcanza su punto de equilibrio cuando vende el bien A a ₡ 52.

Ejercicios 19

1. Un señor cercó un terreno de forma rectangular. Si los costos son de ₡ 50 por metro para los lados y de ₡ 60 para el frente y el fondo, determine la medida de los lados si se sabe que el perímetro es de 70 m y en cercar gastó en total ₡ 3.800.

2. Un fabricante de camisas puede venderlas a ₡ 280. Sus costos incluyen unos gastos generales fijos de ₡ 32.000 más un costo de producción de ₡ 120 por camisa. Determine cuántas camisas debe producir para obtener una utilidad de ₡ 40.000.

3.7.7 Problemas diversos

Ejemplo 45

De una caja con monedas de oro un ladrón tomó 25 monedas. Luego decidió volver y tomó la cuarta parte de lo que quedaba. Cuando el dueño volvió a tomar monedas descubrió que solamente había 12 monedas.
Con base en la información anterior, determine cuántas monedas había al principio.

Solución

Sea x: número de monedas que había al principio.

Entonces:

$x-25$: número de monedas que quedaron después del primer robo

$3\left(\dfrac{x-25}{4}\right)$: número de monedas que quedaron después del segundo robo

Por la información dada: $\dfrac{3(x-25)}{4}=12$

$$\frac{3(x-25)}{4}=12 \implies 3(x-25)=48$$

$$\begin{aligned} 3(x-25) &= 48 \\ 3x-75 &= 48 \\ 3x &= 123 \\ x &= \frac{123}{3} \\ x &= 41 \end{aligned}$$

Respuesta: Al inicio habían 41 monedas.

Ejemplo 46

Un señor tiene dos terrenos A y B, ambos de forma rectangular. En el terreno A el largo mide 7 metros más que el ancho. En el terreno B, el largo mide 2 metros más que el largo del terreno A y el ancho mide 3 metros menos que el ancho del terreno A. Si el área del terreno B es 37 metros cuadrados menor que el área del terreno A, determine las medidas de los lados de los terrenos.

Solución

Sea x: ancho del terreno A

Entonces:

$x+7$: largo del terreno A

$(x+7)+2$: largo del terreno B

$x-3$: ancho del terreno B

$x(x+7)$: área del terreno A

$[(x+7)+2](x-3)$: área del terreno B

Con base en el planteamiento anterior y en la información dada, se tiene que: $[(x+7)+2](x-3)+37 = x(x+7)$

$[(x+7)+2](x-3)+37 = x(x+7) \implies (x+9)(x-3)+37 = x^2+7x$

$$\begin{aligned}
(x+9)(x-3)+37 &= x^2+7x \\
x^2-3x+9x-27+37 &= x^2+7x \\
x^2+6x+10 &= x^2+7x \\
x^2+6x+10-x^2-7x &= 0 \\
-x+10 &= 0 \\
x &= 10
\end{aligned}$$

R/ El ancho del terreno A mide 10 metros.

El largo del terreno A mide 17 metros.

El largo del terreno B mide 19 metros.

El ancho del terreno B mide 7 metros.

Ejemplo 47

Los asistentes a una cena tienen que pagar en total ¢ 3900. Pero se decide que dos de ellos no paguen la cena, por lo cual los demás tienen que pagar cada uno ¢ 40 más de lo que les correspondía pagar originalmente. Con base en la información anterior determine el número de personas que asistieron a la cena.

Solución

Sea:

x: número de personas que asistieron a la cena

y: cantidad de dinero que originalmente le correspondía pagar a cada uno

Entonces:

$x-2$: número de personas que pagaron la cena

$y+40$: cantidad de dinero que pagaron las $x-2$ personas.

Por lo que:

$x \cdot y = 3900, \quad (x-2)(y+40) = 3900$

$x \cdot y = 3900 \implies y = \dfrac{3900}{x} \qquad (*)$

$(x-2)(y+40) = 3900 \implies (x-2)\left(\dfrac{3900}{x}+40\right) = 3900$

$$\begin{aligned}
(x-2)\left(\frac{3900}{x}+40\right) &= 3900 \\
(x-2)\frac{(3900+40x)}{x} &= 3900 \\
(x-2)(3900+40x) &= 3900x \\
3900x + 40x^2 - 7.800 - 80x &= 3900x \\
40x^2 - 80x - 7800 &= 3900x - 3900x \\
40(x^2 - 2x - 195) &= 0 \\
x^2 - 2x - 195 &= 0
\end{aligned}$$

En este caso tenemos que:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-2)^2 - 4(1)(-195) \\
&= 4 + 780 \\
&= 784
\end{aligned}$$

Por lo que: $\quad x_1 = \dfrac{2+\sqrt{784}}{2}, \quad x_2 = \dfrac{2-\sqrt{784}}{2}$

$$x_1 = \frac{2+28}{2}, \qquad x_2 = \frac{2-28}{2}$$

$$x_1 = \frac{30}{2}, \qquad x_2 = \frac{-26}{2}$$

$$x_1 = 15, \qquad x_2 = -13$$

Observe que como x representa el número de personas, entonces x debe ser positivo, por lo que $x \neq -13$

Respuesta: El número de personas que asistieron a la cena es de 15.

Ejemplo 48

Una fábrica posee dos tipos de máquinas, A y B, las cuales producen dos tipos de artículos. El supervisor de producción notó que:

1. Si la máquina A trabaja 3 horas y la máquina B 4 horas, en total se producen 120 artículos.

2. Si la máquina A trabaja 5 horas y la máquina B 6 horas, en total se producen 194 artículos.

Determine el número de unidades que produce cada máquina por hora.

Solución

Sea:

x: número de unidades por hora que produce la máquina A

y: número de unidades por hora que produce la máquina B.

Entonces:

$3x$: número de unidades que produce A en 3 horas

$4y$: número de unidades que produce B en 4 horas

$5x$: número de unidades que produce A en 5 horas

$6x$: número de unidades que produce B en 6 horas

Por lo que tenemos $\begin{cases} 3x + 4y = 120 \\ 5x + 6y = 194 \end{cases}$

Ahora, multiplicamos por -5 la primera ecuación y multiplicamos por 3 la segunda ecuación y luego sumamos miembro a miembro

$$\begin{array}{r} -5\cdot \\ 3\cdot \end{array}\begin{cases} 3x+4y=120 \\ 5x+6y=194 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{r} -15x-20y=-600 \\ \underline{15x+18y=\ \ 582} \\ -2y=-18 \end{array} \Longrightarrow y=\frac{-18}{-2} \Longrightarrow y=9$$

Sustituyendo el valor de y obtenido en $3x+4y=120$ se tiene:

$$\begin{aligned} 3x+4y=120 \Longrightarrow 3x+4(9) &= 120 \\ 3x+36 &= 120 \\ 3x &= 120-36 \\ 3x &= 84 \\ x &= \frac{84}{3} \\ x &= 28 \end{aligned}$$

Respuesta: La máquina A produce 28 unidades por hora
La máquina B produce 9 unidades por hora

Ejercicios 20

Resuelva cada uno de los siguientes problemas:

1. El largo de un terreno rectangular A es el doble que su ancho. Si en otro terreno B, el largo mide 40 metros más que el largo de A, y el ancho mide 6 m más que el ancho A, determine el largo y el ancho de los terrenos si se sabe que el área del terreno B es el doble que el área del terreno A.

2. Una empresa necesita contratar cierto número de empleados (profesionales y no profesionales). Para esto debe hacerlo tomando en cuenta que:

   - El número de empleados profesionales exceda en 10 al número de empleados no profesionales.

   - El salario semanal de los no profesionales debe ser ₡ 1000 menor que el salario de los profesionales.

   - La planilla semanal de los profesionales debe ser de ₡ 60000 y la de los no profesionales de ₡ 20000.

   - Todos los profesionales tienen igual salario entre ellos.

   - Todos los no profesionales tienen igual salario entre ellos.

   Con base en lo anterior determine qué número de empleados profesionales y no profesionales debe contratar la empresa y su respectivo salario.

3. El gavilán y las palomas:

   Gavilán: ¿A dónde van mis cien palomas?

   Palomas: No somos cien. Nosotras más nosotras, más la mitad de nosotras, más la cuarta parte de nosotras más usted, señor gavilán somos cien.

Calcule el número de aves.

4. Un hotel dispone de dos tipos de habitaciones A y B. El número de habitaciones del tipo A es la mitad de las del tipo B. El precio por cada habitación del tipo A es de $\not\subset$ 600 diarios y el de las del tipo B es de $\not\subset$ 200 diarios.
   Durante un día de la semana no se usaron 2 habitaciones del tipo A y 5 del tipo B y en total, se obtuvieron $\not\subset$ 32800 por día.

   Determine el número de habitaciones del tipo A y del tipo B.

5. El área de un campo rectangular es de 216 m^2 y su perímetro es de 60 m. ¿Cuánto miden cada uno de sus lados?

6. Un caballo y un burro caminaban llevando sobre sus lomos pesados sacos.

   Caballo: ¡Qué sacos más pesados!

   Burro: Si yo tomara un saco de los tuyos, cargaría el doble de los sacos con que tú te quedas, en cambio, si yo te diera uno de los míos, ambos cargaríamos el mismo número de sacos.

   Determine el número de sacos que cargaban cada uno de los animales antes de iniciarse el diálogo.

7. Un hombre ha ganado $\not\subset$ 8400 trabajando cierto número de días.
   Si su salario hubiera sido $\not\subset$ 100 menos, tendría que haber trabajado 2 días más para ganar $\not\subset$ 8400. ¿Cuántos días trabajó y cuál es su salario?

Capítulo 4

Inecuaciones

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

4.1 Intervalos . . . 3
4.1.1 Operaciones con intervalos . . . 6
4.2 Inecuaciones . . . 11
4.2.1 Inecuaciones lineales con una incógnita . . . 15
4.2.2 Inecuaciones en las que cada uno de sus miembros es o puede expresarse como un producto y el otro miembro es cero . . . 26
4.2.3 Resolviendo inecuaciones con tablas de signos . . . 33
4.3 Inecuaciones cuadráticas . . . 39
4.4 Inecuaciones polimoniales de grado mayor que 2 . . . 48
4.4.1 Inecuaciones en las que uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero. . . 55

4.1 Intervalos

En el Capítulo 1, estudiamos algunos subconjuntos del Conjunto de los Números Reales, entre estos vimos: el Conjunto de los Números Naturales, el Conjunto de los Números Enteros, el Conjunto de los Números Racionales y el Conjunto de los Números Irracionales. Estudiaremos a continuación otros subconjuntos del Conjunto de los Números Reales, a los cuales llamaremos intervalos.

Para esto es conveniente recordar que es posible establecer una correspondencia biunívoca, entre los puntos de una recta (recta numérica), y el Conjunto de los Números Reales. Así, para cada número real corresponde un, y sólo un, punto de la recta numérica, e inversamente cada punto de la recta numérica representa un, y sólo un, número real.

■ **Definición 1**

Sean a y b números reales tales que a es menor que b $\quad (a < b)$. Se llama **intervalo abierto** de extremos a y b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición de que:

$$a < x \quad \text{y} \quad x < b$$

Notación:

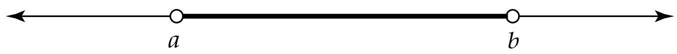
i.) El intervalo abierto de extremos a y b lo denotaremos por $]a, b[$

ii.) Si $a < x$ y $x < b$ escribimos $a < x < b$, por ejemplo, la expresión $-3 < x < 5$, significa que $-3 < x$ y $x < 5$.

De esta manera se tiene que:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x < b\}$$

El intervalo abierto de extremos a y b lo representamos geométricamente de la manera siguiente:



Definición 2

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Se llama **intervalo cerrado** de extremos a y b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición:

$$a \leq x \quad \text{y} \quad x \leq b$$

Notación:

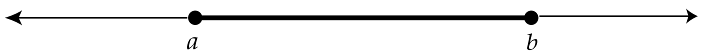
i.) El intervalo cerrado de extremos a y b lo denotaremos por $[a, b]$

ii.) Si $a \leq x$ y $x \leq b$ escribimos $a \leq x \leq b$, por ejemplo, la expresión $-7 \leq x \leq 2$, significa que $-7 \leq x$ y $x \leq 2$.

De esta manera se tiene que:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x \leq b\}$$

El intervalo cerrado de extremos a y b lo representamos geométricamente de la manera siguiente:



Observación: Note que en el intervalo abierto de extremos a y b no se incluyen extremos, mientras que en el intervalo cerrado se incluyen los extremos.

Definición 3

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Se llama intervalo semi-abierto de extremos a y b, "abierto" en a y "cerrado" en b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición:

$$a < x \quad \text{y} \quad x \leq b$$

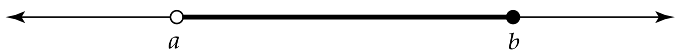
Este intervalo lo denotaremos por: $]a, b]$

Notación: Si $a < x$ y $x \leq b$ escribimos $a < x \leq b$

De esta manera se tiene que:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x \leq b\}$$

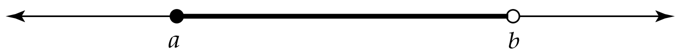
Geométricamente el intervalo semi-abierto, de extremos a y b, "abierto" en a y "cerrado" en b, lo representamos de la manera siguiente:



En forma similar se define el intervalo "semi-abierto" de extremos a y b, "cerrado" en a y "abierto" en b, y se denota $[a, b[$ de la manera siguiente:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x < b\}$$

Geométricamente este intervalo se representa de la manera siguiente:



Definición 4

Sea a un número real. El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x > a$, lo denotaremos por $]a, +\infty[$ (el símbolo $+\infty$ se lee "más infinito") y lo representamos geométricamente de la manera siguiente:

así: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > a\}$

En forma similar:

i.) El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x \geq a$, lo denotaremos por $[a, +\infty[$ y lo representaremos geométricamente de la manera siguiente:

Así: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$

ii.) El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x < a$, lo denotaremos por $]-\infty, a[$ (el símbolo $-\infty$ se lee "menos infinito") y lo representaremos geométricamente de la manera siguiente:

Así: $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$

iii.) El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x \leq a$, lo denotaremos por $]-\infty, a]$ y lo representaremos geométricamente de la manera siguiente:

Así: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$

4.1.1 Operaciones con intervalos

Dado que los intervalos constituyen un tipo particular de conjuntos, definiremos a continuación algunas operaciones, con conjuntos en general, e ilustraremos estas operaciones mediante ejemplos, de entre los cuales en algunos casos se involucrarán intervalos.

Debido a su gran utilidad en este capítulo, las operaciones que nos interesa definir aquí son: la intersección, la unión y la diferencia de conjuntos.

■ **Definición 5**

Sean A y B conjuntos. Se define la intersección de A y B y se denota $A \cap B$, al conjunto cuyos elementos pertenecen a A y también a B.

Simbólicamente se tiene que: $A \cap B = \{x \ / \ x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$

■ **Ejemplo 1**

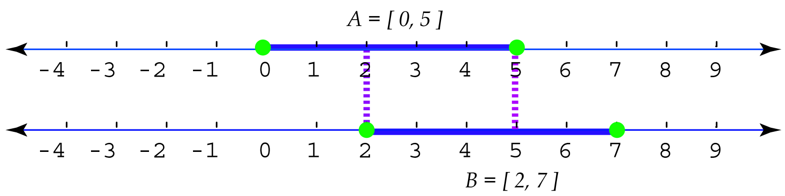
Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Determine $A \cap B$

Solución. Los elementos que están en A y también en B son: 4 y 5.
Por lo tanto: $A \cap B = \{4, 5\}$

Ejemplo 2

Si $A = [0, 5]$ y $B = [2, 7]$, determine $A \cap B$

Solución. Geométricamente podemos representar los conjuntos A y B de la manera siguiente:



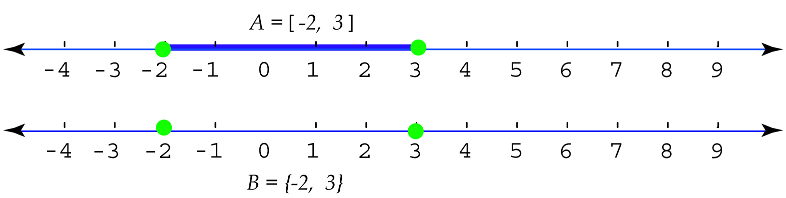
De aquí podemos observar que los elementos que están en A y también en B son los números reales que están entre 2 y 5, incluyendo a éstos; por lo que:

$$A \cap B = [0, 5] \cap [2, 7] = [2, 5] \quad \text{o sea:} \quad A \cap B = [2, 5]$$

Ejemplo 3

Si $A = [-2, 3]$ y $B = \{-2, 3\}$, determine $A \cap B$

Solución. Geométricamente podemos representar a los conjuntos A y B de la siguiente manera:

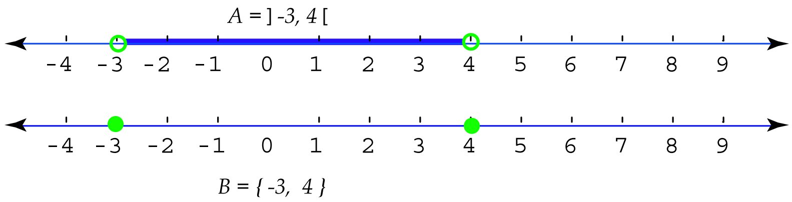


De aquí observamos que los únicos elementos que están en A y también en B son -2 y 3; por lo que:

$$A \cap B = [-2, 3] \cap \{-2, 3\} = \{-2, 3\} \quad \text{o sea} \quad A \cap B = \{-2, 3\}$$

Ejemplo 4

Si $A =]-3, 4[$ y $B = \{-3, 4\}$, determine $A \cap B$



Solución
Como podemos observar A y B no tienen elementos comunes por lo que:

$$A \cap B = \ ]-3, 4[\ \cap \ \{-3, 4\} \ = \emptyset, \quad \text{o sea} \quad A \cap B = \emptyset$$

Ejercicios 1

Para cada uno de los casos siguientes determine el conjunto $A \cap B$.

1.) $A = \ [2, 5]$; $\quad B = [-1, 3[$

2.) $A = \ [2, +\infty[$; $\quad B = \ ]-\infty, 5[$

3.) $A = [-3, 11[$; $\quad B = \{6, 11\}$

4.) $A = \mathbb{R}$; $\qquad B = [-3, 4[$

Definición 6

Sean A y B conjuntos. Se define la unión de A y B y se denota $A \cup B$, al conjunto cuyos elementos pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos A y B.

Simbólicamente se tiene que $\quad A \cup B = \{x/x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$

Ejemplo 5

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, determine $A \cup B$

Solución. $A \cup B \ = \ \{1, 2, 3, 4, 5\} \ \cup \ \{4, 5, 6\} \ = \ \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o sea $A \cup B = \ \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

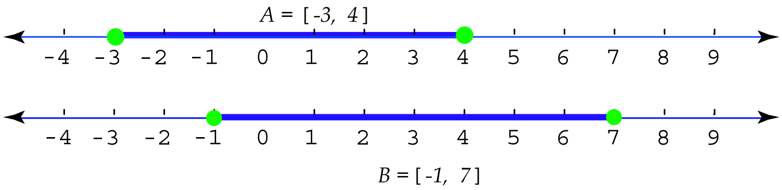
Ejemplo 6

Si $A = [-3, 4]$ y $B = [-1, 7]$, determine $A \cup B$

Solución

De aquí podemos observar que los elementos que están en A o en B, son los números reales que están entre -3 y 7, incluyendo a éstos, así:

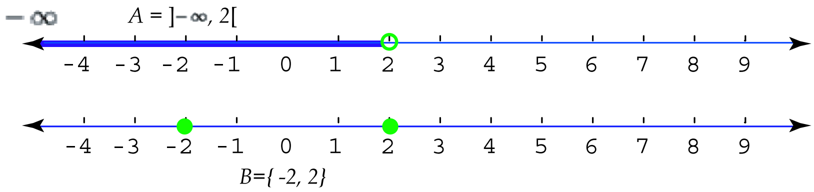
$$A \cup B = \ [-3, 4] \ \cup \ [-1, 7] \ = \ [-3, 7] \quad \text{o sea} \quad A \cup B = \ [-3, 7]$$



■ **Ejemplo 7**

Si $A =]-\infty, 2[$ y $B = \{-2, 2\}$, determine $A \cup B$

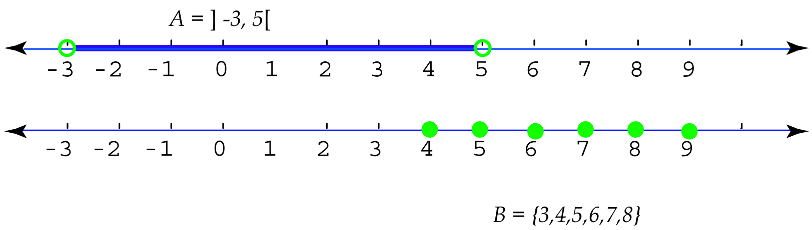
Solución. Representaremos a A y a B geométricamente:



De aquí observamos que: $A \cup B =]-\infty, 2[\ \cup \ \{-2, 2\} \ = \ ]-\infty, 2]$

■ **Ejemplo 8**

Si $A = \ ]-3, 5[$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, determine $A \cup B$



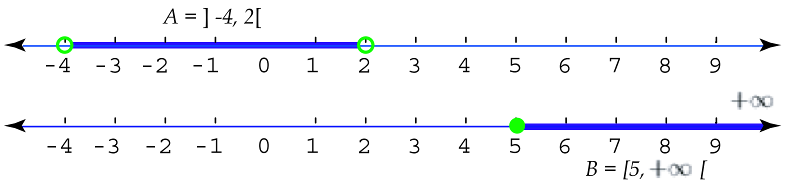
Solución. Representemos a A y a B geométricamente:

De aquí observamos que: $A \cup B = \ ]-3, 5] \ \cup \ \{6, 7, 8\}$

■ **Ejemplo 9**

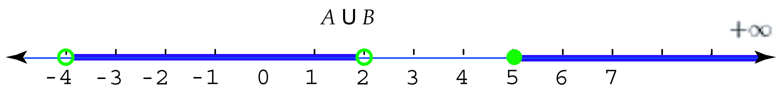
Si $A =]-4, 2[$ y $B = \ [5, +\infty[$, determine $A \cup B$

Solución. Representaremos a A y a B geométricamente:



De aquí observamos que: $A \cup B =]-4, 2[\ \cup\ [5, +\infty[$

Geométricamente podemos representar $A \cup B$ así:



Ejercicios 2

Para cada uno de los casos siguientes determine el conjunto $A \cup B$ y represente geométricamente los conjuntos A, B y $A \cup B$.

1.) $A = [-2, 5] \quad B =]0, 7[$

2.) $A =]-5, 3] \quad B = \{-5, 0, 5, 10\}$

3.) $A =]-\infty, -1[\quad B =]2, +\infty[$

4.) $A =]-\infty, 3[\quad B =]3, +\infty[$

5.) $A = [3, 5[\quad B = \{8, 10\}$

6.) $A =]-\infty, 2[\quad B =]0, +\infty[$

■ **Definición 7**

Sean A y B conjuntos. Se define la **diferencia** de A y B y se denota $A - B$, al conjunto cuyos elementos pertenecen a A y no a B.

■ **Ejemplo 10**

Si $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine $A - B$ y $B - A$

Solución

i.) Los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B son $6, 8, 10$; por lo que $A - B = \{6, 8, 10\}$

ii.) Los elementos que pertenecen a B y no pertenecen a A son $1, 3, 5$; por lo que $B - A = \{1, 3, 5\}$

■ **Ejemplo 11**

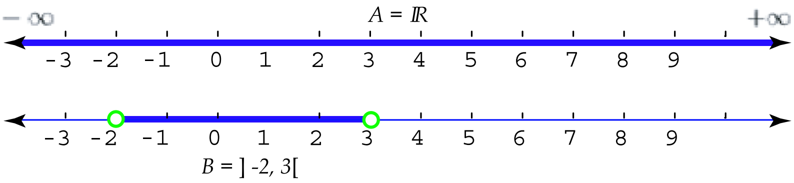
Si $A = [-3, 5]$ y $B = \{5\}$, determine $A - B$

Solución. $A - B = [-3, 5] - \{5\} = [-3, 5[$ o sea: $A - B = [-3, 5[$

■ **Ejemplo 12**

Si $A = \mathbb{R}$ y $B =]-2, 3[$, determine $A - B$ y $B - A$

Solución. Representemos a A y a B geométricamente.



De aquí podemos observar que:

i.) $A - B = \mathbb{R} -]-2, 3[\; = \;]-\infty, -2[\; \cup \; [3, +\infty[$

ii.) $B - A =]-2, 3[- \mathbb{R} = \emptyset$; o sea: $B - A = \emptyset$

Ejercicios 3

Para cada uno de los casos siguientes determine el conjunto $A - B$ y $B - A$.

1.) $A = [-10, 7]$; $B = \{-10, 7\}$

2.) $A =]-\infty, 3]$; $B = \{0, 3, 5\}$

3.) $A = \mathbb{R}$; $B =]-5, 9[$

4.) $A =]-2, 6[$; $B = [3, +\infty[$

5.) $A =]-\infty, 2[$; $B =]-3, +\infty[$

4.2 Inecuaciones

■ **Definición 8**

Si a y b representan expresiones en el conjunto de los números reales entonces expresiones como: $a < b$, $a \leq b$, $a > b$ y $a \geq b$ reciben el nombre de *desigualdades* y se dice que a y b son los miembros de la desigualdad.

Ejemplo 13

a.) $50 > 22$

b.) $\dfrac{5}{2} \geq -2$

c.) $3 < \sqrt{24}$

d.) $x + 2 \geq 5$

e.) $x \leq y$

f.) $x + 3 < y - 5$

Definición 9

Una desigualdad entre dos expresiones algebraicas donde al menos una de ellas involucra variables, recibe el nombre de *inecuación*.

Ejemplo 14

a.) $x + 2 \geq 5$

b.) $x \cdot y + z \leq x + 3$

c.) $\dfrac{x + y}{x - y} > 1$

d.) $\sqrt{5x - 2} < 3$

e.) $x + y < -3x - y$

d.) $a^3 - 1 \geq 0$

Definición 10

En una inecuación las variables involucradas reciben el nombre de **incógnitas**.

Definición 11

Si la inecuación involucra n variables, se dice que es una inecuación con n incógnitas.

A continuación nuestro objetivo es estudiar, analizar y resolver inecuaciones con una incógnita.

■ **Definición 12**

En una inecuación con una incógnita, cualquier número real que esté contenido en el dominio de las incógnitas, y que al sustituirse por la incógnita en la inecuación hace que la desigualdad correspondiente sea verdadera, es *una solución de la inecuación.*

■ **Ejemplo 15**

a.) En $x+2>3$; si x se sustituye por 5, se obtiene una desigualdad verdadera: $5+2>3$; además 5 pertenece al dominio de la incógnita, por lo que 5 es una solución de la inecuación $x+2>3$.

b.) En $x^2 \geq 5$, si x se sustituye por -3, se obtiene una desigualdad verdadera: $(-3)^2 \geq 5$; además -3 pertenece al dominio de la incógnita, por lo que -3 es una solución de la inecuación $x^2 \geq 5$.

c.) En $\sqrt{x+2}<2$; si x se sustituye por 3, se obtiene una desigualdad *falsa*: $\sqrt{3+2}<2$ por lo que 3 *no* es una solución de la inecuación $\sqrt{x+2}<2$.

Ejercicios 4

Para cada una de las siguientes inecuaciones, escriba 3 soluciones:

1.) $x+3 \leq -6$

2.) $\dfrac{1}{x} > 7$

3.) $\sqrt{x+3} \geq x$

4.) $7-x^2>0$

■ **Definición 13**

Dada una inecuación de una incógnita, el subconjunto S del dominio de la incógnita, cuyos elementos son las soluciones de la inecuación dada, recibe el nombre de *conjunto solución.*

■ **Ejemplo 16**

a.) En $x > -3$, el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$, y esta desigualdad es verdadera únicamente para los valores de x mayores que -3; por lo que su conjunto solución es $]-3,+\infty[$ o sea:

$$S =]-3,+\infty[$$

b.) En $x^2 - 4 \leq 0$ el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$ y se puede demostrar que esta desigualdad es verdadera únicamente para los valores de x mayores o iguales que -2 y menores o iguales que 2, por lo que su conjunto solución es $[-2,2]$ o sea:

$$S = [-2,2]$$

c.) En $x^2-2x-3 > 0$; el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$, y se puede demostrar que esta desigualdad es verdadera únicamente para los valores de x menores que -1 o mayores que 3, por lo que su conjunto solución es $]-\infty,-1[\ \cup\ ]3,+\infty[$ o sea:

$$S =]-\infty,-1[\ \cup\ ]3,+\infty[$$

Convenio: Resolver una inecuación consiste en determinar su conjunto solución.

Definición 14

Diremos que dos inecuaciones con una incógnita son equivalentes sí y solo sí, tienen el mismo dominio de la incógnita y el mismo conjunto solución.

Ejemplo 17

a.) El conjunto solución de $x \geq 3$ es $[3,+\infty[$

El conjunto solución de $3x \geq 6$ es $[3,+\infty[$

como las inecuaciones $x \geq 3$ y $3x \geq 6$ tienen el mismo conjunto solución , entonces son equivalentes entre sí.

b.) El conjunto solución de $x+2 < 7$ es $]-\infty,5[$

El conjunto solución de $x < 5$ es $]-\infty,5[$

como las inecuaciones $x+2 < 7$ y $x < 5$ tienen el mismo conjunto solución , entonces son equivalentes entre sí.

4.2.1 Inecuaciones lineales con una incógnita

Definición 15

Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$. Se llama inecuación lineal o inecuación de primer grado con una incógnita a toda inecuación que se pueda llevar a alguna de las formas siguientes: $ax + b < c$, $ax + b \leq c$; $ax + b > c$ o $ax + b \geq c$

Para resolver algunas inecuaciones lineales usaremos el concepto de inecuaciones equivalentes. Para esto transformaremos la inecuación dada en otras equivalentes a la original, hasta obtener una inecuación de alguna de las formas: $x < c$; $x \leq c$; $x > c$ o $x \geq c$; donde x es la incógnita y c es una constante.

Algunas transformaciones que se pueden usar para obtener inecuaciones equivalentes entre sí.

1.) Permutación de miembros

Se pueden intercambiar los miembros de una inecuación de acuerdo con las propiedades siguientes:

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$

i.) $a < b \Rightarrow b > a$

ii.) $a \leq b \Longrightarrow b \geq a$

iii.) $a > b \Longrightarrow b < a$

iv.) $a \geq b \Longrightarrow b \leq a$

Ejemplo 18

a.) $4 < x - 2 \Longrightarrow x - 2 > 4$

b.) $8 \leq x + 3 \Longrightarrow x + 3 \geq 8$

c.) $-3 > 2x + 3 \Longrightarrow 2x + 3 < -3$

d.) $2x - 1 \geq 3 \Longrightarrow 3 \leq 2x - 1$

2.) Sumar una constante k a ambos miembros de la inecuación

Se puede sumar una constante k a ambos miembros de una inecuación de acuerdo con las propiedades siguientes:

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, y $k \in \mathbb{R}$, k constante *i.)* $a < b \Longrightarrow a + k < b + k$

ii.) $a \leq b \Longrightarrow a + k \leq b + k$

iii.) . $a > b \Longrightarrow a + k > b + k$

iv.) $a \geq b \Longrightarrow a + k \geq b + k$

Ejemplo 19

a.) $x + 2 > -3 \Longrightarrow x + 2 + (-2) > -3 + (-2)$

b.) $2x - 3 \leq 5 \Longrightarrow 2x - 3 + 3 \leq 5 + 3$

c.) $-2x + 5 \geq 2 \Longrightarrow -2x + 5 + (-5) \geq 2 + (-5)$

d.) $x - 3 < -7 \Longrightarrow x - 3 + 3 < -7 + 3$

3.) Multiplicar por una constante k, positiva, ambos miembros de la inecuación

Se puede multiplicar cada miembro de la inecuación por una constante k positiva de acuerdo con las propiedades siguientes:

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, k *una constante positiva*

i.) $a < b \Longrightarrow ka < kb$

ii.) $a \leq b \Longrightarrow ka \leq kb$

iii.) $a > b \Longrightarrow ka > kb$

iv.) $a \geq b \Longrightarrow ka \geq kb$

Ejemplo 20

a.) $2x - 4 \leq 6 \Longrightarrow \frac{1}{2}(2x - 4) \leq \frac{1}{2} \cdot 6$

b.) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} > 3 \Longrightarrow 4\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) > 4 \cdot 3$

c.) $3x + 2 < 5 \Longrightarrow 7(3x + 2) < 7 \cdot 5$

d.) $\frac{1}{3}x + 7 \geq -3 \Longrightarrow 6\left(\frac{1}{3}x + 7\right) \geq 6(-3)$

4.) Multiplicar por una constante k, negativa, a ambos miembros de la inecuación.

Se puede multiplicar cada miembro de la inecuación por una constante k negativa de acuerdo con las propiedades siguientes.

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, y $k \in \mathbb{R}$, k *una constante negativa*

i.) $a < b \implies ka > kb$

ii.) $a \leq b \implies ka \geq kb$

iii.) $a > b \implies ka < kb$

iv.) $a \geq b \implies ka \leq kb$

■ **Ejemplo 21**

a.) $\dfrac{-1}{3}\,x < 7 \implies -3 \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\,x\right) > -3 \cdot 7$

b.) $-2x \leq 5 \implies -11(-2x) \geq -11 \cdot 5$

c.) $-x + 3 > 2 \implies -1(-x+3) < -1 \cdot 2$

d.) $\dfrac{-x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \geq 5 \implies -\sqrt{2}\left(\dfrac{-x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \leq -\sqrt{2} \cdot 5$

Observación: Para resolver inecuaciones, además de las transformaciones enunciadas e ilustradas anteriormente, se pueden aplicar propiedades y algoritmos de la adición y de la multiplicación definidas en $\mathbb{R}$ (conmutatividad, asociatividad, distributividad, etc.)

Veamos algunos ejemplos que se resuelven usando algunas de las transformaciones anteriores.

■ **Ejemplo 22**

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones

a.) $x + 3 < -2$

b.) $x - 7 \leq 23$

c.) $2x + 5 > 9$

d.) $3x - 2 \geq -11$

e.) $-3x-5 \leq 13$

f.) $3-2x > -2$

Solución

a.) $x+3<-2$

$$\begin{aligned} x+3+-3 &< -2+-3 \\ x+0 &< -5 \\ x &< -5 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $x+3<-2$ es $]-\infty,-5[$

$\therefore\ S\ =]-\infty,-5[$

b.) $x-7 \leq 23$

$$\begin{aligned} x-7+7 &\leq 23+7 \\ x+0 &\leq 30 \\ x &\leq 30 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $x-7 \leq 23$ es $]-\infty,30]$

$\therefore\ S =]-\infty,30]$

c.) $2x+5>9$

$$\begin{aligned} 2x+5+-5 &> 9+-5 \\ 2x+0 &> 4 \\ 2x &> 4 \\ \frac{1}{2}\cdot 2x &> \frac{1}{2}\cdot 4 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $2x+5>9$ es $]2,+\infty[$

$\therefore\ S\ =]2,+\infty[$

d.) $3x-2 \geq -11$

$$\begin{aligned} 3x-2+2 &\geq -11+2 \\ 3x+0 &\geq -9 \\ 3x &\geq -9 \\ \frac{1}{3}\cdot 3x &> \frac{1}{3}\cdot -9 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $3x-2 \geq -11$ es $[-3,+\infty[$

$\therefore\ S\ =\ [-3,+\infty[$

e.) $-3x-5 \leq 13$

$$\begin{aligned} -3x-5+5 &\leq 13+5 \\ -3x+0 &\leq 18 \\ -3x &\leq 18 \\ \frac{-1}{3}\cdot -3x &\geq \frac{-1}{3}\cdot 18 \\ x &\geq -6 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $-3x-5 \leq 13$ es $[-6,+\infty[$

$\therefore\ S\ =\ [-6,+\infty[$

f.) $3-2x > -2$

$$\begin{aligned} -3+3-2x &> -3-2 \\ 0-2x &> -5 \\ -2x &> -5 \\ \frac{-1}{2}\cdot -2x &< \frac{-1}{2}\cdot -5 \\ x &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $3-2x > -2$ es $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

$\therefore\ S\ =\ \left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

Not: En el proceso de resolución de inecuaciones no es necesario indicar todas las transformaciones que se realicen, en las inecuaciones que resolveremos en adelante, omitiremos escribir algunas transformaciones.

Ejemplo 23

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones

a.) $2x + 3 > -5$

b.) $\dfrac{-x}{3} - 3 > 2$

c.) $5x - 3 < 8x - 2$

d.) $-2 + 4x \leq 5x - 9$

e.) $\dfrac{-x}{4} + 2 > \dfrac{2x}{3} + 7$

f.) $(x-1)(x+2) < x^2 + 3$

g.) $2x - 3(x+1) \geq 3x$

h.) $2(x-3) + 5 \geq -x$

i.) $\dfrac{x-3}{4} - 1 > \dfrac{x}{2}$

Solución

a.) $2x + 3 > -5$

$$\begin{aligned} 2x &> -5 + -3 \\ 2x &> -8 \\ x &> \frac{1}{2} \cdot -8 \\ x &> -4 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $2x + 3 > -5$ es $]-4, +\infty[$

$\therefore\ S =]-4, +\infty[$

b.) $\dfrac{-x}{3} - 3 > 2$

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{3} &> 2+3 \\
\frac{-x}{3} &> 5 \\
x &< -3\cdot 5 \\
x &< -15
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{-x}{3} - 3 > 2$ es $]-\infty, -15[$

$\therefore\ S\ =\ ]-\infty, -15[$

c.) $5x - 3 < 8x - 2$

$$\begin{aligned}
5x + -8x &< -2+3 \\
-3x &< 1 \\
x &> \frac{-1}{3}\cdot 1 \\
x &> \frac{-1}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $5x - 3 < 8x - 2$ es $\left]\dfrac{-1}{3}, +\infty\right[$

$\therefore\ S\ =\ \left]\dfrac{-1}{3}, +\infty\right[$

d.) $-2 + 4x \leq 5x - 9$

$$\begin{aligned}
4x + -5x &\leq -9+2 \\
-x &\leq -7 \\
x &\geq (-1)(-7) \\
x &\geq 7
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $-2 + 4x \leq 5x - 9$ es $[7, +\infty[$

$\therefore\ S\ =\ [7, +\infty[$

e.) $\dfrac{-x}{4} + 2 > \dfrac{2x}{3} + 7$

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{4} - \frac{2x}{3} &> 7 + -2\\
\frac{-3x - 8x}{12} &> 5\\
-3x - 8x &> 12 \cdot 5\\
-11x &> 60\\
x &< \frac{-1}{11} \cdot 60\\
x &< \frac{-60}{11}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{-x}{4} + 2 > \dfrac{2x}{3} + 7$ es $\left]-\infty, \dfrac{-60}{11}\right[$

$\therefore\ S\ = \left]-\infty, \dfrac{-60}{11}\right[$

f.) $(x-1)(x+2) < x^2 + 3$

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x - x - 2 &< x^2 + 3\\
x^2 + -x^2 + 2x - x &< 3 + 2\\
x &< 5
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $(x-1)(x+2) < x^2 + 3$ es $]-\infty, 5[$

$\therefore\ S\ =]-\infty, 5[$

g.) $2x - 3(x+1) \geq 3x$

$$\begin{aligned}
2x - 3x - 3 &\geq 3x\\
2x - 3x - 3x &\geq 3\\
-4x &\geq 3\\
x &\leq \frac{-1}{4} \cdot 3\\
x &\leq \frac{-3}{4}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $2x - 3(x+1) \geq 3x$ es $\left]-\infty, \dfrac{-3}{4}\right]$

$\therefore\ S\ = \left]-\infty, \dfrac{-3}{4}\right]$

h.) $2(x-3)+5 \geq -x$

$$\begin{aligned} 2x-6+5 &\geq -x \\ 2x+x &\geq 6-5 \\ 3x &\geq 1 \\ x &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $2(x-3)+5 \geq -x$ es $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

$\therefore\ S = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

i.) $\dfrac{x-3}{4} - 1 > \dfrac{x}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} - \frac{3}{4} - 1 &> \frac{x}{2} \\ \frac{x}{4} - \frac{x}{2} &> \frac{3}{4} + 1 \\ \frac{2x-4x}{8} &> \frac{7}{4} \\ 2x-4x &> 8 \cdot \frac{7}{4} \\ -2x &> 14 \\ x &< \frac{-14}{2} \\ x &< -7 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{x-3}{4} - 1 > \dfrac{x}{2}$ es $]-\infty, -7[$

$\therefore\ S =]-\infty, -7[$

Ejercicios 5

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $-2x - \dfrac{5}{3} > \dfrac{x}{3} + 10$

2.) $-3x - 4 \leq \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$

3.) $x - (5x - 1) - \dfrac{7 - 5x}{10} < 1$

4.) $-2x + 5 > x + 2$

5.) $\dfrac{x - 3}{4} - 1 > \dfrac{x}{2}$

6.) $-\dfrac{7x}{2} + 3 \leq \dfrac{3}{2}\,x$

En los ejemplos anteriores hemos resuelto inecuaciones en la cuales, después de haber realizado algunas transformaciones obtenemos una desigualdad de alguno de los tipos $x < c$, $x \leq c$, $x > c$, $x \geq c$, donde "x" es la incógnita y "c" es una constante real. Sin embargo al resolver inecuaciones, después de realizar ciertas transformaciones podemos obtener una desigualdad numérica de alguno de los tipos $a < c$, $a \leq c$, $a \geq c$, $a > c$, en estos casos el conjunto solución de estas inecuaciones se determina de acuerdo con las siguientes reglas.

Regla 1

Si en el proceso de resolución de una inecuación se obtiene una desigualdad numérica verdadera, entonces el conjunto solución de de la inecuación original es el dominio de la incógnita.

Regla 2

Si en el proceso de resolución de una inecuación se obtiene una desigualdad numérica falsa, entonces el conjunto solución de de la inecuación original es el conjunto vacío ($\emptyset$).

■ **Ejemplo 24**

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones

a.) $x - 3(x - 1) < -2x + 5$

b.) $(x - 2)^2 - x^2 + 4x \geq 0$

c.) $-2x + 13 \leq 2(5 - x)$

d.) $(x - 3)(x + 2) - (x^2 - x + 8) > 0$

Solución

a.) $x - 3(x - 1) < -2x + 5$

$$x - 3x + 3 < -2x + 5$$

$$x - 3x + 2x + 3 < 5$$

$$0x + 3 < 5$$

$$3 < 5$$

Como esta desigualdad es verdadera, entonces el conjunto solución de $x-3(x-1) < -2x+5$ es el dominio de la incógnita, en este caso $\mathbb{R}$

$\therefore S = \mathbb{R}$

b.) $(x-2)^2 - x^2 + 4x \geq 0$

$$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x \geq 0$$

$$4 \geq 0$$

Como esta desigualdad es verdadera, entonces el conjunto solución de $(x-2)^2 - x^2 + 4x \geq 0$ es el dominio de la incógnita, en este caso $\mathbb{R}$

$\therefore S = \mathbb{R}$

c.) $-2x + 13 \leq 2(5 - x)$

$$-2x + 13 \leq 10 - 2x$$

$$-2x + 2x + 13 \leq 10$$

$$13 \leq 10$$

Como esta desigualdad es falsa, entonces el conjunto solución de $-2x + 13 \leq 2(5 - x)$ es vacío

$\therefore S = \emptyset$

d.) $(x-3)(x+2) - (x^2 - x + 8) > 0$

$$x^2 + 2x - 3x - 6 - x^2 + x - 8 > 0$$

$$-14 > 0$$

Como esta desigualdad es falsa, entonces el conjunto solución de $(x-3)(x+2) - (x^2 - x + 8) > 0$ es vacío

$\therefore S = \emptyset$

Ejercicios 6

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $3x + 5 < 20$

2.) $x - 5 \leq 2x - 6$

3.) $5x - 2 > 3x - 4$

4.) $3 - 7x < 7(2 - x)$

5.) $\dfrac{-3}{4}\,x + 12 \geq 24$

6.) $(x - 1)^2 - 7 > (x - 2)^2$

7.) $(x - 4)(x + 5) < (x - 3)(x - 2)$

8.) $(x - 2)(x + 2) \leq x^2 - 7$

9.) $2x - 1 < 4x - 3$

10.) $3 - 2x > 2x - 5$

11.) $x - 2(x + 3) \geq 5 - x$

12.) $x - 5(x + 2) \geq -2(2x + 6)$

4.2.2 Inecuaciones en las que cada uno de sus miembros es o puede expresarse como un producto y el otro miembro es cero

Las inecuaciones de este tipo se resuelven aplicando la ley de signos de la multiplicación definida en el conjunto de los números reales, de acuerdo con las siguientes propiedades:

Sean $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$

1.) $a \cdot b > 0 \Longrightarrow [(a > 0 \ y \ b > 0) \ o \ (a < 0 \ y \ b < 0)]$

2.) $a \cdot b < 0 \Longrightarrow [(a > 0 \ y \ b < 0) \ o \ (a < 0 \ y \ b > 0)]$

■ **Ejemplo 25**

Resuelva la siguiente inecuación: $(x + 3)(x - 2) < 0$

Solución. Aplicando la propiedad 2 anterior se tiene que:

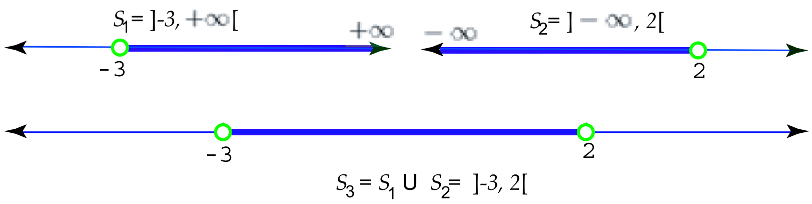
$(x + 3)(x - 2) < 0 \quad \Longrightarrow \quad ((x + 3) > 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) < 0) \quad \text{o} \quad ((x + 3) < 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) > 0)$

i.) Analicemos el caso $x + 3 > 0$ y $x - 2 < 0$

En este caso se tiene que:

$x + 3 > 0 \implies x > -3 \implies S_1 =]-3, +\infty[$

$x - 2 < 0 \implies x < 2 \implies S_2 =]-\infty, 2[$

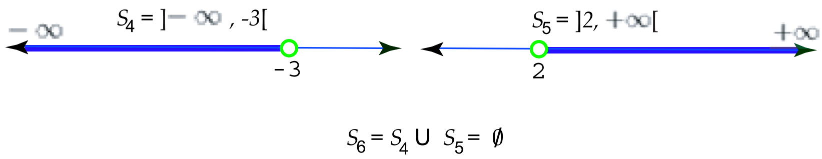


ii.) Analicemos el caso $x + 3 < 0$ y $x - 2 > 0$

En este caso se tiene que:

$x + 3 < 0 \implies x < -3 \implies S_4 =]-\infty, -3[$

$x - 2 > 0 \implies x > 2 \implies S_5 =]2, \infty[$



$S_6 = S_4 \cap S_5 = \emptyset$

La solución final será igual a la unión de las soluciones obtenidas en los casos (i) y (ii), o sea:

$$\therefore\ S_F =]-3, 2[$$

Nota: El procedimiento usado anteriormente para resolver inecuaciones de este tipo es un poco largo y tedioso, por esta razón es que preferimos resolver este tipo de inecuaciones por medio de una "tabla de signos", en la cual usaremos dos resultados generales que se enunciaran posteriormente, pero antes resolveremos algunos ejemplos que son casos particulares de dichos resultados.

■ Ejemplo 26

Para cada uno de los casos siguientes determine el intervalo en donde la expresión dada es positiva, y el intervalo en donde dicha expresión es negativa.

a.) $2x+3$

b.) $-x+3$

c.) $-3x-2$

d.) $x+5$

Solución

a.) $2x+3$

i.) $2x+3$ es positiva si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & 2x+3 & > & 0 \\ \iff & 2x & > & -3 \\ \iff & x & > & \dfrac{-3}{2} \end{array}$$

o sea: $2x+3$ es positiva si y sólo sí: $x \in \left]\dfrac{-3}{2}, +\infty\right[$

ii.) $2x+3$ es negativa si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & 2x+3 & < & 0 \\ \iff & 2x & < & -3 \\ \iff & x & < & \dfrac{-3}{2} \end{array}$$

o sea: $2x+3$ es negativa si y sólo sí: $x \in \left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$ $\quad$ $-3/2$	$-3/2$ $\quad$ $+\infty$
$2x+3$	$-$	$+$

b.) $-x+3$

i.) $-x+3$ es positiva si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & -x+3 & > & 0 \\ \iff & -x & > & -3 \\ \iff & x & < & 3 \end{array}$$

o sea: $-x+3$ es positiva si y sólo sí: $x \in]-\infty, 3[$

ii.) $2x + 3$ es negativa si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & -x+3 & < & 0 \\ \Longleftrightarrow & -x & < & -3 \\ \Longleftrightarrow & x & > & 3 \end{array}$$

o sea: $-x + 3$ es negativa si y sólo sí: $x \in \,]3, +\infty[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x+3$	$+$	$-$	

c.) $-3x - 2$

i.) $-3x - 2$ es positiva si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & -3x-2 & > & 0 \\ \Longleftrightarrow & -3x & > & 2 \\ \Longleftrightarrow & x & < & \dfrac{-2}{3} \end{array}$$

o sea: $-3x - 2$ es positiva si y sólo sí: $x \in \left]-\infty, \dfrac{-2}{3}\right[$

ii.) $-3x - 2$ es negativa si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & -3x-2 & < & 0 \\ \Longleftrightarrow & -3x & < & 2 \\ \Longleftrightarrow & x & > & \dfrac{-2}{3} \end{array}$$

o sea: $-3x - 2$ es negativa si y sólo sí: $x \in \left]\dfrac{-2}{3}, +\infty\right[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	$-2/3$	$+\infty$
$-3x-2$	$+$	$-$	

d.) $x + 5$

i.) $x+5$ es positiva si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & x+5 & > & 0 \\ \Longleftrightarrow & x & > & -5 \end{array}$$

o sea: $x+5$ es positiva si y sólo sí: $x \in]-5,+\infty[$

ii.) $x+5$ es negativa si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & x+5 & < & 0 \\ \Longleftrightarrow & x & < & -5 \end{array}$$

o sea:

$x+5$ es negativa si y sólo sí:

$x \in]-\infty,-5[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	-5	$+\infty$
$x+5$	$-$	$+$	

Resultado 1

Si a y b son constantes reales tales que $a>0$, y x es una variable real, entonces se cumple que:

i.) $ax+b>0 \Longleftrightarrow x>\dfrac{-b}{a}$

$\left(ax+b \text{ es positivo si y sólo sí } x \text{ es mayor que } \dfrac{-b}{a}\right)$

ii.) $ax+b<0 \Longleftrightarrow x<\dfrac{-b}{a}$

$\left(ax+b \text{ es negativo si y sólo sí } x \text{ es menor que } \dfrac{-b}{a}\right)$

En forma resumida podemos expresar este resultado en la "tabla" siguiente:

	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	$+$	

Siempre que se cumpla que $a>0$

Resultado 2

Si a y b son constantes reales tales que $a < 0$, y x es variable real, entonces se cumple que:

$i.)$ $ax + b > 0 \Longleftrightarrow x < \dfrac{-b}{a}$ $\left(ax + b \text{ es positivo si y sólo sí } x \text{ es menor que } \dfrac{-b}{a}\right)$

$ii.)$ $ax + b < 0 \Longleftrightarrow x > \dfrac{-b}{a}$ $\left(ax + b \text{ es negativo si y sólo sí } x \text{ es mayor que } \dfrac{-b}{a}\right)$

En forma resumida podemos expresar este resultado en la"tabla" siguiente:

	$-\infty$ $\quad\dfrac{-b}{a}$	$\quad +\infty$
$ax + b$	$+$	$-$

Siempre que se cumpla que $a < 0$

Ejemplo 27

Para cada uno de los casos siguientes, use los resultados anteriores para determinar el intervalo en donde la expresión dada es positiva, y el intervalo en donde es negativa.

a.) $3x - 2$

b.) $-2x + 5$

c.) $-x - 2$

d.) $x - 3$

Solución
De acuerdo con los resultados anteriores se tiene:

a.) $3x - 2$

$i.)$ $3x - 2 > 0 \Longleftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$ o sea: $3x - 2$ es positivo si y sólo sí $x \in \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$

$ii.)$ $3x - 2 < 0 \Longleftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$ o sea: $3x - 2$ es negativo si y sólo sí $x \in \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$

En forma resumida se tiene:

$-\infty \qquad 2/3 \qquad +\infty$

$3x-2$	$-$	$+$

b.) $-2x+5$

i.) $-2x+5>0 \Longleftrightarrow x<\dfrac{5}{2}$ o sea: $-2x+5$ es positivo si y sólo sí $x \in \left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$

ii.) $-2x+5<0 \Longleftrightarrow x>\dfrac{5}{2}$ o sea: $-2x+5$ es negativo si y sólo sí $x \in \left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	$5/2$	$+\infty$
$-2x+5$	$+$	$-$	

c.) $-x-2$

i.) $-x-2>0 \Longleftrightarrow x<-2$ o sea $-x-2$ es positivo si y sólo sí $x \in]-\infty,-2[$

ii.) $-x-2<0 \Longleftrightarrow x>-2$ o sea $-x-2$ es negativo si y sólo sí $x \in]-2,+\infty[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	-2	$+\infty$
$-x-2$	$+$	$-$	

d.) $x-3$

i.) $x-3>0 \Longleftrightarrow x>3$ o sea: $x-3$ es positivo si y sólo sí $x \in]3,+\infty[$

ii.) $x-3<0 \Longleftrightarrow x<3$ o sea: $x-3$ es negativo si y sólo sí $x \in]-\infty,3[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$+$	

Ejercicios 7

Para cada uno de los casos siguientes use los resultados anteriores para determinar el intervalo en donde la expresión dada es positiva, y el intervalo donde es negativa.

1.) $2x+9$

2.) $-3x+1$

3.) $-x+7$

4.) $\sqrt{3}\,x-11$

5.) $\pi x-8$

6.) $\dfrac{-3}{2}x+13$

4.2.3 Resolviendo inecuaciones con tablas de signos

Ejemplo 28

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $(x+2)(x-3)<0$

b.) $(x+4)(3x+2)>0$

c.) $(3x+3)(2x+1)<0$

d.) $(2x+5)(-x+1)>0$

e.) $x(-x-7)(-5x+2)<0$

f.) $-x(x-7)(x+5)>0$

Solución

a.) $(x+2)(x-3)<0$

Por los resultados (1) y (2) anteriores podemos determinar los intervalos en los cuales cada uno de los factores $(x+2)$ y $(x-3)$, son positivos o negativos, lo cual se puede expresar en forma resumida en una tabla como la siguiente:

	$-\infty$ -2	-2 3	3 $+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$

Los signos correspondientes al producto $(x+2)(x-3)$, se obtienen usando los signos de los factores $(x+2)$ y $(x-3)$ y la ley de signos para la multiplicación definida en $\mathbb{R}$, así obtenemos:

$$-\infty \qquad -2 \qquad 3 \qquad +\infty$$

$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

De esta última tabla puede observarse que el producto $(x+2)(x-3)$ es negativo, si y sólo sí $x \in]-2,3[$ y por lo tanto el conjunto solución de la inecuación $(x+2)(x-3) < 0$ es: $]-2,3[$ o sea:

$$S =]-2\,,\,3[$$

b.) $(x+4)(3x+2) > 0$

En forma similar al caso anterior obtenemos la siguiente tabla:

$$-\infty \qquad -4 \qquad \frac{-2}{3} \qquad +\infty$$

$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$

Los signos correspondientes al producto $(x+4)(3x+2)$, se obtienen usando los signos de los factores $(x+4)$ y $(3x+2)$ y la ley de signos para la multiplicación definida en $\mathbb{R}$, así obtenemos:

$$-\infty \qquad -4 \qquad \frac{-2}{3} \qquad +\infty$$

$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$(x+4)(3x+2)$	$+$	$-$	$+$

De esta tabla puede observarse que el producto $(x+4)(3x+2)$ es positivo si y sólo si $x \in]-\infty,-4[$ o $x \in \left]\frac{-2}{3},-\infty\right[$ y por lo tanto el conjunto solución de la inecuación $(x+4)(3x+2) > 0$ es:
$]-\infty,-4[\ \cup \left]\frac{-2}{3},+\infty\right[$ o sea:

$$\text{S} =]-\infty,-4\,[\ \cup \left]\frac{-2}{3},+\infty\right[$$

Nota: En los ejemplos (a) y (b) anteriores se ha explicado la forma en que se han construido cada una de las tablas correspondientes y también la forma de determinar el conjunto solución de cada inecuación. En los ejemplos siguientes omitiremos la explicación.

c.) $(3x+3)(2x+1) < 0$

$$-\infty \qquad -1 \qquad \frac{-1}{2} \qquad +\infty$$

$3x+3$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$
$(3x+3)(2x+1)$	$+$	$-$	$+$

$$\therefore \ \mathrm{S} = \left]-1, \frac{-1}{2}\right[$$

d.) $(2x+5)(-x+1) > 0$

$$-\infty \qquad \frac{-5}{2} \qquad 1 \qquad +\infty$$

$2x+5$	$-$	$+$	$+$
$-x+1$	$+$	$+$	$-$
$(2x+5)(-x+1)$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \ \mathrm{S} = \left]\frac{-5}{2}, 1\right[$$

e.) $x(-x-7)(-5x+2) < 0$

$$-\infty \qquad -7 \qquad 0 \qquad \frac{2}{5} \qquad +\infty$$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$-x-7$	$+$	$-$	$-$	$-$
$-5x+2$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x(-x-7)(-5x+2)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\therefore \ \mathrm{S} =]-\infty, -7[\ \cup \left]0, \frac{2}{5}\right[$$

f.) $-x(x-7)(x+5) > 0$

$$-\infty \qquad -5 \qquad 0 \qquad 7 \qquad +\infty$$

$-x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-x(x-7)(x+5)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \ \mathrm{S} = \,]-\infty, -5[\ \cup\ ]0, 7[$$

En el ejemplo anterior hemos resuelto inecuaciones en las cuales se involucra alguno de los signos “ $<$ ” o “ $>$ ”, en el ejemplo siguiente el objetivo es resolver inecuaciones en las que se involucra alguno de los signos “ $\leq$ ” o “ $\geq$ ”

Ejemplo 29

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $(x+1)(x-2) \leq 0$

b.) $(x-3)(x+2) \geq 0$

c.) $3(2-x)(x-3) \leq 0$

d.) $-5(-x+1)(-x-2) \geq 0$

e.) $-2x(x+2)(x-2) \leq 0$

f.) $3x(5-x)(x+2) \geq 0$

Solución

a.) $(x+1)(x-2) \leq 0$

En forma similar a los ejercicios resueltos en el ejemplo anterior formamos la siguiente “tabla”

$$-\infty \qquad -1 \qquad 2 \qquad +\infty$$

$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$	$-$	$+$

De aquí sabemos que:

$(x+1)(x-2) < 0 \Longleftrightarrow x \in]-1, 2[$

Luego

$(x+1)(x+2) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$ o $x = 2$

Por lo tanto:

El conjunto solución de $(x+1)(x+2) \leq 0$ es $[-1, 2]$ o sea $S = [-1, 2]$

b.) $(x-3)(x+2) \geq 0$

Procediendo en forma análoga al ejemplo anterior:

$$-\infty \qquad -2 \qquad 3 \qquad +\infty$$

$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

De aquí sabemos que:

$(x-3)(x+2) > 0 \Longleftrightarrow x \ \in \,]-\infty,-2\ [\cup]\ 3,+\infty[$

Luego

$(x-3)(x+2) = 0 \Longleftrightarrow x = 3$ o $x = -2$

Por lo tanto:

El conjunto solución de $(x-3)(x+2) \geq 0$ es $]-\infty,-2\ ]\ \cup\ [\ 3,+\infty[$ o sea: $S =]-\infty,-2\ ]\ \cup\ [\ 3,+\infty[$

Nota: En las inecuaciones que resolveremos a continuación, no especificaremos la forma en que se obtiene el conjunto solución para cada una de ellas, el estudiante deberá justificar estos resultados.

c.) $3(2-x)(x-3) \leq 0$

$-\infty \quad 2 \quad 3 \quad +\infty$

3	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$3(2-x)(x-3)$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \ S \ =]-\infty,2[\,\cup\,[3,+\infty[$$

Observación: En esta inecuación, 3 es un factor siempre positivo de la expresión $3(2-x)(x-3)$, pues no depende del valor de la variable x.

d.) $-5(-x+1)(-x-2) \geq 0$

$-\infty \quad -2 \quad 1 \quad +\infty$

-5	$-$	$-$	$-$
$-x+1$	$+$	$+$	$-$
$-x-2$	$+$	$-$	$-$
$-5(-x+1)(-x-2)$	$-$	$+$	$-$

$$S = [-2, 1]$$

Observación: En esta inecuación, -5 es un factor siempre positivo de la expresión $-5(-x+1)(-x-2)$, pues no depende del valor de la variable x.

e.) $-2x(x+2)(x-2) \leq 0$

$$-\infty \quad -3 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$$

$-2x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$-2x(x+3)(x-1)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \;\; S = [-3, 0] \;\cup\; [1, +\infty[$$

f.) $3x(5-x)(x+2) \geq 0$

$$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 5 \quad +\infty$$

$3x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3x(5-x)(x+2)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \;\; S = [-\infty, -2] \;\cup\; [0, 5]$$

Ejercicios 8

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $(x-1)(2x+1) < 0$

2.) $6x(1-x) > 0$

3.) $(2x+3)(4x-1) \geq 0$

4.) $(5-7x)(x+2)(6x+1) \leq 0$

5.) $(2x-1)(2x-1) \geq 0$

6.) $(2x-1)^2 > 0$

7.) $(1-3x)^2 \leq 0$

8.) $-2(x+2)(3-x)(5x+1) \geq 0$

9.) $3(2-x)(4-3x)(x+2) > 0$

10.) $\dfrac{-1}{2}(x-2)(x-2)(x+2) \leq 0$

11.) $x^3(2x+7) < 0$

12.) $\sqrt{5}(2-3x)^3(x+5)^4 \leq 0$

4.3 Inecuaciones cuadráticas

■ **Definición 16**

Sean a, b, c constantes reales tales que $a \neq 0$. Sea x una variable real. Llamaremos inecuación cuadrática a toda inecuación en la que uno de sus miembros se puede llevar a una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ y el otro miembro es cero.

■ **Ejemplo 30**

Son inecuaciones cuadráticas:

a.) $2x^2 + 2x + 1 < 0$

b.) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

c.) $2x^2 + 8 > 0$

d.) $3x^2 - 27 \leq 0$

Caso 1

Consideremos como caso 1, aquel en el cual la expresión $ax^2 + bx + c$ es factorizable ($\triangle \geq 0$). Para resolver estas inecuaciones se debe factorizar la expresión $ax^2 + bx + c$, para posteriormente aplicar el procedimiento usado para resolver las inecuaciones de los ejemplos anteriores (por medio de una "tabla de signos")

Recuerde que si la expresión $ax^2 + bx + c$ es factorizable entonces se cumple que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Con x_1 y x_2 los ceros del polinomio $ax^2 + bx + c$

■ **Ejemplo 31**

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $x^2 - 2x - 35 < 0$

b.) $2x^2 - x - 6 \geq 0$

c.) $-3x^2 + x + 2 > 0$

d.) $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$

e.) $x^2 - 4x \leq 0$

f.) $18x - 2x^2 > 0$

g.) $x^2 - 9 \geq 0$

h.) $7 - x^2 < 0$

Solución.

a.) $x^2 - 2x - 35 < 0$

Para la expresión $x^2 - 2x - 35$ se tiene:

$$\begin{aligned} \triangle &= 4 - 4(1)(-35) \\ \triangle &= 4 + 140 \\ \triangle &= 144 \end{aligned}$$

$\therefore$ $x^2 - 2x - 35$ es factorizable y además:

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{144}}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{14}{2} \Longrightarrow x_1 = 7$$

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{144}}{2} \Longrightarrow x_2 = \frac{-10}{2} \Longrightarrow x_2 = -5$$

así:

$$x^2 - 2x - 35 = (x-7)(x+5)$$

$$\therefore \quad x^2 - 2x - 35 < 0 \iff (x-7)(x+5) < 0$$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

$$-\infty \qquad -5 \qquad 7 \qquad +\infty$$

$x-7$	$-$	$-$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$
$(x-7)(x+5)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto el conjunto solución de $x^2-2x-35<0$ es $]-5,7\;[$, o sea : $\quad S=]-5,7[$

b.) $2x^2-x-6\geq 0$

Para la expresión $2x^2-x-6$ se tiene:

$$\begin{aligned}\triangle &= 1-4(2)(-6)\\ \triangle &= 1+48\\ \triangle &= 49\end{aligned}$$

$\therefore\;\; 2x^2-x-6$ es factorizable y además:

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{49}}{4}\Longrightarrow x_1=\dfrac{8}{4}\Longrightarrow x_1=2$

$x_2=\dfrac{1-\sqrt{49}}{4}\Longrightarrow x_2=\dfrac{-6}{4}\Longrightarrow x_2=\dfrac{-3}{2}$

Así:

$2x^2-x-6=2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$

$\therefore\;\; 2x^2-x-6\geq 0\iff 2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\geq 0$

Resolviendo esta última inecación se tiene:

$$-\infty \qquad \frac{-3}{2} \qquad 2 \qquad +\infty$$

2	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$x+\dfrac{3}{2}$	$-$	$+$	$+$
$2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto el conjunto solución de $2x^2-x-6<0$ es $\left]-\infty,\dfrac{-3}{2}\right]\;\cup\;[2,+\infty\,[$ o sea: $S=\left]-\infty,\dfrac{-3}{2}\right]\;\cup\;[2,+\infty\,[$

c.) $-3x^2 + x + 2 > 0$

Para la expresión $-3x^2 + x + 2$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & 1 - 4(-3)(2) \\ \triangle & = & 1 + 24 \\ \triangle & = & 25 \end{array}$$

$\therefore \quad -3x^2 + x + 2$ es factorizable y además:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{-6} \Longrightarrow x_1 = \frac{4}{-6} \Longrightarrow x_1 = \frac{-2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{-6} \Longrightarrow x_2 = \frac{-6}{-6} \Longrightarrow x_2 = 1$$

así: $-3x^2 + x + 2 = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1)$

$\therefore \quad -3x^2 + x + 2 > 0 \iff -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1) > 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ $-2/3$	$-2/3$ 1	1 $+\infty$
-3	$-$	$-$	$-$
$x + \frac{2}{3}$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$-3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1)$	$-$	$+$	$-$

Por lo que el conjunto solución de $-3x^2 + x + 2 > 0$ es $\left]\frac{-2}{3}, 1\right[$ o sea: $S = \left]\frac{-2}{3}, 1\right[$

d.) $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$

Para la expresión $-2x^2 + 3x + 2$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & 9 - 4(-2)(2) \\ \triangle & = & 9 + 16 \\ \triangle & = & 25 \end{array}$$

$\therefore \quad -2x^2 + 3x + 2$ es factorizable, además:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{-4} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{-4} \Longrightarrow x_1 = \frac{-1}{2}$$

$x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{25}}{-4} \Longrightarrow x_2 = \dfrac{-8}{-4} \Longrightarrow x_2 = 2$

Así:

$-2x^2+3x+2 = -2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2)$

$\therefore\ -2x^2+3x+2 \leq 0 \iff -2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ $-1/2$	$-1/2$ 2	2 $+\infty$
-2	$-$	$-$	$-$
$x+\dfrac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2)$	$-$	$+$	$-$

Por lo que el conjunto solución de $-2x^2+3x+2 \leq 0$ es $\left]-\infty, \dfrac{-1}{2}\right] \cup [\,2, +\infty\,[$ o sea: $S = \left]-\infty, \dfrac{-1}{2}\right] \cup [\,2, +\infty\,[$

e.) $x^2-4x \leq 0$

Factorizando x^2-4x por factor común se tiene: $x^2-4x \leq 0 \iff x(x-4) \leq 0$

Resolviendo esta inecuación:

	$-\infty$ 0	0 4	4 $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$x(x-4)$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de $x^2-4x \leq 0$ es: $[\,0, 4\,]$; o sea : $S = [\,0, 4\,]$

f.) $18x-2x^2 > 0$

Factorizando $18x - 2x^2$ por factor común se tiene: $18x - 2x^2 > 0 \iff 2x(9 - x) > 0$

Resolviendo esta inecuación:

$$-\infty \quad 0 \quad 9 \quad +\infty$$

$2x$	$-$	$+$	$+$
$(9 - x)$	$+$	$+$	$-$
$2x(9 - x)$	$-$	$+$	$-$

Por lo que el conjunto solución de $18x - 2x^2 > 0$ es $]0, 9[$; o sea : $S = \ ]0, 9[$

g.) $x^2 - 9 \geq 0$

Factorizando $x^2 - 9 \geq 0$ por fórmula notable se tiene: $x^2 - 9 \geq 0 \iff (x - 3)(x + 3) \geq 0$

Resolviendo esta inecuación:

$$-\infty \quad -3 \quad 3 \quad +\infty$$

$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$(x + 3)$	$-$	$+$	$+$
$(x - 3)(x + 3)$	$+$	$-$	$+$

Por lo que : $S =]-\infty, -3] \ \cup \ [3, +\infty[$

h.) $7 - x^2 < 0$

Factorizando $7 - x^2$ por fórmula notable se tiene: $7 - x^2 < 0 \iff (\sqrt{7} - x)(\sqrt{7} - x) < 0$

Resolviendo esta inecuación:

$$-\infty \quad -\sqrt{7} \quad \sqrt{7} \quad +\infty$$

$\sqrt{7} - x$	$+$	$+$	$-$
$\sqrt{7} + x$	$-$	$+$	$+$
$(\sqrt{7} - x)(\sqrt{7} + x)$	$-$	$+$	$-$

Por lo que $S = \left]-\infty, -\sqrt{7}\right[\ \cup \ \left]\sqrt{7}, +\infty\right[$

Caso2

Consideremos como **caso 2**, aquel en el cual la expresión $ax^2 + bc + c$ no es factorizable ($\triangle < 0$). Para resolver estas inecuaciones usaremos el siguiente teorema:

Teorema 1

Sean a, b, c, constantes reales y x una variable real tales que $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac < 0$ ($\triangle < 0$), entonces se cumple que:

i.) Si $a > 0$ entonces $ax^2 + bx + c > 0; \forall \ x \in \mathbb{R}$

ii.) Si $a < 0$ entonces $ax^2 + bx + c < 0; \forall \ x \in \mathbb{R}$

Demostración

En el teorema 3, Capítulo $III.$, se demostró que:

$ax^2 + bc + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right]$; con $\triangle = b^2 - 4ac$ y además si $\triangle < 0$ entonces $\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right] > 0; \forall \ x \in I\!R$ y por lo tanto:

i.) Si $a > 0$ entonces $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right] > 0; \forall \ x \in I\!R$ es equivalente a:

si $a > 0$ entonces $ax^2 + bc + c > 0; \forall \ x \in I\!R$

ii.) Si $a < 0$ entonces $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right] < 0; \forall \ x \in I\!R$ es equivalente a:

si $a < 0$ entonces $ax^2 + bc + c < 0; \forall \ x \in I\!R$

Ejemplo 32

Usando el teorema anterior resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $2x^2 + x + 3 > 0$

b.) $-x^2 - x - 1 \geq 0$

c.) $3x^2 - 5x + 3 \leq 0$

d.) $-4x^2 + 3x - 5 < 0$

e.) $2x^2 + 6 \leq 0$

f.) $-3x^2 - 5 > 0$

Solución

a) $2x^2 + x + 3 > 0$

En este caso, para la expresión $2x^2 + x + 3$; se tiene:

$a = 2$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & 1^2 - 4(2)(3) \\ \triangle & = & 1 - 24 \\ \triangle & = & -23 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces $2x^2 + x + 3 > 0;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $2x^2 + x + 3 > 0$ es $\mathbb{R}$ o sea: $S = \mathbb{R}$

b) $-x^2 - x - 1 \geq 0$

En este caso, para la expresión $-x^2 - x - 1$; se tiene:

$a = -1$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (-1)^2 - 4(-1)(-1) \\ \triangle & = & 1 - 4 \\ \triangle & = & -3 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a < 0$, entonces $-x^2 - x - 1 < 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $-x^2 - x - 1 \geq 0$ es vacío o sea: $\mathrm{S} = \emptyset$

c) $3x^2 - 5x + 3 \leq 0$

En este caso, para la expresión $3x^2 - 5x + 3$; se tiene:

$a = 3$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (-5)^2 - 4(3)(3) \\ \triangle & = & 25 - 36 \\ \triangle & = & -11 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces $3x^2 - 5x + 3 > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $3x^2 - 5x + 3 \leq 0$ es vacío o sea: $\mathrm{S} = \emptyset$

d) $-4x^2 + 3x - 5 < 0$

En este caso, para la expresión $-4x^2 + 3x - 5$; se tiene:

$a = -4$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (3)^2 - 4(-4)(-5) \\ \triangle & = & 9 - 80 \\ \triangle & = & -71 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a < 0$, entonces $-4x^2 + 3x - 5 < 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $-4x^2 + 3x - 5 < 0$ es $\mathbb{R}$ o sea: $\mathrm{S} = \mathbb{R}$

e) $2x^2 + 6 \leq 0$

En este caso, para la expresión $2x^2 + 6$; se tiene:

$a = 2$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & 0 - 4(2)(6) \\ \triangle & = & -48 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces $2x^2 + 6 > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $2x^2 + 6 \leq 0$ es vacío o sea: $S = \emptyset$

f) $-3x^2 - 5 > 0$

En este caso, para la expresión $-3x^2 - 5$; se tiene:

$a = -3$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & 0 - 4(-3)(-5) \\ \triangle & = & -60 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a < 0$, entonces $-3x^2 - 5 < 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $-3x^2 - 5 > 0$ es vacío o sea: $S = \emptyset$

Ejercicios 9

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $2x^2 - 3x - 2 < 0$

2.) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

3.) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

4.) $x^2 + x + 1 > 0$

5.) $-2x^2 - 8 > 0$

6.) $7x - 21x^2 \leq 0$

7. $3 - x^2 \geq 0$

8. $-2x^2 + 7x - 3 \geq 0$

9. $-2x^2 + 3x - 1 > 0$

10. $-4x^2 + x \geq 0$

11. $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$

12. $x^2 - 2x + 1 > 0$

13. $x^2 + 5x + 4 \leq 0$

14. $-3x^2 + 6x - 4 > 0$

4.4 Inecuaciones polimoniales de grado mayor que 2

■ **Definición 17**

Llamaremos inecuación polimonial de grado mayor que 2, a toda inecuación en la cual uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor que 2, y el otro miembro es cero.

■ **Ejemplo 33**

Son inecuaciones polimoniales de grado mayor que 2 :

a.) $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$

b.) $2x^4 - 4x^2 - 6x - 4 > 0$

c.) $x^5 + 32 \geq 0$

d.) $x^3 + 2x^2 + x + 2 < 0$

Para resolver inecuaciones polimoniales de grado mayor que 2, frecuentemente es necesario factorizar el polinomio que es miembro de la ecuación. Una vez factorizado dicho polinomio, se aplicará alguno de los métodos estudiados anteriormente para resolver inecuaciones.

■ **Ejemplo 34**

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$

b.) $2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 > 0$

c.) $-x^4 + 2x^2 + 3x + 2 \geq 0$

d.) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x > 0$

Solución

a.) $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$

Debemos tratar de factorizar el polinomio $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Por división sintética se tiene que:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$

Ahora, factorizando $x^2 - 5x + 6$ por fórmula general se tiene:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Por lo que:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$

Así tenemos que:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0 \iff (x+1)(x-2)(x-3) \leq 0$

Ahora vamos a la tabla de signos:

	$-\infty$ -1	2	3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x+2)(x-3)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$ es:

$]-\infty, -1] \ \cup \ [2, 3]$; o sea: $S = \,]-\infty, -1] \ \cup \ [2, 3]$

b.) $2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 > 0$

Factoricemos el polinimio $2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$

Por división sintética se tiene que:

$2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = (x-2)(2x^2 + 2x + 2)$

Ahora para $2x^2 + 2x + 2$ tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (2)^2 - 4(2)(2) \\ \triangle & = & 4 - 16 \\ \triangle & = & -12 \end{array}$$

Como $\triangle < 0$ entonces $2x^2 + 2x + 2$ NO es factorizable, pero como $\triangle < 0$ y $a = 2$ (coeficiente de x^2) por el teorema anterior tenemos que:

$2x^2 + 2x + 2 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. o sea, $2x^2 + 2x + 2$ es positivo, $\forall \ x \in \mathbb{R}$.

Así tenemos que:

$2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 > 0 \iff (x-2)(2x^2 + 2x + 2) > 0$

y podemos resolver esta inecuación de acuerdo con la información anterior así:

	$-\infty$	2 $+\infty$
$x-2$	$-$	$+$
$2x^2+2x+2$	$+$	$+$
$(x-2)(2x^2+2x+2)$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de $2x^3 - 2x - 4 > 0$ es: $]2, +\infty[$ o sea: $S =]2, +\infty[$

c.) $-x^4 + 2x^2 + 3x + 2 \geq 0$

Debemos factorizar el polinimio $-x^4 + 2x^2 + 3x + 2$, aplicando división sintética se tiene que:

$-x^4 + 2x^2 + 3x + 2 = (x+1)(-x^3 + x^2 + x + 2)(*)$ y a su vez:

$-x^3 + x^2 + x + 2 = (x-2)(-x^2 - x - 1)$ (**)

y para $-x^2 - x - 1$, tenemos:

$$
\begin{array}{rcl}
\triangle & = & (-1)^2 - 4(-1)(-1) \\
\triangle & = & 1 - 4 \\
\triangle & = & -3
\end{array}
$$

Como $\triangle < 0$, entonces $-x^2 - x - 1$ no es factorizable, y por el teorema anterior.

$-x^2 - x - 1 < 0; \forall \;\; x \in \mathbb{R}$, o sea $-x^2 - x - 1$ es negativo, $\forall \;\; x \in \mathbb{R}$.

Así por (*) y (**)

$-x^4 + 2x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x-2)(-x^2 - x - 1)$

y por lo tanto:

$-x^4 + 2x^2 + 3x + 2 \geq 0 \iff (x+1)(x-2)(-x^2 - x - 1) \geq 0$

y por la imformación anterior podemos resolver esta inecuación así:

	$-\infty$ -1	-1 2	2 $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$-x^2-x-1$	$-$	$-$	$-$
$(x+1)(x-2)(-x^2-x-1)$	$-$	$+$	$-$

De aquí $S = \ [-1, 2]$

d.) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x > 0$

Factorizamos el polinomio $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$; por factor común:

$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x = x(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)(*)$

Factorizando $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$; por división sintética:

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x^2-4)(**)$;

y factorizando $x^2 - 4$, por fórmula notable:

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Así, de (**) se tiene que:

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x-2)(x+2)$

y por (*) se tiene que:

$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x = x(x-2)(x-2)(x+2)$ y por lo tanto:

$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x > 0 \iff x(x-2)(x-2)(x+2) > 0$

	$-\infty$ -2	-2 0	0 2	2 $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x(x-2)(x-2)(x+2)$	$+$	$-$	$+$	$+$

De aquí: S= $]-\infty,-2\ [\cup]\ 0,2\ [\cup]\ 2,+\infty[$

Ejercicios 10

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $x^3-12x+16\geq 0$

2.) $2x^3-x^2 18x+9\leq 0$

3.) $x^3+2x^2+x+2<0$

4.) $2x^3-7x^2+4x-3>0$

5.) $x^4-16\leq 0$

6.) $x^4+3x^2-4\geq 0$

7. $2x^4-5x^3+4x^2-x>0$

8. $x^4-2x^3-3x^2+8x-4<0$

Además de inecuaciones cuadráticas y de inecuaciones polinomiales de grado mayor que 2, podemos resolver algunas otras inecuaciones que son reducibles a inecuaciones cuadráticas, o bien a inecuaciones polinomiales de grado mayor que 2, aplicando las transformaciones estudiadas en este capitulo, y también las propiedades y algoritmos de las operaciones definidas en $\mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 35**

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $x^2+5x+4\leq 2x+4$

b.) $4x^2+8x-5>5x-6$

c.) $x^4-1\geq -x^4+1$

d.) $x^3-2x^2+2<x^2+x-1$

Solución.

a.)

$$\begin{array}{rrcl} & x^2+5x+4 & \leq & 2x+4 \\ \iff & x^2+5x+4-2x-4 & \leq & 0 \\ \iff & x^2+3x & \leq & 0 \\ \iff & x(x+3) & \leq & 0 \end{array}$$

	$-\infty$ -3	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x(x+3)$	$+$	$-$	$+$

De aquí: $S \ = \ [-3,0]$

b.)

$$\begin{array}{rrcl} & 4x^2+8x-5 & > & 5x-6 \\ \iff & 4x^2+8x-5-5x+6 & > & 0 \\ \iff & 4x^2+3x+1 & > & 0 \end{array}$$

Para $4x^2+3x+1$ se tiene:

$a=4$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (3)^2-4(4)(1) \\ \triangle & = & 9-16 \\ \triangle & = & -7 \end{array}$$

Como $\triangle < 0$ y $a>0$, entonces: $4x^2+3x+1>0; \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad S=\mathbb{R}$

c.)

$$\begin{array}{rrcl} & x^4-1 & \geq & -x^4+1 \\ \iff & x^4-1+x^4-1 & \geq & 0 \\ \iff & 2x^4-2 & \geq & 0 \\ \iff & 2(x^4-1) & \geq & 0 \\ \iff & 2(x^2-1)(x^2+1) & \geq & 0 \\ \iff & 2(x-1)(x+1)(x^2+1) & \geq & 0 \quad (*) \end{array}$$

Observe que x^2+1 no es factorizable y además es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$

	$-\infty$ $\quad -1$	1	$+\infty$
2	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$2(x-1)(x+1)(x^2+1)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto el conjunto de solución de la inecuación (*), y por lo tanto de la inecuación original, es: S= $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

d.)

$$\begin{array}{rrcl} & x^3-2x^2+2 & < & x^2+x-1 \\ \iff & x^3-2x^2+2-x^2-x+1 & < & 0 \\ \iff & x^3-3x^2-x+3 & < & 0\ (*) \end{array}$$

Factorizando x^3-3x^2-x+3 por agrupación se tiene:

$$\begin{aligned} x^3-3x^2-x+3 &= (x^3-3x^2)+(-x+3) \\ &= x^2(x-3)-(x-3) \\ &= (x-3)(x^2-1) \\ &= (x-3)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

o sea: $x^3-3x^2-x+3=(x-3)(x-1)(x+1)$

volviendo a (*) obtenemos:

$x^3-3x^2-x+3<0 \iff (x-3)(x-1)(x+1)<0$

	$-\infty$ $\quad -1$	1	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x-1)(x+1)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que S= $]-\infty,-1[\, \cup \,]1,3[$

Ejercicios 11

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $x^2 - 4 \leq x - 2$

2.) $3x^2 - 4x + 5 \geq x^2 + 5$

3.) $2x^3 + x^2 + 1 > -2x - 2$

4.) $x^3 - 6 > 2x^2 - 3x$

4.4.1 Inecuaciones en las que uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero.

En general estudiaremos los tipos $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$; $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$; $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$; $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con, $Q(x) \neq 0$.

Para resolver este tipo de inecuaciones nos basaremos en las siguientes propiedades:

Propiedades

Sean $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$

1.) $\dfrac{a}{b} < 0 \iff a \cdot b < 0$

2.) $\dfrac{a}{b} \leq 0 \iff a \cdot b \leq 0$

3.) $\dfrac{a}{b} > 0 \iff a \cdot b > 0$

4.) $\dfrac{a}{b} \geq 0 \iff a \cdot b \geq 0$

Estas propiedades se pueden generalizar para polinomios de modo $P(x)$ y $Q(x)$ con, $Q(x) \neq 0$, entonces:

1.) Resolver $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$ es equivalente a resolver $P(x) \cdot Q(x) < 0$

2.) Resolver $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ es equivalente a resolver $P(x) \cdot Q(x) \leq 0$

3.) Resolver $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ es equivalente a resolver $P(x) \cdot Q(x) > 0$

4.) Resolver $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ es equivalente a resolver $P(x) \cdot Q(x) \geq 0$

Por lo anterior es que al resolver inecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero, usaremos tablas de signos tal y como se hizo para resolver inecuaciones, en las cuales uno de sus miembros es un producto y el otro es cero.

Ejemplo 36

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$

b.) $\dfrac{3-x}{x+1} < 0$

c.) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)} \leq 0$

d.) $\dfrac{x-2}{(2x+1)(x-5)} > 0$

e.) $\dfrac{6}{(x-3)(2-x)} \geq 0$

f.) $\dfrac{-3}{(2x-1)(3x+2)} \leq 0$

Solución

a.) $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$

En este caso debe cumplirse que $x+3$ sea diferente de cero; pero $x+3=0 \iff x=-3$.

La“tabla de signos “correspondiente a esta inecuación se obtiene así:

	$-\infty$ -3	-3 2	2 $+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{(x-2)}{(x+3)}$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que el cociente $\dfrac{(x-2)}{(x+3)}$ es mayor o igual que cero, si y sólo sí $x \in\ ]-\infty,-3[\ \cup\ [2,+\infty[$.

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{(x-2)}{(x+3)} \geq 0$ es S, donde

$$S = \,]-\infty,-3[\ \cup\ [2,+\infty[$$

Nota

1.) La doble línea vertical en -3, se utilizó para indicar que -3 no pertenece al dominio de la incógnita.

2.) -3 no se incluye en el conjunto solución, por no pertenecer al dominio de la incógnota.

b.) $\dfrac{3-x}{x+1} < 0$

En este caso debe cumplirse que $x+1$ sea diferente de cero; pero $x+1=0 \iff x=-1$.

La "tabla de signos "correspondiente a esta inecuación se obtiene así:

	$-\infty$ -1	3	$+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{(3-x)}{(x+1)}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que el cociente $\dfrac{(3-x)}{(x+1)}$ es menor que cero, si y sólo sí $x \in]-\infty, -1[\, \cup\,]\,3, +\infty\,[$.

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{(3-x)}{(x+1)} < 0$ es S, donde

$$\text{S}= \,]-\infty, -1\,[\, \cup\,]\,3, +\infty[$$

Nota

La doble línea vertical en -1, se utilizó para indicar que -1 no pertenece al dominio de la incógnita.

Las inecuaciones siguientes serán resueltas en una forma más resumida, omitiremos la explicación correspondiente a cada uno de los pasos involucrados, el estudiante debe saber justificar cada uno de dichos pasos.

c.) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)} \leq 0$

Debe cumplirse que $x-4 \neq 0$, o sea $x \neq 4$.

	$-\infty$ -1	2	4	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$\text{S}= \,]-\infty, -1\,] \;\cup\; [\,2,\, 4\,[$$

d.) $\dfrac{x-2}{(2x+1)(x-5)} > 0$

Debe cumplirse que $2x+1 \neq 0$ y $x-5 \neq 0$, o sea $x \neq \dfrac{-1}{2}$ y $x \neq 5$.

	$-\infty$ a $-1/2$	$-1/2$ a 2	2 a 5	5 a $+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-2)}{(2x+1)(x-5)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]\frac{-1}{2}, 2\right[\cup \left]5, +\infty\right[$$

e.) $\dfrac{6}{(x-3)(2-x)} \geq 0$

Debe cumplirse que $x-3 \neq 0$ y $2-x \neq 0$, o sea $x \neq 3$ y $x \neq 2$.

	$-\infty$ a 2	2 a 3	3 a $+\infty$
6	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$2-x$	$+$	$-$	$-$
$\dfrac{6}{(x-3)(2-x)}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]2, 3\right[$$

f.) $\dfrac{-3}{(2x-1)(3x+2)} \leq 0$

Debe cumplirse que $2x-1 \neq 0$ y $3x+2 \neq 0$, o sea $x \neq \dfrac{1}{2}$ y $x \neq \dfrac{-2}{3}$.

	$-\infty$ $\quad\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
-3	$-$	$-$	$-$
$2x-1$	$-$	$-$	$+$
$3x+2$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{-3}{(2x-1)(3x+2)}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S=\left]-\infty, \frac{-2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Ejercicios 12

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $\dfrac{x-7}{x+2} \leq 0$

2.) $\dfrac{(x-1)(4-x)}{2x+1} \geq 0$

3.) $\dfrac{3x+1}{(1-2x)(3-x)} > 0$

4.) $\dfrac{-2}{2x-3} > 0$

5.) $\dfrac{-5}{(2x+5)(x+4)} < 0$

6.) $\dfrac{(x-2)(x+3)}{2(x-3)} \geq 0$

7.) $\dfrac{2-x}{3x+1} < 0$

8.) $\dfrac{x+7}{(x+3)(2-x)} \leq 0$

9.) $\dfrac{(1-x)(2+x)}{(3x+1)(5-x)} > 0$

■ **Ejemplo 37**

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $\dfrac{x^2-4x-5}{x-4} > 0$

b.) $\dfrac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0$

c.) $\dfrac{(x+2)}{x^2-4x} \leq 0$

d.) $\dfrac{-2x}{x^2+x+3} \geq 0$

e.) $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x+4} < 0$

f.) $\dfrac{x^3+4x}{x+1} \leq 0$

Solución

a.) $\dfrac{x^2-4x-5}{x-4} > 0$

En este caso 4 no pertenece al dominio de la incógita ($x \neq 4$); además debemos factorizar (si es posible) el numerador.

Aplicando fórmula general se tiene que:

$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$

Por lo que:

$\dfrac{x^2-4x-5}{x-4} > 0 \iff \dfrac{(x-5)(x+1)}{x-4} > 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ -1	-1 4	4 5	5 $+\infty$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-4)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{x^2-4x-5}{x-4} > 0$ es S, donde:

$$S =]-1,4[\,\cup\,]5,+\infty[$$

b.) $\dfrac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0$

En este caso 1 y 2 no pertenecen al dominio de la incógnita ($x \neq 1$ y $x \neq 2$); además debemos factorizar el numerador (si es posible).

Por fórmula notable se tiene que;

$9-x^2=(3-x)(3+x)$

Por lo que:

$\dfrac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0 \iff \dfrac{(3-x)(3+x)}{(x-2)(1-x)} < 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ -3	1	2	3	$+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$3+x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{(3-x)(3+x)}{(x-2)(1-x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0$ es S, donde:

$$S =]-3, 1[\cup]2, 3[$$

c.) $\dfrac{(x+2)}{x^2-4x} \leq 0$

En este caso debemos factorizar el denominador si es posible. Por factor común se tiene que: $x^2 - 4x = x(x-4)$ y de aquí, como el denominador debe ser diferente de cero, entonces debe cumplirse que:

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 4$$

Así se tiene: $\dfrac{x+2}{x^2-4x} \leq 0 \iff \dfrac{x+2}{x(x-4)} \leq 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ -2	0	4	$+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x+2)}{x(x-4)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{x+2}{x^2-4} \leq 0$ es S, donde:

$$S =]-\infty, -2] \cup]0, 4[$$

d.) $\dfrac{2x}{x^2+x+3} \geq 0$

En este caso debemos factorizar el denominador, si es posible, pero para x^2+x+3, se tiene:

$a = 1$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (1)^2 - 4(1)(3) \\ \triangle & = & 1 - 12 \\ \triangle & = & -11 \end{array}$$

Como $\triangle < 0$, entonces x^2+x+3 no es factorizable en $\mathbb{R}$, además como $a > 0$ y $\triangle < 0$ entonces x^2+x+3, es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, la tabla de signos correspondiente a:

$\dfrac{2x}{x^2+x+3} \geq 0$ es:

	$-\infty$ 0	$+\infty$
$-2x$	$+$	$-$
x^2+x+3	$+$	$+$
$\dfrac{-2x}{x^2+x+3}$	$+$	$-$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{2x}{x^2+x+3} \geq 0$ es S, donde:

$$S = \,]-\infty, 0\,]$$

e.) $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x+4} < 0$

En este caso -4 no pertenece al dominio de la incógnita, además debemos factorizar el numerador, si es posible.

Por factor común se tiene: $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2)$ (*)

Aplicando fórmula general a x^2+x-2 se tiene: $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

Volviendo a (*) tenemos: $x^3+x^2-2x = x(x+2)(x-1)$

Así: $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x+4} < 0 \iff \dfrac{x(x+2)(x-1)}{x+4} < 0$

Resolviendo esta inecuación se tiene:

	$-\infty$	-4	-2	0	1 $+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x(x+2)(x-1)}{(x+4)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x+4} < 0$ es S, donde:

$$S =]-4, -2\,[\cup]\,0, 1\,[$$

f.) $\dfrac{x^3+4x}{x+1} \leq 0$

En este caso -1 no pertenece al dominio de la incógnita, además debemos factorizar el numerador, si es posible.

Por factor común se tiene: $x^3+4x = x(x^2+4)(*)$

Aplicando formula general a x^2+4, se tiene: $a=1$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & 0^2 - 4(1)(4) \\ \triangle & = & -16 \end{array}$$

Como $\triangle < 0$, y $a > 0$ entonces x^2+4 es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ y además no es factorizable por lo que la factorización completa de x^3+4x es la indicada en (*)

Así: $\dfrac{x^3+4x}{x+1} \leq 0 \iff \dfrac{x(x^2+4)}{x+1} \leq 0$

Resolviendo este inecuación se tiene:

	$-\infty$	-1	0 $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$
x^2+4	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{x(x^2+4)}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

Por lo que

$$S =]-1\,,\,0\,]$$

Ejercicios 13

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $\dfrac{x^2+2x}{(1-x)(x-2)} \geq 0$

2.) $\dfrac{x^2+3}{(x+5)(x+3)} \leq 0$

3.) $\dfrac{3-x}{3x^2-6x} < 0$

4.) $\dfrac{-x^2+4x-5}{x^3+5x^2} > 0$

5.) $\dfrac{-2x^2+3x-2}{x^3+5x^2} \geq 0$

6.) $\dfrac{-4}{-3x^4+11x^2+4} \leq 0$

7. $\dfrac{-6x}{-x^2+3x-2} < 0$

8. $\dfrac{-3x^2+5x-3}{x^3+2x^2+x+2)} > 0$

Aplicando las transformaciones estudiadas en este capitulo, y además los algoritmos estudiados para realizar operaciones con fracciones racionales (capitulo $III.)$), podemos resolver inecuaciones que se pueden reducir a una inecuación, en la cual uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero, como se ilustra en los ejemplos anteriores.

■ **Ejemplo 38**

Resuelva cada una de las siguientes inecuacciones:

a.) $1 - \dfrac{x+2}{x-5} \geq 0$

b.) $\dfrac{1}{x-2} < 2$

c.) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{x}{x-1} > \dfrac{-2}{x-1}$

d.) $\dfrac{x-5}{x+3} \leq \dfrac{2x+1}{x+3}$

e.) $\dfrac{3}{1-x} \geq \dfrac{x+6}{2-x}$

f.) $\dfrac{3-x}{x-2} < \dfrac{x-5}{1-x}$

g.) $\dfrac{3x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2-x} \leq \dfrac{2x^2+1}{x^3-x}$

h.) $\dfrac{6x}{x^2-4x+3} > \dfrac{2}{12-4x}$

Solución.

Nota: En la solución de estas inecuaciones omitiremos la justificación de cada paso, dicha justificación debe ser brindada por el estudiante.

a.)

$$\begin{array}{rcl} 1-\dfrac{x+2}{x-5} & \geq & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1\cdot(x-5)-1(x+2)}{x-5} & \geq & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \dfrac{x-5x-2}{x-5} & \geq & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \dfrac{-7}{x-5} & \geq 0\ ; & x\neq 5 \end{array}$$

	$-\infty$ 5	$+\infty$
-7	$-$	$-$
$x-5$	$-$	$+$
$\dfrac{-7}{x-5}$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]-\infty, 5\right[$$

b.)

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x-1} & < & 2 \\ \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{x-1}-2 & < & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1-2(x-1)}{x-1} & < & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1-2x+2}{x-1} & < & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \dfrac{-2x+3}{x-1} & < & 0\ ;\ \ x\neq 1 \end{array}$$

	$-\infty$ 1	3/2	$+\infty$
$-2x+3$	$+$	$+$	$-$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{-2x+3}{x-1}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

c.)

$$
\begin{aligned}
& \frac{3}{2}+\frac{x}{x-1} &>& \frac{-2}{x-1}\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{3}{2}+\frac{x}{x-1}-\frac{-2}{x-1} &>& 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{3}{2}+\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-1} &>& 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{3(x-1)+2x+2\cdot 2}{2(x-1)} &>& 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{3x-3+2x+4}{2(x-1)} &>& 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{5x+1}{2(x-1)} &>& 0\ ;\quad x\neq 1
\end{aligned}
$$

	$-\infty$ to $-1/5$	$-1/5$ to 1	1 to $+\infty$
$5x+1$	$-$	$+$	$+$
2	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5x+1}{2(x-1)}$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]-\infty, \frac{-1}{5}\right[\ \cup\ ]1,+\infty[$$

d.)

$$
\begin{aligned}
& \frac{x-5}{x+3} &\leq& \frac{2x+1}{x+3}\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{x-5}{x+3}-\frac{2x+1}{x+3} &\leq& 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{x-5-(2x+1)}{x+3} &\leq& 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{x-5-2x-1}{x+3} &\leq& 0\\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{-x-6}{x+3} &\leq& 0\ ;\ \ x\neq -3
\end{aligned}
$$

	$-\infty$ — -6	-6 — -3	-3 — $+\infty$
$-x-6$	$+$	$-$	$-$
$x+3$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{-x-6}{x+3}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \;]-\infty,-6\,] \;\cup\;]-3,+\infty[$$

e.)

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{1-x} && \geq \quad \frac{x+6}{2-x} \\
\iff \quad & \frac{3}{1-x}-\frac{x+6}{2-x} && \geq \quad 0 \\
\iff \quad & \frac{3(2-x)-(1-x)(x+6)}{(1-x)(2-x)} && \geq \quad 0 \\
\iff \quad & \frac{6-3x-(x+6-x^2-6x)}{(1-x)(2-x)} && \geq \quad 0 \\
\iff \quad & \frac{6-3x-x-6+x^2+6x}{(1-x)(2-x)} && \geq \quad 0 \\
\iff \quad & \frac{x^2+2x}{(1-x)(2-x)} && \geq \quad 0 \\
\iff \quad & \frac{x(x+2)}{(1-x)(2-x)} && \geq \quad 0\;;\quad x \neq 1 \text{ y } x \neq 2
\end{aligned}$$

	$-\infty$ — -2	-2 — 0	0 — 1	1 — 2	2 — $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{x(x+2)}{(1-x)(2-x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S = \;]-\infty,-2] \;\cup\; [0,\,1[\;\cup\;]\,2,\,+\infty[$$

f.)

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{3-x}{x-2} & < & \dfrac{x-5}{1-x} \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{3-x}{x-2} - \dfrac{x-5}{1-x} & < & 0 \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{(3-x)(1-x)-(x-5)(x-2)}{(x-2)(1-x)} & < & 0 \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{3-3x-x+x^2-(x^2-2x-5x+10)}{(x-2)(1-x)} & < & 0 \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{3-3x-x+x^2-x^2+2x+5x-10}{(x-2)(1-x)} & < & 0 \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \dfrac{3x-7}{(x-2)(1-x)} & < & 0\ ;\ \ x \neq 2 \text{ y } x \neq 1
\end{array}
$$

	$-\infty$ — 1	1 — 2	2 — $7/3$	$7/3$ — $+\infty$
$3x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{3x-7}{(x-2)(1-x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \,]1, 2[\, \cup \left] \frac{7}{3}, +\infty \right[$$

g.)

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-x} &\leq \frac{2x^2+1}{x^3-x}\\
&\Longleftrightarrow & \frac{3x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-x}-\frac{2x^2+1}{x^3-x} &\leq 0\\
&\Longleftrightarrow & \frac{3x}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2x^2+1}{x(x^2-1)} &\leq 0\\
&\Longleftrightarrow & \frac{3x}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2x^2+1}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0\\
&\Longleftrightarrow & \frac{(3x)(x)-1(x+1)-(2x^2+1)}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0\\
&\Longleftrightarrow & \frac{3x^2-x-1-2x^2-1}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0\\
&\Longleftrightarrow & \frac{x^2-x-2}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0\\
&\Longleftrightarrow & \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0 \text{ considerando } x\neq -1\\
&\Longleftrightarrow & \frac{x-2}{x(x-1)} &< 0\,;\quad x\neq 0 \text{ y } x\neq 1
\end{aligned}
$$

	$-\infty$ -1	-1 0	0 1	1 2	2 $+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(x-2)}{x(x-1)}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S =]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,0[\,\cup\,]1,2[$$

Observe que es importante la restricción $x\neq -1$, a pesar que el factor correspondiente fue simplificado.

h.)

$$
\begin{aligned}
&\iff & \frac{6x}{x^2-4x+3} &> \frac{2}{12-4x}\\
&\iff & \frac{6x}{x^2-4x+3}-\frac{2}{12-4x} &> 0\\
&\iff & \frac{6x}{(x-3)(x-1)}-\frac{2}{4(3-x)} &> 0\\
&\iff & \frac{6x}{(x-3)(x-1)}-\frac{2}{-4(x-3)} &> 0\\
&\iff & \frac{6x(-4)-2(x-1)}{-4(x-3)(x-1)} &> 0\\
&\iff & \frac{-24x-2x+2}{-4(x-3)(x-1)} &> 0\\
&\iff & \frac{-26x+2}{-4(x-3)(x-1)} &> 0;\ \ x\neq 3,\ \ x\neq 1
\end{aligned}
$$

$-\infty \quad 1/13 \quad 1 \quad 3 \quad +\infty$

$-26x+2$	$+$	$-$	$-$	$-$
-4	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{-26x+2}{-4(x-3)(x-1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]\frac{1}{13},1\right[\cup \left]3,+\infty\right[$$

Ejercicios 14

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones.

1.) $\dfrac{x+1}{x^2+3x} \geq \dfrac{1}{x}$

2.) $\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{2x-4}{3} < \dfrac{3x+2}{6}$

3.) $\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{x}{1-x} \leq \dfrac{-7x+6}{(x-2)(1-x)}$

4.) $\dfrac{(x+7)x+10}{x+10} > 0$

5.) $\dfrac{9}{x+2} < \dfrac{21}{x+4} - 2$

6.) $\dfrac{x-5}{1-x} \leq \dfrac{3-x}{x-2}$

7.) $\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1} \geq \dfrac{x}{x-1}$

8.) $\dfrac{2x+1}{x(x-3)} > \dfrac{3}{x-3}$

9.) $\dfrac{x-5}{4-x} \leq \dfrac{3-x}{x-2}$

10.) $2 - \dfrac{x}{x+3} \geq \dfrac{-x}{2-x}$

11.) $\dfrac{1}{2-x} > \dfrac{x^2}{-x^2+3x-2}$

12.) $\dfrac{(x-3)x-4}{x-4} \leq \dfrac{(x+2)x-2}{x-2}$

13.) $\dfrac{-x}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} \leq \dfrac{2-x}{x^2-4}$

14.) $\dfrac{-x^2}{4-x} \geq \dfrac{x^3-x+1}{(4-x)^2}$

Capítulo 5

Valor Absoluto

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, Marianela Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

5.1 Ecuaciones e Inecuaciones con valor absoluto 3
  5.1.1 Propiedades del valor absoluto 5
  5.1.2 Ecuaciones que involucran valor absoluto 11
  5.1.3 Inecuaciones que involucran valor absoluto 25

5.1 Ecuaciones e Inecuaciones con valor absoluto

Nuestro objetivo en este capítulo es lograr que el estudiante resuelva ecuaciones e inecuaciones que involucran valor absoluto de expresiones algebraicas de la forma $ax + b$, donde a y b son constantes reales con $a \neq 0$, y x es una variable real.

Para esto conviene recordar la definición de valor absoluto siguiente:

Para cada número real x, se define su valor absoluto (y se denota $|x|$) de la siguiente manera:

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

o

$$|x| = -x \quad \text{si} \quad x < 0$$

Esta definición frecuentemente se denota de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Aplicando esta definición a expresiones de la forma $ax + b$ se tiene:

$$|ax+b| = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad ax+b \geq 0 \\ -(ax+b) & \text{si} \quad ax+b < 0 \end{cases}$$

Usando la definición de valor absoluto se tiene:

■ **Ejemplo 1**

$$|x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x+5 \geq 0 \\ \\ -(x+5) & \text{si} \quad x+5 < 0 \end{cases}$$

pero: $x+5 \geq 0 \iff x \geq -5$

y $x+5 < 0 \iff x < -5$

$$\therefore \quad |x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x \geq -5 \\ -(x+5) & \text{si} \quad x < -5 \end{cases}$$

Para efectos de lograr mayor claridad podemos resumir esta información en la tabla siguiente:

	$-\infty$	-5 $+\infty$
$\|x+5\|$	$-(x+5)$	$x+5$

Ejemplo 2

$$|x-7| = \begin{cases} x-7 & \text{si} \quad x-7 \geq 0 \\ -(x-7) & \text{si} \quad x-7 < 0 \end{cases}$$

pero: $x-7 \geq 0 \iff x \geq 7$

y $x-7 < 0 \iff x < 7$

$$\therefore \quad |x-7| = \begin{cases} x-7 & \text{si} \quad x \geq 7 \\ -(x-7) & \text{si} \quad x < 7 \end{cases}$$

y en forma resumida podemos escribir:

	$-\infty$	7 $+\infty$
$\|x-7\|$	$-(x-7)$	$x-7$

Ejemplo 3

$$|-2x+3| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad -2x+3 \geq 0 \\ -(-2x+3) & \text{si} \quad -2x+3 < 0 \end{cases}$$

pero: $-2x+3 \geq 0 \iff -2x \geq -3, \quad \text{o sea} \quad x \leq \dfrac{3}{2}$

y $-2x+3 < 0 \iff -2x < -3, \quad \text{o sea} \quad x > \dfrac{3}{2}$

$$\therefore \quad |-2x+3| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \\ -(-2x+3) & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

y en forma resumida podemos escribir:

	$-\infty$	$3/2$ $+\infty$
$\|-2x+3\|$	$-2x+3$	$-(-2x+3)$

Ejemplo 4

$$|-3-5x| = \begin{cases} -3-5x & \text{si} \quad -3-5x \geq 0 \\ \\ -(-3-5x) & \text{si} \quad -3-5x < 0 \end{cases}$$

pero: $\quad -3-5x \geq 0 \iff -5x \geq 3, \quad$ o sea $\quad x \leq \dfrac{-3}{5}$

y $\quad -3-5x < 0 \iff -5x < 3, \quad$ o sea $\quad x > \dfrac{-3}{5}$

$$\therefore \quad |-3-5x| = \begin{cases} -3-5x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{-3}{5} \\ \\ -(-3-5x) & \text{si} \quad x > \dfrac{-3}{5} \end{cases}$$

y en forma resumida podemos escribir:

	$-\infty$	$-3/5$ $+\infty$
$\|-3-5x\|$	$-3-5x$	$-(-3-5x)$

5.1.1 Propiedades del valor absoluto

Enunciaremos a continuación algunas propiedades del valor absoluto, las cuales podrán ser utilizadas para facilitar el trabajo en la resolución de ecuaciones o inecuaciones que incluyen valor absoluto.

Propiedad 1

$\forall x, \, x \in \mathbb{R} : \; |x| \geq 0$

Demostración

$$x \in \mathbb{R} : \; |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Hay dos posibles casos:

Caso 1: $x \geq 0$

$x \geq 0 \implies |x| = x$

$\therefore \; |x| \geq 0$

Caso 2: $x < 0$

$x < 0 \implies |x| = -x$

$\therefore\ |x| \geq 0;$ pues $x < 0 \Longrightarrow -x > 0$

Propiedad 2

Si $x \in \mathbb{R}$ y $|x| = 0$ entonces $x = 0$

Demostración: (ejercicio para el estudiante)

Propiedad 3

Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ entonces $|x \cdot y| = |x|\,|y|$

Demostración

Para demostrar esta propiedad conviene recordar que:

$\forall a, a \in \mathbb{R} :\ |a| = \sqrt[n]{a^n},$ si n es par (ver página 94)

en particular:

$|a| = \sqrt{a^2}\,;\ \forall a,\ a \in \mathbb{R}$

Usando esta definición se tiene que:

$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$

$\therefore = |x| \cdot |y|$

Propiedad 4

$\forall x,\ x \in \mathbb{R} :\ |-x| = |x|$

Demostración:(ejercicio para el estudiante)

Propiedad 5

Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ entonces $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Demostración

Aquí también usaremos el hecho que:

$\forall a, a \in \mathbb{R} :\ |a| = \sqrt{a^2}$

Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ entonces $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{R}$

$$\therefore \left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Propiedad 6

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ |x|^2 = x^2$

Demostración

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}:$, se tiene que:

$|x| = \sqrt{x^2}$

$\Rightarrow |x|^2 = (\sqrt{x^2})^2$

$\Rightarrow |x|^2 = x^2$ pues $\forall a,\ a \in \mathbb{R}\ (\sqrt{a} \in \mathbb{R} \Longrightarrow (\sqrt{a})^2 = a)$

$\therefore\ \forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ |x|^2 = x^2$

Propiedad 7

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:

$|x| = k \iff x = k$ ó $x = -k$

Demostración:

Como $|x| = \sqrt{x^2}$, se tiene:

$$\begin{array}{rlcl}
 & |x| & = & k \\
\iff & \sqrt{x^2} & = & k \\
\iff & (\sqrt{x^2})^2 & = & k^2 \\
\iff & x^2 & = & k^2 \\
\iff & x^2 - k^2 & = & 0 \\
\iff & (x-k)(x+k) & = & 0
\end{array}$$

$\iff x = k$ o $x = -k$

$\therefore\ |x| = k \iff x = k$ o $x = -k$

Propiedad 8

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:

$|x| < k \iff -k < x < k$

Demostración:

Como $|x| = \sqrt{x^2}$, se tiene:

$$
\begin{array}{llll}
 & |x| & < & k \\
\iff & \sqrt{x^2} & < & k \\
\iff & (\sqrt{x^2})^2 & < & k^2 \\
\iff & x^2 & < & k^2 \\
\iff & x^2 - k^2 & < & 0 \\
\iff & (x-k)(x+k) & < & 0
\end{array}
$$

Resolviendo esta inecuación:

	$-\infty$ $-k$	$-k$ k	k $+\infty$
$x-k$	$-$	$-$	$+$
$x+k$	$-$	$+$	$+$
$(x-k)(x+k)$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene:

$(x-k)(x+k) < 0 \iff x \in]-k, k[$

o sea: $-k < x < k$

$\therefore \ |x| < k \iff -k < x < k$

Propiedad 9

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:

$|x| > k \iff x > k \quad \text{o} \quad x < -k$

Demostración:

Esta propiedad se demuestra en forma similar a la propiedad 9, ya demostrada, dejaremos esta demostración como ejercicio para el estudiante.

Propiedad 10

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:

$i.)$ $|x| \leq k \Longleftrightarrow -k \leq x \leq k$

$ii.)$ $|x| \geq k \Longleftrightarrow x \geq k \quad \text{o} \quad x \leq k$

Demostración:

El procedimiento usado para demostrar esta propiedad es similar al usado para demostrar la propiedad 8. Dejaremos esta demostración como ejercicio para el estudiante.

Propiedad 11

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ -|x| \leq x \leq |x|$

Demostración:

Sabemos que $\forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Caso 1: $x \geq 0$

$x \geq 0 \implies x = |x|$

$\therefore\ x \leq |x|$ (*)

Además como $|x| \geq 0$ entonces $-|x| \leq 0$ y como $x \geq 0$ entonces: $-|x| \leq x$ $(**)$

Así por $(*)$ y $(**)$ se tiene que:

$-|x| \leq x$ y $x \leq |x|$

$\therefore\ -|x| \leq x \leq |x|$ (I)

Caso 2: $x < 0$

$$\begin{array}{rcrcl} x < 0 & \Longrightarrow & |x| & = & -x \\ & \Longrightarrow & -|x| & = & x \\ & \therefore & -|x| & \leq & x \quad (***) \end{array}$$

Además como $x < 0$ y $|x| \geq 0$ entonces

$x \leq |x| \quad (****)$

Así por $(***)$ y $(****)$ se tiene que:

$-|x| \leq x$ y $x \leq |x|$

$\therefore\ -|x| \leq x \leq |x|$ (II)

Por lo tanto de (I) y (II) se concluye que:

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ -|x| \leq x \leq |x|$

Propiedad 12 *(desigualdad triangular)*

Si $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ entonces $|x+y| \leq |x| + |y|$

Demostración:

Antes de demostrar esta propiedad, es necesario conocer el siguiente lema:

Lema:

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$

Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$

Demostración (del lema)

Supongamos que $a \leq b$ y $c \leq d$, hay que demostrar que $a + c \leq b + d$

i.) $a \leq b \implies a + c \leq b + c$

ii.) $c \leq d \implies b + c \leq b + d$

por *i.*) y *ii.*) se tiene que $a + c \leq b + d$

Nota: El lema anterior expresa que si se tienen desigualdades $a \leq b$ y $c \leq d$ podemos sumar miembro a miembro estas desigualdades de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ccc} a & \leq & b \\ c & \leq & d \\ \hline a+c & \leq & b+d \end{array}$$

Estamos ahora en condiciones de demostrar la desigualdad triangular.

Demostración de la Propiedad 12 (desigualdad triangular).

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}, \forall y,\ y \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$-|x| \leq\ x\ \leq |x|$ y

$-|y| \leq\ y\ \leq |y|$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades se tiene:

$-|x| + -|y|\ \leq\ x + y\ \leq\ |x| + |y|$

$\therefore\ -(|x| + |y|)\ \leq\ x + y\ \leq\ |x| + |y|$

$\therefore\ |x + y|\ \leq\ |x| + |y|$ por la propiedad (10.i)

5.1.2 Ecuaciones que involucran valor absoluto

A continuación resolveremos algunas ecuaciones que involucran valor absoluto, para esto utilizaremos, siempre que sea posible, algunas propiedades enunciadas anteriormente y en los que no sea posible aplicar alguna de dichas propiedades, resolveremos las ecuaciones correspondientes usando la definición de valor absoluto. Además es importante tener en cuenta que toda ecuación que involucre valor absoluto se puede resolver usando la definición.

Ejercicios 1

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones

1.) $|2x-3| = 7$

2.) $|x| = 5$

3.) $|x-3| = -3$

4.) $|x+8| = 0$

5.) $|2x+3| = -9$

6.) $|x+3| = 5+x$

7.) $|1-3x| + x = -3$

8.) $3|x+4| - 2 = x$

9.) $\sqrt[4]{(2x-15)^4} = 10$

10.) $\sqrt{(3-2x)^2} + x = 3$

11.) $2\sqrt[4]{(5-4x)^4} = x+2$

Solución

1.) $|2x-3| = 7$

Por la propiedad 7

$$|2x-3| = 7$$

$$\begin{array}{lrcllrcl}
\iff & 2x-3 & = & 7 & \text{o} & 2x-3 & = & -7 \\
\iff & 2x & = & 10 & \text{o} & 2x & = & -4 \\
\iff & x & = & 5 & \text{o} & x & = & -2
\end{array}$$

$\therefore\ S = \{-2, 5\}$

Observación: Como dijimos anteriormente, todas las ecuaciones que involucran valor absoluto se pueden resolver usando la definición. Para ilustrar esto resolveremos la ecuación anterior usando la definición de valor absoluto.

$|2x-3| = 7$

por definición

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad 2x-3 \geq 0 \\ -(2x-3) & \text{si} \quad 2x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\text{pero:} \quad 2x-3 \geq 0 \iff 2x \geq 3; \quad \text{o sea} \quad x \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{y} \quad 2x-3 < 0 \iff 2x < 3; \quad \text{o sea} \quad x < \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \\ -(2x-3) & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Con esta información construimos la tabla siguiente:

	$-\infty$ $\quad$ $3/2$	$+\infty$
$\vert 2x-3\vert$	$-(2x-3)$	$2x-3$
$\vert 2x-3\vert = 7$	$-(2x-3) = 7$ $-2x+3 = 7$ $-2x = 4$ $x = -2$ como $-2 \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ $\therefore \; S_1 = \{\text{-}2\}$	$2x-3 = 7$ $2x = 10$ $x = 5$ como $5 \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ $\therefore \; S_2 = \{5\}$

Así el conjunto solución es $S = S_1 \cup S_2$ o sea $S = \{\text{-}2{,}5\}$

2.) $|x| = 5$

Por la propiedad 7:

$|x| = 5 \iff x = 5 \;$ o $\; x = -5$

$\therefore \; S = \{-5, 5\}$

3.) $|x-3| = -3$

Por la propiedad 1, $|x-3| \geq 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$, por lo tanto:

$|x-3| = -3$!Nunca!

$\therefore \;\; S = \emptyset$

4.) $|x+8| = 0$

Por la propiedad 2,

$$\begin{aligned} |x+8| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x+8 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = -8 \end{aligned}$$

$\therefore \;\; S = \{-8\}$

5.) $|2x+3| = -9$

Por la propiedad 1, $|2x+3| \geq 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad |2x+3| = -9$ ¡Nunca!

$\therefore \quad S = \emptyset$

6.) $|x+3| = 5+x$

Nota: En este caso no es posible aplicar alguna de las propiedades anteriores, por lo que procedemos de la siguiente manera:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & \text{si} \quad x+3 < 0 \end{cases}$$

o sea:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x \geq -3 \\ -(x+3) & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

$-\infty \qquad\qquad\qquad -3 \qquad\qquad\qquad +\infty$

$\|x+3\|$	$-(x+3)$	$x+3$
$\|x+3\| = 5+x$	$-(x+3) = 5+x$	$x+3 = 5+x$
	Resolviendo esta ecuación:	Resolviendo esta ecuación:
	$-x-3 = 5+x$	$x+3 = 5+x$
	$-x-x = 5+3$	$x-x = 5-3$
	$-2x = 8$	$0 = 2$
	$x = -4$	
	como $-4 \in]-\infty, -3[$	
	$\therefore\ S_1 = \{-4\}$	$\therefore\ S_2 = \emptyset$

Así el conjunto solución S de $|x+3| = 5+x$ es $S_1 \cup S_2$, o sea $S = \{-4\}$

7.) $|1-3x| + x = -3$

En este caso debemos proceder como en el ejemplo anterior:

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{si} \quad 1-3x \geq 0 \\ -(1-3x) & \text{si} \quad 1-3x < 0 \end{cases}$$

pero: $\quad 1-3x \geq 0 \iff -3x \geq -1,$ o sea $x \leq \dfrac{1}{3}$

y $\quad 1-3x < 0 \iff -3x < -1,$ o sea $x > \dfrac{1}{3}$

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{1}{3} \\ -(1-3x) & \text{si} \quad x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Con esta información construiremos la siguiente tabla:

	$-\infty$	$\frac{1}{3}$ $+\infty$
$\lvert 1-3x\rvert$	$1-3x$	$-(1-3x)$
$\lvert 1-3x\rvert + x = -3$	$1-3x+x=-3$ $-2x=-4$ $x=2$ Como $2 \notin \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ $\therefore\ S_1 = \emptyset$	$-(1-3x)+x=-3$ $-1+3x+x=-3$ $4x=-2$ $x=\frac{-1}{2}$ como $\frac{-1}{2} \notin \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ entonces: $\therefore\ S_2 = \emptyset$

Así el conjunto solución S de $|1-3x|+x=-3$ es $S_1 \cup S_2$ o sea $S=\emptyset$

8.) $3|x+4|-2=x$

En este caso:

$$|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x+4 \geq 0 \\ -(x+4) & \text{si} \quad x+4 < 0 \end{cases}$$

o sea:

$$|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x \geq -4 \\ -(x+4) & \text{si} \quad x < -4 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$	-4 $\quad$ $+\infty$
$\|x+4\|$	$-(x+4)$	$x+4$
$3\|x+4\|-2=x$	$3[-(x+4)]-2=x$ $3[-x-4]-2=x$ $-3x-12-2=x$ $-3x-14-x=0$ $-4x=14$ $x=\dfrac{-14}{4}$ $x=\dfrac{-7}{2}$ Como $-7/2 \notin]-\infty,-4]$ entonces: $S_1=\emptyset$	$3(x+4)-2=x$ $3x+12-2=x$ $3x-x+10=0$ $2x=-10$ $x=-5$ Como $-5 \notin [-4,+\infty[$ entonces: $S_2=\emptyset$

De aquí se tiene que el conjunto solución S de $3|x-4|-2=x$ es vacío o sea $S=\emptyset$

9.) $\sqrt[4]{(2x-15)^4}=10$

$$\begin{aligned}
&\sqrt[4]{(2x-15)^4}=10 \iff \\
&|2x-15|=10 \iff 2x-15=10 \quad \text{o} \quad 2x-15=-10\\
&\iff 2x=25 \quad \text{o} \quad 2x=5\\
&\iff x=\frac{25}{2} \quad \text{o} \quad x=\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$\therefore \quad S=\left\{\dfrac{25}{2},\dfrac{5}{2}\right\}$

10.) $\sqrt{(3-x)^2}=5$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(3-x)^2}=5 \iff \\
&|3-x|=5 \iff 3-x=5 \quad \text{o} \quad 3-x=-5\\
&\iff -x=2 \quad \text{o} \quad -x=-8\\
&\iff x=-2 \quad \text{o} \quad x=8
\end{aligned}$$

$\therefore \quad S=\{-2,8\}$

11.) $\sqrt{(3-2x)^2}+x=3$

$$\begin{aligned} \sqrt{(3-2x)^2}+x &= 3 \iff \\ |3-2x|+x &= 3 \end{aligned}$$

Pero:

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad 3-2x \geq 0 \\ -(3-2x) & \text{si} \quad 3-2x < 0 \end{cases}$$

Como: $3-2x \geq 0 \iff -2x \geq -3$, o sea $x \leq \dfrac{3}{2}$

y $3-2x < 0 \iff -2x < -3$, o sea $x > \dfrac{3}{2}$

$$\therefore \quad |3-2x| = \begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{3}{2} \\ -(3-2x) & \text{si} \quad x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$ $\quad$ $3/2$	$+\infty$
$\vert 3-2x\vert$	$3-2x$	$-(3-2x)$
$\vert 3-2x\vert+x=3$	$3-2x+x=3$	$-(3-2x)+x=3$
	$-x=3-3$	$-3+2x+x=3$
	$-x=0$	$3x=6$
	$x=0$	$x=2$
	como $0 \in \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$	como $2 \in \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$
	$\therefore \quad S_1=\{0\}$	$\therefore \quad S_2=\{2\}$

De aquí se tiene que el conjunto solución S de $\sqrt{(3-2x)^2}+x=3$ es $\{0,2\}$ o sea; $S=\{0,2\}$

12.) $2\sqrt[4]{(5-4x)^4}=x+2$

$2|5-4x| = x+2$

Pero: $|5-4x| = \begin{cases} 5-4x & \text{si} \quad 5-4x \geq 0 \\ -(5-4x) & \text{si} \quad 5-4x < 0 \end{cases}$

Como: $5-4x \geq 0 \iff -4x \geq -5$, o sea $x \leq \dfrac{5}{4}$

y $5-4x < 0 \iff -4x < -5$, o sea $x > \dfrac{5}{4}$

$\therefore \quad |5-4x| = \begin{cases} 5-4x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{5}{4} \\ -(5-4x) & \text{si} \quad x > \dfrac{5}{4} \end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$	$5/4$ $\quad$ $+\infty$
$\lvert 5-4x\rvert$	$5-4x$	$-(5-4x)$
$2\lvert 5-4x\rvert = x+2$	$2(5-4x) = x+2$ $10-8x = x+2$ $-8x-x = 2-10$ $-9x = -8$ $x = \dfrac{8}{9}$ como $\dfrac{8}{9} \in \left]-\infty, \dfrac{5}{4}\right[$ $\therefore \quad S_1 = \left\{\dfrac{8}{9}\right\}$	$2[-(5-4x)] = x+2$ $2[-5+4x] = x+2$ $-10+8x = x+2$ $8x-x = 2+10$ $7x = 12$ $x = \dfrac{12}{7}$ como $\dfrac{12}{7} \in \left]\dfrac{5}{4}, +\infty\right[$ $\therefore \quad S_2 = \left\{\dfrac{12}{7}\right\}$

De aquí se tiene que el conjunto solución S de $2\sqrt[4]{(5-4x)^4} = x+3$ es $\left\{\dfrac{8}{9}, \dfrac{12}{7}\right\}$, o sea $S = \left\{\dfrac{8}{9}, \dfrac{12}{7}\right\}$

Ejercicios 2

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1.) $|x| = 7$

2.) $|2x+5| = -8$

3.) $|-2x+9| = 11$

4.) $-3|3-2x| = -12$

5.) $|3x+2| = x+1$

6.) $2|2x-5| = x-3$

7.) $3|-5x-1| = -2x+3$

8.) $-1-2|5-3x| = x$

9.) $\sqrt[6]{(2x+1)^6} = 3$

10.) $-2\sqrt{(1-7x)^2} = -6$

11.) $\sqrt{(x-2)^2} + 3x = 6$

12.) $x + 2\sqrt[4]{(x-6)^4} = 5$

13.) $2|x| + |x-1| = 4$

14.) $|2x-3| - 2|x| = 3$

15.) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = 2$

16.) $2|3x-1| = \sqrt{(x-7)^2}$

17.) $2|2-x| + |2x-1| = x$

18.) $|3-2x| - 3|x+2| - x = 0$

Nota: En las ecuaciones, que resolveremos a continuación, omitiremos algunos pasos al escribir la definición de cada uno de los valores absolutos involucrados.

Solución

1.) $2|x| + |x-1| = 4$

En este caso se tiene que:

a.) $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

b.) $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$
$2\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert=4$	$2x+-(x-1)=4$	$2x+-(x-1)=4$	$2(-x)+(x-1)=4$
	$-2x-x+1=4$	$2x-x+1=4$	$2x+x-1=4$
	$-3x=3$	$x=3$	$3x=5$
	$x=-1$	$x=\dfrac{5}{3}$	
	como $-1\in]-\infty,0[$	Como $3\notin]0,1[$	como $\dfrac{5}{3}\in\left]\dfrac{5}{3},+\infty\right[$
	$\therefore\quad S_1=\{-1\}$	$\therefore\quad S_2=\emptyset$	$\therefore\quad S_2=\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

De aquí se tiene que el conjunto solución de $2|x|+|x-1|=4$ es S donde $S=S_1\cup S_2\cup S_3$

$\therefore\quad S=\left\{-1,\dfrac{5}{3}\right\}$

2.) $|2x-3|-2|x|=3$

En este caso se tiene que:

a.) $|2x-3|=\begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x\geq\dfrac{3}{2} \\ -(2x-3) & \text{si} \quad x<\dfrac{3}{2}\end{cases}$

b.) $|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0\end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

$-\infty$		0		$3/2$		$+\infty$

$\|2x-3\|$	$-(2x-3)$	$-(2x-3)$	$2x-3$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|2x-3\|-2\|x\|=3$	$-(2x-3)-2(-x)=3$ $-2x+3+2x=3$ $3=3$ $\therefore \quad S_1=]-\infty,0[$	$-(2x-3)-2(x)=3$ $-2x+3-2x=3$ $-4x=0$ $x=0$ como $0 \in \left]0,\dfrac{3}{2}\right[$ $\therefore \quad S_2=\{0\}$	$2x-3-2x=3$ $-3=3$ $\therefore \quad S_3=\emptyset$

De aquí que el conjunto solución de $|2x-3|-2|x|=3$ es $S=S_1\cup S_2\cup S_3$

$\therefore \quad S=]-\infty,0]$

3.) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=2$

$$\begin{array}{rcrcll}
\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=2 & \iff & \dfrac{|x-1|}{|x+1|} & = & 2, & \text{por la propiedad 5}\\
 & \iff & |x-1| & = & 2|x+1| & (*)\text{, con } x\neq -1\\
 & \iff & |x-1|^2 & = & (2|x+1|)^2 & \\
 & \iff & |x-1|^2 & = & 4|x+1|^2 & \\
 & \iff & (x-1)^2 & = & 4(x+1)^2, & \text{por la propiedad 6}\\
 & \iff & x^2-2x+1 & = & 4(x^2+2x+1) & \\
 & \iff & x^2-2x+1 & = & 4x^2+8x+4 & \\
 & \iff & -3x^2-10x-3 & = & 0 & \\
 & \iff & 3x^2+10x+3 & = & 0 &
\end{array}$$

Resolviendo esta ecuación por fórmula general:

$$\begin{array}{lcll}
\triangle & = & 100-4(3)(3) & \\
\triangle & = & 100-36 & \\
\triangle & = & 64 & \\
x_1 & = & \dfrac{-10+8}{6} & \Longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{-1}{3} \\
x_2 & = & \dfrac{-10-8}{6} & \Longrightarrow \quad x_2 = -3
\end{array}$$

De aquí se tiene que el conjunto solución de $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = 2$ es $S,$ donde

$S = \left\{-3, \dfrac{-1}{3}\right\}$

Nota: A partir de $(*)$ esta ecuación se puede resolver utilizando un procedimiento similar al usado en los ejemplos (1) y (2) anteriores.

4.) $2|3x-1| = \sqrt{(x-7)^2}$

$$\begin{array}{llcll}
\Longleftrightarrow & 2|3x-1| & = & |x-7| & (*)\text{(Ver nota anterior)} \\
\Longleftrightarrow & (2|3x-1|)^2 & = & |x-7|^2 & \\
\Longleftrightarrow & 4|3x-1|^2 & = & |x-7|^2 & \\
\Longleftrightarrow & 4(3x-1)^2 & = & (x-7)^2 & \\
\Longleftrightarrow & 4(9x^2-6x+1) & = & x^2-14x+49 & \\
\Longleftrightarrow & 36x^2-24x+4 & = & x^2-14x+49 & \\
\Longleftrightarrow & 35x^2-10x-45 & = & 0 & \\
\Longleftrightarrow & 7x^2-2x-9 & = & 0 &
\end{array}$$

Resolviendo esta ecuación por fórmula general:

$$\begin{array}{lcll}
\triangle & = & 4-4(7)(-9) & \\
\triangle & = & 4+252 & \\
\triangle & = & 256 & \\
x_1 & = & \dfrac{2+16}{14} & \Longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{9}{7} \\
x_2 & = & \dfrac{2-16}{14} & \Longrightarrow \quad x_2 = -1
\end{array}$$

De aqui se tiene que el conjunto solución de $2|3x-1| = \sqrt{(x-7)^2}$ es S donde: $S = \left\{\frac{9}{7}, -1\right\}$

5.) $2|2-x| + |2x-1| = x$

En este caso se tiene que:

a.) $|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -(2-x) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

b.) $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1) & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$ $\qquad$ $1/2$	2	$+\infty$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	$2-x$	$-(2-x)$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-(2x-1)$	$2x-1$	$2x-1$
$2\lvert 2-x\rvert + \lvert 2x-1\rvert = x$	$2(2-x) + -(2x-1) = x$ $4-2x-2x+1 = x$ $-2x-2x-x = -4-1$ $-5x = -5$ $x = 1$ Como $1 \notin \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ entonces: $S_1 = \emptyset$	$2(2-x) + (2x-1) = x$ $4-2x+2x-1 = x$ $3 = x$ Como $3 \notin \left[\frac{-1}{2}, 2\right]$ entonces: $S_2 = \emptyset$	$2[-(2-x)] + (2x-1) = x$ $2[-2+x] + 2x-1 = x$ $-4+2x+2x-1 = x$ $2x+2x-x = 4+1$ $3x = 5$ $x = \frac{5}{3}$ Como $\frac{5}{3} \notin]2, +\infty[$ entonces: $S_3 = \emptyset$

De aquí que el conjunto solución de $2|2-x| + |2x-1| = x$ es S, donde $\quad S = \emptyset$

6.) $|3-2x|-3|x+2|-x=0$

En este caso se tiene que:

a.) $|3-2x| = \begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{3}{2} \\ -(3-2x) & \text{si} \quad x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

b.) $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$ -2	-2 $3/2$	$3/2$ $+\infty$
$\lvert 3-2x\rvert$	$3-2x$	$3-2x$	$-(3-2x)$
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$	$x+2$	$x+2$
$\lvert 3-2x\rvert-3\lvert x+2\rvert-x=0$	$3-2x-3[-(x+2)]-x=0$ $3-2x-3[-x-2]-x=0$ $3-2x+3x+6-x=0$ $9=0$ $\therefore \quad S_1=\emptyset$	$3-2x-3(x+2)-x=0$ $3-2x-3x-6-x=0$ $-6x-3=0$ $-6x=3$ $x=\dfrac{-1}{2}$ como $\dfrac{-1}{2} \in \left]-2, \dfrac{3}{2}\right[$ $\therefore \quad S_2=\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$	$-(3-2x)-3(x+2)-x=0$ $-3+2x-3x-6-x=0$ $-2x-9=0$ $-2x=9$ $x=\dfrac{-9}{2}$ Como: $\dfrac{-9}{2} \notin \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ $\therefore \quad S_3=\emptyset$

De aquí que el conjunto solución de $|3-2x|-3|x+2|-x=0$ es S, donde $\quad S=\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

Ejercicios 3

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1.) $\sqrt{(4x-1)^2}=|3-8x|$

2.) $\left|\dfrac{2x+1}{1-x}\right|=3$

3.) $|x+3|-|x-2|=x$

4.) $\sqrt[4]{(x+1)^4} - 3|x-2| = 6$

5.) $|x-4| - \left|\dfrac{x-1}{5}\right| = 4 - x$

6.) $\dfrac{|x|}{2} + 3x + 4 = |x-1|$

5.1.3 Inecuaciones que involucran valor absoluto

Resolveremos inecuaciones que involucran valor absoluto de expresiones de la forma $ax+b$, donde a y b son constantes con $a \neq 0$ y x es una variable real. Para esto utilizaremos la definición de valor absoluto, y en los casos en donde sea posible usar alguna de las propiedades estudiadas, las aplicaremos, con el fin de facilitar el procedimiento de resolución.

Ejercicios 4

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $|x-2| < 1$

2.) $|5x-7| \leq 3$

3.) $|3-x| < 4$

4.) $|5-2x| \leq 7$

5.) $|2x-3| \leq -5$

6.) $|7-2x| \geq -6$

7.) $|5x+2| > 0$

8.) $2|3-x| - 10 \geq 0$

9.) $|x-3| \leq 2x-5$

10.) $|x| + 3 \geq 2x$

11.) $\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3$

12.) $\sqrt{\left(\dfrac{2}{5}x+1\right)^2} - x < 2$

Solución

1.) $|x-2| < 1$

Sabemos que:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$	2 $+\infty$
$\|x-2\|$	$-(x-2)$	$x-2$
$\|x-2\|<1$	$-(x-2)<1$ $-x+2<1$ $-x<-1$ $x>1$ Así debe cumplirse que $x<2$ y $x>1$ $\therefore \quad S_1 =]1,2[$	$x-2<1$ $x<3$ Así debe cumplirse que $x \geq 2$ y $x<3$ $\therefore \quad S_2 = [2,3[$

En consecuencia el conjunto solución S, de $|x-2|<1$ es $S_1 \cup S_2$ o sea $S =]1,3[$

Nota: La inecuación $|x-2|<1$ y otras similares, se pueden resolver aplicando propiedades del valor absoluto y además algunos resultados que se enuncian a continuación y que aceptaremos sin demostrar.

Resultado 1

$\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall b, b \in \mathbb{R}, \forall c, c \in \mathbb{R}, \forall k, k \in \mathbb{R}$

$i.)$ $a < b < c \iff a+k < b+k < c+k$

$ii.)$ $a \leq b \leq c \iff a+k \leq b+k \leq c+k$

Resultado 2

$\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall b, b \in \mathbb{R}, \forall c, c \in \mathbb{R}, \forall k, k \in \mathbb{R}$ con $k>0$

$i.)$ $a < b < c \iff ak < bk < ck$

$ii.)$ $a \leq b \leq c \iff ak \leq bk \leq ck$

Resultado 3

$\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall b, b \in \mathbb{R}, \forall c, c \in \mathbb{R}, \forall k, k \in \mathbb{R}$ con $k<0$

$i.)$ $a < b < c \iff ak > bk > ck$

$ii.)$ $a \leq b \leq c \iff ak \geq bk \geq ck$

Usando estos resultados y las propiedades correspondientes del valor absoluto, $|x-2|<1$ se resuelve así.

$$
\begin{aligned}
|x-2|<1 &\iff -1 \ < \ x-2 \ < \ 1\\
&\iff -1+2 \ < \ x-2+2 \ < \ 1+2\\
&\iff 1 \ < \ x \ < \ 3
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad S =]1,3[$

2.) $|5x-7| \leq 3$

$$
\begin{aligned}
|5x-7| \leq 3 &\iff -3 \ \leq \ 5x-7 \ \leq \ 3\\
&\iff -3+7 \ \leq \ 5x-7+7 \ \leq \ 3+7\\
&\iff 4 \ \leq \ 5x \ \leq \ 10\\
&\iff \frac{1}{5}\cdot 4 \ \leq \ \frac{1}{5}\cdot 5x \ \leq \ \frac{1}{5}\cdot 10\\
&\iff \frac{4}{5} \ \leq \ x \ \leq \ 2
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad S = \left[\frac{4}{5}, 2\right]$

3.) $|3-x| < 4$

$$
\begin{aligned}
|3-x|<4 &\iff -4 \ < \ 3-x \ < \ 4\\
&\iff -3-4 \ < \ -3+3-x \ < \ -3+4\\
&\iff -7 \ < \ -x \ < \ 1\\
&\iff 7 \ > \ x \ > \ -1\\
&\iff -1 \ < \ x \ < \ 7
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad S =]-1,7[$

4.) $|5-2x| \leq 7$

$$\begin{aligned}
|5-2x| \leq 7 \quad &\Longleftrightarrow \quad -7 \;\leq\; 5-2x \;\leq\; 7 \\
&\Longleftrightarrow \quad -7-5 \;\leq\; -5+5-2x \;\leq\; -5+7 \\
&\Longleftrightarrow \quad -12 \;\leq\; -2x \;\leq\; 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-1}{2}\cdot(-12) \;\geq\; \frac{-1}{2}\cdot(-2x) \;\geq\; \frac{-1}{2}\cdot 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 6 \;\geq\; x \;\geq\; -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad -1 \;\leq\; x \;\leq\; 6
\end{aligned}$$

$\therefore \quad S = [-1, 6]$

5.) $|2x-3| < -5$

por propiedad 1:

$|2x-3| \geq 0, \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad |2x-3| \geq -5; \quad$ ¡Nunca!

$\therefore \quad S = \varnothing$

6.) $|7-2x| \geq -6$

por propiedad 1;

$|7-2x| \geq 0, \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}$

en particular

$|7-2x| \geq -6, \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad S = \mathbb{R}$

7.) $|5x+2| > 0$

por propiedad 1;

$|5x+2| \geq 0, \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}$

por propiedad 2;

$$\begin{aligned}
|5x+2| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 5x+2 \;=\; 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 5x \;=\; -2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \;=\; \frac{-2}{5}
\end{aligned}$$

$\therefore \quad |5x+2| > 0; \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \;\; x \neq \dfrac{-2}{5}$

$\therefore \quad S = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{-2}{5} \right\}$

8.) $2|3-x| - 10 \geq 0$

$$\begin{array}{rcllll} 2|3-x| - 10 \geq 0 & \iff & 2|3-x| \; \geq \; 10 & & & \\ & \iff & |3-x| \; \geq \; 5 & & & \\ & \iff & 3-x \; \geq \; 5 & \text{o} & 3-x \; \leq \; -5 & \\ & \iff & -x \; \geq \; 2 & \text{o} & -x \; \leq \; -8 & \\ & \iff & x \; \leq \; -2 & \text{o} & x \; \geq \; 8 & \end{array}$$

$\therefore \quad S =]-\infty, -2] \cup [8, +\infty[$

9.) $|x-3| \leq 2x - 5$

Nota: en este caso no es posible aplicar alguna de las propiedades de valor absoluto enunciadas en páginas anteriores, por lo que procedemos de la manera siguiente:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

Con esta información construimos la tabla siguiente

	$-\infty$	3 $+\infty$
$\lvert x-3\rvert$	$-(x-3)$	$x-3$
$\lvert x-3\rvert \leq 2x-5$	$-(x-3) \leq 2x-5$	$x-3 \leq 2x-5$
	$-x+3 \leq 2x-5$	$x-2x \leq -5+3$
	$-x-2x \leq -5-3$	$-x \leq -2$
	$-3x \leq -8$	$-x \geq -2$
	$x \geq \frac{8}{3}$	
	Así debe cumplirse	Así debe cumplirse
	$x \geq \frac{8}{3}$ y $x < 3$	$x \geq 2$ y $x \geq 3$
	$\therefore \quad S_1 = \left[\frac{8}{3}, 3\right[$	$\therefore \quad S_2 = \; [3, +\infty[$

En consecuencia el conjunto solución S, de $|x-3| \leq 2x-5$ es $S_1 \cup S_2$; o sea $S = \left[\frac{8}{3}, +\infty\right[$

10.) $|x| + 3 \geq 2x$

Como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$	0 $+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x
$\lvert x\rvert + 3 \geq 2x$	$-x+3 \geq 2x$	$x+3 \geq 2x$
	$-x-2x \geq -3$	$x-2x \geq -3$
	$-3x \geq -3$	$-x \geq -3$
	$x \leq 1$	$x \leq 3$
	Así debe cumplirse	Así debe cumplirse
	$x \leq 1$ y $x < 0$	$x \leq 3$ y $x \geq 0$
	$\therefore \quad S_1 = \,]-\infty, 0[$	$\therefore \quad S_2 = [0, 3]$

En consecuencia el conjunto solución S, de $|x|+3 \geq 2x$ es $S_1 \cup S_2$ o sea $S =]-\infty, 3]$

11.) $\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3$

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad |2x+1| > 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x+1 > 3 \quad \text{o} \quad 2x+1 < -3 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x > 2 \quad \text{o} \quad 2x < -4 \\
&\Longleftrightarrow \quad x > 1 \quad \text{o} \quad x < -2
\end{aligned}$$

$S_1 =]1, +\infty[$ y $S_2 =]-\infty, -2[$

El conjunto solución S, de $\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3$ es $S_1 \cup S_2$, o sea $S =]1, +\infty[\cup]-\infty, -2[$

12.) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}x+1\right)^2} - x < 2$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{5}x+1\right)^2} - x < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{2}{5}x+1\right| - x < 2$$

Para este caso se tiene que:

$$\left|\frac{2}{5}x+1\right| = \begin{cases} \frac{2}{5}x+1 & \text{si} \quad x \geq \frac{-5}{2} \\ -\left(\frac{2}{5}x+1\right) & \text{si} \quad x < \frac{-5}{2} \end{cases}$$

Con esta informaión construimos la tabla siguiente:

$-\infty$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{-5}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$

$\left\lvert\dfrac{2}{5}x+1\right\rvert$	$-\left(\dfrac{2}{5}x+1\right)$	$\dfrac{2}{5}x+1$
$\left\lvert\dfrac{2}{5}x+1\right\rvert - x \ < \ 2$	$-(\dfrac{2}{5}x+1) - x \ < \ 2$ $\dfrac{-2}{5}x - 1 - x \ < \ 2$ $\dfrac{-2}{5}x - x \ < \ 2+1$ $\dfrac{-7}{5}x \ < \ 3$ $x \ > \ \dfrac{-15}{7}$ Así debe cumplirse $x \ > \ \dfrac{-15}{7}$ y $x \ < \ \dfrac{-5}{2}$ $\therefore \quad S_1 = \emptyset$	$\dfrac{2}{5}x + 1 - x \ < \ 2$ $\dfrac{2}{5}x - x \ < \ 2-1$ $\dfrac{-3}{5}x \ < \ 1$ $x \ > \ \dfrac{-5}{3}$ Así debe cumplirse $x \ > \ \dfrac{-5}{3}$ y $x \ \geq \ \dfrac{-5}{2}$ $\therefore \quad S_2 = \left]\dfrac{-5}{3}, +\infty\right[$

$$\therefore \quad S = S_1 \cup S_2 = \left]\frac{-5}{3}, +\infty\right[$$

Ejercicios 5

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $|2x-3| < 7$

2.) $|3x+5| \leq 12$

3.) $\sqrt{(9x+8)^2} \leq -3$

4.) $|13x-15| > 0$

5.) $|3+2x| > 5$

6.) $|-2x+6| \geq -4$

7.) $|2x-7| + x \geq 6$

8.) $\sqrt[8]{(5-2x)^8} < x-7$

9.) $2|3-x| + 3x > 3$

10.) $-2|7+x| - 3x \leq 0$

11.) $\sqrt{\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{3}\right)^2} \geq 1$

12.) $2\sqrt{(2x+7)^2} \leq x$

Ejercicios 6

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $|x-1| + |x+1| < 4$

2.) $|x-2| + 3|x| \leq 6$

3.) $|4-x| + |2x-5| > 7-x$

4.) $|x| - 2\sqrt{(6-x)^2} \geq x$

Solución

1.) $|x-1| + |x+1| < 4$

En este caso se tiene que:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

Así:

	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 1	1 $\quad$ $+\infty$
$\|x-1\|$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$
$\|x+1\|$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$\|x-1\| + \|x+1\| < 4$	$-(x-1) + -(x+1) < 4$ $-x+1-x-1 < 4$ $-2x < 4$ $x > -2$ $S_1 =]-2,-1[$	$-(x-1) + x+1 < 4$ $-x+1+x+1 < 4$ $2 < 4$ $S_2 = [-1,1[$	$x-1+x+1 < 4$ $2x < 4$ $x < 2$ $S_3 = [1,2[$

$\therefore$ Como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, entonces: $S =]-2,2[$

2.) $|x-2|+3|x| \leq 6$

En este caso se tiene que:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

y

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$	0	2 $\quad+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x
$\lvert x-2\rvert+3\lvert x\rvert \leq 6$	$-(x-2)+3(-x) \leq 6$	$-(x-2)+3x \leq 6$	$x-2+3x \leq 6$
	$-x+2-3x \leq 6$	$-x+2+3x \leq 6$	$4x \leq 6+2$
	$-4x \leq 6-2$	$2x \leq 6-2$	$4x \leq 8$
	$-4x \leq 4$	$2x \leq 4$	$x \leq 2$
	$x \geq -1$	$x \leq 2$	
	$S_1 = [-1, 0[$	$S_2 = [0, 2[$	$S_3 = \{2\}$

Como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ entonces $S = [-1, 2]$

3.) $|4-x|+|2x-5| > 7-x$

Como:

$$|4-x| = \begin{cases} 4-x & \text{si} \quad x \leq 4 \\ -(4-x) & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

y

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{5}{2} \\ -(2x-5) & \text{si} \quad x < \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Así:

	$-\infty$	$5/2$	4	$+\infty$
$\|4-x\|$	$4-x$	$4-x$	$-(4-x)$	
$\|2x-5\|$	$-(2x-5)$	$2x-5$	$2x-5$	
$\|4-x\|+\|2x-5\|>7-x$	$4-x+-(2x-5)>7-x$ $4-x-2x+5>7-x$ $-x-2x+x>7-5-4$ $-2x>-2$ $x<1$ $S_1 =]-\infty,1[$	$4-x+2x-5>7-x$ $-x+2x+x>7+5-4$ $2x>8$ $x>\dfrac{8}{2}$ $x>4$ $S_2 = \emptyset$	$-(4-x)+2x-5>7-x$ $-4+x+2x-5>7-x$ $x+2x+x>7+5+4$ $4x>16$ $x>4$ $S_3 =]4,+\infty[$	

Como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ entonces $S =]-\infty,1[\,\cup\,]4,+\infty[$

4.) $|x| - 2\sqrt{(6-x)^2} \geq x$

$$\begin{aligned} |x| - 2\sqrt{(6-x)^2} &\geq x \iff \\ |x| - 2|6-x| &\geq x \end{aligned}$$

Además:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y

$$|6-x| = \begin{cases} 6-x & \text{si} \quad x \leq 6 \\ -(6-x) & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$$

Así:

	$-\infty$	0	6 $+\infty$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|6-x\|$	$6-x$	$6-x$	$-(6-x)$
$\|x\|-2\|6-x\| \geq x$	$-x-2(6-x) \geq x$	$x-2(6-x) \geq x$	$x-2(-(6-x)) \geq x$
	$-x-12+2x \geq x$	$x-12+2x \geq x$	$x+2(6-x) \geq x$
	$-x+2x-x \geq 12$	$x+2x-x \geq 12$	$x+12-2x \geq x$
	$0 \geq 12$	$2x \geq 12$	$x-2x-x \geq -12$
		$x \geq 6$	$-2x \geq -12$
			$x \leq 6$
	$\therefore \quad S_1 = \emptyset$	$\therefore \quad S_2 = \{6\}$	$\therefore \quad S_3 = \emptyset$

De aquí se tiene que: $S = \{6\}$

Ejercicios 7

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $|x-6|+|x|<4$

2.) $4|x-2|+3|x| \geq 6$

3.) $3|x-4|-|2x| \leq x-6$

4.) $\sqrt{(x-3)^2}+|4-5x|>7$

Capítulo 6

Funciones Reales de Variable Real

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

6.1 Producto Cartesiano . . . 3
6.2 Sistema de Coordenadas Rectangulares . . . 4
6.2.1 Signo de las coordenadas de un punto, según el cuadrante donde esté . . . 6
6.3 Funciones . . . 7
6.4 Algebra de Funciones . . . 19
6.5 Composición de funciones . . . 22
6.6 Funciones Inversas . . . 25
6.7 Funciones Crecientes y Funciones Decrecientes . . . 29
6.7.1 Ceros de una función polinomial . . . 32
6.7.2 Operaciones con polinomios . . . 33
6.8 División de Polinomios . . . 34
6.8.1 Procedimientos para efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$ . . . 35
6.9 La Función Lineal . . . 37
6.9.1 Gráfico de una función lineal . . . 38
6.10 Trazo de la gráfica de una recta . . . 41
6.11 Puntos de intersección entre dos rectas . . . 42
6.12 Distancia entre dos puntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . . . 43
6.13 Función cuadrática . . . 45
6.14 Intersección con el eje Y . . . 49
6.15 Estudio de la función cuadrática . . . 49
6.16 Intersección entre gráficas de funciones . . . 59
6.17 Problemas que se resuelven usando la ecuación de segundo grado . . . 62
6.17.1 Resolución de problemas . . . 64

6.1 Producto Cartesiano

Definición 1

Sean A y B conjuntos tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Se llama producto cartesiano de A y B, denotado por $A \times B$, al conjunto, $\{(a, b) \text{ tal que } a \in A, b \in B\}$.

O sea: $A \times B = \{(a, b) \text{ tal que } a \in A, b \in B\}$

Ejemplo 1

Sean $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 2, 3\}$.

Entonces $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

Ejercicios 1

Sean $A = \{-1, 0\}$ y $B = \{0, 1\}$. Determine $B \times A$

Sean $X = \left\{\sqrt{2}, \dfrac{-1}{3}\right\}$, $Y = \{7\}$. Determine $X \times Y$

Definición 2

Sean A y B conjuntos tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Los elementos de $A \times B$ se llaman pares ordenados, por que si: $a \in A,\ b \in B$ y $a \neq b$ entonces $(a, b) \neq (b, a)$.

Así con respecto al primer ejemplo, observe que: $(1, 2) \neq (2, 1)$

6.2 Sistema de Coordenadas Rectangulares

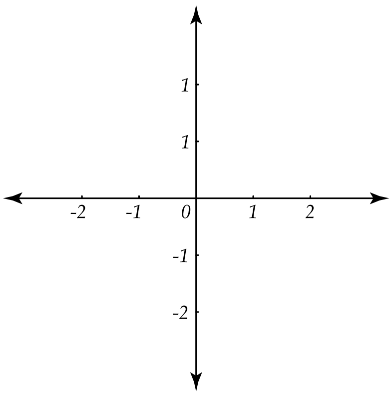
En un capítulo anterior vimos que podemos representar los números reales como puntos de una recta. Ahora estamos interesados en obtener una representación para $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, esto de acuerdo a la definición 1, al conjunto:

$$\{(x, y) \text{ tal que } x,\, y \in \mathbb{R}\}$$

Lo que buscamos "es establecer una correspondencia entre el conjunto de todos los pares ordenados de números reales ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) y el conjunto de todos los puntos de un plano."

Una forma de establecer esta correspondencia es por medio de un sistema de coordenadas rectangulares que se puede construir de la siguiente forma:

Se dibujan dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, que se intersecan en el punto cero de cada una, como se muestra en la siguiente figura.

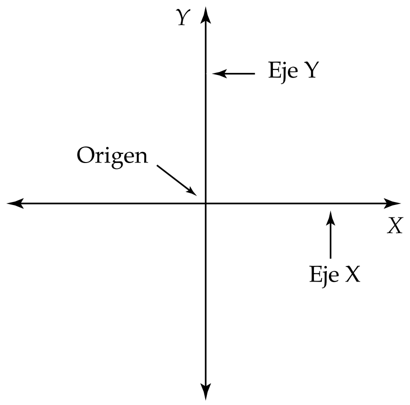


Nota: El nombre de sistema de coordenadas rectangulares se debe a que las rectas numéricas se intersecan determinando un ángulo recto (ángulo de 90^o).

Las dos rectas numéricas de la figura anterior recibe el nombre de ejes coordenados.

Los ejes coordenados son, generalmente (en este curso siempre), un eje horizontal (que llamamos eje X) y un eje vertical (que llamaremos eje Y).

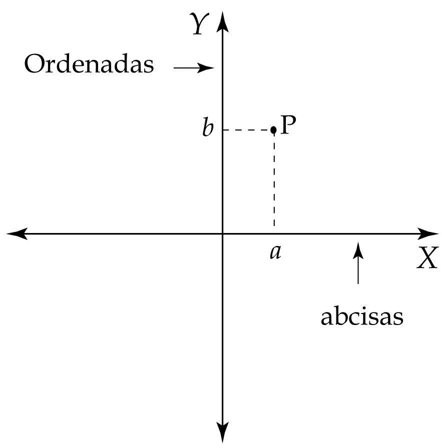
El punto cero donde se intersecan el eje X y el eje Y se llama origen.



El plano en que se usa un sistema de coordenadas se llama plano coordenado o plano real. Así a cada punto P del plano se le puede asignar un par ordenado de números reales, como sigue:

Se traza desde P un segmento perpendicular al eje X, que le interseque en el punto a. (Ver figura 3).

Se traza desde P un segmento perpendicular al eje Y en el punto b.



El número a recibe el nombre de **abscisa**

El número b recibe el nombre de **ordenada**

Al punto P le podemos asignar el par ordenado (a, b). (Note que primero se escribe la abscisa (a) y luego la ordenada (b))

Diremos que P tiene coordenadas a y b.

En forma similar, a un par ordenado de números reales se le puede asignar un punto del plano coordenado.

De todo lo anterior tenemos:

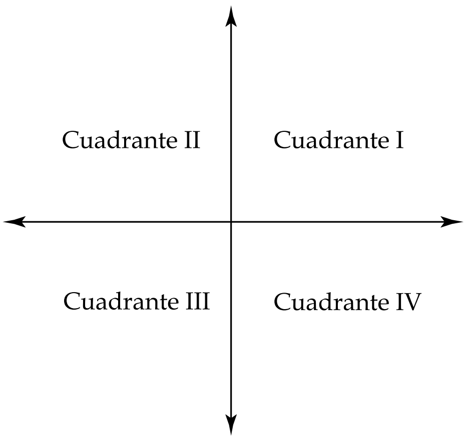
A cada punto P del plano coordenado se le asocia exactamente un par ordenado de números reales (a, b) y a cada par ordenado de números reales se asocia exactamente un punto del plano.

Ejercicios 2

Represente en un sistema de coordenadas rectangulares los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

1. $\{(-1,3),(3,-1),(-5,-4),(2,3),(0,0)\}$
2. $\left\{\left(\frac{1}{2},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{-7}{5},1\right),\left(\frac{-3}{4},\frac{-4}{3}\right)\right\}$
3. $\left\{\left(\frac{5}{4},-1\right),\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{-5}{4}\right),\left(1,\frac{-7}{6}\right)\right\}$

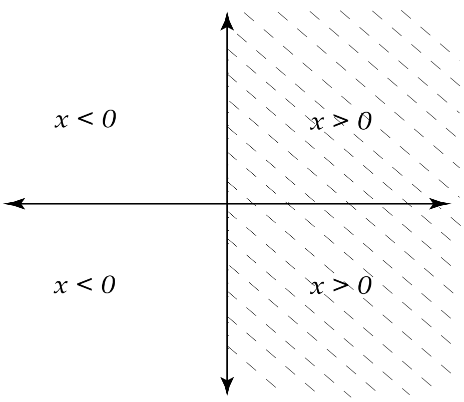
Las cuatro regiones en las que los ejes de un sistema coordenado rectangular divide al plano se llaman cuadrantes. Los cuadrantes se numeran I, II, III y IV, de la siguiente manera:

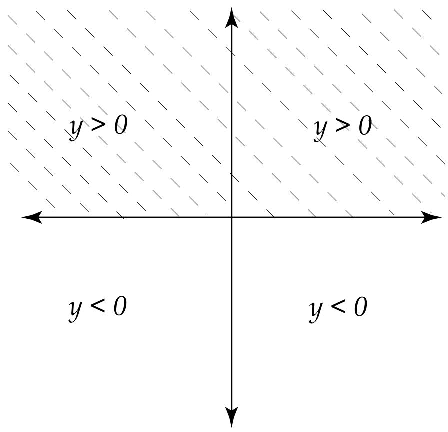


También se le llama primero, segundo, tercero y cuarto cuadrante.

6.2.1 Signo de las coordenadas de un punto, según el cuadrante donde esté

Sea P un punto de coordenadas (x, y) entonces tenemos que:





6.3 Funciones

Definición 3

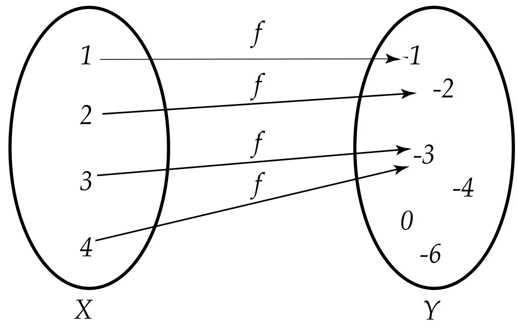
Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una función $\underline{f \text{ de } A \text{ en } B}$ es una ley, regla o correspondencia que a cada elemento de A, le hace corresponder un y sólo un elemento de B.

Definición 4

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y f de A en B una función. Sea $a \in A$. El elemento que f le hace corresponder a a en B, se llama imagen de a y se denota por $f(a)$ ($f(a)$: se lee "efe de a") y a recibe el nombre de preimagen de $f(a)$.

Ejemplo 2

Sea:



Tal y como está definida esta correspondencia f es función de x en y.

Complete:

a) Al 1 se le asigna el -1, o sea $f(1) = -1$. La imagen de 1 es: _____

b) Al 2 se le asigna el -2, o sea $f(2) = -2$. La preimagen de -2 es: _____

c) Al 3 se le asigna el -3, o sea _____ = _____. La imagen de 3 es: _____

d) Al 4 se le asigna el -4, o sea _____ = _____. La preimagen de -4 es: _____

Notación:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $a \in A$

Si f es una función de A en B y $f(a)$ es la imagen de a, esto se indica de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B, \\ a &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$

Definición 5

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ función.

Entonces:

1. A recibe el nombre de dominio de la función
2. B recibe el nombre de codominio de la función

Ejercicios 3

Complete:

1. Con respecto al ejemplo 2:
   a) El dominio de la función es ________________
   b) El codominio de la función es ________________
2. Considere la función $f :]-5, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces:
   a) El dominio de la f es ________________
   b) El codominio de la f es ________________

Definición 6

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ función.

a) Se llama <u>rango</u> o <u>ámbito</u> de f al conjunto A_f, definido por la igualdad: $A_f = \{f(x) \text{ tal que } x \in A\}$

   O sea A_f es el conjunto de las imágenes.

b) Se llama <u>gráfico de f</u> al conjunto G_f, definido por la igualdad $G_f = \{(x, f(x)) \text{ tal que } x \in A\}$

Una función se puede definir por medio de diagramas de Venn. También puede definirse dando su dominio, codominio y una regla que indica en que forma se asocia cada miembro del dominio, con uno del codominio. La regla es a menudo (aunque no siempre) una frase numérica abierta.

Ejemplo 3

Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-6, -5, -4, -2, 0, 1, 2, 4, 6\}$ y $f : A \longrightarrow B$, $f(x) = 2x$

Determine

a) El ámbito o rango de f.

b) El gráfico de f.

c) Represente el gráfico de f en un sistema de coordenadas rectangulares.

Solución

a) Para determinar A_f, construyamos la siguiente tabla de valores considerando que $f(x) = 2x$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2) = -4 \\ f(-1) &= 2(-1) = -2 \\ f(0) &= 2(0) = 0 \\ f(1) &= 2(1) = 2 \\ f(2) &= 2(2) = 4 \end{aligned}$$

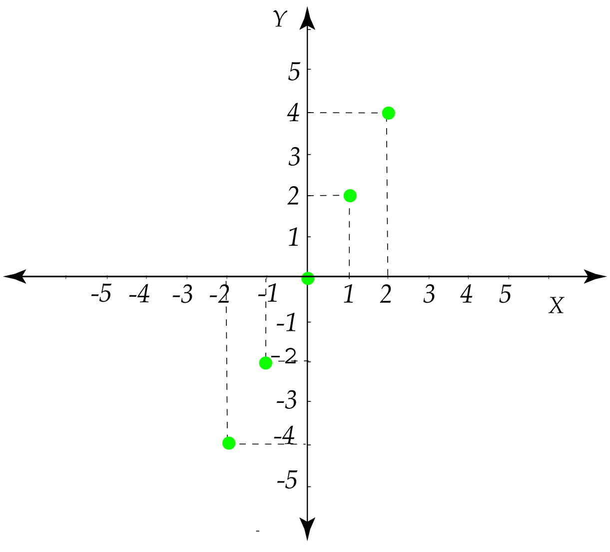
x	$2x$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

Por lo que $A_f = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

b) Por definición $G_f = \{(x, 2x)$ tal que $x \in A\}$ por lo que:

$G_f = \{(-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$

c) Representación de G_f



Nota: Generalmente en vez de escribir "Represente el gráfico de f en un sistema de coordenadas rectangulares", escribiremos "Realice el trazo de f "

Ejercicios 4

Para cada una de las siguientes funciones

1. Determine:

a) A_f

b) G_f

2. Realice el trazo de f

a) Sea $A = \{-\sqrt{3}, -2, \sqrt{2}, -1\}$, $\quad B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f : A \longrightarrow B, \quad f(x) = x^2$

b) Sean $A = \left\{\frac{-3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$, $\quad B =]-7, 7[$ y $f : A \longrightarrow B, \quad f(x) = -4x$

Definición 7

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$, función. Sea $\alpha \in A$, se dice que α es un cero de f, si se cumple que: $f(\alpha) = 0$

Ejemplo 4

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 1$

a) Determine los ceros de f.

b) Realice el trazo de f.

Solución

a) Ceros de f:

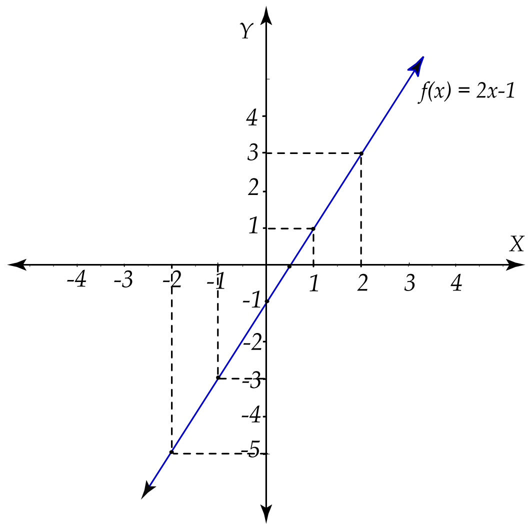
$$\begin{array}{rcrcl} f(x) = 0 & \Longleftrightarrow & 2x - 1 & = & 0 \\ & & 2x & = & 1 \\ & & x & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Por lo que $\frac{1}{2}$ es un cero de f.

b) Trazo de f:

Observe que en este caso el dominio de f es $\mathbb{R}$, así es que x se le puede asignar cualquier número real, pero para construir la tabla de valores escogemos valores para x " apropiados ".

x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
$2x-1$	-5	-4	-3	-1	0	1	3	...



Observe que en el gráfico anterior se obtiene:

1. La intersección entre la gráfica de f y el eje X es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

2. La intersección entre la gráfica de f y el eje Y es $(0, -1)$

En general:

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ función.

a) Intersección entre la gráfica de f y el eje X

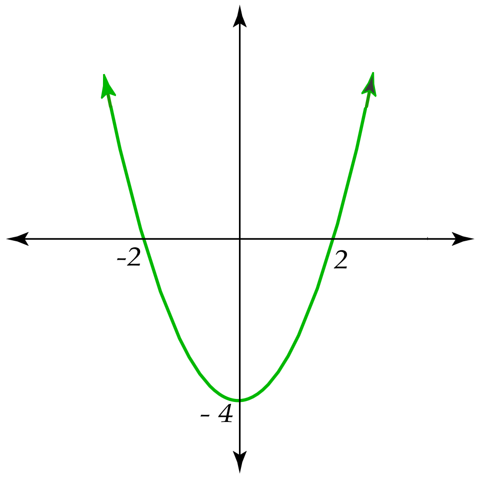
   Sea $\alpha \in A$ tal que $f(\alpha) = 0$, es decir α es un cero de f, entonces la gráfica de f interseca el eje X en el punto $(\alpha, 0)$

b) Intersección entre la gráfica de f y el eje Y

   Sea $\beta \in B$ tal que $f(0) = \beta$, es decir β es la imagen de cero, entonces la gráfica de f interseca el eje Y en el punto $(0, \beta)$

■ **Ejemplo 5**

Complete, de acuerdo a las gráficas que se presentan:

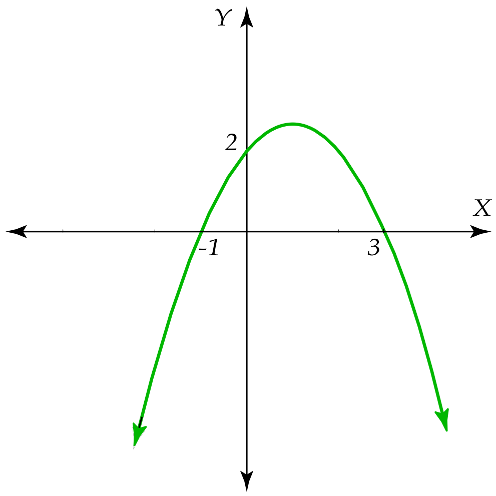


$f(x) = y$

a) f interseca al eje X en: ____________

b) f interseca al eje Y en: ____________

c) $f(x) = 0$ cuando x vale: ____________



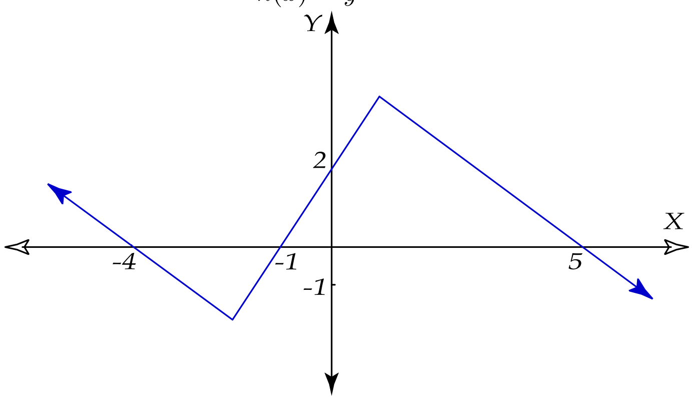
$g(x) = y$

a) g interseca al eje X en: ____________

b) g interseca al eje Y en: ____________

c) $g(x) = 0$ cuando x vale: ____________

$h(x) = y$



a) h interseca al eje X en: ____________

b) h interseca al eje Y en: ____________

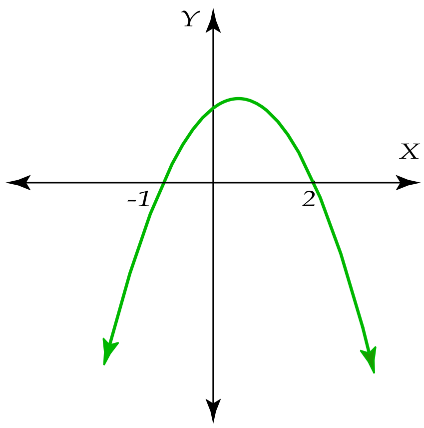
c) $h(x) = 0$ cuando x vale: ____________

Recuerde que si f es una función, el número real $f(x)$ se representa en el eje Y, por esto a menudo escribimos $f(x) = y$

Así para ver cuando una función es positiva (o negativa) basta ver para que valores de x, $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$).

Ejemplo 6

Considere la gráfica de una función f, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



Determine, en notación de intervalos, los conjuntos

a) $A = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0\}$

Solución

a) Como $f(x) = y$, basta ver cuando $y > 0$.

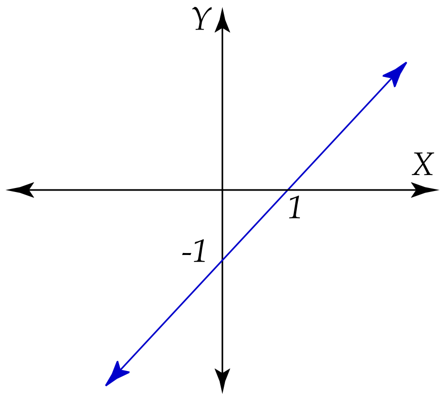
Por lo que $A =]-1, 2[$

b) Similarmente basta ver cuando $y < 0$.

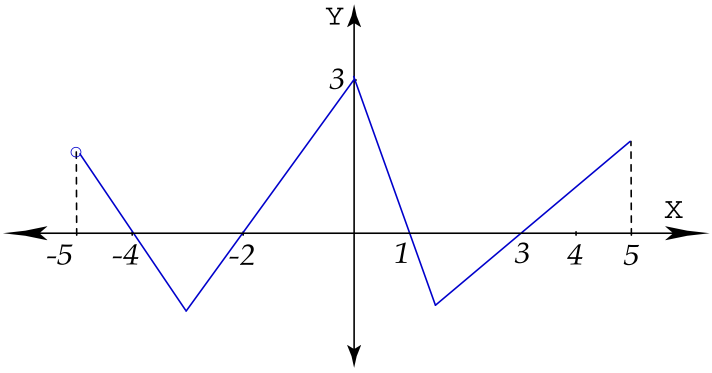
Por lo que $B =]-\infty, -1[\bigcup]2, +\infty[$

Ejercicios 5

1. Para cada una de las siguientes funciones:



$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



$f : \;]-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}$

Determine:

a) Intervalos donde f es positiva

b) Intervalos donde f es negativa

c) Puntos de intersección con el eje X

d) Puntos de intersección con el eje Y

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x$. Realice el trazo de f

   Nota: Esta función recibe el nombre de función identidad.

3. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3$. Realice el trazo de g

4. Sea $c \in \mathbb{R}$, sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = c$. Realice el trazo de h

   Nota: Las funciones g y h anteriores reciben el nombre de funciones constantes.

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \in [-5,0[\\ -x+2 & \text{si } x \in [0,5[\end{cases}$$

Realice el trazo de f

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \in [-3,-2[\\ -2 & \text{si } x \in [-2,-1[\\ -1 & \text{si } x \in [-1,0[\\ 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,2[\\ 3 & \text{si } x \in [2,3[\end{cases}$$

Realice el trazo de f

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \in]-5,-1] \\ -2 & \text{si } x \in]-1,1] \\ x-3 & \text{si } x \in [1,5] \end{cases}$$

Realice el trazo de f

8. Sean f, g, h funciones con dominio $\mathbb{R}$, tales que:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+1}$$

$$g(x) = 3x+1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{-2x+5}$$

Determine:

La intersección de la gráfica de f, de g y de h con los ejes coordenados.

Algunas veces cuando una función está definida por una frase numérica abierta, nos interesa determinar los valores de la variable para los cuales la frase numérica abierta representa un número real, es decir nos interesa saber el dominio de la variable.

■ **Definición 8**

Sea $f(x) = y$, donde y es una frase numérica abierta que involucra la variable x. Entonces diremos que el **dominio de la variable** x es el <u>dominio máximo de f</u> y lo denotamos D_f

Nota: Recuerde que:

1. Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}$ entonces $b \neq 0$

2. Si $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$, con n par entonces $a \geq 0$

Ejemplo 7

1. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Como $x - 1 \neq 0$ entonces $x \neq 1$

   Por lo que el dominio de f es $\mathbb{R} - \{1\}$, o sea $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2. Sea $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-25}$, aquí tiene que cumplirse que $x^2 - 25 \neq 0$

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 25 & = & 0 \\ (x-5)(x+5) & = & 0 \end{array} \implies \begin{cases} x - 5 = 0 & \implies x = 5 \\ x + 5 = 0 & \implies x = -5 \end{cases}$$

   Por lo que $D_f = \mathbb{R} - \{5, -5\}$

Ejemplo 8

Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}}$, aquí tiene que cumplirse que $\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)} \geq 0$

Raíces: $x - 1 = 0 \implies x = 1$

Restricciones: $x = -1,\ x = 2$

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0 $+$	$+$
$x+1$	$-$	0 $+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0 $+$
$\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que $D_f =]-1, 1] \cup]2, +\infty[$

Ejemplo 9

Sea $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$, aquí tiene que cumplirse que $x + 2 \geq 0$ y $x - 1 \neq 0$

a) $x+2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -2 \Longleftrightarrow x \ \in \ [-2,+\infty[$

b) $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Por lo que $D_f = [-2,+\infty[- \{1\}$

Ejercicios 6

Determine el dominio máximo para las funciones definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x+2}{x}}$

b) $g(x) = \sqrt{x+3} + \dfrac{1}{x-5}$

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{3}{x+6} - 1}$

d) $j(x) = \sqrt{x^3 - 25x}$

e) $k(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{-x+1}}$

f) $l(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}}$

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$, función

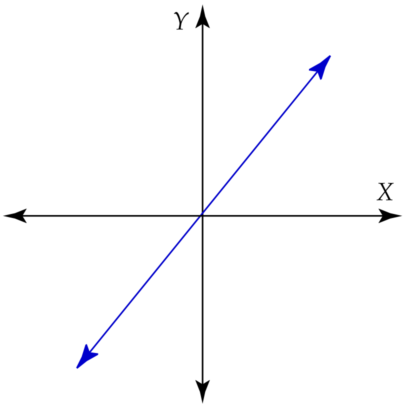
1. <u>f se dice que es inyectiva:</u> si todo elemento en B (codominio) tiene <u>a lo más una</u> preimagen en A (dominio).

   Es decir: Si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$

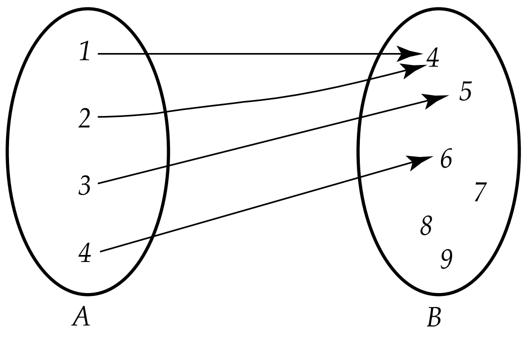
2. <u>f se dice que es sobreyectiva:</u> si <u>todo</u> elemento en B (codominio) tiene <u>alguna</u> preimagen en A (dominio).

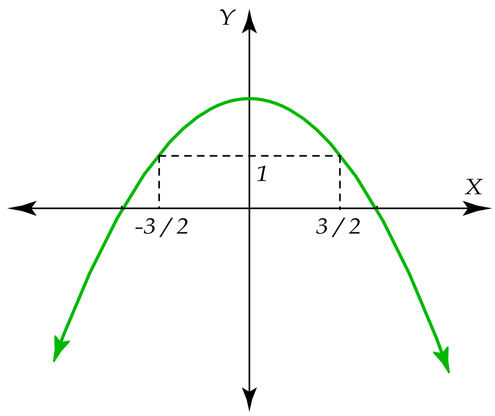
3. <u>f se dice que es biyectiva:</u> si es inyectiva y sobreyectiva.

a) Ejemplos de funciones inyectivas

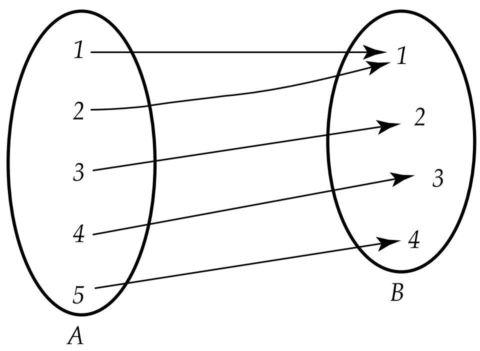


b) Ejemplos de funciones no inyectivas

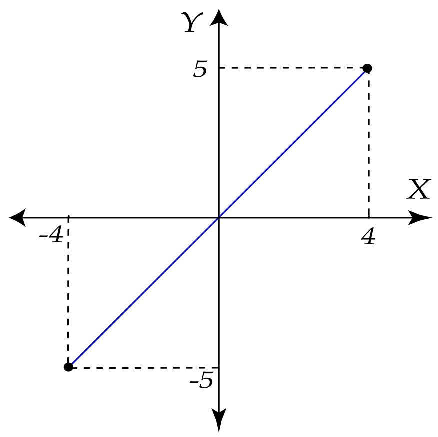




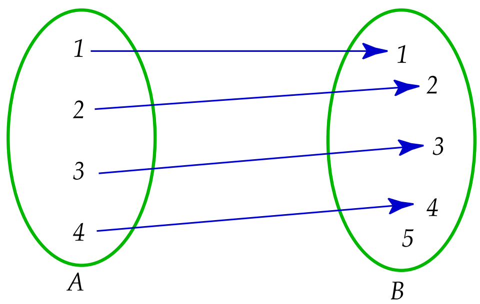
c) Ejemplos de funciones sobreyectivas



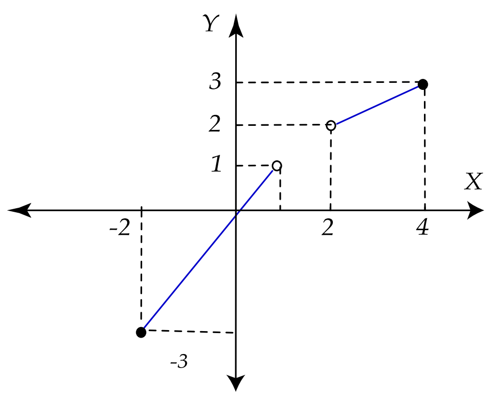
$$f : [-4, 4] \longrightarrow [-5, 5]$$



d) Ejemplos de funciones no sobreyectivas



$$f : [-2, 1[\cup]2, 4] \longrightarrow [-3, 3]$$



6.4 Algebra de Funciones

Nos abocaremos ahora a obtener “nuevas” funciones a partir de funciones dadas, esto lo haremos haciendo uso de operaciones algebraicas.

Las funciones que obtendremos serán la suma, la diferencia, el producto, el cociente o la composición de funciones dadas.

Definición 9

Sean f y g funciones cuyos dominios son D_f y D_g respectivamente; entonces definimos las funciones $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ llamadas suma, diferencia, producto y cociente, respectivamente, de la manera siguiente:

1. $(f+g)(x) = f(x)+g(x);$ para cada $x \in D_f \cap D_g$

2. $(f-g)(x) = f(x)-g(x);$ para cada $x \in D_f \cap D_g$

3. $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x);$ para cada $x \in D_f \cap D_g$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)};$ con $g(x) \neq 0$ y $x \in D_f \cap D_g$

Notemos que el dominio de las funciones $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ es el mismo, a saber $D_f \cap D_g$

Nota: Cuando no se especifique el dominio de una función se entenderá que éste es el máximo dominio real de la función.

Ejemplo 10

Si f y g son funciones definidas respectivamente por: $f(x)=\sqrt{x+1}, \quad g(x)=x+2$, entonces

1. $(f+g)(3) = f(3)+g(3) = 2+5 = 7$

2. $(f-g)(3) = f(3)-g(3) = 2-5 = -3$

3. $(f\cdot g)(3) = f(3)\cdot g(3) = 2\cdot 5 = 10$

4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3) = \dfrac{f(3)}{f(3)} = \dfrac{2}{5}$

Observemos que $(f+g)(-3),\ (f-g)(-3),\ (f\cdot g)(-3),\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(-3)$ no están definidas pues $-3 \notin D_f \cap D_g$

■ Ejemplo 11

Sean f y g funciones definidas respectivamente por: $f(x) = 5x^2 - 2x + 5, \quad g(x) = 3x + 2$

Determinar $(f+g)(x),\ (f-g)(x),\ (f\cdot g)(x),\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$. Además indicar sus dominios respectivos.

Solución

Como $D_f = \mathbb{R};\ \ D_g = \mathbb{R}$ entonces el dominio máximo para las funciones $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,$ es $D_f \bigcap D_g = \mathbb{R}$

a)
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= 5x^2-2x+5+3x+2\\ &= 5x^2+x+7, \qquad \text{o sea } (f+g)(x) = 5x^2+x+7\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ &= 5x^2-2x+5-(3x+2)\\ &= 5x^2-2x+5-3x-2\\ &= 5x^2-5x+3, \qquad \text{o sea } (f-g)(x) = 5x^2-5x+3\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= (5x^2-2x+5)(3x+2)\\ &= 15x^3-6x^2+15x+10x^2-4x+10\\ &= 15x^3+4x^2+11x+10 \qquad \text{o sea } (f\cdot g)(x) = 15x^3+4x^2+11x+10\end{aligned}$$

d) Como $g(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x+2 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-2}{3}$, entonces el dominio de la función $\dfrac{f}{g}$ es $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{-2}{3}\right\}$ y además:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x^2-2x+5}{3x+2}$$

O sea: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{5x^2-2x+5}{3x+2}$

■ Ejemplo 12

Considere las funciones f y g definidas por:

$f(x) = x - \sqrt{3};$ para $x \in\ ]-2, 5[$

$g(x) = x + \sqrt{3};$ para $x \in [-5, 2]$

Determine $(f \cdot g)(x)$ y su dominio respectivo.

Solución

$(f \cdot g)(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = x^2 - 3,$ o sea $(f \cdot g)(x) = x^2 - 3$

El dominio de esta función es:

$$]-2,5[\, \cap \, [-5,2] =]-2,2]$$

Ejemplo 13

Considere las funciones f y g definidas por:

$f(x) = 6x - 9$; para $x \in [0,5[$

$g(x) = 2x - 3$; para $x \in]1,7]$

Determine $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y su dominio respectivo.

Solución

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{6x-9}{2x-3} = \dfrac{3(2x-3)}{2x-3} = 3$

O sea $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 3$, Además

como $g(x) = 0$ si $x = \dfrac{3}{2}$, entonces x no puede tomar el valor de $\dfrac{3}{2}$, además como:

$[0,5[\, \cap \,]1,7] =]1,5[$ entonces el dominio de $\dfrac{f}{g}$ es $]1,5[- \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Ejercicios 7

1. Sean $f(x) = x + 3$ para $x \in [-5,1]$ y $g(x) = 6 + 2x$ para $x \in]-6,0[$

   Determine: $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, e indicar el dominio de la función respectiva.

2. Sean $h(x) = \sqrt{2-x}$, $m(x) = \sqrt{2x+6}$. Determine $(h \cdot m)(x)$ y su dominio respectivo.

3. Sean $r(x) = x^2 - 4$, $s(x) = x + 2$. Determine $\left(\dfrac{r}{s}\right)(x)$ y su dominio respectivo.

Definición 10

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, sea $\alpha \in \mathbb{R}$, α constante, llamaremos producto de α y f y lo designamos $\alpha \cdot f$ a la función definida por: $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ para cada $x \in A$

Ejemplo 14

Si $f(x) = 2x - 1$ y $\alpha = 3$ entonces

$(\alpha f)(x) = (3f)(x) = 3f(x) = 3(2x-1) = 6x - 3$, o sea $(3f)(x) = 6x - 3$

Ejercicios 8

Sea $f(x) = 3 - x$; calcule: $(2f)(x)$; $(-5f)(x)$; $(3f)(1)$

6.5 Composición de funciones

Consideremos la función f definida por: $f(x) = 2x + 3$ y calculamos:

a) $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(0)$

b) $f(2+h)$, $f(a+h)$; $f(a-h)$; $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

Solución

a) $f(1) = 2 \cdot (1) + 3 = 2 + 3 = 5$; o sea $f(1) = 5$

$$\begin{array}{rclclcrcl}
f(-1) &=& 2\cdot(-1)+3 &=& -2+3, & \text{o sea} & f(-1) &=& 1\\
f(2) &=& 2\cdot(2)+3 &=& 7, & \text{o sea} & f(2) &=& 7\\
f(-2) &=& 2\cdot(-2)+3 &=& -1, & \text{o sea} & f(-2) &=& -1\\
f(0) &=& 2\cdot(0)+3 &=& 3, & \text{o sea} & f(0) &=& 3
\end{array}$$

b) Notemos que para calcular $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$ *y* $f(0)$, lo que hemos hecho es sustituir x en la expresión: $f(x) = 2x + 3$, por $1, -1, 2, -2$ y 0 respectivamente.

De la misma forma, para calcular $f(2+h)$; $f(a+h)$; $f(a-h), f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ lo que haremos es sustituir x en la expresión $f(x) = 2x + 3$, por $2+h$, $a+h$, $a-h$, $\dfrac{1}{x+1}$ respectivamente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rclclcrcl}
f(2+h) &=& 2\cdot(2+h)+3 &=& 2h+7 & \text{o sea,} & f(2+h) &=& 2h+7\\
f(a+h) &=& 2\cdot(a+h)+3 &=& 2a+2h+3 & \text{o sea,} & f(a+h) &=& 2a+2h+3\\
f(a-h) &=& 2\cdot(a-h)+3 &=& 2a-2h+3 & \text{o sea,} & f(a-h) &=& 2a-2h+3\\
f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) &=& 2\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+3 &=& \dfrac{3x+5}{x+1} & \text{o sea,} & f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) &=& \dfrac{3x+5}{x+1}
\end{array}$$

Ejercicios 9

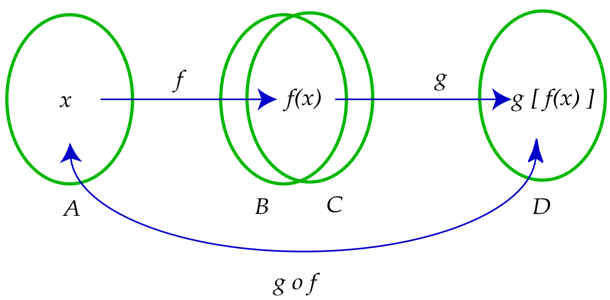
Considere la función f definida por: $f(x) = 3x^2 - 5$

Calcule: $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(3+h)$, $f(2-h)$, $f(a+b)$, $f(a-b)$, $f(\sqrt{a})$, $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

■ Definición 11

Sean $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \rightarrow D$ funciones, tales que $f(A) \cap B \neq \emptyset$, entonces se llama función compuesta de g y f y la denotamos "$g\,o\,f$" a la función definida por $(g\ o\ f)(x) = g[f(x)]$, para cada $x \in A$, tal que $f(x) \in B$.

Gráficamente podemos representar la función compuesta de g y f de la manera siguiente



Observación

1. De la definición anterior se deduce que el dominio de la función $g\ o\ f$ es dado por:

   $D_{gof} = \{x \in D_f \text{ tal que } f(x) \in D_g\}$

2. Nosotros no nos preocupamos por determinar el dominio de la función compuesta, sino únicamente nos interesa establecer el criterio que define la función.

3. En la mayoría de los casos (salvo en ocasiones especiales) gof es diferente de fog

■ Ejemplo 15

Considere las funciones f y g definidas por:

$f(x) = 2x^2 \quad g(x) = 4x + 1$. Determine:

a) El criterio para la función fog

b) El criterio para la función gof

Solución

$$\begin{aligned} a.)\ (gof)(x) &= g[f(x)] \\ &= g[2x^2] \\ &= 4[2x^2]+1 \\ &= 8x^2+1 \end{aligned}$$

Es decir: $(gof)(x) = 8x^2 + 1$

$$\begin{aligned} b.\ (fog)(x) &= f[g(x)] \\ &= f[4x+1] \\ &= 2[4x+1]^2 \\ &= 2[16x^2+8x+1] \\ &= 32x^2+16x+2 \end{aligned}$$

Es decir: $(fog)(x) = 32x^2 + 16x + 2$

Ejemplo 16

Considere las funciones f y g definidas por: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 5x - 4$. Determine:

a) El criterio para la función fog

b) El criterio para la función gof

Solución

$$\begin{aligned} a)\ \ (fog)(x) &= f[g(x)] \\ &= f[5x-4] \\ &= \sqrt{5x-4} \end{aligned}$$

Es decir: $(fog)(x) = \sqrt{5x-4}$

$$\begin{aligned} b)\ \ (gof)(x) &= g[f(x)] \\ &= g[\sqrt{x}] \\ &= 5\sqrt{x}-4 \end{aligned}$$

Es decir: $(gof)(x) = 5\sqrt{x} - 4$

Ejemplo 17

Considere la función f definida por $f(x) = 3x + 2$. Determine el criterio para la función fof.

Solución

$$\begin{aligned}(fof)(x) &= f[f(x)]\\ &= f[3x+2]\\ &= 3[3x+2]+2\\ &= 9x+6+2\\ &= 9x+8\end{aligned}$$

Es decir: $(fof)(x) = 9x + 8$

Ejercicios 10

1. Para cada uno de los pares de funciones f y g determine el criterio correspondiente a las funciones fog y gof:

   a) $f(x) = 2x^2 + 6$, $g(x) = 7x + 2$

   b) $f(x) = x^2 - x - 1$, $g(x) = x - 1$

   c) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x-3}$

   d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

   e) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x + 4$

   f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

2. Sean $f(x) = 3x - 7$ y $g(x) = 2x + k$. Determine k de modo que $(fog)(x) = (gof)(x)$

6.6 Funciones Inversas

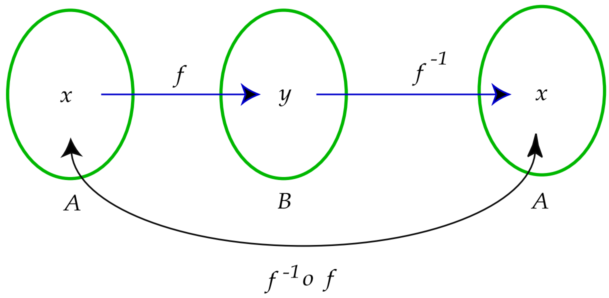
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva. Según la definición de función biyectiva tenemos que $f(A) = B$ y que cada elemento "y" de B es imagen de uno y sólo un elemento "x" de A, entonces es posible definir una función $f^{-1} : B \longrightarrow A$, que llamaremos inversa de f, de la manera siguiente.

■ **Definición 12**

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva entonces la función inversa f^{-1} de f es una función biyectiva tal que:

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ y $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$ (*)

Gráficamente podemos representar estas funciones de la manera siguiente:



De la representación anterior se puede notar que: $(f^{-1}\ o\ f)(x) = x$ y que $(f\ o\ f^{-1})(x) = x$

Ejemplo 18

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, biyectiva $\quad f(x) = 2x - 1$

a) Determine el criterio para la función f^{-1}

b) Verifique que $(f\ o\ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1}\ o\ f)(x) = x$

c) Represente en un mismo sistema de coordenadas rectangulares los gráficos de f, f^{-1}, g donde $g(x) = x$

Solución

a) Como $f(x) = 2x - 1$ y $f(x) = y$ entonces podemos escribir $y = 2x - 1$. Como en la definición (*) $x = f^{-1}(y)$, el criterio para la función f^{-1} se obtiene despejando x en términos de y, de la siguiente manera:

$$y = 2x - 1 \implies y + 1 = 2x \implies \frac{y+1}{2} = x \implies f_y^{-1} = \frac{y+1}{2}$$

Como las letras particulares que se usan para expresar el criterio de una función, no son importantes, se acostumbra a expresar el criterio en términos de la variable x, así en vez de escribir:

$f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{2}$, escribimos $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b)

$$
\begin{aligned}
(fof^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\
&= f\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 \\
&= x + 1 - 1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

Así $(fof^{-1})(x) = x$

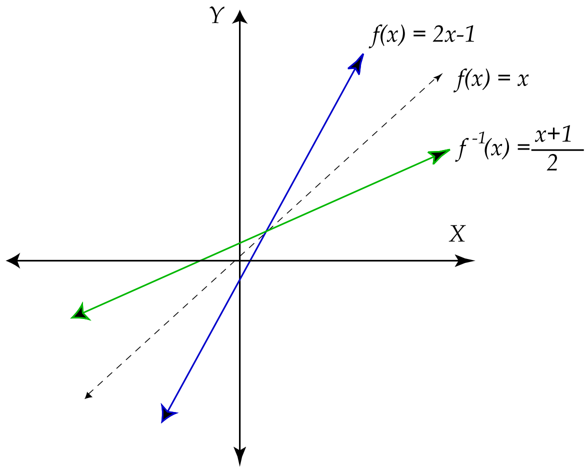
$$
\begin{aligned}
(f^{-1}of)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\
&= f^{-1}(2x-1) \\
&= \frac{2x-1+1}{2} \\
&= \frac{2x}{2} \\
&= x
\end{aligned}
$$

Así $(f^{-1}of)(x) = x$

c) Para representar los gráficos correspondientes a f y f^{-1} construimos las siguientes tablas de valores:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

x	-5	-3	-1	1	3
$f^{-1}(x)$	-2	-1	0	1	2



■ Ejemplo 19

Sea $f : [-3, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ biyectiva, $f(x) = \sqrt{x+3}$

a) Determine el dominio y ámbito de f^{-1}

b) Determine el criterio para la función f^{-1} (en adelante $f^{-1}(x)$)

c) Verifique que $(fof^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1}of)(x) = x$

d) Represente en un mismo sistema de coordenadas rectángulares los gráficos de f, f^{-1} y g donde $g(x) = x$

Solución

a) El dominio de f^{-1} es $[0, +\infty[$

El ámbito de f^{-1} es $[-3, +\infty[$

b) Como $y = \sqrt{x+3} \implies y^2 = x + 3$, $y^2 - 3 = x$, como $x = f^{-1}(y)$ tenemos $f^{-1}(y) = y^2 - 3$ y por lo tanto podemos decir que $f^{-1}(x) = x^2 - 3$

Observe que al despejar x obtenemos que $f^{-1}(y) = y^2 - 3$ sin embargo, por convenio en la notación, escribimos $f^{-1}(x) = x^2 - 3$

c) .

$$\begin{aligned}
(fof^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\
&= f(x^2 - 3) \\
&= \sqrt{x^2 - 3 + 3} \\
&= \sqrt{x^2} \\
&= |x| \text{ y como } x \geq 0 \\
&= x
\end{aligned}$$

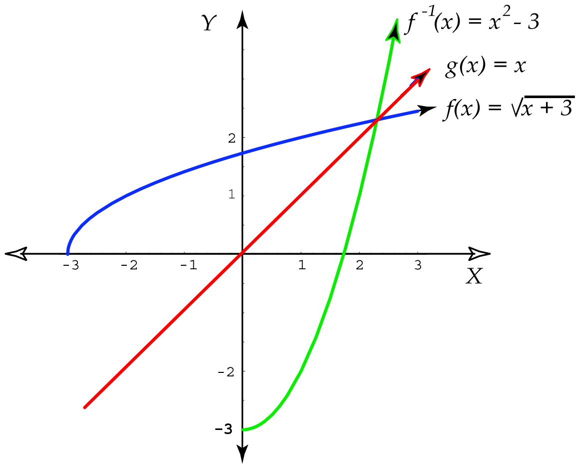
$$\begin{aligned}
(f^{-1}of)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\
&= f^{-1}(\sqrt{x+3}) \\
&= (\sqrt{x+3})^2 - 3 \\
&= x + 3 - 3 \\
&= x
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $(fof^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1}of)(x) = x$

d) Para representar los gráficos correspondientes a f y f^{-1} construiremos las siguientes tablas de valores:

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f^{-1}(x)$	-3	-2	-1	0	1



Ejercicios 11

A continuación se presentan funciones biyectivas f, para cada una de ellas usted debe:

a) Determinar el dominio y ámbito de la función inversa f^{-1}.

b) Determinar el criterio para la función f^{-1}.

c) Verificar que $(f o f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} o f)(x) = x$.

d) Representar en un mismo sistema de coordenadas rectangulares los gráficos de f y f^{-1} y g donde $g(x) = x$

1.1 $f : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[, \quad f(x) = 1 + 3x^3$

2.2 $f :]-\infty, 2[\longrightarrow [0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{2-x}$

3.3 $f : [1, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[, \quad f(x) = x^3 - 2$

4.4 $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x}$

5.5 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$

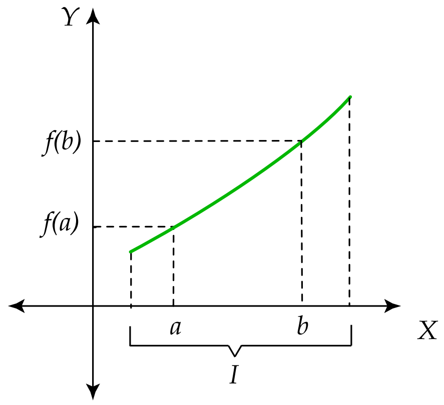
6.6 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 3$

6.7 Funciones Crecientes y Funciones Decrecientes

Definición 13

(Función creciente). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, función.

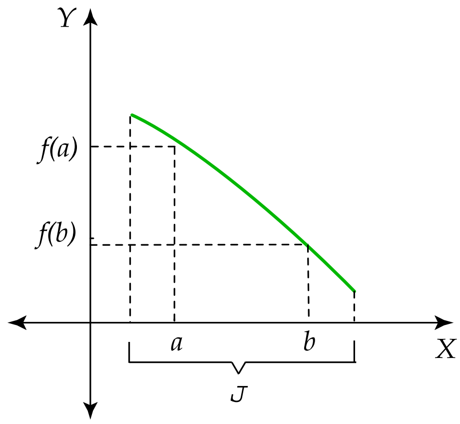
Sea $I \subseteq A$, se dice que f es una función creciente en I, si para cualquier par de números a y b en I, tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \leq f(b)$, como se muestra en la siguiente figura.



Definición 14

(Función decreciente). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, función.

Sea $J \subseteq A$, se dice que f es una función decreciente en J, si para cualquier par de números a y b en J, tales que $a < b$ se cumple que $f(a) \geq f(b)$.



Con respecto al trazo de la gráfica de una función las definiciones anteriores se pueden expresar de la manera siguiente.

Una función f es creciente si cuando "x" crece (x varía de izquierda a derecha), el valor correspondiente a "y" crece ("asciende").

Una función f es decreciente si cuando "x" crece (x varía de izquierda a derecha), el valor correspondiente a "y" decrece ("desciende").

Ejercicios 12

Para cada uno de los siguientes trazos de funciones determine:

a) Intervalos donde la función es creciente.

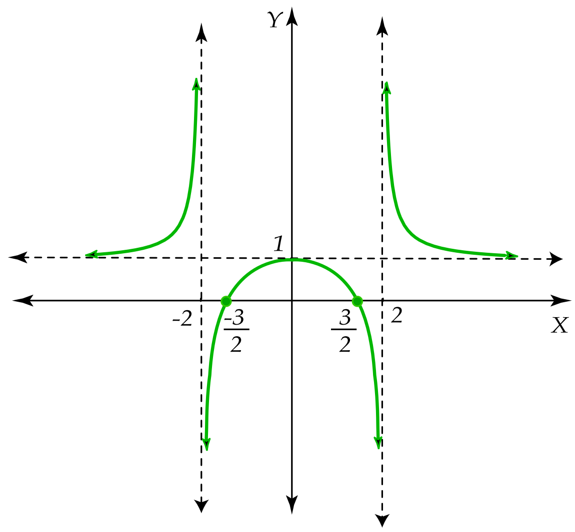
b) Intervalos donde la función es decreciente.

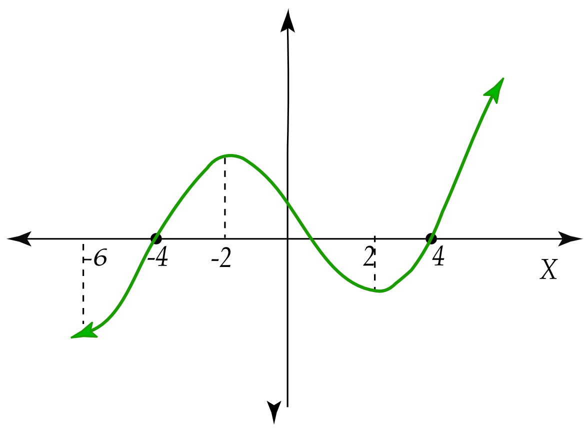
c) $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) > 0\}$

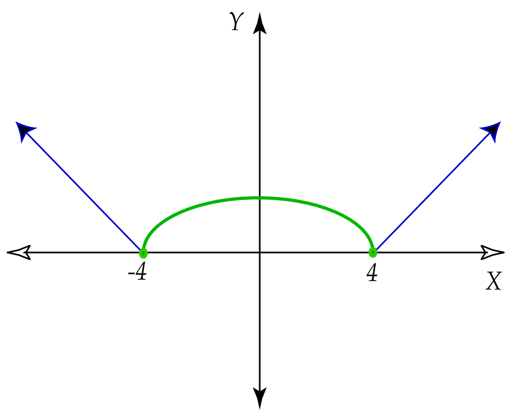
d) $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) < 0\}$

e) $C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = 0\}$

f) Intersección con los ejes coordenados







Definición 15

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ donde $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ son constantes reales, $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, f se llama función polinomial de grado n

Ejercicios 13

La función definida por:

1. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 9x + 3$, es una función polinomial de grado ____________
2. $g(x) = 2x^5 - 4x^2 + 3$, es una función polinomial de grado ____________
3. $h(x) = \dfrac{3}{2}\,x + 1$, es una función polinomial de grado ____________
4. $m(x) = -2$, es una función polinomial de grado ____________
5. $s(x) = 5$, es una función polinomial de grado ____________

Definición 16

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = 0$, f recibe el nombre de función polinomial cero y no se le asigna grado.

6.7.1 Ceros de una función polinomial

Definición 17

Sea f una función polinomial definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. α recibe el nombre de cero de f si $f(\alpha) = 0$, o sea $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$

Ejercicios 14

1. -2 es un cero de la función f definida por $f(x) = 4 - x^2$ pues ________
2. 3 es un cero de la función f definida por $f(x) = x^2 - x - 6$ pues ________

Nota: Aceptaremos y usaremos sin demostrar la siguiente proposición:

Proposición 1

Una función polinomial de grado n tiene a lo sumo n ceros reales.

Ejercicios 15

1. La función f definida por $f(x) = x^2 - x - 6$ tiene a lo sumo _____ ceros reales.
2. La función f definida por $f(x) = x^4 - 4x^2 - 4$ tiene a lo sumo _____ ceros reales.

Nota: Observemos que si f es una función polinomial definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, la expresión $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ es un polinomio, de aquí en adelante hablaremos de polinomio al referirnos a la expresión que define una función polinomial.

6.7.2 Operaciones con polinomios

Como los polinomios definen un tipo particular de funciones, a saber, las funciones polinomiales; dados dos polinomios, podemos efectuar las operaciones definidas para las funciones

Ejemplo 20

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ tales que: $P(x) = x^2 - 5x + 1,\ \ Q(x) = x - 3$. Determine:

1. $(P + Q)(x)$

2. $(P - Q)(x)$

3. $(P \cdot Q)(x)$

4. $(PoQ)(x)$

Solución

1)
$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= P(x)+Q(x)\\ &= (x^2-5x+1)+(x-3)\\ &= x^2-5x+1+x-3\\ &= x^2-4x-2\end{aligned}$$

o sea $(P + Q)(x) = x^2 - 4x - 2$

2)
$$\begin{aligned}(P-Q)(x) &= P(x)-Q(x)\\ &= (x^2-5x+1)-(x-3)\\ &= x^2-5x+1-x+3\\ &= x^2-6x+4\end{aligned}$$

o sea $(P + Q)(x) = x^2 - 6x + 4$

3)
$$\begin{aligned}(P\cdot Q)(x) &= P(x)\cdot Q(x)\\ &= (x^2-5x+1)\cdot(x-3)\\ &= x^3-3x^2-5x^2+15x+x-3\\ &= x^3-8x^2+16x-3\end{aligned}$$

o sea $(P+Q)(x)=x^3-8x^2+16x-3$

$$\begin{aligned}4)\quad (PoQ)(x) &= P(Q(x))\\ &= P(x-3)\\ &= (x-3)^2-5(x-3)+1\\ &= x^2-6x+9-5x+15+1\\ &= x^2-11x+25\end{aligned}$$

o sea $(PoQ)(x)=x^2-11x+25$

Ejercicios 16

Para cada uno de los siguientes pares de polinomios $A(x)$ y $B(x)$, Determine: $(A+B)(x);(A-B)(x);(A\cdot B)(x)$ *y* $(AoB)(x)$

a) $A(x)=2x-1,\qquad B(x)=2x^3-x+1$

b) $A(x)=x+1,\qquad B(x)=64x^3-1$

c) $A(x)=-5x+1,\qquad B(x)=x^2+3$

d) $A(x)=7\ ,\qquad B(x)=35x^3+47x^2+13x+1$

6.8 División de Polinomios

Podemos observar que al efectuar la suma, la resta, el producto o la composición de dos polinomios se obtiene otro polinomio. Por el contrario no todo cociente de polinomios, es un polinomio, en efecto:

Sean $P(x)=x+1$ y $Q(x)=x$, tenemos que $\left(\dfrac{P}{Q}\right)(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}=1+x^{-1}$, o sea $\left(\dfrac{P}{Q}\right)(x)=1+x^{-1}$, el cual no es un polinomio.

No obstante en cuanto a la división de polinomios podemos establecer la siguiente proposición.

Proposición 2

Algoritmo de la división:

Dados dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$, con $B(x)\neq 0$, existen únicos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)\qquad (*)$

donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $B(x)$ o bien $R(x) = 0$, $A(x)$ se llama dividendo, $B(x)$ divisor, $Q(x)$ cociente y $R(x)$ residuo o resto.

Dado que $B(x) \neq 0$, de la igualdad (*) se obtiene que:

$\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$; ¡Verifíquelo!

6.8.1 Procedimientos para efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$

Los pasos que se deben seguir son:

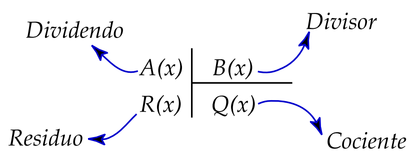
a) Ordenar los polinomios $A(x)$ y $B(x)$, en forma descendente de acuerdo con el exponente de la variable.

b) Se divide el primer sumando del dividendo (el de mayor exponente) por el primer sumando del divisor(el de mayor exponente), el resultado es un sumando del cociente.

c) Se multiplica el sumando del cociente obtenido en el paso anterior por el divisor y el resultado se resta del dividendo, obteniendo un residuo "parcial".

d) Si el residuo obtenido en el paso anterior es cero o de grado menor que el grado del divisor ahí terminó el procedimiento, en caso contrario se repiten los pasos (a), (b) y (c) pero tomando como dividendo el residuo obtenido en el paso anterior.

   Nota: Al efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$ se obtiene un cociente $Q(x)$ y un residuo $R(x)$ los cuales se colocan como se muestra en el diagrama siguiente:



y $\quad A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad$ o $\qquad \dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

Nota: El paso (c) del procedimiento usado para dividir polinomios se puede realizar de la siguiente manera.

i) Se multiplica el sumando del cociente obtenido en (b) por el divisor, y cada sumando de este resultado se multiplica por (-1).

ii) Se suma el dividendo con el polinomio obtenido en (i)

Ejemplo 21

Sean $A(x) = x^3 - 5x^2 + x - 1$ y $B(x) = x - 1$. Efectué la división de $A(x)$ por $B(x)$

Solución

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
 & x^3 & - & 5x^2 & + & x & - & 1 & x-1 \\ \cline{9-9}
- & x^3 & + & x^2 & & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & & & & & & x^2-4x-3 \\
 & & - & 4x^2 & + & x & - & 1 & \\
 & & & 4x^2 & - & 4x & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & - & 3x & - & 1 & \\
 & & & & & 3x & - & 3 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & - & 4 &
\end{array}
$$

Aquí el cociente es $x^2 - 4x - 3$ y el residuo es -4.

Además:

$x^3 - 5x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 - 4x - 3) - 4$ o también

$$\frac{x^3 - 5x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 - 4x - 3 + \frac{-4}{x - 1}$$

■ Ejemplo 22

Efectuar la división de $A(x)$ por $B(x)$, donde $A(x) = 2 - x^5$; $\quad B(x) = x^2 + x$

Solución

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
- & x^5 & + & 0x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & x^2+x \\ \cline{13-13}
 & x^5 & + & x^4 & & & & & & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & & & & & & & & & & -x^3+x^2-x+1 \\
 & & & x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & - & x^4 & - & x^3 & & & & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & - & x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & & & & x^3 & + & x^2 & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & x^2 & + & 0x & + & 2 & \\
 & & & & & & - & x^2 & - & x & & & \\ \cline{7-12}
 & & & & & & & & - & x & + & 2 &
\end{array}
$$

Aquí el cociente es $-x^3 + x^2 - x + 1$ y el residuo es $-x + 2$.

Además:

$-x^5 + 2 = (x^2 + x)(-x^3 + x^2 - x + 1) + -x + 2$ o también

$$\frac{-x^5 + 2}{x^2 + x} = -x^3 + x^2 - x + 1 + \frac{-x + 2}{x^2 + x}$$

Ejercicios 17

Para cada par de polinomios $A(x)$ y $B(x)$, determine el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ que se obtiene al dividir $A(x)$ por $B(x)$ y exprese: $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ de la forma $Q(x)+\dfrac{R(x)}{B(x)}$

a) $A(x)=6x^5-5x^4-7x^2+3,\qquad B(x)=3x^3-4x^2-x+1$

b) $A(x)=2x^7-5x^5+8x^3-3x,\qquad B(x)=2x^3-x$

c) $A(x)=x^3-5x^2+8x-4,\qquad B(x)=x-2$

d) $A(x)=x^3-5x^2+3x+9,\qquad B(x)=x-3$

e) $A(x)=-6x^3+2x^4-3x+3x^2+1,\qquad B(x)=-3x+x^2+1$

6.9 La Función Lineal

Definición 18

Sea f una función tal que, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

f se llama función lineal si $f(x)=mx+b$, com m y b constantes reales.

Ejemplo 23

1. La función f definida por $f(x)=5x+3$, es una función lineal, con $m=5$ y $b=3$.

2. La función f definida por $f(x)=-\sqrt{2}x+5$, es una función lineal, con $m=-\sqrt{2}$ y $b=5$.

3. La función f definida por $f(x)=-3x$, es una función lineal, con $m=-3$ y $b=0$.

4. La función f definida por $f(x)=k$, con k constante real es una función lineal, con $m=0$ y $b=k$.

Notación

Como la imagen de x por la función f usualmente se denota por y, es decir $y=f(x)$, es frecuente escribir $y=mx+b$ en lugar de $f(x)=mx+b$.

6.9.1 Gráfico de una función lineal

Definición 19

Sea f una función lineal tal que $f(x) = mx + b$.

El gráfico de f es el conjunto G_f definido por $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } y = mx + b\}$

Definición 20

Se llama recta al gráfico de una función lineal.

Convenio

Si l es una recta definida por $l = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } y = mx + b\}$ con m y b constantes reales.

Diremos que l es la recta cuya ecuación es $y = mx + b$.

Definición 21

Sean m y b constantes reales y sea l la recta cuya ecuación es $y = mx + b$. Diremos que el número m es la pendiente de la recta l.

Ejemplo 24

1. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y = -2x + 5$ es _______

2. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y = \sqrt{7}x - 7$ es _______

3. La pendiente de la recta cuya ecuación es $y = \dfrac{x}{2} + \sqrt{2}$ es _______

Proposición 3

Dados dos puntos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ existe una y sólo una recta que los contiene.

Así, si conocemos dos puntos A y B en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, podemos hallar la ecuación de la recta que los contiene, de la siguiente manera:

1. La pendiente m de la recta está dada por la igualdad:

   $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$

   Justificación

   Sea l la recta cuya ecuación es $y = mx + b$, y que contiene a (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Como $(x_2, y_2) \in L$ se cumple que $y_2 = mx_2 + b(*)$, como $(x_1, y_1) \in l$ se cumple que $y_1 = mx_1 + b(**)$. Multiplicando a ambos miembros de la ecuación (**) por -1 y sumando término a término con la ecuación (*) tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & y_2 & = & & mx_2 & + & \text{b} \\ & - & y_1 & = & - & mx_1 & - & \text{b} \\ \hline y_2 & - & y_1 & = & & mx_2 & - & mx_1 \end{array}$$

como: $y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1$

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

2. Conociendo m lo sustituimos en la ecuación $y = mx + b$, y sustituimos x e y por las coordenadas de A o de B en dicha ecuación y podemos despejar b, obteniendo su valor.

3. Conociendo m y b podemos escribir la ecuación de la recta $y = mx + b$

Ejemplo 25

Hallar la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(3, -2)$ y $(5, -6)$

Solución

Buscamos una ecuación de la forma $y = mx + b$, (*) ¿Por qué?

Para ello debemos calcular el valor de m y el valor de b.

El valor de m está dado por: $m = \dfrac{-6 - (-2)}{5 - 3} = \dfrac{-4}{2} = -2$, es decir $m = -2$

Sustituyendo el valor de m en (*) tenemos $y = -2x + b$

Sustituyendo x e y por las coordenadas de $(3, -2)$ tenemos

$$\begin{aligned} -2 &= -2 \cdot 3 + b \\ -2 &= -6 + b \\ -2 + 6 &= b \\ 4 &= b \end{aligned}$$

Y por lo tanto la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(3, -2)$ y $(5, -6)$ es $y = -2x + 4$

Ejemplo 26

Calcular la ecuación de la recta que contiene al punto $(5, 2)$ y tiene una pendiente igual a -2

Solución

Buscamos una ecuación de la forma $y = mx + b$ (*) ¿Por qué?

En este caso el valor de la pendiente es conocido, y sustituyendo en (*) tenemos que:

$y = -2x + b$ (**)

Como esta recta contiene al punto $(5,2)$, entonces las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación (**) es decir:

$$\begin{aligned} 2 &= -2\cdot 5 + b \\ 2 &= -10 + b \\ 12 &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta cuya pendiente es -2 y contiene al $(5,2)$ es $y = -2x + 12$

Proposición 4

Sean A, B, C constantes reales con $B \neq 0$, entonces toda ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ es equivalente a otra de la forma $y = mx + b$.

En efecto:

Si $Ax + By + C = 0$ entonces $By = -Ax - C$ y como $B \neq 0$ entonces:

$y = \dfrac{-Ax - C}{B}$ y por lo tanto

$y = \dfrac{-Ax}{B} + \dfrac{-C}{B}$

Ahora, tomamos $m = \dfrac{-A}{B}$ y $b = \dfrac{-C}{B}$ tenemos $y = mx + b$

Debido a la proposición anterior, es que en algunos casos hablamos de rectas determinadas por una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, con A, B, C constantes reales y $B \neq 0$

■ **Ejemplo 27**

¿Cuál es la pendiente de la recta cuya ecuación es $3x - y + 1 = 0$?

Solución

Debemos encontrar una ecuación de la forma $y = mx + b$, que sea equivalente a $3x - y + 1 = 0$

$3x - y + 1 = 0 \implies y = 3x + 1$. Por lo tanto la pendiente de la recta cuya ecuación es $3x - y + 1 = 0$ es 3.

■ **Definición 22**

Sean l_1 y l_2 dos rectas cuyas ecuaciones son respectivamente:
$y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_2$, entonces decimos que:

a) l_1 es paralela a l_2 $(l_1 \parallel L_2)$ si y sólo sí $m_1 = m_2$

b) l_2 es perpendicular a L_2 $(l_1 \perp l_2)$ si y sólo sí $m_1 \cdot m_2 = -1$

■ **Ejemplo 28**

Las rectas l_1 y l_2 cuyas ecuaciones respectivas son $y = -3x + 7$ y $y = \dfrac{1}{3}\,x + 12$ son perpendiculares pues el producto de sus pendientes es -1

Ejemplo 29

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(2, 3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$

Solución

Buscamos una ecuación de la forma $y = mx + b$ (*) donde m es igual a la pendiente de la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$

¿ Por qué?

Como $2x + y - 1 = 0$ entonces $y = -2x + 1$ de donde tenemos que $m = -2$

Sustituyendo m por -2 en (*), tenemos $y = -2x + b$; como esta recta contiene al punto $(2, 3)$ entonces:

$3 = -2 \cdot 2 + b \implies 3 = -4 + b \implies 7 = b$

Por lo tanto la ecuación de la recta que contiene al punto $(2, 3)$, y que es paralela a la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$ es $y = -2x + 7$

Ejemplo 30

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(2, 3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$

Solución

Buscamos una ecuación de la forma $y = mx + b$. (*)

Como la pendiente de la recta cuya ecuación es $2x + y - 1 = 0$ es -2 (ver ejemplo anterior) entonces debe darse que $-2 \cdot m = -1$ ¿Por qué?

$-2 \cdot m = -1 \implies m = \dfrac{1}{2}$

Sustituyendo m por $\dfrac{1}{2}$ en (*) tenemos $y = \dfrac{1}{2}x + b$; como esta recta contiene al punto $(2, 3)$ entonces:

$3 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 + b \implies 3 = 1 + b \implies 2 = b$

Por lo tanto la ecuación que buscamos es $y = \dfrac{1}{2}x + 2$

6.10 Trazo de la gráfica de una recta

Dado que una recta queda determinada si se conocen dos de sus puntos, entonces para trazar su gráfica basta con conocer dos de sus puntos. Para este efecto dos puntos convenientes son la intersección de la recta con los ejes coordenados, los cuales los determinamos de la manera siguiente.

Consideremos la recta l cuya ecuación es $y = mx + b$

a) Su intersección con el eje X es el punto $(x_0, 0)$, donde x_0 es la solución de la ecuación $0 = mx + b$ ¿Por qué?

b) Su intersección con el eje Y es el punto $(0, b)$ ¿Por qué?

Ejemplo 31

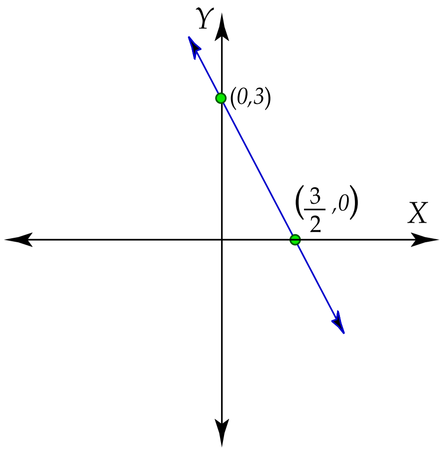
Trazar la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = -2x + 3$

Solución

a) Como $0 = -2x + 3 \implies -3 = -2x \implies \dfrac{3}{2} = x$, entonces el punto de intersección de la recta con el eje X es $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

b) El punto de intersección de la recta con el eje Y es $(0, 3)$

c) Ubicamos los puntos $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y $(0, 3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares, así podemos trazar la recta que contiene a estos puntos como se muestra en la figura siguiente:



6.11 Puntos de intersección entre dos rectas

Dadas las rectas l_1 y l_2 de ecuaciones respectivas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$; si l_1 y l_2 no son paralelas $(m_1 \neq m_2)$, entonces l_1 y l_2 se intersecan en un punto, el cual se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & m_1x + b_1 \\ y & = & m_2x + b_2 \end{array} \right. \qquad \text{¿Por qué?}$$

Ejemplo 32

Hallar el punto de intersección entre las rectas l_1 y l_2 cuyas ecuaciones respectivas son:

$2x - y - 1 = 0$ y $x - y + 7 = 0$

Solución

Debemos resolver el sistema $\begin{cases} 2x - y - 1 &= 0 \\ x - y + 7 &= 0 \end{cases}$

A la primera ecuación le restamos, miembro a miembro, la segunda ecuación

$$\begin{array}{rcl} 2x - y - 1 & = & 0 \\ x - y + 7 & = & 0 \end{array} \iff \begin{array}{rcl} 2x - y - 1 & = & 0 \\ -(x - y + 7) & = & 0 \\ \hline x - 8 & = & 0 \end{array} \implies x = 8$$

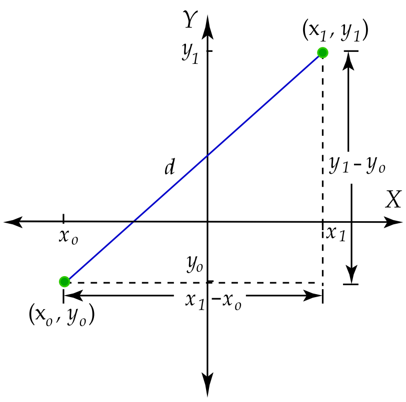
Sustituyendo $x = 8$ en $x - y + 7 = 0$ obtenemos:

$8 - y + 7 = 0 \implies -y + 15 = 0 \implies -y = -15 \implies y = 15$

Por lo tanto la intersección entre l_1 y l_2 es el punto $(8, 15)$

6.12 Distancia entre dos puntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Sean $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ dos puntos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vamos a calcular la distancia d entre P_0 y P_1, es decir la longitud del segmento que estos determinan.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$, de donde tenemos que $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

Ejemplo 33

Calcule la distancia entre los puntos $(3,4)$ y $(2,1)$

Solución

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1-4)^2+(2-3)^2} \\ d &= \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} \\ d &= \sqrt{9+1} \\ d &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Así, la distancia entre los puntos $(3,4)$ y $(2,1)$ es $\sqrt{10}$

Ejercicios 18

1. Dada la recta l cuya ecuación es $2x+3y-5=0$. Encontrar una ecuación de la recta perpendicular a l que contenga al punto $(-1,3)$.

2. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $(1,4)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $2x-5y+7=0$

3. Hallar la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(1,1)$ y $(-2,2)$.

4. Muestre que la ecuación de la recta que interseca a los ejes coordenados en los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$ puede escribirse en la forma: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

5. Hallar la ecuación del conjunto de puntos equidistantes de los puntos $(3,-1)$ y $(-3,3)$

6. Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta cuya ecuación es $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{5}{2}=0$ y que contiene al punto de intersección entre las rectas $3x-y+6=0$ y $x-5=-2y$

7. Demostrar que el triángulo cuyos vértices son los puntos $(-1,4)$, $(0,1)$ y $(2,5)$ es isósceles.

8. Verifique que el triángulo cuyos vértices son $(2,2)$, $(5,7)$ y $(10,4)$ es rectángulo.

9. Determine el punto de la recta $y-2x-2=0$, que equidista de $(-2,5)$ y $(-1,0)$

10. Determine el área del triángulo determinado por la recta cuya ecuación es $7x-14y+21=0$ y los ejes coordenados.

11. Si x denota el número de unidades diarias que se producen de un cierto artículo, $C(x)$ denota el costo total. Para la elaboración de este artículo pueden usarse dos procedimientos.

    El primero tiene un costo fijo de 100 colones, más 6 colones por cada unidad producida.

    El segundo tiene un costo fijo de 300 colones, más 4 colones por cada unidad producida.

a) Halle $C(x)$ para ambos procedimientos

b) Encuentre el número de unidades que es necesario producir para que ambos procesos tengan el mismo costo total.

c) Que procedimiento es más barato, si se desea producir más de 100 unidades diarias

6.13 Función cuadrática

Definición 23

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, f recibe el nombre de **función polinomial de segundo grado o función cuadrática** si $\forall\, x,\ x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$f(x) = ax^2 + bx + c,$ con $a,\ b$ y c constantes reales, $a \neq 0$

Ejemplo 34

Son funciones cuadráticas las definidas por:

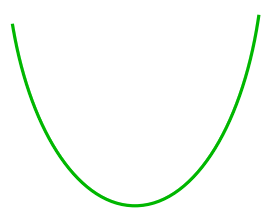
1. $f(x) = 4x^2 + 5x + 8$
2. $f(x) = 3x^2 + 5$
3. $f(x) = x^2 - x - \dfrac{2}{5}$
4. $f(x) = 4x^2 + 2x$

Definición 24

Concavidad hacia arriba:

Sea $A \subseteq \mathbb{R},\ I \subseteq A$

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R},$ se dice que f es cóncava hacia arriba en I, si su trazo en I tiene la siguiente forma:

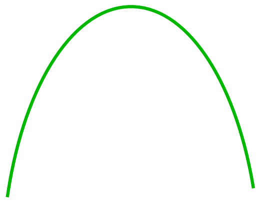


Definición 25

Concavidad hacia abajo:

Sea $A \subseteq \mathbb{R},\ J \subseteq A$

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R},$ se dice que f es cóncava hacia abajo en J, si su trazo en J tiene la siguiente forma:



Ejemplo 35

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$

a) Complete la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2							

b) Realice el trazo de f

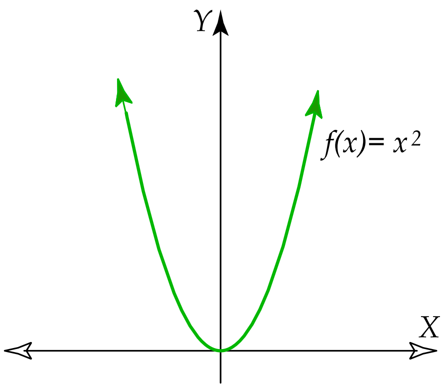
c) ¿Qué tipo de concavidad presenta esta función?

Solución

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

b) Trazo de f



c) Esta función es cóncava hacia arriba.

Ejercicios 19

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 + 3x + 2$

a) Complete la siguiente tabla de valores:

x	-4	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1
x^2+3x+2						

b) Realice el trazo de f

c) ¿Qué tipo de concavidad presenta esta función?

Ejercicios 20

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = -x^2 - 1$

a) Complete la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2-1$							

b) Realice el trazo de f

c) ¿Qué tipo de concavidad presenta esta función?

Proposición 5

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$, entonces:

1. Si $a > 0$, f es cóncava hacia arriba.
2. Si $a < 0$, f es cóncava hacia abajo (convexa).

■ **Ejemplo 36**

a) La función f definida por $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$ es convexa.

b) La función h definida por $h(x) = \sqrt{5}x^2 + x - 1$ es cóncava hacia arriba.

■ **Definición 26**

La gráfica de una función cuadrática recibe el nombre de parábola.

Observe el trazo de la función definida en el ejemplo anterior, note que $f(x)$ toma un valor mínimo, a saber 0.

El punto de la parábola donde $f(x)$ toma su valor mínimo (en este caso), recibe el nombre de vértice de la parábola, en este caso es el punto $(0,0)$.

Con respecto al ejemplo $a)$

El valor mínimo para $f(x)$ es __________ por lo que el vértice de la parábola es:__________

Con respecto al ejemplo $b)$

Observe el trazo de la función, note que $h(x)$ toma un valor máximo y es: __________

El punto de la parábola donde $h(x)$ toma su valor máximo (en este caso), recibe el nombre de vértice de la parábola, en este caso el punto es:__________

Definición 27

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función cuadrática. El punto de la parábola donde $f(x)$ alcanza su máximo o su mínimo valor se llama vértice de la parábola.

Proposición 6

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$. Entonces el vértice V, de la parábola está dado por:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$$

Ejemplo 37

Determine el vértice de la parábola correspondiente a la función f, definida por $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

Solución

En este caso el vértice V es $\left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$, como:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\right) &= 2 \cdot \left[\frac{9}{16}\right] - 3 \cdot \left[\frac{3}{4}\right] - 2 \\ &= \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 2 \\ &= \frac{-25}{8} \end{aligned}$$

o sea $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-25}{8}$ y por lo tanto el vértice es: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-25}{8}\right)$

Ejemplo 38

Determine el vértice de la parábola correspondiente a la función f, definida por $f(x) = x^2 + 3$.

Solución

En este caso el vértice V es $\left(\frac{0}{2}, f\left(\frac{0}{2}\right)\right)$

Como $f(0) = 3$, entonces el vértice es $(0, 3)$

Ejercicios 21

Determine el vértice de la parábola correspondiente a la función f definida por:

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
2. $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$
3. $f(x) = 2x^2 - 1$
4. $f(x) = x^2 + x + 1$

6.14 Intersección con el eje Y

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$. Sabemos que f interseca al eje Y cuando $x = 0$. Pero:

$f(0) = x \cdot (0)^2 + b \cdot 0 + c$, de donde $f(0) = c$. Por lo que f interseca el eje Y en $(0, c)$

6.15 Estudio de la función cuadrática

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c, constantes reales y $a \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \quad \text{completando cuadrados tenemos}\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right] \qquad (*)
\end{aligned}$$

Definición 28

El número b^2-4ac obtenido en (*) recibe el nombre de <u>discriminante de f</u> y se denota por el símbolo Δ, que se lee "delta" o sea:

$$\Delta = b^2-4ac$$

Casos que se pueden presentar, según el valor de b^2-4ac

1. $b^2-4ac<0$

   Si $b^2-4ac<0$ entonces $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}<0$ ¿Por qué?

   por lo que $-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0$ de aquí que $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0$, pues $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2>0$

   i. Si $a>0$; $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]>0 \implies f(x)>0$

   ii. Si $a<0$; $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]<0 \implies f(x)<0$

   Observe que si el discriminante es menor que cero, siempre se obtiene que $f(x)\neq 0$, y por lo tanto el gráfico de f no interseca al eje X.

2. $b^2-4ac=0$

   Entonces por (*) tenemos que:

   $$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{0}{4a^2}\right)\right]$$

   $$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (**)$$

   De aquí se obtiene que $f(x)=0$ si y sólo sí:

$a = 0$ ó $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, pero $a \neq 0$

por lo que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \implies x + \dfrac{b}{2a} = 0 \implies x = \dfrac{-b}{2a}$

Además como $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > 0$ siempre entonces:

i. Si $a > 0$ se cumple que $f(x) \geq 0$; ver (**)

ii. Si $a < 0$ se cumple que $f(x) \leq 0$; ver (**)

Lo anterior se puede resumir así:

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c, son constantes reales y $a \neq 0$, si $b^2 - 4ac = 0$, entonces f tiene dos ceros reales, ambos iguales a $\dfrac{-b}{2a}$ y la gráfica de f interseca al eje X en $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$

3. $b^2 - 4ac > 0$

Por (*) sabemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \quad \text{como } b^2 - 4ac > 0 \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] \quad \text{por diferencia de cuadrados} \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] \\
&= a\left[x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \quad (***)
\end{aligned}$$

i. Por (***), $f(x) = 0$ si y sólo sí

$$a\left[x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0, \text{ como } a \neq 0$$

$$\implies \quad x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \text{ó} \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

O sea: $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ó $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Lo anterior se puede resumir así:

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c, son constantes reales y $a \neq 0$, si $b^2 - 4ac > 0$, entonces f tiene dos ceros reales, que vienen dados por las fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

donde $\Delta = b^2 - 4ac$

Nota: Si $b^2 - 4ac = 0$, las fórmulas anteriores se pueden aplicar

En este curso estamos interesados en estudiar algunas propiedades de la función cuadrática (y en particular de la parábola), es por esto que deseamos resumir toda la información obtenida hasta aquí, para poder tener las herramientas necesarias que nos ayuden en la representación gráfica de la parábola.

Resumen 1

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c, son constantes reales y $a \neq 0$.

Entonces se cumple uno y sólo uno de los siguientes casos:

1) $b^2 - 4ac < 0$ y $a > 0$

2) $b^2 - 4ac < 0$ y $a < 0$

3) $b^2 - 4ac = 0$ y $a > 0$

4) $b^2 - 4ac = 0$ y $a < 0$

5) $b^2 - 4ac > 0$ y $a > 0$

6) $b^2 - 4ac > 0$ y $a < 0$

Con respecto a los casos anteriores obtenemos la siguiente información:

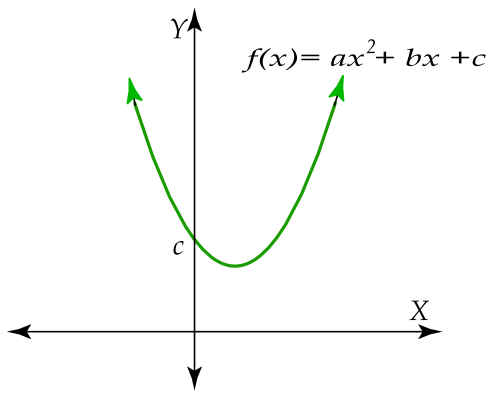
caso 1 $\quad b^2 - 4ac < 0 \;\; y \;\; a > 0$

1. f NO interseca el eje X o sea f no tiene ceros reales $(\Delta < 0)$

2. f es cóncava hacia arriba $(a > 0)$

3. $f(x) > 0$, ¡siempre! $\forall\, x \in \mathbb{R}$

4. Trazo de f: supongamos $\dfrac{-b}{2a} > 0$



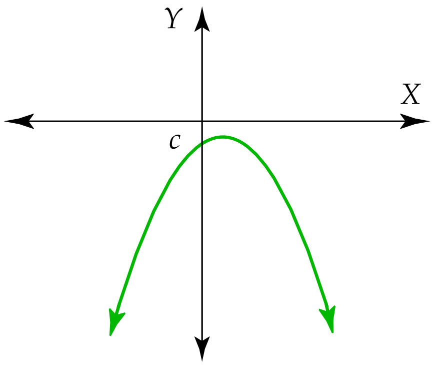
caso 2 $\quad b^2 - 4ac < 0 \;\; y \;\; a < 0$

1. f NO interseca el eje X o sea f no tiene ceros reales $(\Delta < 0)$

2. f es cóncava hacia abajo $(a < 0)$

3. $f(x) < 0$, ¡siempre! $\forall\, x \in \mathbb{R}$

4. Trazo de f: supongamos $\dfrac{-b}{2a} > 0$



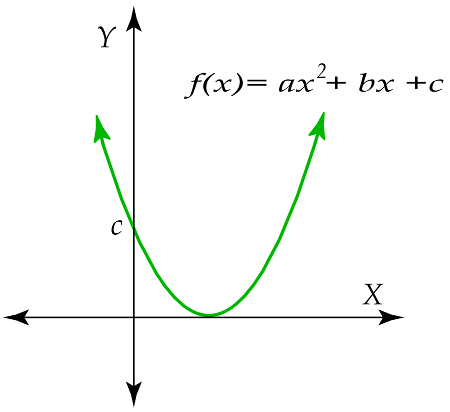
caso 3 $\quad b^2 - 4ac = 0 \;\; y \;\; a > 0$

1. f tiene dos ceros reales iguales, que vienen dados por $\dfrac{-b}{2a} \quad (\Delta = 0)$

2. f interseca el eje X en un punto, a saber $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$

3. f es cóncava hacia arriba $(a > 0)$

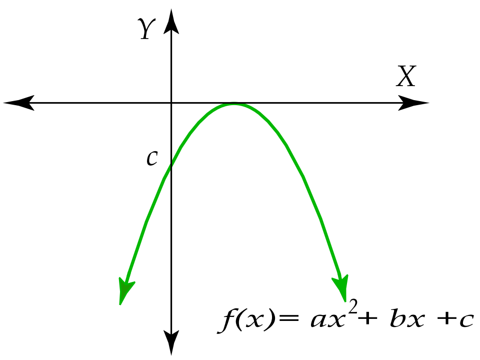
4. Trazo de f: supongamos $\dfrac{-b}{2a} > 0$



5. $f(x) > 0$, si $x \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{-b}{2a} \right\}$

caso 4 $\quad b^2 - 4ac = 0 \;\; y \;\; a < 0$

1. f tiene dos ceros reales iguales, que vienen dados por $\dfrac{-b}{2a} \quad (\Delta = 0)$
2. f interseca el eje X en un punto, a saber $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0 \right)$
3. f es cóncava hacia abajo $(a < 0)$
4. Trazo de f: supongamos $\dfrac{-b}{2a} > 0$



5. $f(x) < 0$, si $x \in \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{-b}{2a} \right\}$

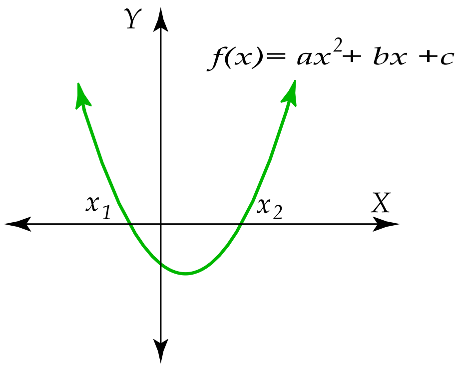
caso 5 $\quad b^2 - 4ac > 0 \;\; y \;\; a > 0$

1. f tiene dos ceros reales, x_1 y x_2 donde $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2. f interseca el eje X en dos puntos, a saber $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, donde x_1, x_2 están dadas en 1.

3. f es cóncava hacia arriba $(a > 0)$

4. Trazo de f: supongamos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$



5. $f(x) < 0$, si $x \in]x_1, x_2[$

6. $f(x) > 0$, si $x \in\ ]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, \infty[$

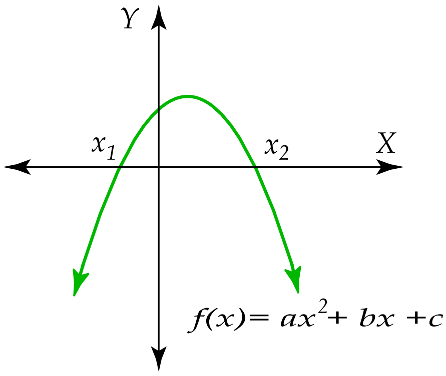
caso 6 $\quad b^2 - 4ac > 0$ y $a < 0$

1. f tiene dos ceros reales $(\Delta > 0)$, x_1 y x_2 donde $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2. f interseca el eje X en dos puntos, a saber $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, donde x_1, x_2 están dadas en 1.

3. f es cóncava hacia abajo $(a < 0)$

4. Trazo de f: supongamos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$



5. $f(x) > 0$, si $x \in]x_1, x_2[$

6. $f(x) < 0$, si $x \in \ ]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, \infty[$

Para realizar el trazo de una función cuadrática la información anterior es muy importante.

Ejemplo 39

Realice el trazo de la función f definida por $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$.

Solución

De acuerdo con la notación $f(x) = ax^2 + bx + c$, en este caso $a = -2$, $b = 7$ y $c = -3$

1. Determinemos el discriminante de f:

   Sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac \implies \Delta = 49 - 4(-2)(-3)$, o sea $\Delta = 25$

2. Determinemos el vértice de la parábola $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

   $$\frac{-b}{2a} = \frac{-7}{2(-2)} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

   $$f\left(\frac{7}{4}\right) = -2\left[\frac{7}{4}\right]^2 + 7\left[\frac{7}{4}\right] - 3 = -2\left[\frac{49}{16}\right] + \frac{49}{4} - 3$$

   $$\frac{-98}{16} + \frac{49}{4} - 3 = \frac{-98 + 196 - 48}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

   Por lo que el vértice es: $\left(\frac{7}{4}, \frac{25}{8}\right)$ (*)

3. Intersecciones con los ejes coordenados.

a) Intersección de la parábola con el eje X.
como $\Delta > 0$, f tiene dos ceros reales diferentes.

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{25}}{2\cdot(-2)} = \frac{-7-5}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3, \text{ por lo tanto } x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{-7+\sqrt{25}}{2\cdot(-2)} = \frac{-7+5}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \text{ por lo tanto } x_2 = \frac{1}{2}$$

Por lo anterior la parábola interseca al eje X en $(3,0)$ y $\left(\frac{1}{2},0\right)$ (**)

b) Intersección de la parábola con el eje Y

Dado que la intersección de la parábola con el eje Y es el punto $(0,c)$, en este caso es $(0,-3)$

4. Concavidad

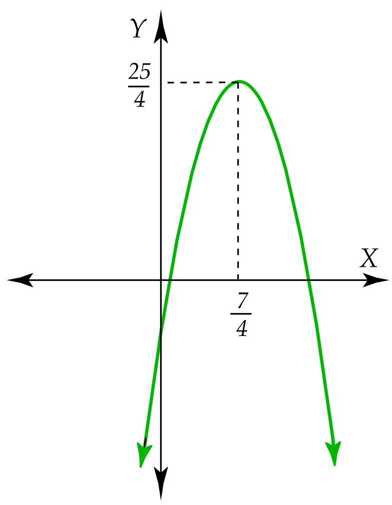
En este caso como $a=-2$, o sea $a<0$, entonces f es cóncava hacia abajo. (****)

5. Con la información obtenida en (*), (**) y (***) construimos la siguiente tabla de valores

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	3
$-x^2-7x-3$	-3	0	$\frac{25}{4}$	0

6. Trazo de f

Por la tabla anterior y (****) el trazo correspondiente a f es:



Ejemplo 40

Realice el trazo de la función f definida por $f(x) = x^2 + 3$

Solución

De acuerdo con la notación $f(x) = ax^2 + bx + c$, en este caso $a = 1$, $b = 0$ y $c = 3$

1. Determinemos el discriminante de f:

   Sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac \implies \Delta = 0 - 4(1)(3) = -12$, o sea $\Delta = -12$

2. Determinemos el vértice de la parábola $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

   $\frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} = 0$

   Además $f(0) = 3$. Por lo que el vértice es: $(0, 3)$ (*)

3. Intersecciones con los ejes coordenados.

   a) Intersección de la parábola con el eje X.

   Como $\Delta < 0$, f no tiene ceros reales y por lo tanto no interseca al eje X.

   b) Intersección de la parábola con el eje Y

   Dado que la intersección de la parábola con el eje Y es el punto $(0, c)$, en este caso es $(0, 3)$ (**)

4. Concavidad

   Como $a = 1$, o sea $a > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba. (***)

5. Con la información obtenida anteriormente, conocemos únicamente un punto de la parábola, a saber $(0, 3)$

   Dado que es conveniente conocer otros puntos de la parábola para realizar su trazo, calcularemos la imagen por f de 1 y -1, de la manera siguiente:

   a) $f(1) = 1^2 + 3 = 4$, o sea $f(1) = 4$

   b) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$, o sea $f(-1) = 4$

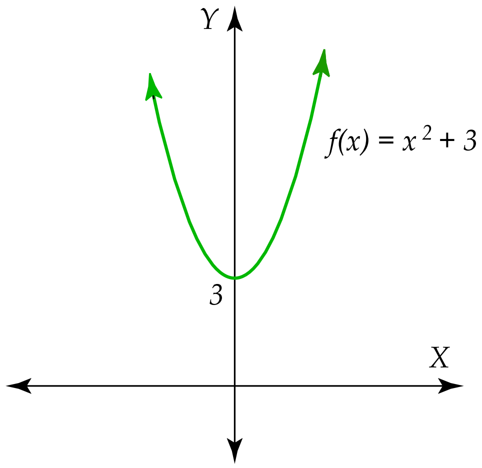
   Así $(1, 4)$ y $(-1, 4)$ pertenecen a la parábola y construimos la siguiente tabla de valores:

x	0	-1	1
$x^3 + 3$	3	4	4

NOTA: Los números 1 y -1, se escogieron apropiadamente.

6. Trazo de f

   Por la tabla anterior y (***) el trazo correspondiente a f es:



OJO PONER QUE HAY QUE HACER

Ejercicios 22

1. $f(x) = -x^2 + 1$
2. $f(x) = -4x^2 + x$
3. $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$
4. $f(x) = x^2 + x + 6$
5. $f(x) = x^2 + x - 6$
6. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

6.16 Intersección entre gráficas de funciones

■ **Definición 29**

Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}; A \subset \mathbb{R}$

$h : B \longrightarrow \mathbb{R}; B \subset \mathbb{R}$

Sean G_f y G_h los gráficos respectivos de f y g, entonces la intersección de G_f y G_h son los puntos (x_0, y_0), donde:

1. x_0 es una solución de la ecuación $f(x) = h(x)$ y $f(x_0) = y_0 = h(x_0)$

2. $x_0 \in A \cap B$

Ejemplo 41

Sean f y g funciones definidas respectivamente por $f(x) = x^2 + 5x + 4$; $g(x) = 2x + 4$

a) Determine los puntos de intersección entre lAs gráficAs de f y g

b) Represente en un sistema de coordenadas la situación

Solución

a) para encontrar los puntos de intersección entre las gráficas de f y g debemos resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ es decir:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 &= 2x + 4 \\ x^2 + 3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \\ x = 0 \quad &\text{o} \quad x = -3 \end{aligned}$$

Si $x = 0$ entonces $g(0) = 4$ y $f(0) = 4$

Si $x = -3$ entonces $g(-3) = -2$ y $f(-3) = -2$

entonces los puntos de intersección entre las gráficas de f y g son $(0, 4)$ y $(-3, -2)$

b) Para hacer el trazo de f haremos el estudio de la parábola.

Como $f(x) = x^2 + 5x + 4$; en este caso se tiene que $a = 1$, $b = 5$ y $c = 4$

i) **Concavidad**

La parábola es cóncava hacia arriba. ¿Por qué?

ii) **Intersecciones de la parábola en los ejes coordenados**

a. La intersección con el eje Y es el punto $(0, 4)$ ¿Por qué?

b. Para obtener la intersección de la parábola con el eje X, debemos resolver la ecuación $x^2+5x+4=0$

$\triangle = b^2 - 4ac$; en este caso $\triangle = 25 - 4(1)(4) = 9$, es decir $\triangle = 9$, entonces existen dos ceros reales diferentes a saber:

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{9}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5-\sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{2} \qquad x_2 = \frac{-5-3}{2}$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -4$$

Por lo tanto los puntos de intersección de la parábola con el eje X son $(-1,0)$ y $(-4,0)$

iii) **Vértice**

El vértice de la parábola es $\dfrac{-b}{2a}$ y $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ pero $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{2}$ y

como $f\left(\dfrac{-5}{2}\right) = \left(\dfrac{-5}{2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{-5}{2}\right) + 4$

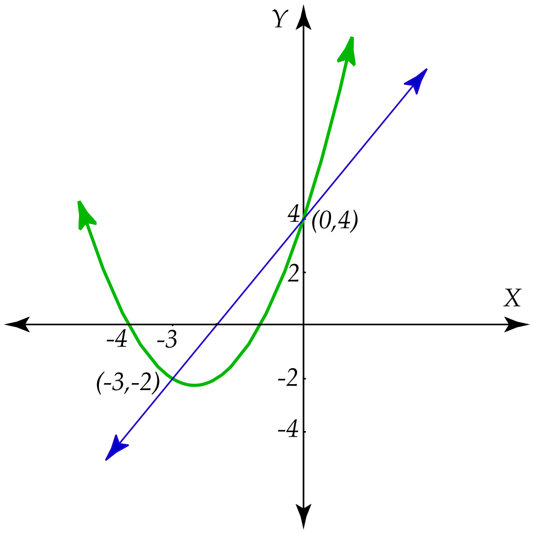
$$f\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4$$

$$f\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-9}{4}$$

Entonces el vértice de la parábola es $\left(\dfrac{-5}{2}, \dfrac{-9}{4}\right)$

Con la información obtenida en (i),(ii) y (iii) trazamos la parábola.

Con la información obtenida en (a) (puntos de intersección entre las gráficas de f y g), trazamos la gráfica de g.



Ejercicios 23

Determine (si existen) los puntos de intersección entre las gráficas de los siguientes pares de funciones, en cada caso haga un dibujo de la situación.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 1; \quad g(x) = x^2 + 1$

2. $f(x) = 4x^2 - 8x - 5; \quad g(x) = 5x - 6$

3. $f(x) = -2x^2 - 1; \quad g(x) = -x - 7$

4. $f(x) = x^2 - 1; \quad g(x) = -x^2 + 1$

6.17 Problemas que se resuelven usando la ecuación de segundo grado

Muchos problemas, especialmente los que se refieren a conceptos físicos como áreas, volúmenes, aceleración, etc. Requieren que se use, para resolverlos, las ecuaciones de segundo grado.

■ **Definición 30**

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática, es una ecuación equivalente a una de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a,b y c constantes reales y $a \neq 0$

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas

a) $x^2 - 5x = -6$

b) $x^2 = 25$

c) $3x^2 + 4x = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

e) $2x^2 - 3x + 6 = 0$

f) $x^2 + x + 1 = 0$

Consideremos la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ y sea f una función polinomial de segundo grado tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, entonces determinar las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, es equivalente a encontrar los ceros de f, por lo tanto para resolver las ecuaciones de segundo grado podemos aplicar las fórnulas del discriminante.

■ **Ejemplo 42**

Resuelva $x^2 - 5x = -6$

Solución

$$x^2 - 5x = -6 \text{ entonces}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\triangle = 25 - 4(1)(6) = 25 - 24$$

$$\triangle = 1 \text{ por lo tanto existen dos soluciones}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - 1}{2}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 5x = -6$ es $\{2, 3\}$

■ **Ejemplo 43**

Resuelva $x^2 + x + 1 = 0$

Solución

En este caso $\triangle = 1 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3$, es decir $\triangle = -3$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ es vacío.

Ejemplo 44

Resuelva $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

Solución

En este caso $\triangle = 16 - 4(-4)(-1) = 16 - 16 = 0$, o sea $\triangle = 0$, por lo tanto existen dos soluciones reales ambas iguales a: $\dfrac{-4}{-8} = \dfrac{1}{2}$

Así el conjunto solución de $-4x^2 + 4x - 1 = 0$ es $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Ejercicios 24

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones

a) $6x^2 + 5x - 4 = 0$

b) $24x^2 + 26x + 5 = 0$

c) $5 - 9x - 2x^2 = 0$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $2x^2 - 6x + 7 = 0$

f) $x^2 + 3x + 9 = 0$

6.17.1 Resolución de problemas

Cuando el planteo de un problemas da origen a una ecuación de segundo grado, al resolver esta ecuación se obtienen dos valores para la incógnita.

En estos casos se aceptan como solución del problema los valores de la incógnita que satisfacen las condiciones del problema y se rechazan las que no las cumplen.

Ejemplo 45

Resuelva el siguiente problema

El largo de un terreno rectangular es el doble que su ancho. Si el largo se aumenta en $40m$ y el ancho en $6m$, el área se aumenta al doble. Hallar las dimensiones del terreno.

Solución

Sea x al ancho del terreno, entonces $2x$ es el largo.

El área del terreno es $2x \cdot x = 2x^2$

Ahora aumentando el largo en $40m$, obtenemos $2x + 40$ y aumentando el ancho en $6m$, obtenemos $x + 6$, y el área será $(2x + 40)(x + 6) = 2x^2 + 52x + 240$

Pero, según las condiciones del problema, el área es el doble del área anterior, es decir:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 52x + 240 &= 4x^2, \text{ por lo tanto} \\ -2x^2 + 52x + 240 &= 0 \\ -2(x^2 - 26x - 120) &= 0 \text{ entonces} \\ x^2 - 26x - 120 &= 0 \end{aligned}$$

en este caso

$$\begin{aligned} \triangle &= (-26)^2 - 4(1)(-120) \\ \triangle &= 676 + 480 \\ \triangle &= 1156 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$x_1 = \frac{26 + \sqrt{1156}}{2} \qquad x_2 = \frac{26 - \sqrt{1156}}{2}$$

$$x_1 = \frac{26 + 34}{2} \qquad x_2 = \frac{26 - 34}{2}$$

$$x_1 = 30 \qquad x_2 = -4$$

$x_2 = -4$ no puede ser solución del problema

Por lo tanto el ancho del terreno es $30m$, y como el largo es el doble del ancho, entonces el largo es de $60m$.

Respuesta: El ancho del terreno es de $30m$ y el largo es de $60m$

Ejercicios 25

Resuelva cada uno de los siguientes problemas:

a) Dos alfareros llevan en conjunto 200 vasijas de arcilla para la venta. El primero vende ₡ 0.50 menos por unidad que el segundo y se recauda ₡ 240. El segundo recauda ₡ 60 menos que el primero. ¿Cuántas vasijas vendió cada uno y a qué precio?

b) Los asistentes a una fiesta tienen que pagar en total ₡ 390. Pero se decide que dos de ellos no paguen la cuota, por lo cual los demás aceptan pagar cada uno ₡ 4 más de lo que les correspondía pagar. ¿Cuántas personas asistieron a la fiesta?

c) Una oficina cuadrada contiene 25 escritorios y además un pasillo de $3m$ de ancho a lo largo de uno de sus lados. Si el espacio destinado a cada escritorio es $5,2m^2$, calcule la medida del lado de la oficina.

Existe otro tipo de problemas en los cuales se aplica el concepto de vértice para resolverlos, consideremos el ejemplo siguiente

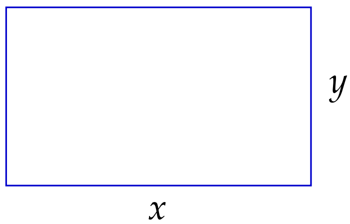
Ejemplo 46

Se quiere cercar un terreno de forma rectangular, para sembrar hortalizas. Si con el material que se dispone se puede cercar una longitud de $32m$. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que su área sea máxima?.

Solución

Sean x e y las dimensiones del terreno. Entonces debe cumplirse que:

$$2x + 2y = 32 \qquad (*)$$



Además el área del terreno, se puede expresar en términos de x e y (A(x,y)) de la manera siguiente:

$$A(x, y) = x \cdot y \quad (**)$$

Ahora si despejamos de (*) una de las incógnitas, digamos y, obtenemos que:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 32 \\ 2(x + y) &= 32 \\ x + y &= 16 \\ y &= 16 - x \end{aligned}$$

Sustituyendo y por $16 - x$ en (**) tenemos el área únicamente en términos de x, así

$$\begin{aligned} A(x) &= x(16-x) \\ A(x) &= 16x - x^2 \\ A(x) &= -x^2 + 16x \end{aligned}$$

Como esta es una función de segundo grado, cóncava hacia abajo, alcanza su máximo en el vértice de la parábola.

El vértice de esta parábola es:

$$\left(\frac{-16}{-2}, f\left(\frac{-16}{-2}\right)\right) = (8, f(8)) = (8, 64)$$

El valor correspondiente a x en este caso es 8.

Sustituyendo x por 8 en (*) tenemos que

$$\begin{aligned} 2 \cdot 8 + 2y = 32 \quad \Longrightarrow \quad 16 + 2y &= 32 \\ 2y &= 16 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Respuesta: El largo del rectángulo debe medir $8m$ y su ancho $8m$, es decir se trata de un cuadrado.

Nota: Observe que el área máxima del terreno es $64m^2$.

Ejercicios 26

Resuelva cada uno de los siguientes problemas:

1. El momento de flexión de una viga de longitud L en metros y soportando una carga de W kilogramos por metro (kg/m) uniformemente distribuida cuando se fija en su extremo, está dado para un punto localizado a x metros del extremo fijado por: $M = \frac{W}{8}(4x^2 - 5Lx + L^2)$

   a) Encuentre la distancia x para el máximo momento de flexión.

   b) Si la viga tiene una longitud L de $18m$ y soporta $150kg/m$, encuentre el valor de x para el cual el momento de flexión es cero.

2. En un cine con capacidad para 800 personas se sabe que si se cobra a ₡ 12 la entrada asisten 800 personas y que por cada ₡ 2 de aumento en el costo la entrada disminuye en 80 el número de espectadores.

   a) Escriba el criterio para la función R, donde $R(x)$ denota la recaudación total de las entradas y x denota el número de incrementos de ₡ 2 en el costo de cada entrada.

b) Calcule $g(0),\ g(1),\ g(3),\ g(4)$ y $g(10)$

c) Cuál es el precio de la entrada que dará la máxima ganancia y cuál es la recaudación.

3. Un granjero tiene un terreno limitado en uno de sus lados por un muro de piedra. Si cuenta con $120m$ de material, para cercar una parcela rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. ¿Qué dimensiones debe tener la parcela para cercar la mayor área?.

4. En una fábrica y es el costo de producción de x miles de artículos. Si este costo satisface la relación $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x-y}{2}$, determine cuántos miles de artículos deben producirse para que el costo sea mínimo.

Capítulo 7

La Función Exponencial y la Función Logarítmica

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

7.1 La función exponencial 3
7.1.1 Representación del gráfico de la función exponencial 4
7.1.2 Algunas propiedades de la función exponencial 5
7.1.3 La función exponencial de base $e \approx 2,718281...$ 5
7.2 La función logarítmica y sus propiedades 6
7.2.1 Representación del gráfico de la función logarítmica 8
7.2.2 Algunas propiedades de la función logarítmica 9
7.2.3 La función logarítmica de base e $(e \approx 2,718281)$ 9
7.2.4 La función logarítmica de base 10 9
7.2.5 Propiedades de los logaritmos 10

7.1 La función exponencial

En temas anteriores, hemos definido el significado de expresiones de la forma a^x, con "a" un número real positivo y x un número racional, por ejemplo conocemos el significado de $2^0,\ 2^3,\ 2^5,\ 2^{\frac{3}{5}},\ 2^{\frac{1}{2}}$, pero por el contrario no conocemos el significado de expresiones como $2^{\sqrt{3}},\ 2^{\pi}$, etc. Puesto que en este capítulo nos interesa estudiar expresiones de la forma a^x, aceptaremos sin demostrar, que estas expresiones están definidas para todo número real x, si $a \in \mathbb{R},\ a > 0$.

■ **Definición 1**

Sea $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$, se llama función exponencial de base "a", y se denota Exp_a, a la función definida por:

$$\begin{aligned} \text{Exp}_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \ ]0, +\infty[\\ x &\longrightarrow \ a^x \end{aligned}$$

Observaciones

1. De la definición anterior se tiene que $\text{Exp}_a(x) = a^x$

2. La restricción $a > 0$, es indispensable, pues si a fuera cero o un número negativo, se presentarían algunas expresiones no definidas en $\mathbb{R}$, tales como $0^{-1},\ (-2)^{\frac{1}{2}},\ 0^0$, etc.

3. El caso $a = 1$ se ha excluido debido a que en este caso se tendría $1^x = 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$, o sea que 1^x es una función constante.

Ejemplos de funciones exponenciales

a.) La función f definida por $f(x) = 2^x$ es la función exponencial de base 2.

b.) La función g definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es la función exponencial de base $\frac{1}{2}$

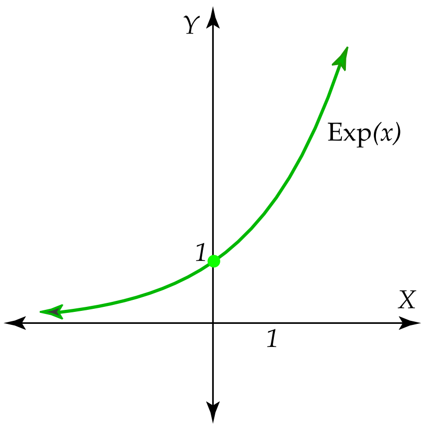
7.1.1 Representación del gráfico de la función exponencial

Ejemplo 1

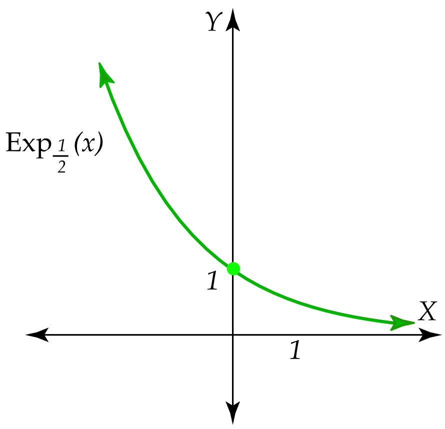
Considere las funciones exponenciales definidas respectivamente por: $\mathrm{Exp}_2(x)$, $\mathrm{Exp}_{\frac{1}{2}}(x)$
Realice el trazo de estas funciones.

Solución
Para realizar el trazo de estas funciones debemos construir, para cada una de ellas una tabla de valores conveniente de la manera siguiente:

x	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{Exp}_2(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



x	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{Exp}_{\frac{1}{2}}(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



7.1.2 Algunas propiedades de la función exponencial

Si $f(x) = a^x; \quad a > 1$

1. $f(x) > 0,$ para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $f(0) = 1$
3. $f(1) = a$
4. f es biyectiva.
5. f es creciente en todo su dominio.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$
7. Si x tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a 0

Si $g(x) = a^x; \quad 0 < a < 1$

1. $g(x) > 0;$ para toda $x \in \mathbb{R}$
2. $g(0) = 1$
3. $g(1) = a$
4. g es biyectiva.
5. g es decreciente en todo su dominio.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a 0.
7. Si x tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$

Nota:

Las operaciones con funciones exponenciales satisfacen las propiedades definidas para las potencias racionales.

7.1.3 La función exponencial de base $e \approx 2,718281...$

■ **Definición 2**

La función definida por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_e : \mathbb{R} &\longrightarrow]0,+\infty[, \\ x &\longrightarrow e^x \end{aligned}$$

Se llama función exponencial de base e. Escribimos $f(x) = e^x$ o $f(x) = \mathrm{Exp}_e(x)$

Dado que $e > 1$ esta función posee las mismas propiedades de la función exponencial de base "$a > 1$".

Ejercicios 1

Para cada una de las siguientes funciones exponenciales realice su gráfica.

1. $f(x) = \mathrm{Exp}_3(x)$
2. $h(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$
3. $g(x) = \mathrm{Exp}_e(x)$
4. $m(x) = e^x + 1$
5. $p(x) = \mathrm{Exp}_5(x) + 1$
6. $g(x) = 2^x - 2$

7.2 La función logarítmica y sus propiedades

Como la función exponencial es biyectiva, entonces existe su función inversa, a esta función la llamamos función logarítmica.

Definición 3

Sea $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ y $a \neq 1$, sea f la función definida por $f(x) = \mathrm{Exp}_a(x)$, la función f^{-1}, inversa de f, se llama *función logarítmica* de base a y la denotamos "$\log_a$".

Así tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Exp}_e : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[, \qquad \text{donde } y = a^x \\ x & \longrightarrow & y \end{array}$$

entonces:

$$\begin{array}{rcl} \log_a :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}, \qquad \text{donde } x = \log_a y \\ y & \longrightarrow & x \end{array}$$

Por lo anterior podemos decir que:

Si $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ x \in \mathbb{R},\ y \in]0,+\infty[$

$$\log_a y = x \iff a^x = y$$

La expresión $\log_a y$ se lee "logaritmo de y en base a"

Observaciones

1. La función logarítmica está definida únicamente para números reales mayores que cero.

2. La base de la función logarítmica es un número real positivo diferente de uno.

Ejemplo 2

a. $8 = 2^3 \Longrightarrow 3 = \log_2 8$

b. $49 = 7^2 \Longrightarrow 2 = \log_7 49$

c. $\log_{\,2}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1 \Longrightarrow 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

d. $\log_{16} 2 = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow (16)^{\frac{1}{4}} = 2$

Ejemplo 3

Para cada una de las siguientes expresiones, calcule el valor de la letra para que la igualdad sea verdadera.

1. $\log_2 N = 4$

2. $\log_c 32 = 5$

3. $\log_3(1/9) = b$

Solución

1. Si $\log_2 N = 4$ entonces $2^4 = N$, o sea $16 = N$

2. Si $\log_c 32 = 5$ entonces:

$$\begin{aligned} c^5 &= 32 \\ (c^5)^{\frac{1}{5}} &= (32)^{\frac{1}{5}} \\ c &= (2^5)^{\frac{1}{5}} \\ c &= 2 \end{aligned}$$

3. Si $\log_3(1/9) = b$ entonces:

$$\begin{aligned} 3^b &= \frac{1}{9} \\ 3^b &= 3^{-2} \\ b &= -2 \end{aligned}$$

Ejercicios 2

En cada una de las siguientes expresiones, calcule el valor de la tetra para que la igualdad sea verdadera.

1. $\log_x 1 = 0$
2. $\log_x (x^2 + x) = 2$
3. $\log_2 (-x + 1) = 3$
4. $\log_4 2 = x + 1$
5. $\log_{x+1} 4 = 2$
6. $\log_x (2x^2 - x) = 2$
7. $\log_2 \dfrac{1}{4} = x$
8. $\log_8 N = \dfrac{-1}{2}$
9. $\log_{-8} x = \dfrac{1}{3}$
10. $\log_{6x-17} (x^2 - 9) = 1$
11. $\log_2 (x^2 + 2^x) = x$

7.2.1 Representación del gráfico de la función logarítmica

Ejemplo 4

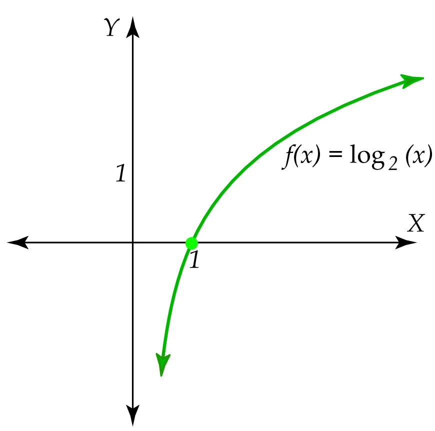
Considere las funciones logarítmicas f y g, definidas respectivamente por $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

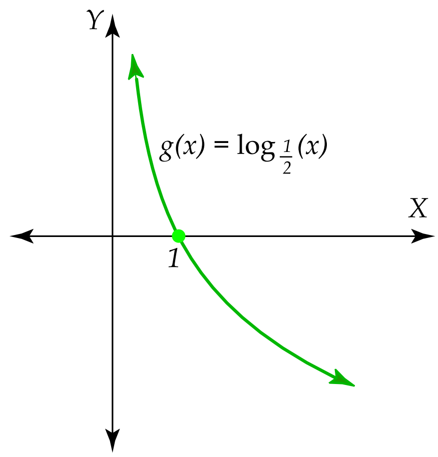
Realice el trazo de estas funciones.

Solución
Para realizar el trazo de f y g debemos construir para cada una de ellas, una tabla de valores conveniente de la manera siguiente:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2(x)$	-2	-1	0	1	2

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\log_{\frac{1}{2}}(x)$	-2	-1	0	1	2





7.2.2 Algunas propiedades de la función logarítmica

Si $f(x) = \log_a x; \quad a > 1$

1. $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$
3. f es biyectiva.
4. f es creciente en todo su dominio.
5. Si x tiende a $+\infty$ entonces $\log_a x$ tiende a $+\infty$
6. Si x tiende a 0 tomando valores positivos entonces $\log_a x$ tiende a $-\infty$

Si $g(x) = \log_a x; \quad 0 < a < 1$

1. $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$
3. g es biyectiva.
4. g es decreciente en todo su dominio.
5. Si x tiende a $+\infty$ entonces $\log_a x$ tiende a $-\infty$
6. Si x tiende a 0 tomando valores positivos entonces $\log_a x$ tiende a $+\infty$

7.2.3 La función logarítmica de base e $(e \approx 2,718281)$

■ **Definición 4**

La función f definida por:

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longrightarrow \log_e x \end{aligned}$$

se llama función logarítmica de base e, y escribimos $\ln(x)$ o sea $\ln(x) = \log_e x$.

Los logaritmos de base e se llaman logaritmos neperianos o logaritmos naturales.

La función logarítmica de base e posee las mismas propiedades de la función logarítmica de base a, con $a > 1$.

La expresión $\ln\ x$ se lee "logaritmo natural de x".

7.2.4 La función logarítmica de base 10

■ **Definición 5**

La función f definida por:

$$\begin{array}{rcl} f :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longrightarrow & \log_{10} x \end{array}$$

se llama función logarítmica de base 10 y escribimos $\log(x)$ o sea $\log(x) = \log_{10} x$.

Los logaritmos de base 10 se laman logaritmos decimales.

Ejercicios 3

Considere las funciones definidas por:

1. $f(x) = \ln(x)$
2. $h(x) = \log_2(x + 2)$
3. $p(x) = \ln(-x + 3)$
4. $g(x) = e^{-x}$
5. $m(x) = 3^x + 1$
6. $q(x) = \log_{10}(1 - 3x)$

Para cada una de las funciones anteriores determine:

a. Determine su máximo dominio real.

b. Realice su trazo.

7.2.5 Propiedades de los logaritmos

Propiedad I

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $a \neq 1$, como Exp_a y $\log_a$ son funciones mutuamente inversas entonces al calcular la composición de estas dos funciones se obtiene :

a. $[\mathrm{Exp}_a \circ \log_a](x) = x$, con $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$

b. $[\log_a \circ \mathrm{Exp}_a](x) = x$, con $x \in \mathbb{R}$

Por (a) se tiene:

$$\begin{array}{rcll} x & = & [\mathrm{Exp}_a \circ \log_a](x) & \\ & = & \mathrm{Exp}_a[\log_a(x)] & \text{por definición } \mathrm{Exp}_a(x) = a^x \\ & = & a \log_a(x) & \end{array}$$

Por lo tanto $\boxed{a^{\log_a x} = x}$ (I-a)

Por (b) se tiene:

$$\begin{aligned} x &= [\log_a \circ \mathrm{Exp}_a](x) \\ &= \log_a[\mathrm{Exp}_a(x)] \qquad \text{por definición } \mathrm{Exp}_a(x) = a^x \\ &= \log_a a^x \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\boxed{\log_a a^x = x}$ (I-b)

Ejemplo 5

a. $\log_3 3^2 = 2$ $\qquad (porpropiedad\ I-b)$

b. $5^{\log_5 7} = 7$ (por propiedad I-a)

Ejemplo 6

Resuelva las siguientes ecuaciones, aplicando las propiedades I-a y I-b.

a. $3^{-2x+5} = 1$

b. $\ln[(x+3)(x+5)] = \ln 15$

Solución

a. $3^{-2x+5} = 1$

Si $3^{-2x+5} = 1$ entonces aplicando $\log_3 x$ a ambos términos de la igualdad se obtiene que:

$$\log_3 3^{-2x+5} = \log_3 1$$

Como $\log_3 3^{-2x+5} = -2x+5$ (por I-b) y $\log_3 1 = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} -2x+5 &= 0 \\ -2x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{-2} \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Así el conjunto solución de $3^{-2x+5} = 1$ es $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

b. $\ln[(x+3)(x+5)] = \ln 15$

Si $\ln[(x+3)(x+5)] = \ln 15,$ entonces aplicando $\text{Exp}_e x$ a ambos términos de la igualdad se tiene que:

$$e^{\ln\,[(x+3)(x+5)]} = e^{\ln\ 15}$$

Como $e^{\ln\,[(x+3)(x+5)]} = (x+3)(x+5)$ y $e^{\ln\ 15} = 15$ (por I-a)

Entonces: $(x+3)(x+5) = 15$

Por lo que:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 15 &= 15 \\ x^2 + 8x + 15 - 15 &= 0 \\ x^2 + 8x &= 0 \\ x(x+8) &= 0 \\ x = 0 \quad &o \quad x = -8 \end{aligned}$$

Así obtenemos dos posibles soluciones para la ecuación propuesta; para averiguar si efectivamente son soluciones de la ecuación se debe realizar la prueba en $\ln[(x+3)(x+5)] = \ln\ 15$ y descartar aquellos valores para la x, que no proporcionen una igualdad verdadera.

Prueba:

(i) Para $x = 0$, Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \ln\,[(0+3)(0+5)] &= \ln\ 15 \\ \ln\,(3 \cdot 5) &= \ln\ 15 \\ \ln\ 15 &= \ln\ 15 \end{aligned}$$

Por lo que 0 es una solución de la ecuación original.

(ii) Para $x = -8$, Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \ln\,[(-8+3)(-8+5)] &= \ln\ 15 \\ \ln\,[(-5)\cdot(-3)] &= \ln\ 15 \\ \ln\ 15 &= \ln\ 15 \end{aligned}$$

Por lo que -8 es una solución de la ecuación original.

Por lo tanto $S = \{0, -8\}$.

Observación

En el proceso de resolución de ecuaciones que involucren logaritmos, los valores de la incógnita, que se obtienen, no siempre son soluciones de la ecuación original, por lo tanto para determinar el conjunto solución es necesario verificar cuales de los valores obtenidos son soluciones de la ecuación original.

Propiedad II

Sea $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq\ 1,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$

$$a^x = a^y \Longrightarrow x = y$$

Demostración

Si $a^x = a^y$ entonces aplicando $\log_a$ a ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} \log_a a^x &= \log_a a^y \quad \text{por (I-b)} \\ x &= y \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Resolver $\log_2 \left(\dfrac{1}{32}\right) = x$

Solución

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{1}{32}\right) &= x \\ 2^x &= \frac{1}{32} \\ 2^x &= \frac{1}{2^5} \\ 2^x &= 2^{-5} \quad \text{Por propiedad II} \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \{-5\}$

Ejemplo 8

Resolver la ecuación $\dfrac{2^x}{4} = 32$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{2^x}{4} &= 32 \\
\frac{2^x}{2^2} &= 2^5 \\
2^{x-2} &= 2^5 \quad \text{Por propiedad II} \\
x-2 &= 5 \\
x &= 7
\end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \{7\}$

Propiedad III

Sean $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \,]0, +\infty[,\ y \in \,]0, +\infty[$

$$\log_a x = \log_a y \Longrightarrow x = y$$

Demostración

Si $\log_a x = \log_a y$ entonces aplicando Exp_a a ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned}
a^{\log_a x} &= a^{\log_a y} \quad \text{por (I-a)} \\
x &= y
\end{aligned}$$

Ejemplo 9

Resolver $\ln\left(x^2 - 3x + 2\right) = \ln\left(x^2 - 5x + 5\right)$

Solución

$$\begin{aligned}
\ln\left(x^2 - 3x + 2\right) &= \ln\left(x^2 - 5x + 5\right) \quad \text{Por propiedad III} \\
x^2 - 3x + 2 &= x^2 - 5x + 5 \\
2x - 3 &= 0 \\
2x &= 3 \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Prueba

$\ln\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left(x^2-5x+5\right)$

Si $x=\dfrac{3}{2}$;

$$\begin{aligned}\ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+2\right] &= \ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+5\right]\\ \ln\left(\frac{-1}{4}\right) &= \ln\left(\frac{-1}{4}\right)\end{aligned}$$

Como $\ln\left(\dfrac{-1}{4}\right)$ no está definido en $\mathbb{R}$, entonces $\dfrac{3}{2}$ no es solución de la ecuación.

Por lo tanto $S=\varnothing$

Ejercicios 4

Resuelva para x cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $3=2e^x$
2. $7=e^{-6x}$
3. $11=\dfrac{2^x}{3}$
4. $\sqrt{5}=\dfrac{r^x}{\sqrt{5}}$
5. $e^x=81$
6. $3^{-x}=27$
7. $9^{2x}=3\cdot\ 27^x$
8. $3^{x+1}=729$
9. $4\cdot\ 16^x=64^{x-1}$
10. $5^{4x^2-4x-3}=1$
11. $8^{x-1}\cdot\ 2^x\cdot\ \dfrac{1}{4^{x-2}}=\dfrac{1}{16}$
12. $\sqrt{125^x}\cdot\ \dfrac{1}{25^{x-1}}=\sqrt{5^x}$

Propiedad IV

Sean $a\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1,\ x\in\,]0,+\infty[,\ y\in\,]0,+\infty[$ entonces:

$$\log_a(\,x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$$

Demostración

Sean $M=\log_a x;\ N=\log_a y$ (i)

De $M=\log_a x$ se tiene que $a^M=x$; de $N=\log_a y$ se tiene que $a^N=y$

Así:

$$\begin{aligned}x\cdot y &= a^M\cdot a^N\\ x\cdot y &= a^{M+N}\end{aligned}$$

Aplicando $\log_a$ a ambos miembros de la igualdad se tiene que:

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a a^{M+N} \quad Por(I-b) \\ \log_a(x \cdot y) &= M+N \end{aligned}$$

Pero $M = \log_a x$ y $N = \log_a y$ por lo que:

$$\log_a(\ x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Ejemplo 10

Sabiendo que $\log\ 2 \simeq 0,30103$ y $\log\ 3 \simeq 0,47712$.

Determine el valor de $\log\ 12$

Solución
Como:

$$\begin{aligned} \log\ 12 &= \log\ (4 \cdot 3) && \text{por propiedad III} \\ &= \log\ 4 + \log\ 3 \\ &= \log(2 \cdot 2) + \log\ 3 && \text{por propiedad III} \\ &= \log\ 2 + \log\ 2 + \log\ 3 \\ &= 2\ \log\ 2 + \log\ 3 \\ &= 2 \cdot\ 0,30103 + 0,47712 \\ &= 1,07918 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\log\ 12 \simeq 1,07918$

Ejemplo 11

Resolver $\log\ (x-3) + \log\ (x+2) = \log\ (5x-14)$

Solución

$$\begin{aligned} \log\ (x-3) + \log\ (x+2) &= \log\ (5x-14) \quad \text{por propiedad IV} \\ \log\ [(x-3) \cdot (x+2)] &= \log\ (5x-14) \quad \text{por propiedad III} \\ (x-3) \cdot (x+2) &= 5x-14 \\ x^2 - x - 6 - 5x + 14 &= 0 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ x &= 4 \quad \text{y} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Prueba: $\log\,(x-3)+\log\,(x+2)=\log\,(5x-14)$

a. Si $x=4$

$$\begin{aligned}\log\,(4-3)+\log\,(4+2) &= \log\,(5\cdot 4-14)\\ \log\,(1)+\log\,(6) &= \log\,(6)\\ 0+\log\,(6) &= \log\,(6)\\ \log\,(6) &= \log\,(6)\end{aligned}$$

Por lo tanto 4 es solución

b. Si $x=2$

$$\begin{aligned}\log\,(2-3)+\log\,(2+2) &= \log\,(5\cdot 2-14)\\ \log\,(-1)+\log\,(4) &= \log\,(-4)\end{aligned}$$

Como $\log\,(-1)$ y $\log\,(-4)$ no están definidos en $\mathbb{R}$, tenemos que 2 no es solución.

$\therefore S=\{4\}$

Propiedad V

Sean $a\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1,\ x\in\,]0,+\infty[,\ n\in\mathbb{R}$ entonces:

$$\log_a\,x^n=n\cdot\log_a x$$

Demostración

Sea $x=a^y$ con $y\in\mathbb{R}$ entonces $\log_a x=y$

así $\log_a x^n=\log_a(a^y)^n=\log_a a^{y\cdot n}=y\cdot n$

o sea $\log_a x^n=y\cdot n$

pero como $y=\log_a x$, tenemos que $\log_a x^n=n\cdot\log_a x$

■ **Ejemplo 12**

Resolver $2\ \log(1-2x)=\log(-x+1)$

Solución

$$\begin{aligned}
2\ \log(1-2x) &= \log(-x+1) \quad \text{por propiedad V}\\
\log(1-2x)^2 &= \log(-x+1) \quad \text{por propiedad III}\\
(1-2x)^2 &= (-x+1)\\
1-4x+4x^2 &= -x+1\\
4x^2-3x &= 0\\
x(4x-3) &= 0\\
x &= 0 \ \text{ y } \ x=\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Prueba: $2\ \log(1-2x)=\log(-x+1)$

a. Si $x=0$

$$\begin{aligned}
2\ \log(1-2\cdot 0) &= \log(-0+1)\\
2\ \log(1) &= \log(1)\\
2\cdot 0 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto 0 es solución

b. Si $x=\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
2\ \log\left(1-2\cdot\frac{3}{4}\right) &= \log\left(-\frac{3}{4}+1\right)\\
2\ \log\left(1-\frac{3}{2}\right) &= \log\left(\frac{1}{4}\right)\\
2\ \log\left(-\frac{1}{2}\right) &= \log\left(\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

como $\log\left(\frac{-1}{2}\right)$ no está definido en $\mathbb{R}$, entonces $\frac{3}{4}$ no es solución.

Propiedad VI

Sean $a\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1,\ x\in\,]0,+\infty[,\ y\in\,]0,+\infty[$ entonces:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a\,(x\cdot y^{-1}) && \text{por propiedad IV}\\
&= \log_a x + \log_a y^{-1} && \text{por propiedad V}\\
&= \log_a x + \ -1\cdot\log_a y\\
&= \log_a x - \log_a y
\end{aligned}$$

O sea $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Ejemplo 13

Resolver $\ln(x-10) - \ln(x-7) = \ln 2$

Solución

$$\begin{aligned}
\ln(x-10) - \ln(x-7) &= \ln 2 && \text{por propiedad VI}\\
\ln \frac{x-10}{x-7} &= \ln 2 && \text{por propiedad III}\\
\frac{x-10}{x-7} &= 2\\
x-10 &= 2(x-7)\\
x-10 &= 2x-14\\
-x+4 &= 0\\
x &= 4
\end{aligned}$$

Prueba: $\ln(x-10) - \ln(x-7) = \ln 2$

$$\begin{aligned}
\ln(4-10) - \ln(4-7) &= \ln 2\\
\ln(-6) - \ln(-3) &= \ln 2
\end{aligned}$$

Como $\ln(-6)$ y $\ln(-3)$ no están definidos en $\mathbb{R}$ entonces 4 no es solución, por lo tanto $S = \varnothing$

Ejemplo 14

Verifique que $\log_2 \left[\dfrac{2^{3x} \cdot x^2 \cdot 5}{\sqrt{8} \cdot 2^{x^5}}\right] = 3x + 2 \cdot \log_2 5 - \dfrac{3}{2} - x^5$

Solución

$$\begin{aligned}
\log_2 \left[\frac{2^{3x} \cdot x^2 \cdot 5}{\sqrt{8} \cdot 2^{x^5}}\right] &= \log_2(2^{3x} \cdot x^2 \cdot 5) - \log_2(\sqrt{8} \cdot 2^{x^5})\\
&= \log_2 2^{3x} + \log_2 x^2 + \log_2 5 - (\log_2 \sqrt{8} + \log_2 2^{x^5})\\
&= \log_2 2^{3x} + \log_2 x^2 + \log_2 5 - \log_2 \sqrt{8} - \log_2 2^{x^5}\\
&= 3x \cdot \log_2 2 + 2 \cdot \log_2 x + \log_2 5 - \log_2 8^{\frac{1}{2}} - x^5 \cdot \log_2 2\\
&= 3x \cdot 1 + 2 \cdot \log_2 x + \log_2 5 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 8 - x^5 \cdot 1\\
&= 3x + 2 \cdot \log_2 x + \log_2 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 - x^5\\
&= 3x + 2 \cdot \log_2 x + \log_2 5 - \frac{3}{2} - x^5
\end{aligned}$$

Ejercicios 5

1. Verifique cada una de las siguientes identidades:

a. $\log\left[\dfrac{x^3 \cdot 10^{2x}}{10^{x^2}}\right] = 3 \cdot \log\ x + 2x - x^2$

b. $\log_3 \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \log_3 \sqrt[3]{2} - \log_3 \sqrt[6]{x}$

Ejemplo 15

1. Resuelva $9 \cdot 3^{2x} - 15 \cdot 3^x - 6 = 0$

Solución

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^{2x} - 15 \cdot 3^x - 6 &= 0 \\ 9 \cdot (3^x)^2 - 15 \cdot 3^x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Sea $y = 3^x$ (*)

$$\begin{aligned} 9 \cdot y^2 - 15 \cdot y - 6 &= 0 \\ y &= \frac{-1}{3}, \quad y = 2 \end{aligned}$$

De (*) tenemos que:

a. $3^x = \dfrac{-1}{3} \quad S_1 = \varnothing$ ¿Por qué?.

b. $3^x = 2 \Longrightarrow x = \log_3 2 \Longrightarrow S_2 = \{\log_3 2\}$

Por lo tanto $S = \{log_3 2\}$

2. Resuelva $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \sqrt{x}$

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{\log_2 x} &= \log_2 \sqrt{x} \\
\sqrt{\log_2 x} &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 x \\
\left(\sqrt{\log_2 x}\,\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} \cdot \log_2 x\right)^2 \\
\log_2 x &= \frac{1}{4} \cdot (\log_2 x)^2 \\
\log_2 x - \frac{1}{4} \cdot (\log_2 x)^2 &= 0 \\
\log_2 x \cdot (1 - \frac{1}{4} \cdot \log_2 x) &= 0
\end{aligned}$$

Así $\log_2 x = 0$ ó $1 - \frac{1}{4} \cdot \log_2 x = 0$

Caso I

$\log_2 x = 0 \Longleftrightarrow x = 2^0 \Longleftrightarrow x = 1$

Caso II

$1 - \frac{1}{4} \cdot \log_2 x = 0 \Longleftrightarrow 1 = \frac{1}{4} \cdot \log_2 x \Longleftrightarrow 4 = \log_2 x \Longleftrightarrow x = 16$

Por lo tanto $S = \{1, 16\}$

Ejercicios 6

Resuelva para x, cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $3^{2x+2} - 5 \cdot 3^{x+1} - 6 = 0$

2. $9^{x-2} + 3^{x-1} - 2 = 0$

3. $27^{x+3} = \dfrac{(\sqrt{3})^x}{9^{x-2}}$

4. $3^{1-2x} = 2^{x+5}$

5. $10^{7-2x} = 3^{5-3x}$

6. $5^{x+2} = 4^{x-1}$

7. $-\log(x-1) = 2$

8. $-\log_2(x-2) = 1$

9. $\log\ \sqrt{x} = \sqrt{\ln\ x}$

10. $\dfrac{2\ \log(1+x)}{\log(x+2)} = 0$

11. $-1 + \log\ x = \dfrac{-1 - \log\ x}{\log\ x + 1}$

12. $\log\ (x^8) = (\ln\ x)^4$

13. $\log\ x^3 = (\log\ x)^3$

14. $\log\ x^4 = \log^4 x$

15. $2\ \log_5(x-2) - \log_5(x+4) = \log_5 3$

16. $\log(2x+7) - \log(x-1) = \log\ 5$

17. $-\log_2 \dfrac{1}{x-2} = 2 + \log_2(x-2)$

18. $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

19. $y = \ln(x - \sqrt{x^2-2})$

20. $y = \ln \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

21. $e^{\ln\ 4} = e^{(x+\sqrt{x^2-4})}$

22. $x^{\sqrt{\log\ x}} = 10^8$

Capítulo 8

Trigonometría

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

8.1 Introducción 3
8.2 Algunos conocimientos previos de geometría plana 3
8.3 Medida de ángulos 9
8.3.1 Medida en grados 9
8.3.2 Medida en radianes 10
8.3.3 Relación entre grados y radianes 12
8.3.4 Círculo trigonométrico 15
8.4 Las funciones trigonométricas seno y coseno 17
8.4.1 Representación del gráfico de las funciones seno y coseno 29
8.5 Otras funciones trigonométricas 33
8.6 La pendiente de una recta como la tangente del ángulo de inclinación de ésta 47
8.7 Identidades trigonométricas 49
8.8 Ecuaciones trigonométricas 61

8.1 Introducción

La palabra "Trigonometría" procede del griego y su significado es "medida de triángulos". Así, se considera la trigonometría como aquella parte de la matemática que trata de los elementos de los triángulos, tanto planos como esféricos.

No obstante a pesar del concepto de trigonometría que se acaba de ofrecer, hoy en día la trigonometría posee otras muchas importantes aplicaciones que no se refieren específicamente a los triángulos.

Muchos fenómenos físicos se representan de un modo regular o periódico, por ejemplo, el movimiento de un péndulo oscila de modo regular; el voltaje de un circuito de corriente alterna oscila constantemente entre los valores positivos y negativos; incluso las estaciones del año tienen un ciclo perfectamente definido.

Por lo anterior, se dice que estos fenómenos tienen cambios periódicos.

Para el estudio de estos cambios periódicos, se usan modelos matemáticos, en los cuales las funciones trigonométricas son fundamentales.

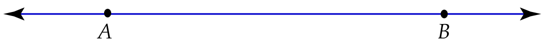
Para iniciar el desarrollo de este capítulo, recordaremos algunos conceptos fundamentales de geometría plana.

8.2 Algunos conocimientos previos de geometría plana

■ **Definición 1**

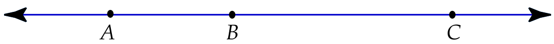
Sea L una recta de ecuación $y = mx + b$, con $m \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Si A y B son puntos de L, entonces escribimos $L = \overleftrightarrow{AB}$

La recta L la podemos representar geométricamente sin usar coordenadas rectangulares de la siguiente forma:



Definición 2

Rayo. Sea L una recta de ecuación $y = mx + b$, con $m \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y sean A, B y C tres puntos en L como se muestra en la siguiente figura:



Sea $B = (x_0, y_0)$. Los conjuntos definidos por:

a.) $\overrightarrow{BA} = \{(x, y) \in \text{L}/\ x \leq x_0\}$

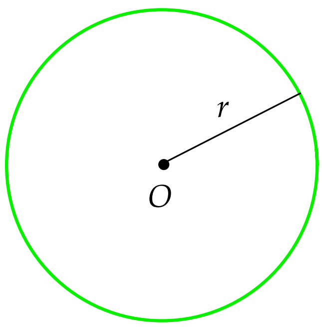
b.) $\overrightarrow{BC} = \{(x, y) \in \text{L}/\ x \geq x_0\}$

reciben el nombre de *rayos* y el punto B recibe el nombre de *origen* o punto inicial del rayo.

De acuerdo con la figura anterior, los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ se pueden representar respectivamente así:

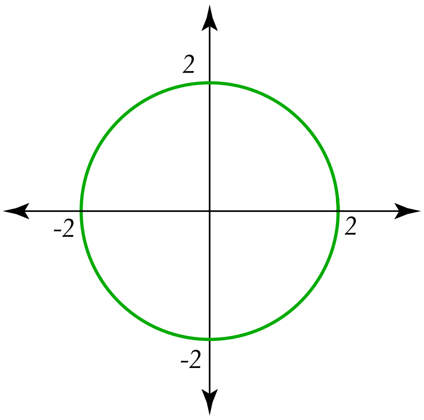
Definición 3

Círculo. Sea P un plano, O un punto en P y $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$.
Se llama círculo de centro O y de radio r, al conjunto de puntos en P cuya distancia a O es r.

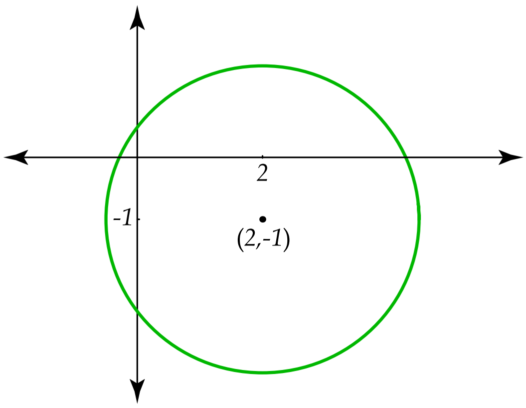


Ejemplo 1

a) Sea C un círculo cuyo radio es $2cm$ y su centro es el punto $(0, 0)$, entonces C se puede representar así:



b) Sea C un círculo cuyo radio es $2,5cm$ y su centro es $(2,-1)$ entonces C se puede representar así:



Ejercicios 1

Represente cada uno de los siguientes círculos:

1. C es un círculo de radio $3,5cm$ y su centro es $(-2,-1)$

2. C es un círculo de radio $4cm$ y su centro es $(0,2)$

3. C es un círculo de radio $2,25cm$ y su centro es $(-3,2)$

Definición 4

Circunferencia. Sea C un círculo, se llama circunferencia de C a la longitud del círculo C.

Si C es un círculo de radio r, entonces la circunferencia L de C es dada por:

$$L = 2\pi r$$

Ejemplo 2

1. Sea C un círculo cuyo radio es $5cm$ entonces la circunferencia L de C es dada por:

$$L = 2\pi \cdot 5 \implies L = 10\pi$$

Así la circunferencia de C es 10π cm.

2. Sea C un círculo cuyo radio es $7,5$ cm entonces la circunferencia L de C es dada por:

$$L = 2\pi \cdot 7.5 \implies L = 15\pi$$

Así la circunferencia de C es 15π cm.

Ejercicios 2

Calcule la circunferencia de cada uno de los siguientes círculos:

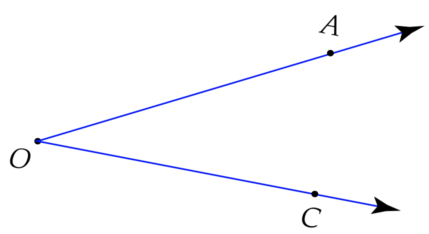
1. C es un círculo cuyo radio es 12 cm.

2. C es un círculo cuyo radio es 1 cm.

3. C es un círculo cuyo radio es $13,5$ pulgadas.

Definición 5

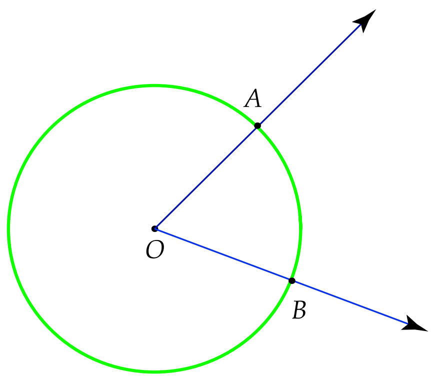
Ángulo plano. Se llama ángulo plano a la unión de dos rayos con un origen común. Los rayos que forman un ángulo se llaman lados del ángulo y al punto común u origen de los rayos, se llama vértice del ángulo.



En la figura anterior los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un ángulo y se denota $\measuredangle AOC$ ($\measuredangle AOC$ se lee "ángulo AOC")

Definición 6

Ángulo central. Se llama ángulo central de un círculo a aquel ángulo cuyo vértice es el centro del círculo.

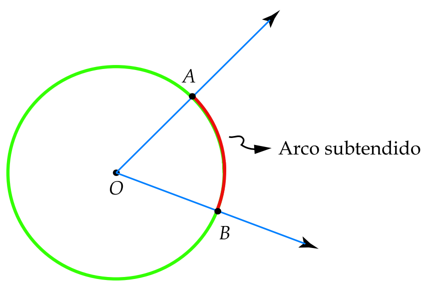


El $\measuredangle AOB$ es un ángulo central.

Definición 7

Arco subtendido. Sea un círculo de centro O y radio r, sea el $\measuredangle\, POQ$ un ángulo central de C, tal que P y Q están en C.

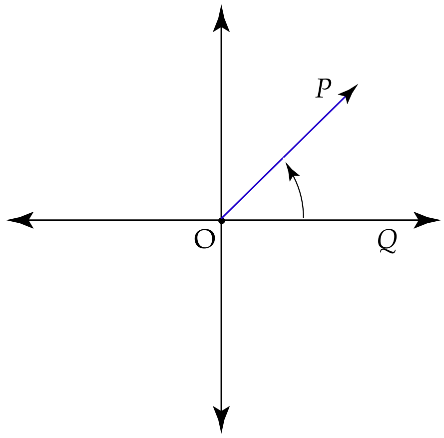
Se llama arco subtendido por el ángulo POQ al conjunto de puntos de C que están entre P y Q, incluyendo a estos.



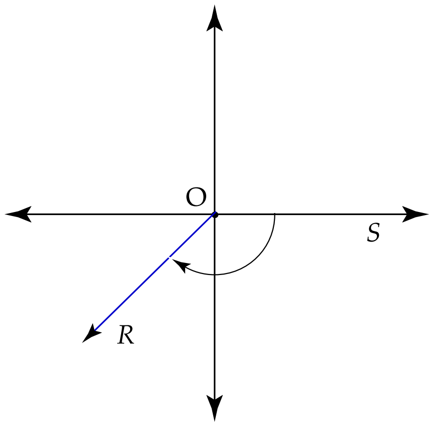
A veces resulta conveniente designar a uno de los lados de un ángulo como el lado inicial del ángulo y al otro como lado final.

En un sistema de coordenadas rectangulares los ángulos que tienen su vértice en el origen del sistema de coordenadas y el rayo positivo del eje X como lado inicial, se dice que están en posición normal

Ejemplo 3



El $\measuredangle\ POQ$ está en posición normal, su lado inicial es $\overrightarrow{OQ}$ y su lado final es $\overrightarrow{OP}$.



Ejercicio: Complete la frase siguiente: si $\measuredangle\ ROS$ está en posición normal, entonces su lado inicial es __________ y su lado final es __________

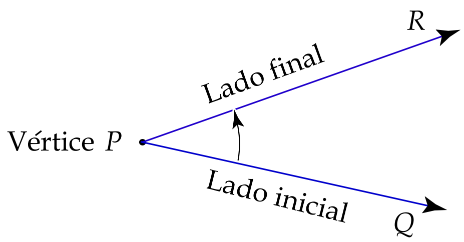
Rotación positiva y rotación negativa

Un ángulo puede considerarse engendrado por dos rayos con un origen común de la siguiente manera, un rayo fijo (lado inicial) y un rayo móvil (lado final) que rota alrededor de su origen.

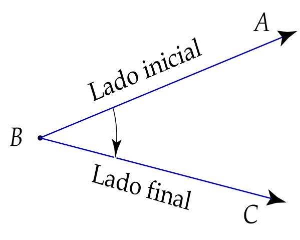
Definición 8

Dado un ángulo que se considere engendrado por una rotación, si ésta se ha realizado en el sentido contrario al que giran las agujas del reloj, se dice que el ángulo tiene sentido positivo, en caso contrario, se dice que el ángulo tiene sentido negativo.

Ejemplo 4



El $\measuredangle RPQ$ tiene sentido positivo



El $\measuredangle ABC$ tiene sentido negativo

Ejercicios 3

Dibuje dos ángulos, uno con sentido positivo y otro con sentido negativo.

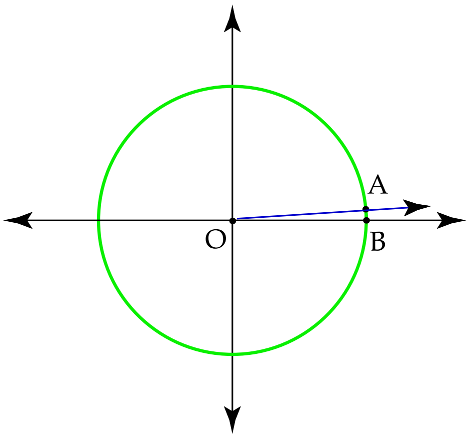
8.3 Medida de ángulos

Para medir ángulos existen dos sistemas de medición uno que usa como unidad de medida el grado, y otro que usa como unidad de medida el radián.

8.3.1 Medida en grados

Consideremos el $\measuredangle ABC$ como ángulo central de un círculo y con sentido positivo.

Se dice que la medida del $\measuredangle ABC$ es un grado (1°) si subtiende un arco cuya medida es $\dfrac{1}{360}$ de la circunferencia.



Notación: m $\measuredangle ABC = 1^\circ$; m $\measuredangle ABC$ se lee "medida del ángulo ABC"

Definición 9

a) Un minuto, denotado por $1'$, es $\dfrac{1}{60}$ parte del grado.

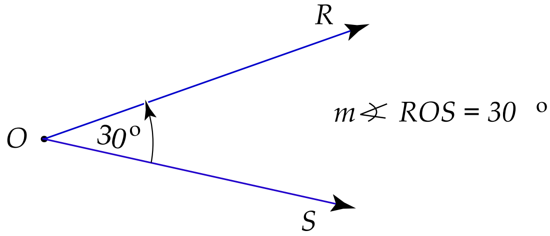
b) Un segundo, denotado por $1''$, es $\dfrac{1}{60}$ parte de un minuto.

Por consiguiente: 1 hora $= 60'$ y 1 minuto $= 60''$.

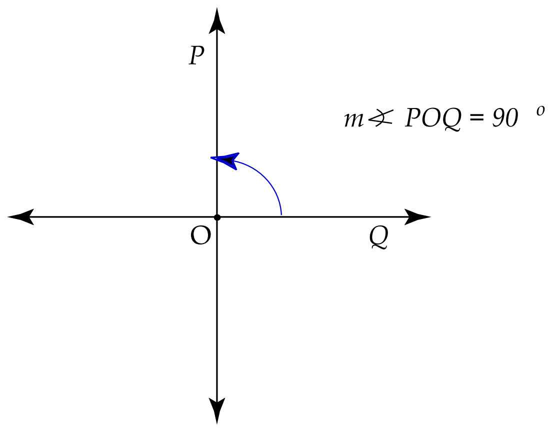
Representación de ángulos

Ejemplo 5

a. Representación de un ángulo cuya medida es 30°.



b. Representación de un ángulo de $90°$ en posición normal.



Nota: Un ángulo cuya medida es $90°$ recibe el nombre de **ángulo recto**

Ejercicios 4

1. Represente de manera aproximada (usando regla y transportador) un ángulo cuya medida sea:

   (i) $60°$

   (ii) $150°$

   (iii) $180°$

   (iv) $360°$

2. Represente (usando regla y transportador) un ángulo en posición normal y cuya medida sea:

   (i) $135°$

   (ii) $315°$

   (iii) $15°$

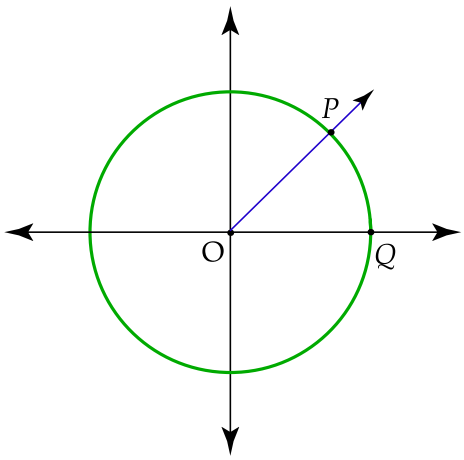
   (iv) $120°$

8.3.2 Medida en radianes

Para definir lo que entenderemos por radián asumiremos que los arcos del círculo se pueden medir, recordemos también que los círculos de radio 1 tienen como circunferencia 2π, observaremos además que también aceptamos la existencia de un número real.

Definición 10

Sea C un círculo de radio 1 y centro en el origen del sistema de coordenadas rectangulares



Diremos que el valor absoluto de la medida del $\measuredangle POQ$, en radianes, es igual a la longitud del arco PQ

Ejemplo 6

Sea C un círculo de centro O y radio 1

a) Si el ángulo MON subtiende al arco de longitud $\frac{\pi}{4}$, entonces la medida en radianes del ángulo MON es $\frac{\pi}{4}$ radianes.

b) Si el ángulo ROS subtiende un arco de longitud 2π, entonces la medida en radianes del ángulo ROS es $----------$

c) Si el ángulo JOX subtiende un arco de longitud 1, entonces la medida en radianes del ángulo JOX es 1 radián.

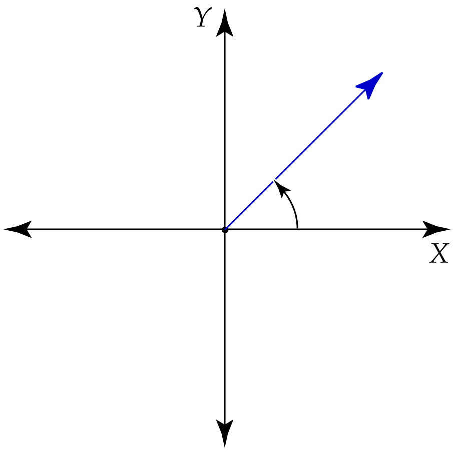
Nota:

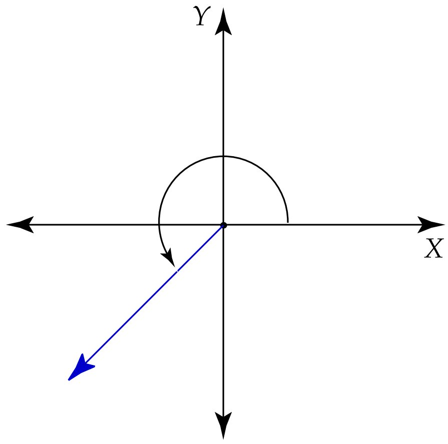
1. Si un ángulo ha sido engendrado por rotación positiva, entonces se le asigna una medida positiva.

2. Si un ángulo ha sido engendrado por rotación negativa, entonces se le asigna una medida negativa.

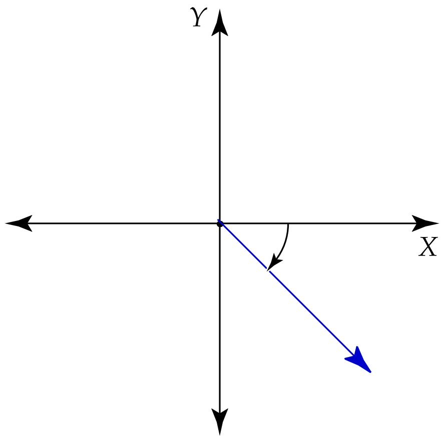
Ejemplo 7

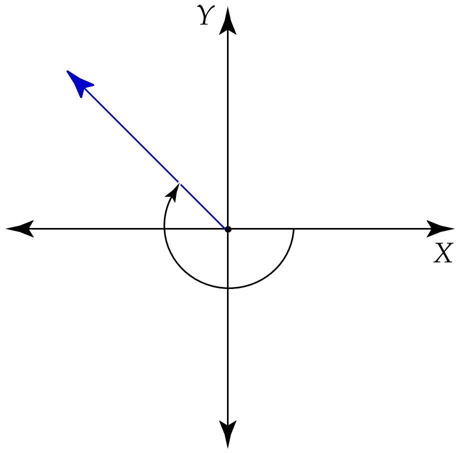
1. Los ángulos que se presentan a continuación tienen medida positiva.





2. Los ángulos que se representan a continuación tienen medida negativa.





Por lo anterior existen ángulos cuya medida es $35°$, $-35°$, $700°$, 3 radianes, $\dfrac{-3}{4}$ radianes, etc.

Convenio

Siempre que no se especifique las unidades para la medida de un ángulo entenderemos que las unidades son radianes.

Ejemplo 8

1. $m\measuredangle ABC = 2\pi$ significa que "la medida del $\measuredangle ABC$ es 2 radianes"

2. $m\measuredangle POQ = \dfrac{-3\pi}{2}$ significa que "la medida del $\measuredangle POQ = \dfrac{-3\pi}{2}$ radianes".

8.3.3 Relación entre grados y radianes

Como la circunferencia de un círculo de radio 1 es igual a 2π, se tiene que un rayo engendra un ángulo cuya medida es 2π radianes cuando el rayo se hace rotar "una vuelta completa", en sentido positivo.

De la misma forma, dado que un ángulo cuya medida es 1°, subtiende un arco cuya medida es $\dfrac{1}{360}$ de la circunferencia, se tiene que un rayo engendra un ángulo cuya medida es 360°, cuando el rayo se hace rotar "una vuelta completa" en sentido positivo.

Ejemplo 9

a.) Un ángulo de 360° es equivalente a un ángulo de 2π radianes.

b.) Un ángulo de 180° es equivalente a un ángulo de π radianes.

c.) Un ángulo de 90° es equivalente a un ángulo de $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.

d.) Un ángulo de 45° es equivalente a un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

En particular se tiene que:

1. La medida R en radianes de un ángulo que mide G grados (G°) es el número real R por:

$$R = \frac{\pi G}{180}$$

2. La medida G en grados (G°) de un ángulo que mide R radianes, viene dada por:

$$G = \frac{180^\circ R}{\pi}$$

Ejemplo 10

Exprese en radianes las siguientes medidas de ángulos

a.) 210°

b.) -36°

c.) -720°

d.) 315°

Solución

a.) $R = \dfrac{\pi \cdot 210}{180} \Longrightarrow R = \dfrac{7\pi}{6}$, o sea 210° equivale a $\dfrac{7\pi}{6}$

b.) $R = \dfrac{\pi \cdot (-36)}{180} \Longrightarrow R = \dfrac{-\pi}{5}$, o sea $\quad -36^\circ$ equivale a $\dfrac{-\pi}{5}$

c.) $R = \dfrac{\pi \cdot (-720)}{180} \Longrightarrow R = -4\pi$, o sea $\quad -720^\circ$ equivale a -4π

d.) $R = \dfrac{\pi \cdot 315}{180} \Longrightarrow R = \dfrac{7\pi}{4}$, o sea $\quad 315^\circ$ equivale a $\dfrac{7\pi}{4}$

Ejemplo 11

Exprese en grados las siguientes medidas de ángulos, dadas en radianes.

(a.) $\dfrac{5\pi}{3}$

(b.) $\dfrac{-11\pi}{4}$

(c.) $\dfrac{-5\pi}{6}$

(d.) 3

Solución

(a.) $G^\circ = \dfrac{180^\circ \frac{5\pi}{3}}{\pi} \Longrightarrow G^\circ = 300^\circ$, o sea $\dfrac{5\pi}{3}$ equivale a 300°

(b.) $G^\circ = \dfrac{180^\circ \frac{-11\pi}{4}}{\pi} \Longrightarrow G^\circ = -495^\circ$, o sea $\dfrac{-11\pi}{4}$ equivale a -495°

(c.) $G^\circ = \dfrac{180^\circ \frac{-5\pi}{6}}{\pi} \Longrightarrow G^\circ = -150^\circ$, o sea $\dfrac{-5\pi}{6}$ equivale a -150°

(d.) $G^\circ = \dfrac{180^\circ \cdot 3}{\pi} \Longrightarrow G^\circ \approx 171.88734^\circ \approx 171^\circ 53' 14''$, o sea 3 equivale a $171^\circ 53' 14''$ aproximadamente

Nota: para pasar 0.88734° a minutos y segundos usamos *regla de tres*. En este caso $0.88734 = 53.2404' = 53' + 0.2404' = 53' + 14.424''$

Ejercicios 5

i. Exprese en radianes las siguientes medidas de ángulos:

1.) $30°$

2.) $90°$

3.) $150°$

4.) $-300°$

5.) $45°$

6.) $120°$

7.) $-180°$

8.) $-330°$

9.) $60°$

10.) $-135°$

11.) $270°$

12.) $360°$

ii. Exprese en grados las siguientes medidas de ángulos dados en radianes:

1.) $\frac{5\pi}{3}$

2.) $\frac{-7\pi}{6}$

3.) $\frac{-3\pi}{2}$

4.) $\frac{5\pi}{4}$

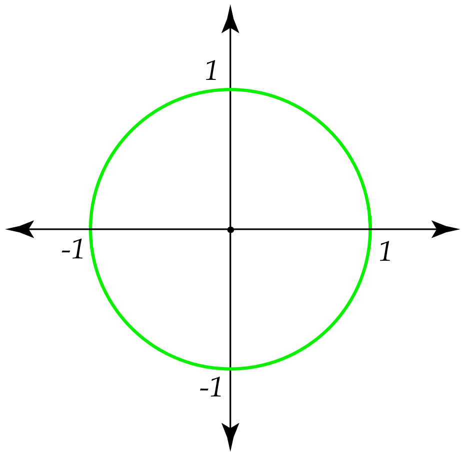
5.) $\frac{3}{2}$

6.) $\frac{-1}{2}$

8.3.4 Círculo trigonométrico

Definición 11

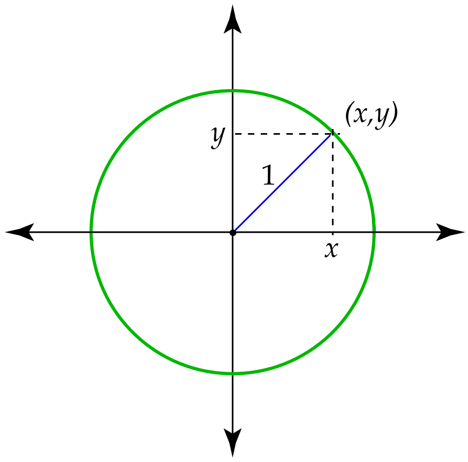
El círculo cuyo radio es 1 y su centro es el punto $(0,0)$ de un sistema de coordenadas rectangulares, se llama círculo trigonométrico.



En la figura anterior observe que si (x,y) es un punto del círculo trigonométrico entonces:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Verifíquelo!



Ejercicios 6

Con respecto a la figura anterior:

Si (x, y) es un punto del círculo trigonométrico determine:

1. ¿Cuáles son los valores posibles para x?

2. ¿Cuáles son los valores posibles para y?

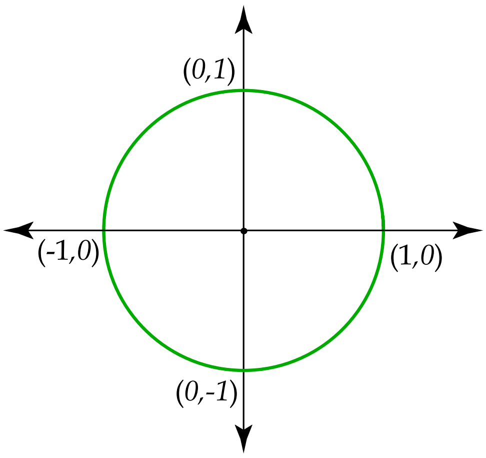
3. ¿En qué cuadrante x es positiva?

4. ¿En qué cuadrante x es negativa?

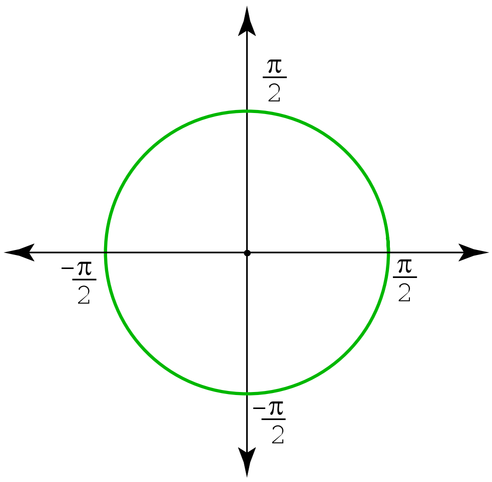
5. ¿En que cuadrante y es positiva?

6. ¿En qué cuadrante y es negativa?

En la siguiente figura, se muestra los puntos de intersección entre el círculo trigonométrico y los ejes coordenados.



En la siguiente figura, se muestra las medidas de los ángulos (en sentido positivo) en posición normal, que se forman con los ejes coordenados.



8.4 Las funciones trigonométricas seno y coseno

Definición 12

Sea P un punto en el círculo trigonométrico, tal que $P = (x, y)$, sea α la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje X y el rayo OP (ver figura)

Se definen las funciones:

a)

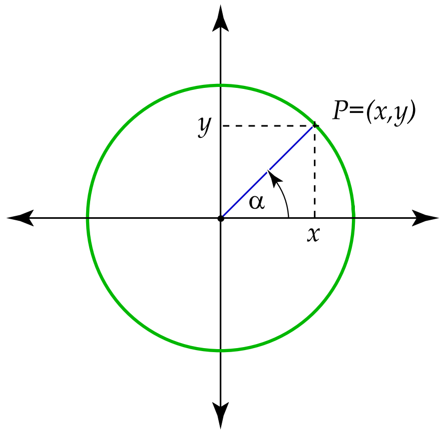
$$\begin{array}{rccl} \text{coseno}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & x, \quad \text{o sea, coseno}(\alpha) = x \end{array}$$

Nota: Designamos con $\cos\alpha$ el criterio de la función coseno; o sea $\cos\,(\alpha) =$ coseno (α)

b)

$$\begin{array}{rccl} \text{seno}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & y, \quad \text{o sea, seno}(\alpha) = y \end{array}$$

Nota: Designamos con $\text{sen}\,\alpha$ el criterio de la función seno; o sea, $\text{sen}\,(\alpha) =$ seno (α)



Por lo anterior se obtiene que $x = \cos(\alpha)$; $y = \text{sen}(\alpha)$ o sea, $P = (x, y) = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$

Algunas propiedades de las funciones seno y coseno

a.) **Ámbito de las funciones seno y coseno**

Como el punto P pertenece al círculo trigonométrico, se obtiene que las coordenadas "x" y "y" de P satisfacen respectivamente las desigualdades compuestas.

i.) $-1 \leq x \leq 1$

ii.) $-1 \leq y \leq 1$

Además como $\cos(\alpha) = x$ y $\text{sen}\,\alpha = y$ entonces:

i.) $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$

ii.) $-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1$

Por lo que el ámbito de las funciones seno y coseno es $[-1, 1]$.

b.) **Signo de los valores de las funciones seno y coseno**

Con base en el ejercicio 6 y la definición de las funciones seno y coseno se obtiene que:

i.) Si $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ entonces $\cos(\alpha)$ y $\text{sen}(\alpha)$ son números reales positivos.

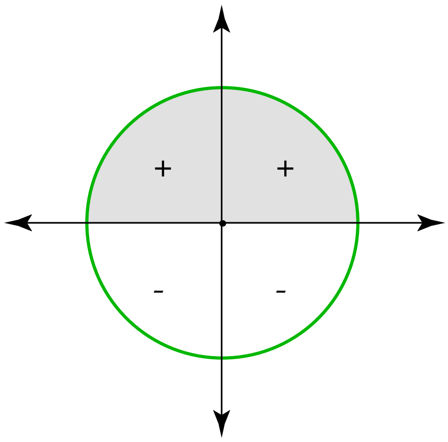
ii.) Si $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ entonces $\cos(\alpha)$ es un número real negativo y $\text{sen}(\alpha)$ es un número real positivo.

iii.) Si $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ entonces $\cos(\alpha)$ y $\text{sen}(\alpha)$ son números reales negativos.

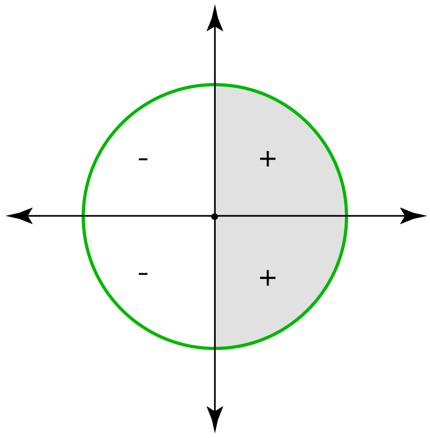
iv.) Si $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ entonces $\cos(\alpha)$ es un número real positivo y $\text{sen}(\alpha)$ es un número real negativo.

Las propiedades anteriores pueden resumirse de la siguiente forma:

a. La función seno toma valores positivos en el I y II cuadrante y valores negativos en el III y IV cuadrante.

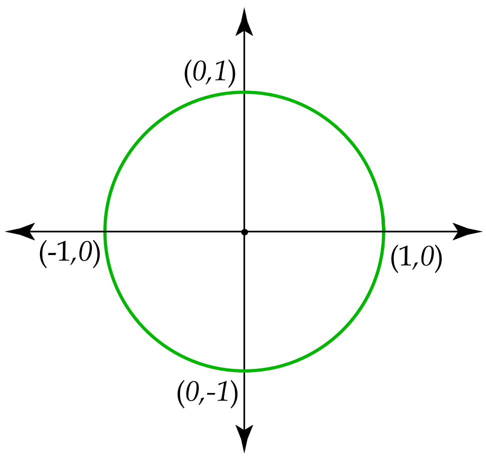


b. La función coseno toma valores positivos en el I y IV cuadrante y valores negativos en el II y III cuadrante.



c. **Algunos valores de las funciones seno y coseno**

Como los puntos de intersección del círculo trigonométrico con los ejes coordenados son $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ como se muestra en la figura siguiente:



Tenemos que:

i) $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$

ii) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ y $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

iii) $\operatorname{sen}\pi = 0$ y $\cos\pi = -1$

iv) $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -1$ y $\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$

Ejercicios 7

Para cada uno de los siguientes ángulos:

a.) $\alpha = \dfrac{-3\pi}{2}$

b.) $\alpha = \dfrac{-\pi}{2}$

c.) $\alpha = 2\pi$

d.) $\alpha = 7\pi$

e.) $\alpha = \dfrac{-5\pi}{2}$

f.) $\alpha = 27\pi$

i.) Represente en el círculo trigonométrico, el ángulo correspondiente.

ii.) Para cada valor de α, calcule $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$.

d.) **Periodicidad de las funciones seno y coseno**

Sea $P = (x, y)$ un punto en el círculo trigonométrico. Sea α la medida del ángulo, cuyo lado inicial es el lado positivo del eje X y cuyo lado final es el rayo OP. Si hacemos girar el rayo OP "una vuelta completa", o en forma general "n vueltas completas", entonces el rayo OP en su posición final interseca al círculo trigonométrico en el mismo punto (x, y), por lo cual los valores de las funciones seno y coseno no han variado, así tenemos que:

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$$

En general:

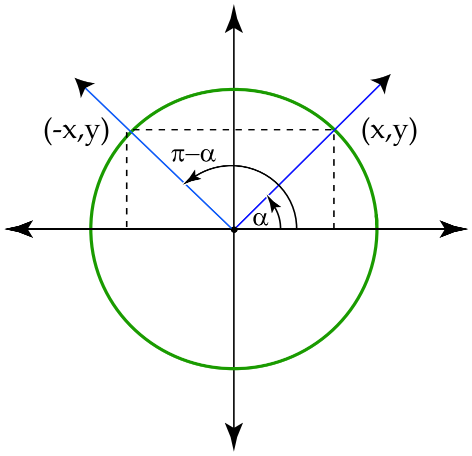
$$\cos(\alpha + n \cdot 2\pi) = \cos\alpha \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\alpha + n \cdot 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$$

Por lo anterior se dice que las funciones seno y coseno son funciones periódicas y su período es 2π.

e.) Sea $P = (x, y)$ un punto del círculo trigonométrico, sea α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje X y el rayo OP entonces:

i.) $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

Justificación



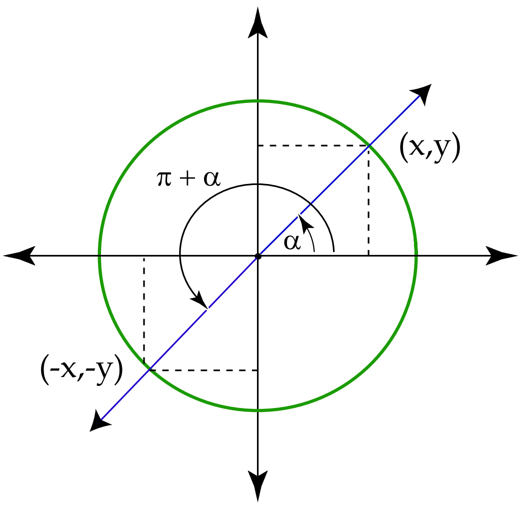
De la figura se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{rcl}\operatorname{sen}(\alpha) & = & y\\ \operatorname{sen}(\pi-\alpha) & = & y\end{array}\right\}\ \operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\cos(\alpha) & = & x\\ \cos(\pi-\alpha) & = & -x\end{array}\right\}\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$$

ii) $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

Justificación



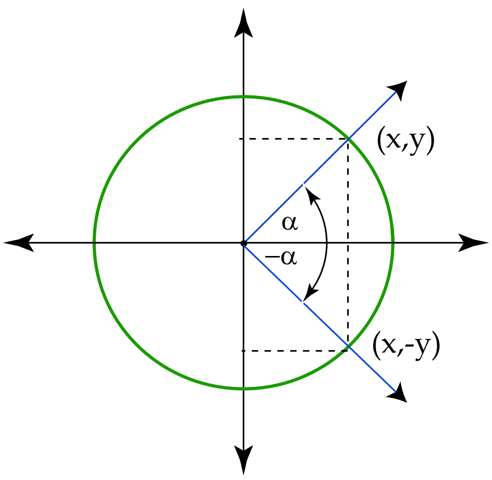
De la figura se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{rcl}\text{sen }(\alpha) & = & y \\ \text{sen}(\pi+\alpha) & = & -y\end{array}\right\} \text{ sen}(\pi+\alpha) = -\text{sen }(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\cos(\alpha) & = & x \\ \cos(\pi+\alpha) & = & -x\end{array}\right\} \cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$$

iii) $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ y $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

Justificación



De la figura se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{rcl}\text{sen }(\alpha) & = & y \\ \text{sen}(-\alpha) & = & -y\end{array}\right\} \text{ sen}(-\alpha) = -\text{sen }(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\cos(\alpha) & = & x \\ \cos(-\alpha) & = & x\end{array}\right\} \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

f. Sea P un punto del círculo trigonométrico tal que $P=(x,y)$.

Sea α la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje X y el rayo OP, entonces las coordenadas de P satisfacen la igualdad $x^2+y^2=1$.

Como $x=\cos\alpha$ y $y=\text{sen }(\alpha)$ entonces:

$$(\cos{(\alpha)})^2 + (\operatorname{sen}{(\alpha)})^2 = 1 \qquad (I)$$

Notación $(\cos{(\alpha)})^n = \cos^n \alpha \qquad \text{y} \qquad (\operatorname{sen}{(\alpha)})^n = \operatorname{sen}^n \alpha$

Así la igualdad (I) se escribe:

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

Observación importante: La periodicidad de las funciones seno y coseno (así como las propiedades enunciadas en puntos $e.i$ y $e.ii$, nos permiten generalizar la propiedad enunciada en el punto $e.iii$

O sea: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$$

Valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cuya medida es α, donde $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

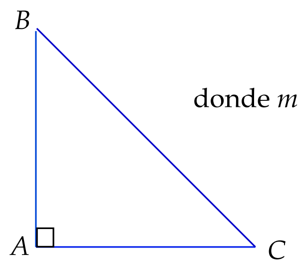
Recuerde que:

a) Un ángulo cuya medida es α, donde $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ recibe el nombre de ángulo agudo.

b) Un ángulo cuya medida es α, donde $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ recibe el nombre de ángulo obtuso.

c) La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es π.

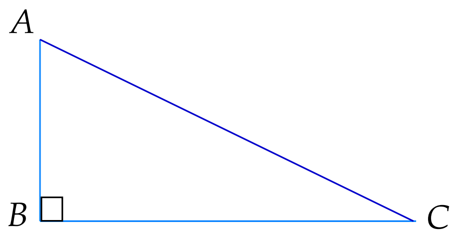
d) Un triángulo en el cual uno de sus ángulos internos es un ángulo recto recibe el nombre de triángulo rectángulo y se representa:



donde $m \measuredangle BAC = \dfrac{\pi}{2}$

e) Sea l una recta y sean A y B puntos de l, se llama segmento de extremos A y B al conjunto de puntos de l que están entre A y B incluyendo a éstos; se denota $\overline{AB}$ y se representa:

f) Sea ΔABC tal que $m\measuredangle ABC = \frac{\pi}{2}$



entonces:

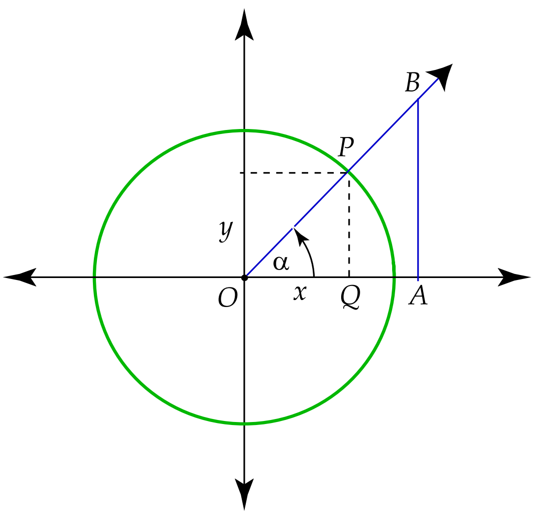
i) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ reciben el nombre de <u>catetos</u> del $\triangle ABC$.

ii) $\overline{AC}$ recibe el nombre de <u>hipotenusa</u> del $\triangle ABC$.

Las funciones seno y coseno, como razón entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Sea P un punto del círculo trigonométrico tal que $P = (x, y)$. Sea α la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje X y el rayo OP.

Sea A un punto en la parte positiva del eje x tal que $d(O, A) > 1$ y sea B un punto de $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overline{BA} \perp \overline{OA}$, como se muestra en la figura.



Por semejanza de triángulos tenemos que el $\triangle OQP$ es semejante al $\triangle OAB$ de donde:

i) $\dfrac{d(Q,P)}{d(O,P)} = \dfrac{d(A,B)}{d(O,B)}$

como $d(Q,P) = \text{sen }(\alpha)$, y $d(O,P) = 1$

entonces:

$$\frac{\text{sen }(\alpha)}{1} = \frac{d(A,B)}{d(O,B)}$$

Por lo tanto:

$$\text{sen }(\alpha) = \frac{d(A,B)}{d(O,B)}$$

ii) $\dfrac{d(O,Q)}{d(O,P)} = \dfrac{d(O,A)}{d(O,B)}$

como $d(O,Q) = \cos\,(\alpha)$, y $d(O,P) = 1$

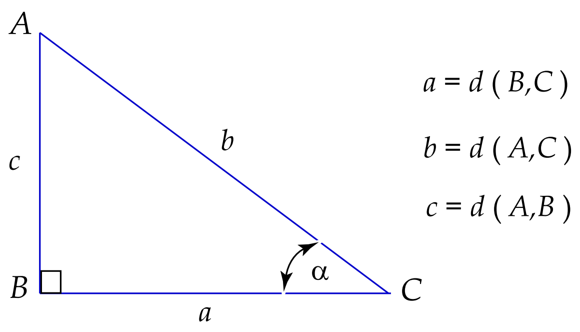
entonces:

$$\frac{\cos\,(\alpha)}{1} = \frac{d(O,A)}{d(O,B)}$$

Por lo tanto:

$$\cos\,(\alpha) = \frac{d(O,A)}{d(O,B)}$$

en general se tiene que si el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo y α es la medida de uno de sus ángulos internos agudos, como se muestra en la figura.



entonces:

$$\text{sen }(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo cuya medida es } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

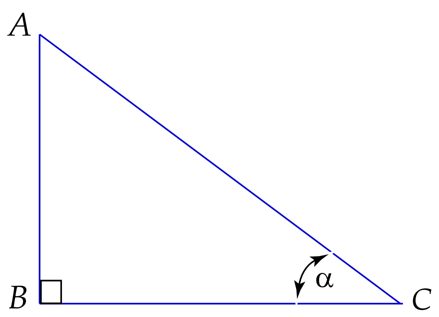
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo cuya medida es } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

Por lo tanto de acuerdo a la figura:

$$\text{sen }(\alpha) = \frac{c}{b} \qquad \text{y} \qquad \cos(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 12

Considere el triángulo rectángulo representado en la siguiente figura:



donde $d(A,B) = 4$
$d(B,C) = 3$

Determine sen α y $\cos\alpha$

Solución

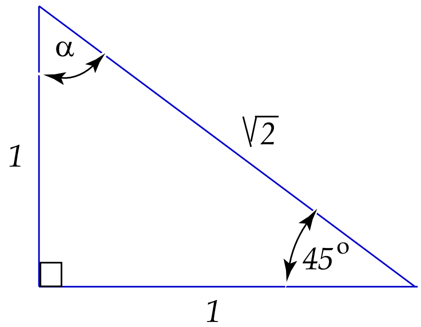
$$\begin{aligned} \text{sen }(\alpha) &= \frac{d(A,B)}{d(A,C)} \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \frac{d(B,C)}{d(A,C)} \\ \text{sen }(\alpha) &= \frac{4}{d(A,C)} \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = \frac{3}{d(A,C)} \end{aligned}$$

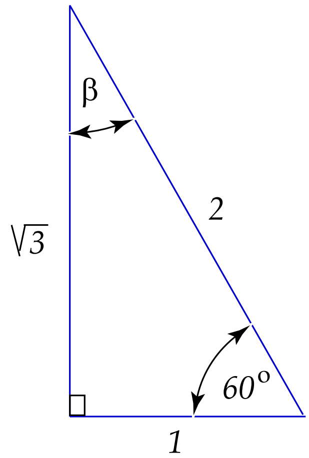
Sea $d(A,C) = a,$ por el Teorema de Pitágoras $a^2 = 3^2 + 4^2 \Longrightarrow a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$

Por lo tanto sen $\alpha = \dfrac{4}{5}$ y $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

Ejercicios 8

Considere las siguientes figuras:





determine:

a) α

b) $\operatorname{sen} 45^\circ$ y $\cos 45^\circ$

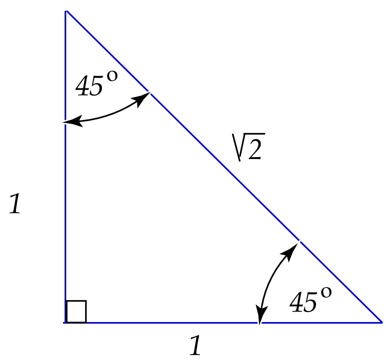
c) $\operatorname{sen} 60^\circ$ y $\cos 60^\circ$

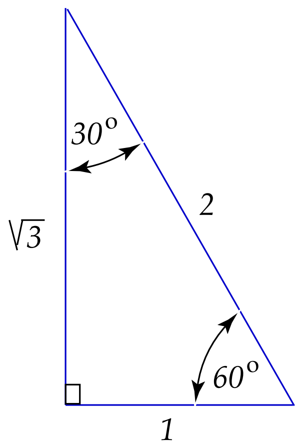
d) β

e) $\operatorname{sen}(\beta)$ y $\cos(\beta)$

Valores de las funciones seno y coseno, para ángulos cuya medida es $45^\circ,\ 60^\circ$ **ó** 30°

De particular importancia son los valores de las funciones seno y coseno para ángulos cuya medida sea $45^\circ,\ 30^\circ$ y 60° y dado que estas funciones para un ángulo agudo, pueden expresarse como razones entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, recordemos los valores de las funciones seno y coseno para $45^\circ,\ 30^\circ$ y 60°, mediante las siguientes figuras:





Obtenemos así la siguiente tabla:

x	$60°$	$45°$	$30°$
$\operatorname{sen} x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nota: Recuerde que:

$60°$ es equivalente a $\frac{\pi}{3}$

$30°$ es equivalente a $\frac{\pi}{6}$

$45°$ es equivalente a $\frac{\pi}{4}$

Ejemplo 13

Calcular:

a.) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

b.) $\operatorname{sen}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)$

c.) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Solución

a.) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

Como $\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \left(2\pi + \frac{-\pi}{3}\right)$

entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{-\pi}{3}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right) && \text{por propiedad d} \\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) && \text{por propiedad e-iii} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

b.) $\text{sen}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)$

Sabemos que $\text{sen}\left(\frac{-7\pi}{6}\right) = -\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

Como $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

entonces:

$$\begin{aligned} -\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= -\,\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) && \text{por propiedad e-ii} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

c.) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

como $\frac{7\pi}{4} = 2\pi + \frac{-\pi}{4}$

entonces:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= \cos\left(2\pi + \frac{-\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) && \text{por propiedad d} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) && \text{por propiedad e-ii} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

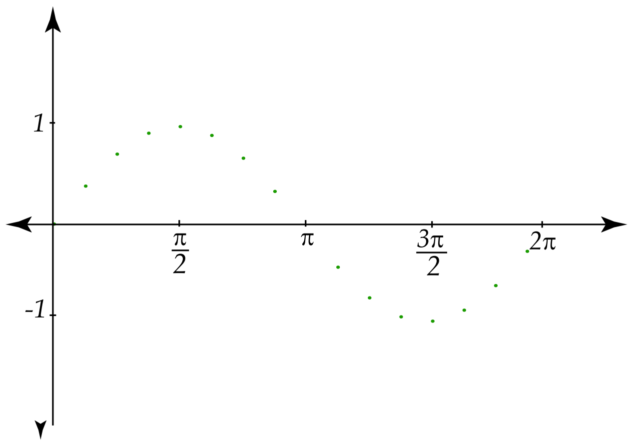
8.4.1 Representación del gráfico de las funciones seno y coseno

1. **Representación del gráfico de la función seno.**

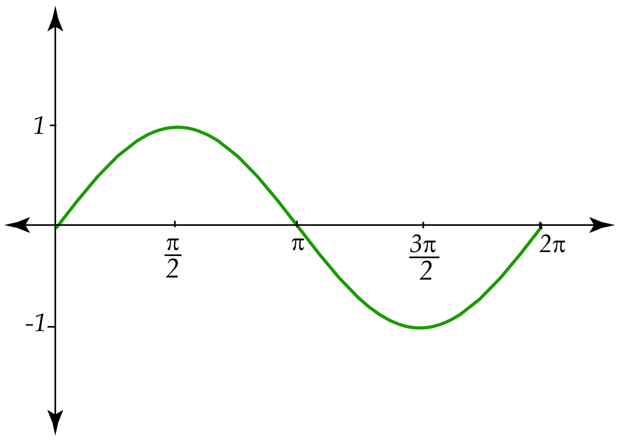
Recordemos que seno: $\mathbb{R} \to [-1,1]$, así para analizar el trazo de la función seno construiremos la siguiente tabla de valores convenientes:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = senx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0

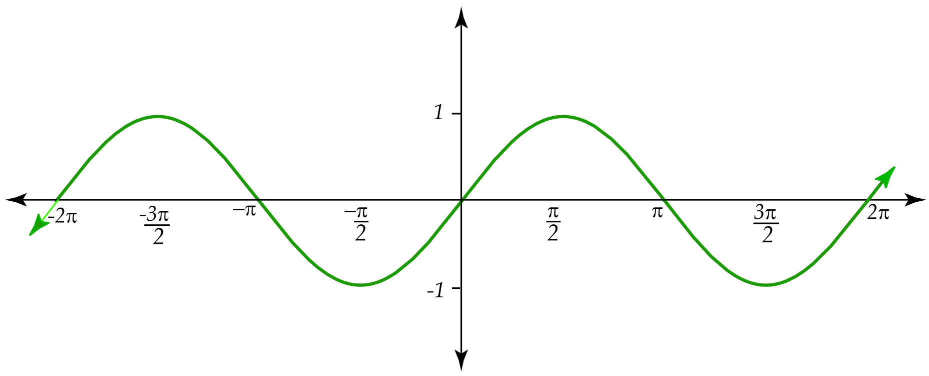
Al representar cada uno de los puntos en un sistema de coordenadas tenemos:



por lo tanto representando los pares $(\alpha,\ \text{sen}\ (\alpha))$ para todo α, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Se obtendrá el trazo de la función seno correspondiente a ese intervalo, como se muestra en la figura



Dado que la función seno es una función periódica, de período 2π o sea $\text{sen}(\alpha + 2n\pi) = \text{sen}\,\alpha$, el trazo correspondiente a la función seno en el intervalo $[0, 2\pi]$ se repite cada 2π, obteniéndose así:

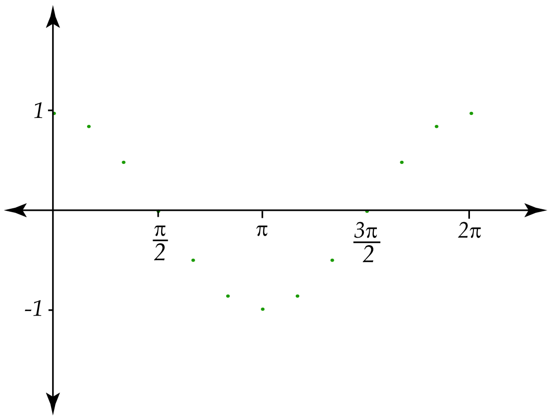


2. **Representación del gráfico de la función coseno.**

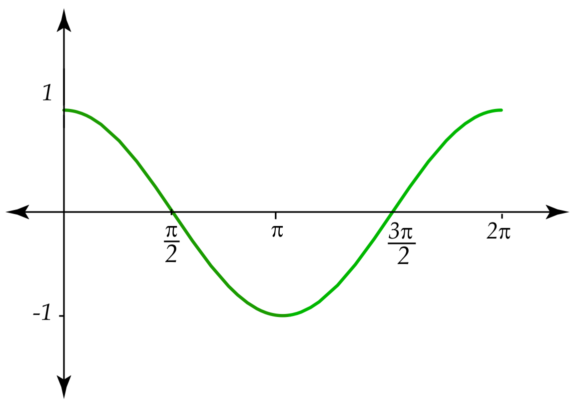
Recordemos que coseno: $\mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, así para realizar el trazo de la función coseno construiremos la siguiente tabla de valores convenientes:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

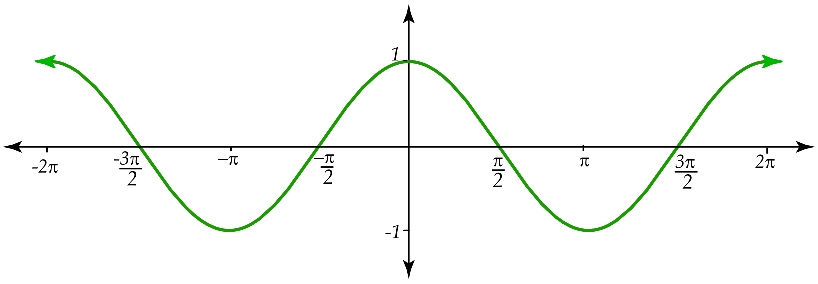
Al representar cada uno de los puntos en un sistema de coordenadas obtenemos:



por lo tanto representando los pares $(\alpha,\ cos\alpha)$ para todo $\alpha,\ \alpha \in [0, 2\pi]$ se obtendrá el trazo de la función coseno correspondiente a ese intervalo, como se muestra en la figura



Como la función coseno es una función periódica, de período 2π (o sea $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$), el trazo correspondiente a la función coseno en el intervalo $[0, 2\pi]$ se repite cada 2π, obteniéndose así:



Ejemplo 14

Hacer el trazo de la función f, definida por $f(\alpha) = \text{sen}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución

Para construir la tabla de valores, es conveniente que $\alpha - \dfrac{\pi}{3}$ tome los valores 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, 2π, así obtenemos la siguiente tabla.

$\alpha - \dfrac{\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$\text{sen}\left[\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right]$	0	1	0	-1	0

Como para realizar el trazo de f, necesitamos pares $\left(\alpha, \text{sen}\left[\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right]\right)$ entonces los valores de α se obtienen así:

a.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = 0 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

b.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6}$

c.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = \pi \Longrightarrow \alpha = \pi + \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{4\pi}{3}$

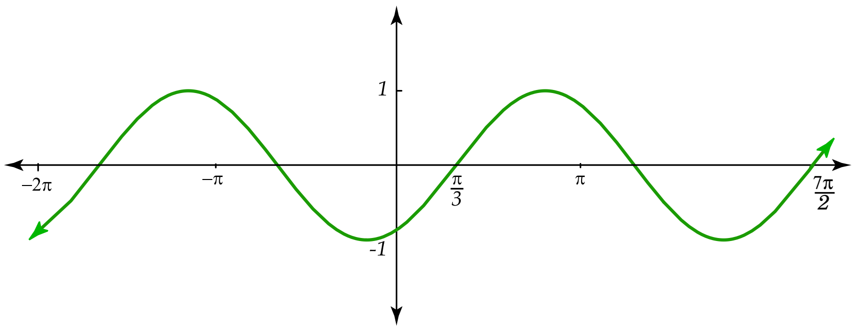
d.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{2} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{11\pi}{6}$

e.) Si $\alpha - \dfrac{\pi}{3} = 2\pi \Longrightarrow \alpha = 2\pi + \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{7\pi}{3}$

Con la tabla y la información anterior, construimos la siguiente tabla

α	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	(*)
$\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0	(**)

Usando $(*)$, $(**)$ y la periocidad de la función seno trazamos el gráfico de la función $\operatorname{sen}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$



8.5 Otras funciones trigonométricas

Recordemos que:

a.) $\operatorname{sen}(\alpha) = 0$ sí y sólo sí $\alpha = -\pi$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$ ... o sea

$\operatorname{sen}(-\pi) = 0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\operatorname{sen}\ \pi = 0$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$ ...

En general

$$\operatorname{sen}(k \cdot \pi) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

b.) $\cos(\alpha) = 0$ sí y sólo sí $\alpha = \dfrac{-3\pi}{2}$, $\alpha = \dfrac{-\pi}{2}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$; ... o sea

$\cos\left(\dfrac{-3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ ...

observemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{-3\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + \ -2\pi \\
\frac{-\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + \ -1\cdot\pi \\
\frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + 0\cdot\pi \\
\frac{-3\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + 1\cdot\pi
\end{aligned}$$

En general

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sean $A = \{\alpha \in \mathbb{R} / \cos(\alpha) = 0\}$, $B = \{\alpha \in \mathbb{R} / \operatorname{sen}\alpha = 0\}$ entonces

$A = \{\alpha \in \mathbb{R} / \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{\alpha \in \mathbb{R} / \alpha = k\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

Definición 13

a.) **Función tangente**

$$\begin{array}{rccc}
\text{Tangente}: & \mathbb{R} - A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \alpha & \longrightarrow & \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}
\end{array}$$

Nota: Tangente (α) se denota $\tan(\alpha)$ o sea $\tan(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

b.) **Función cotangente**

$$\begin{array}{rccc}
\text{Cotangente}: & \mathbb{R} - B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \alpha & \longrightarrow & \dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}
\end{array}$$

Nota: Cotangente (α) se denota $\cot(\alpha)$, o sea $\cot\ \alpha = \dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

c.) **Función secante**

$$\begin{array}{rccc} \text{Secante}: & \mathbb{R}-A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & \dfrac{1}{\cos(\alpha)} \end{array}$$

Nota: Secante (α) se denota $\sec(\alpha)$, o sea $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$

d.) **Función cosecante**

$$\begin{array}{rccc} \text{Cosecante}: & \mathbb{R}-B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longrightarrow & \dfrac{1}{\text{sen}(\alpha)} \end{array}$$

Nota: Cosecante (α) se denota $\csc(\alpha)$, o sea $\csc(\alpha) = \dfrac{1}{\text{sen}(\alpha)}$

Ejemplo 15

Calcule:

a.) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

b.) $\cot\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$

c.) $\sec(-\pi)$

d.) $\csc\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Solución

a.) $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}$, o sea $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

b.) $\cot\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = \dfrac{\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)} = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{-\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = -\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} = -\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -1$ o sea $\cot\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = -1$

c.) $\sec(-\pi) = \dfrac{1}{\cos(-\pi)} = \dfrac{1}{\cos(\pi)} = \dfrac{1}{-1} = -1$ o sea $\sec(-\pi) = -1$

d.) $\csc\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

o sea $\csc\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Ejercicios 9

Calcule cada uno de los siguientes valores:

- Tangente a) $\tan\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$ b) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ c) $\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ d) $\tan(-3\pi)$
- Cotangente a) $\cot\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$ b) $\cot\left(\dfrac{-5\pi}{4}\right)$ c) $\cot\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)$ d) $\cot\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$
- Secante a) $\sec\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ b) $\sec\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)$ c) $\sec\left(\dfrac{-7\pi}{6}\right)$ d) $\sec(0)$
- Cosecante a) $\csc\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ b) $\csc\left(\dfrac{-4\pi}{3}\right)$ c) $\csc\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ d) $\csc\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)$

Periocidad de las funciones tangente y cotangente

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan(\alpha), \quad \cos(\alpha) \neq 0$$

$$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\ \alpha, \quad \operatorname{sen}(\alpha) \neq 0$$

Lo anterior dice que la tangente y cotangente son periódicas, de período π.

Nota: Este resultado se demostrará más adelante.

Periodicidad de las Funciones Secante y Cosecante

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\sec(\alpha + 2k\pi) = \sec\ \alpha, \quad \cos(\alpha) \neq 0$$

$$\csc(\alpha + 2k\pi) = \csc\ \alpha, \quad \operatorname{sen}(\alpha) \neq 0$$

Demostración:

1. $\sec(\alpha + 2k\pi) = \sec(\alpha)$ se obtiene del hecho de que:

$$\begin{aligned} \sec(\alpha + 2k\pi) &= \frac{1}{\cos(\alpha + 2k\pi)} \\ &= \frac{1}{\cos(\alpha)} \\ &= \sec(\alpha) \end{aligned}$$

2. $\csc(\alpha + 2k\pi) = \csc(\alpha)$ se obtiene del hecho que:

$$\begin{aligned} \csc(\alpha + 2k\pi) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \\ &= \csc(\alpha) \end{aligned}$$

Signo de los Valores de las Funciones Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante

Con respecto a los signos de los valores de las funciones seno y coseno enunciadas anteriormente y de acuerdo a las definiciones tangente, cotangente, secante y cosecante obtenemos la siguiente tabla de signos:

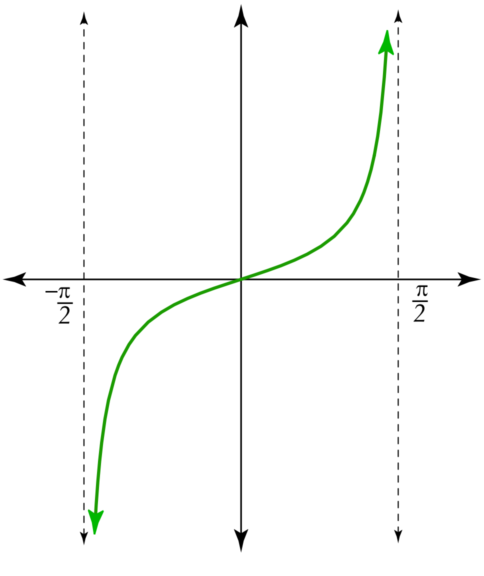
	Cuadrante			
	I	II	III	IV
α	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\tan(\alpha)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot(\alpha)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\sec(\alpha)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\csc(\alpha)$	$+$	$+$	$-$	$-$

which produces this table **Representación del gráfico de la tangente**

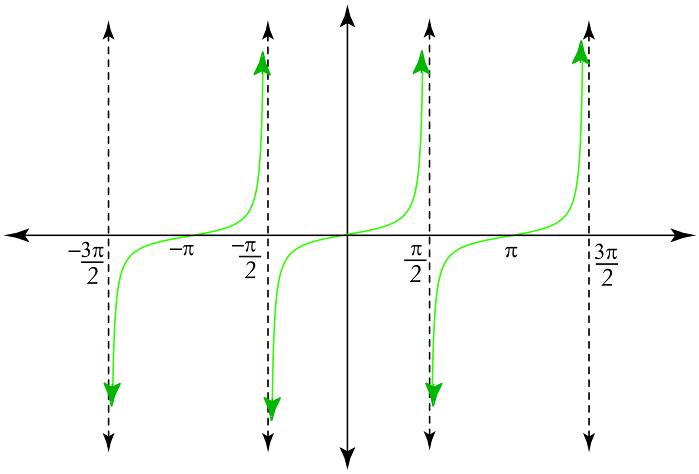
Para representar el gráfico de la tangente construimos la siguiente tabla de valores :

α	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(\alpha)$	indef	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-\sqrt{3}$	indef

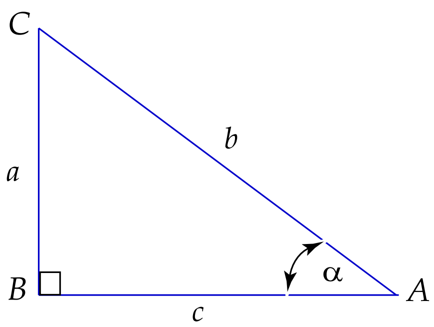
con los valores de la tabla anterior, construimos el trazo de la tangente en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



Dado que la tangente es una función periódica, de período π (o sea $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$, $k \in \mathbb{R}$) el trazo correspondiente a la función tangente en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ se repite cada π, obteniéndose así:



Considerándose el $\triangle ABC$ tal que $m\angle\ ABC = \frac{\pi}{2}$, sea α la medida de uno de sus ángulos internos agudos $\left(\text{o sea } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ como se muestra en la figura:



Como $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ se tiene que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\dfrac{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo que mide } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}}{\dfrac{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo que mide } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}}$$

o sea:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo que mide } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo que mide } \alpha}$$

En forma similar se tiene que:

$$\cot(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo que mide } \alpha}{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo que mide } \alpha}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo que mide } \alpha}$$

$$\csc(\alpha) = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo que mide } \alpha}$$

Así con respuesta a la figura anterior y los resultados anteriores se obtiene que para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, se cumple:

a.) $\tan(\alpha) = \dfrac{a}{c}$

b.) $\sec(\alpha) = \dfrac{b}{c}$

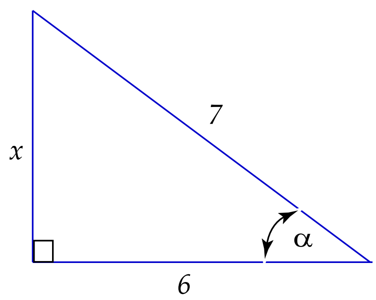
c.) $\cot(\alpha) = \dfrac{c}{a}$

d.) $\csc(\alpha) = \dfrac{b}{a}$

Ejemplo 16

Si $\cos(\alpha) = \dfrac{6}{7}$ y $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\cot(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ y $\csc(\alpha)$.

Solución Como $\cos(\alpha) = \dfrac{6}{7}$ y $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ entonces se tiene que:



¿Porqué?

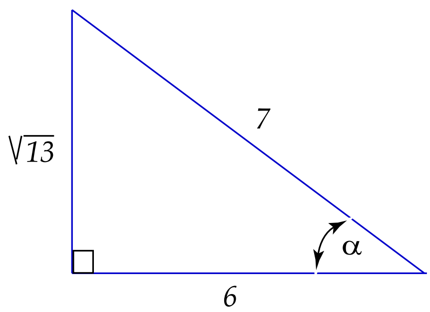
Como no sabemos cuanto mide el cateto opuesto al ángulo que mide α, hay que determinar su valor (usando el teorema de Pitágoras).

Sea x la medida del cateto opuesto al ángulo que mide α entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + 6^2 &= 7^2 \\ x^2 + 36 &= 49 \\ x^2 &= 13 \\ |x| &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

por lo tanto $x = \sqrt{13}$ ó $x = -\sqrt{13}$; pero $x = -\sqrt{13}$ no nos sirve. ¿por qué?

Por lo que el otro cateto mide $\sqrt{13}$, o sea tenemos el triángulo:



Así pues:

1.) $\text{sen }(\alpha) = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$

2.) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sqrt{13}}{6}$

3.) $\cot(\alpha) = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$

4.) $\sec(\alpha) = \dfrac{7}{6}$

5.) $\csc(\alpha) = \dfrac{7}{\sqrt{13}}$

Ejemplo 17

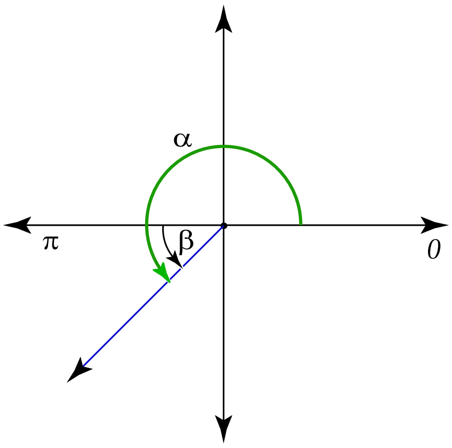
Si sen $\alpha = \dfrac{-3}{4}$ y $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule $\cos\ \alpha$, $\tan\ \alpha$, $\cot\ \alpha$, $\sec\ \alpha\ y\ \csc\ \alpha$.

Solución Observe que sen α es negativo, pues α esta en el tercer cuadrante

Como $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ entonces:

existe $\beta,\ 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2},$ tal que:

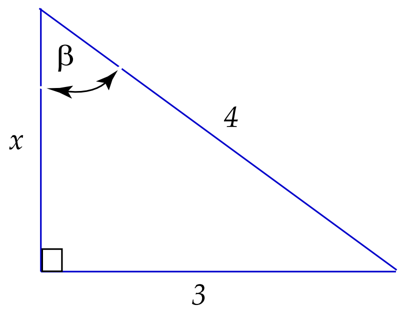
$\alpha = \pi + \beta$



Por lo que sen $(\alpha) =$ sen $(\pi + \beta) = -$ sen $(\beta) = \dfrac{-3}{4}$ de donde

$$\text{sen}\ (\beta) = \frac{3}{4}$$

Como sen $(\beta) = \dfrac{3}{4}$ y $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, entonces se tiene que:

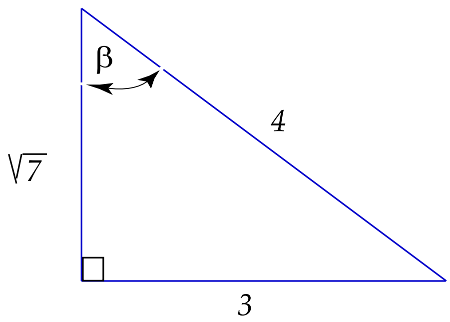


Como no sabemos cuánto mide el cateto adyacente al ángulo que mide $\beta,$ hay que determinar su valor (usando el teorema de Pitágoras).

Sea x la medida del cateto adyacente al ángulo que mide $\beta,$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 3^2 &=& 4^2 \\ x^2 &=& 16 - 9 \\ x^2 &=& 7 \\ x &=& \sqrt{7} \end{array}$$

Así tenemos el triángulo siguiente:



Así pues:

1. $\cos(\alpha) = \cos\ (\pi+\beta) = -\cos(\beta) = \dfrac{-\sqrt{7}}{4}$

2. $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{sen}\ (\pi+\beta)}{\cos\ (\pi+\beta)} = \dfrac{-\,\text{sen}\ (\beta)}{-\cos\ (\beta)} = \dfrac{\text{sen}\ (\beta)}{\cos\ (\beta)} = \tan\ (\beta) = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$

3. $\cot(\alpha) = \dfrac{\cos\ (\pi+\beta)}{\text{sen}\ (\pi+\beta)} = \dfrac{-\cos\ (\beta)}{-\,\text{sen}\ (\beta)} = \dfrac{\cos\ (\beta)}{\text{sen}\ (\beta)} = \cot\ (\beta) = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

4. $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\pi+\beta)} = \dfrac{1}{-\cos\ (\beta)} = -\dfrac{1}{\cos\ (\beta)} = -\sec\ (\beta) = \dfrac{-4}{\sqrt{7}}$

5. $\csc(\alpha) = \dfrac{1}{\text{sen}\,(\pi+\beta)} = \dfrac{1}{-\,\text{sen}\ (\beta)} = \dfrac{1}{-\,\text{sen}\ (\beta)} = -\csc\ (\beta) = \dfrac{-4}{3}$

Ejemplo 18

Si $\tan(\alpha) = -\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcule $\text{sen}\ (\alpha)$ y $\cos\ (\alpha)$

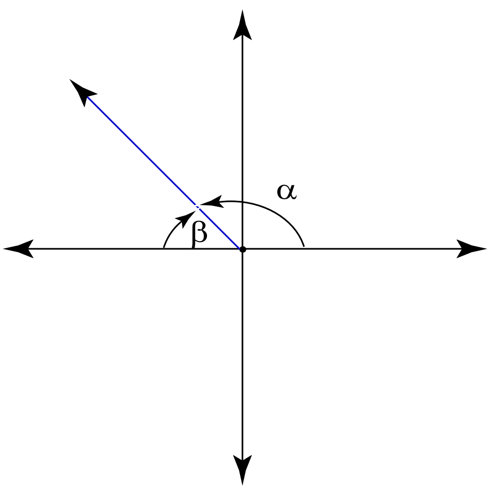
Solución

Observe que $\tan(\alpha)$ es negativo, pues α está en el segundo cuadrante.

como $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ entonces

existe β, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ tal que

$\alpha = \pi - \beta$

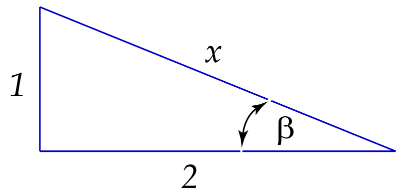


Por lo que:

$\tan\ \alpha = \tan\ (-\beta) = \dfrac{\text{sen}\ (\pi - \beta)}{\cos\ (\pi - \beta)} = \dfrac{\text{sen}\ (\beta)}{-\cos\ (\beta)} = -\tan\ (\beta) = \dfrac{-1}{2}$

de donde $\tan\ (\beta) = \dfrac{1}{2}$

Como $\tan\ (\beta) = \dfrac{1}{2}$ y $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, entonces se tiene que:



Usando el teorema de Pitágoras tenemos $x = \sqrt{5}$

Por lo que:

1. $\text{sen}\ (\alpha) = \text{sen}\ (\pi - \beta) = \text{sen}\ (\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

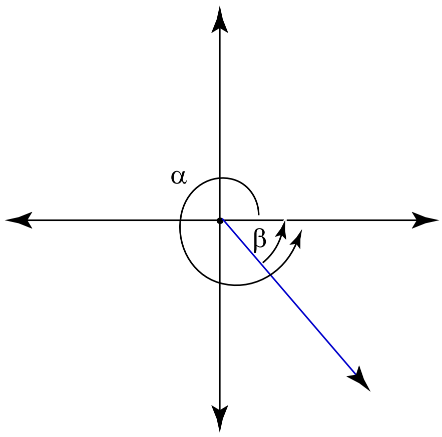
2. $\cos\ (\alpha) = \cos\ (\pi - \beta) = -\cos\ (\beta) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

■ Ejemplo 19

Si $\sec\ (\alpha) = 4$ y $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Calcule: $\text{sen}\ (\alpha)$; $\tan\ \alpha$

Solución

Observe que $\sec\ (\alpha)$ es positivo, pues α está en el cuarto cuadrante



Como $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, entonces:

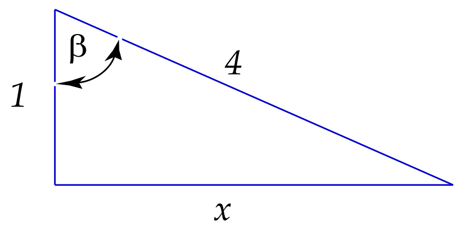
existe β, $\quad 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, tal que:

$\alpha = 2\pi - \beta$

Por lo que:

$$\sec(\alpha) = \sec(2\pi - \beta) = \frac{1}{\cos(2\pi - \beta)} = \frac{1}{\cos(2\pi + (-\beta))} = \frac{1}{\cos(-\beta)} = \frac{1}{\cos(\beta)} = \sec(\beta) = 4$$

Como $\sec\ \beta = 4$ y $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, entonces se tiene que:



Usando el teorema de Pitágoras tenemos que $x = \sqrt{15}$, por lo que:

1. $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(2\pi - \beta) = \operatorname{sen}[2\pi + (-\beta)] = \operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}(\beta) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

2. $\tan(\alpha) = \tan(2\pi - \beta) = \frac{\operatorname{sen}[2\pi + (-\beta)]}{\cos[2\pi + (-\beta)]} = \frac{\operatorname{sen}(-\beta)}{\cos(-\beta)} = \frac{-\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = -\tan(\beta) = -\sqrt{15}$

Ejercicios 10

Calcule: $\cot(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sec(\alpha)$

1.) Si $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{-2}{3}$ y $\frac{-3}{2} < \alpha < 2\pi$

Calcule: $\cos(\alpha), \tan(\alpha)$, $\operatorname{sen}(\alpha)$

2.) Si $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Calcule: $\operatorname{sen}(\alpha), \cos(\alpha), \csc(\alpha)$

3.) Si $\csc(\alpha) = -5$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Calcule: $\cot(\alpha), \cos(\alpha), \sec(\alpha)$

■ **Ejemplo 20**

Determine el valor de A donde:

$$A = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(5\pi\right)$$

Solución

$$A = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(5\pi\right)$$

$$A = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(5\pi\right)$$

como:

$$\begin{array}{lll}
(1)\quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
(2)\quad \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) & = & \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\
 & = & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \text{Por propiedad e-i} \\
 & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\
(3)\quad \cos\left(5\pi\right) & = & \cos\left(\pi + 4\pi\right) \qquad \text{Por periodicidad del coseno} \\
 & = & -1
\end{array}$$

entonces:

$$\begin{array}{lll}
A & = & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot -1 \\
A & = & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
A & = & \frac{1+\sqrt{3}}{2}
\end{array}$$

Ejercicios 11

Para cada una de las siguientes expresiones determine el valor de A:

1.) $A = \cos^3\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

2.) $A = -\cos\left(3\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

3.) $A = \tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - \sec\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

8.6 La pendiente de una recta como la tangente del ángulo de inclinación de ésta

Definición 14

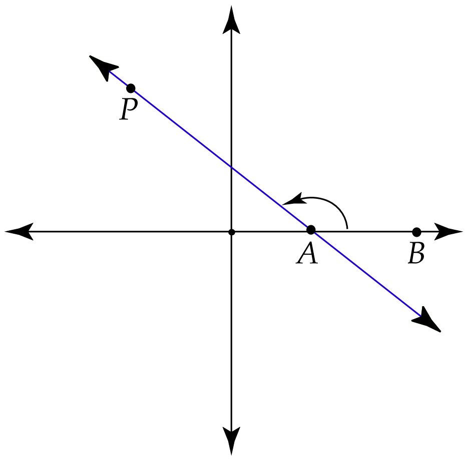
Sea L una recta de ecuación $y = mx + b$ con $m \neq 0$

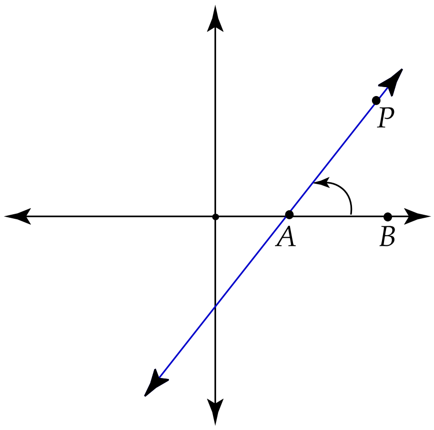
Sea A el punto de intersección de L y el eje X tal que $A = (a, 0)$

Sea B un punto del eje X tal que $B = (b, 0)$ y $b > a$.

Sea $P \in L$ tal que $P = (x, y)$, con $y > 0$ (ver las siguientes figuras)

El $\measuredangle\, BAP$ se llama ángulo de inclinación de la recta L.





Definición 15

Sea L una recta de ecuación $y = b$, b constante real, entonces se dice que la medida del ángulo de inclinación es 0.

Nota: Si α es la medida del ángulo de inclinación de una recta entonces $0 < \alpha < \pi$

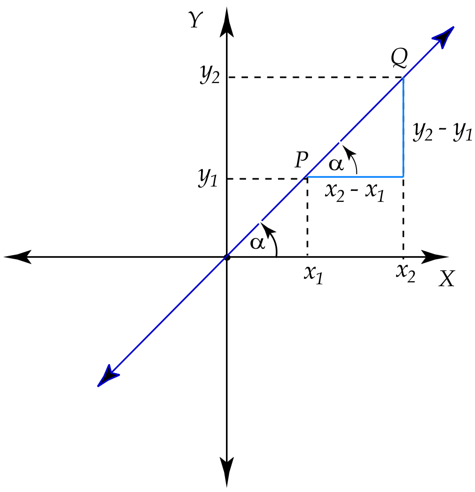
Nota: La pendiente de una recta es igual a la tangente de su ángulo de inclinación.

Justificación:

Sea L la recta de ecuación $y = mx + b$

Sea α la medida del ángulo de inclinación de L

Sean P y Q puntos de L tal que $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Sea α la medida del ángulo de inclinación de L, como se muestra en la figura siguiente



Sabemos que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pero $\tan(\alpha) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

por lo tanto:

$$m = \tan(\alpha)$$

Ejemplo 21

Determine la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación es $\dfrac{2\pi}{3}$ y que contiene el punto $(\sqrt{3}, 2)$

Solución

Sea $y = mx + b$ la ecuación de la recta, entonces $m = \tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} m &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ m &= \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ m &= -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ m &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

por lo que $y = -\sqrt{3}x + b$, como $(\sqrt{3}, 2)$ es un punto de la recta, entonces:

$$\begin{aligned} 2 &= -\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + b \\ 2 &= -3 + b \\ 5 &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta es $y = -\sqrt{3}x + 5$

Ejercicios 12

1. Determine la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación es $\dfrac{\pi}{4}$ y contiene el punto $(-2, 2)$

2. Determine la ecuación de la recta que contiene el origen del sistema de coordenadas y cuyo ángulo de inclinación es π

Identidades

Una identidad es una igualdad que es verdadera para todo elemento del dominio de las variables que intervienen.

Ejemplo 22

1.) $x(x+1) = x^2 + x$; por propiedad distributiva esta igualdad es verdadera para todo número real.

2.) $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$; esta igualdad es verdadera para todo número real diferente de 3, pues 3 no pertenece al dominio de la variable.

Nota:

Es frecuente que en el enunciado de una identidad propuesta no se incluya ninguna mención explícita del subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre la cual la identidad está definida. Sin embargo, al comprobar la identidad se debe recordar que la identidad es válida para aquellos valores de la variable o variables para los cuales cada miembro de la identidad está definida.

8.7 Identidades trigonométricas

Algunas identidades trigonométricas importantes.

Nota: Las identidades trigonométricas que se demostrarán tomando como unidad de medida el radián, son también válidas si se considera como unidad de medida el grado.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$$

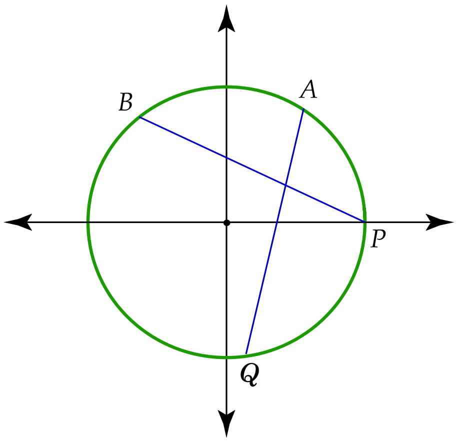
Demostración:

Para la demostración de esta identidad haremos uso de los siguientes resultados de la geometría plana.

i.) **Notación:** Si P y Q son puntos de un círculo C entonces $\widehat{PQ}$ denota el arco de extremos P y Q.

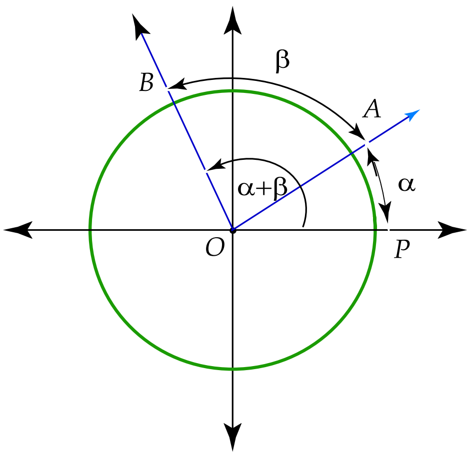
ii.) **Teorema:** Sean A, B, P y Q puntos del círculo C, entonces:

$$m(\widehat{BP}) = m(\widehat{AQ}) \Longleftrightarrow d(B,P) = d(A,Q)$$



Demostración (de la identidad 1)

Considere la siguiente figura:



donde:

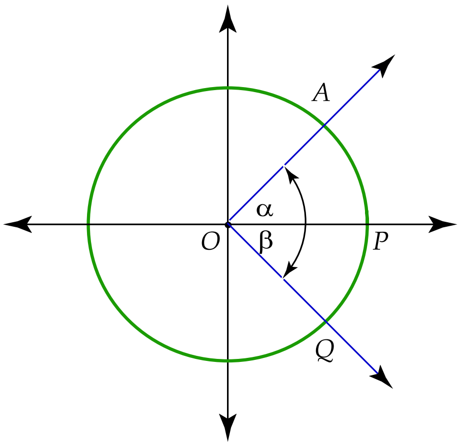
$$\begin{array}{rcl} A & = & (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) \\ B & = & (\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta)) \\ P & = & (1,0) \end{array}$$

Con respecto a la figura anterior, tenemos:

$m\measuredangle\, POA = \alpha \Longrightarrow m(\widehat{PA}) = \alpha$ y $m\measuredangle\, AOB = \beta \Longrightarrow m(\widehat{AB}) = \beta$

entonces $m(\widehat{PB}) = m(\widehat{PA}) + m(\widehat{AB}) = \alpha + \beta \qquad$ (i)

Considere la siguiente figura:



donde:

$$\begin{array}{rcl} A & = & (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) \\ Q & = & (\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta)) \\ P & = & (1,0) \end{array}$$

Con respecto a la figura anterior tenemos:

$m\measuredangle\, AOP = \alpha \Longrightarrow m(\widehat{AP}) = \alpha$ y $m\measuredangle\, POQ = -\beta \Longrightarrow m(\widehat{PQ}) = \beta$

entonces $m(\widehat{AQ}) = m(\widehat{AP}) + m(\widehat{PQ}) = \alpha + \beta$ (ii)

de (i) y (ii) tenemos que $m(\widehat{PB}) = m(\widehat{AQ})$

de donde por el teorema anterior, $d(P,B) = d(A,Q)$ (*)

Además, por la figura tras anterior, obtenemos que:

$$\begin{array}{rcl} d(P,B) & = & \sqrt{[\cos(\alpha+\beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - 0]^2} \\ & = & \sqrt{\cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)} \\ & = & \sqrt{\cos^2(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1} \\ & = & \sqrt{1 - 2\cos(\alpha+\beta) + 1} \\ & = & \sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta)} \end{array}$$

por lo que $d(P,B) = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta)}$

y, por la figura anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
d(A,Q) &= \sqrt{[\cos(\alpha) - \cos(-\beta)]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(-\beta)]^2} \\
&= \sqrt{[\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)]^2} \\
&= \sqrt{\cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\ \cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta)} \\
&= \sqrt{(\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)) + (\cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta)) - 2\cos(\alpha)\ \cos(\beta) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)} \\
&= \sqrt{1 + 1 - 2\cos(\alpha)\ \cos(\beta) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)} \\
&= \sqrt{2 - 2\cos(\alpha)\ \cos(\beta) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)}
\end{aligned}$$

por lo que $d(A,Q) = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha)\ \cos(\beta) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)}$

por lo tanto de (*) tenemos que:

$$d(B,P) = d(A,C)$$

o sea:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2 - 2\cos(\alpha+\beta)} &= \sqrt{2 - 2\cos(\alpha)\ \cos(\beta) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)} \\
&= \\
2 - 2\cos(\alpha+\beta) &= 2 - 2\cos(\alpha)\ \cos(\beta) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta) \\
&= \\
-2\cos(\alpha+\beta) &= -2\cos(\alpha)\ \cos(\beta) + 2\operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta) \\
&= \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\ \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in R$, entonces:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + \ -\beta) \\
&= \cos(\alpha)\ \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(-\beta) \quad \text{Por identidad 1} \\
&= \cos(\alpha)\ \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\ \operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Aplicando la identidad (1) o (2) y sustituyendo α y β por el valor correspondiente, se puede demostrar las siguientes identidades (llamadas fórmulas de reducción)

Sea $x \in \mathbb{R}$ entonces:

3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{sen}x$

4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen}x$

5. $\cos(\pi+x)=-\cos x$

6. $\cos(\pi-x)=-\cos x$

7. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\operatorname{sen}x$

8. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen}x$

Ejercicios 13

Demostrar las identidades (3), (4), (5), (6), (7) y (8)

9. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces:

$$\cos(\alpha)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Demostración:

Si $\alpha\in\mathbb{R}$ entonces existe β, $\beta\in\mathbb{R}$ tal que

i.) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta$

ii.) $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

$$\begin{array}{lcll}\cos(\alpha) & = & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right) & \text{por (i)}\\ & = & \operatorname{sen}(\beta) & \text{por identidad (4)}\\ & = & \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & \text{por (ii)}\end{array}$$

por lo tanto $\cos\alpha=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

10. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ entonces:

$$\text{sen } (\alpha+\beta) = \text{sen } (\alpha)\cdot\cos\,(\beta) + \text{sen } (\beta)\cdot\cos\,(\alpha)$$

Demostración:

Recuerde que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \text{sen } (x)$ por identidad (4)

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\text{sen } (\alpha+\beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]\\
&= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\beta) + \text{sen }\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\text{sen}(\beta) \quad \text{por identidad (2)}\\
&= \text{sen } (\alpha)\cdot\cos\,(\beta)+\cos\,(\alpha)\cdot sen\,(\beta) \quad \text{por identidad (4) y (5)}
\end{aligned}$$

11. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\beta\in\mathbb{R}$, entonces:

$$\text{sen } (\alpha-\beta) = \text{sen } (\alpha)\cdot\cos\,(\beta) - \text{sen } (\beta)\cdot\cos\,(\alpha)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\text{sen } (\alpha-\beta) &= \text{sen } (\alpha+\ -\beta)\\
&= \text{sen } (\alpha)\cdot\cos\,(-\beta)+\text{sen } (-\beta)\cdot\cos\,(\alpha) \quad \text{por identidad (10)}\\
&= \text{sen } (\alpha)\cdot\cos\,(\beta)-\text{sen } (\beta)\cdot\cos\,(\alpha) \quad \text{por e-iii}
\end{aligned}$$

Aplicando las identidades (9) o (10) y sustituyendo α o β por el valor correspondiente, se pueden demostrar las siguientes identidades (llamadas fórmulas de reducción)

Sea $x\in\mathbb{R}$ entonces:

12. $\text{sen }\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) = \cos\,(x)$

13. $\text{sen } (\pi+x) = -\text{sen } (x)$

14. $\text{sen } (\pi-x) = \text{sen } (x)$

15. $\text{sen }\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos\,(x)$

16. $\text{sen }\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right) = -\cos\,(x)$

Ejercicios 14

Demostrar las identidades (11), (12), (13), (14), (15), (16).

Utilizando las identidades (1), (2), (10), (11) se puede demostrar que:

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in R$, entonces:

17. $\tan\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\,(\alpha) + \tan\,(\beta)}{1 - \tan\,(\alpha) \cdot \tan\ \beta}$

18. $\tan\,(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\,(\alpha) - \tan\,(\beta)}{1 + \tan\,(\alpha) \cdot \tan\ \beta}$

■ **Ejemplo 23**

Determinar:

a.) $\tan\,(15^\circ)$

b.) $\cos\,(120^\circ)$

Solución

a.) $\tan\,(15^\circ)$

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ,$ por lo que:

$$\begin{aligned}
\tan\ 15^\circ &= \tan\,(45^\circ - 30^\circ) \\
&= \frac{\tan\ 45^\circ - \tan\ 30^\circ}{1 + \tan\ 45^\circ \cdot \tan\ 30^\circ} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tan(15^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

b.) $\cos\,(120°)$

$120° = 2 \cdot 60°$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\cos\;120° &= \cos\,(2 \cdot 60°)\\
&= \cos^2\;60° - \text{sen}^2\;60° \quad \text{por identidad (19)}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\\
&= \frac{-2}{4}\\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

por lo tanto $\cos\,(120°) = \dfrac{-1}{2}$

Ejemplo 24

Determinar:

a.) $\tan\;75°$

b.) $\cos\;165°$

c.) $\text{sen}\;255°$

d.) $\cot\,(-15)°$

En particular sí, en las identidades (1), (10) y (17), $\alpha = \beta$ obtenemos las identidades para el ángulo doble, a saber:

19. $\cos\;2\alpha = \cos^2\;\alpha - \text{sen}^2\;\alpha$

20. $\text{sen}\;2\alpha = 2\,\text{sen}\,(\alpha) \cdot \cos\,(\alpha)$

21. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\,(\alpha)}{1 - \tan^2\;\alpha}$

y si, en cada una de las identidades (19), (20) y (21), $\alpha = \dfrac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ obtenemos las identidades para el ángulo medio

22. $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}}$

23. $\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}$

24. $\tan\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$

Ejercicios 15

Demostrar las identidades (19), (20), (21), (22), (23) y (24)

Usando las identidades trigonométricas anteriores, la definición de las funciones trigonométricas y las propiedades de las operaciones definidas en $\mathbb{R}$, es posible comprobar otras identidades trigonométricas.

Ejemplo 25

Comprobar la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cot(\alpha) \,+\, \cos(\alpha)}{\cot(\alpha)} = 2\operatorname{sen}(\alpha)$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cot(\alpha)+\cos(\alpha)}{\cot(\alpha)} &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}+\cos(\alpha)}{\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}}{\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}} \\
&= \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}}{\dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}} \\
&= \frac{2\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\alpha)} \\
&= 2\operatorname{sen}(\alpha)
\end{aligned}
$$

por lo tanto:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cot(\alpha) \,+\, \cos(\alpha)}{\cot(\alpha)} = 2\operatorname{sen}(\alpha)$$

Ejemplo 26

Comprobar la identidad: $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\ A}+\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\ A}=2\sec^2\ A$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\operatorname{sen}\ A}+\frac{1}{1-\operatorname{sen}\ A} &= \frac{1-\operatorname{sen}\ A+1+\operatorname{sen}\ A}{(1+\operatorname{sen}\ A)(1-\operatorname{sen}\ A)}\\
&= \frac{2}{1-\operatorname{sen}^2\ A}\\
&= \frac{2}{\cos^2\ A}\\
&= 2\cdot\frac{1}{\cos^2\ A}\\
&= 2\cdot\sec^2\ A
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen}\ A}+\frac{1}{1-\operatorname{sen}\ A}=2\sec^2\ A$$

■ **Ejemplo 27**

Comprobar la identidad: $\dfrac{1+\cos\ (2\alpha)}{2}=\cos^2\ (\alpha)$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos\ (2\alpha)}{2} &= \frac{1+\cos^2\ (\alpha)-\operatorname{sen}^2\ (\alpha)}{2}\\
&= \frac{\cos^2\ (\alpha)+1-\operatorname{sen}^2\ (\alpha)}{2}\\
&= \frac{\cos^2\ (\alpha)+\cos^2\ (\alpha)}{2}\\
&= \frac{2\cos^2\ (\alpha)}{2}\\
&= \cos^2\ (\alpha)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\dfrac{1+\cos\ (2\alpha)}{2}=\cos^2\ (\alpha)$

■ **Ejemplo 28**

Comprobar la identidad: $\cos\ 2A+\operatorname{sen}\ 2A\cdot\tan\ A=1$

Solución

$$\begin{aligned}\cos\ 2A + \text{sen}\ 2A \cdot \tan\ A &= \cos^2\ A - \text{sen}^2\ A + 2\,\text{sen}\ A \cdot \cos\ A \cdot \frac{\text{sen}\,A}{\cos A}\\ &= \cos^2\ A - \text{sen}^2\ A + 2\,\text{sen}^2\ A\\ &= \cos^2\ A + \text{sen}^2\ A\\ &= 1\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$\cos\ 2A + \text{sen}\ 2A \cdot \tan\ A = 1$

Ejemplo 29

Comprobar la identidad: $\csc\ A + \cot\ A = \dfrac{\text{sen}\ A}{1-\cos\ A}$

Solución

$$\begin{aligned}\csc\ A + \cot\ A &= \frac{1}{\text{sen}\ A} + \frac{\cos\ A}{\text{sen}\ A}\\ &= \frac{1+\cos\ A}{\text{sen}\ A}\\ &= \frac{1+\cos\ A}{\text{sen}\ A} \cdot \frac{1-\cos\ A}{1-\cos\ A}\\ &= \frac{(1+\cos\ A)\cdot(1-\cos\ A)}{\text{sen}\ A\cdot(1-\cos\ A)}\\ &= \frac{1-\cos^2\ A}{\text{sen}\ A\cdot(1-\cos\ A)}\\ &= \frac{\text{sen}^2\ A}{\text{sen}\ A\cdot(1-\cos\ A)}\\ &= \frac{\text{sen}\ A}{1-\cos\ A}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$\csc\ A + \cot\ A = \dfrac{\text{sen}\ A}{1-\cos\ A}$

Ejemplo 30

Compruebe que: si $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces: $\tan\ (\alpha + k \cdot \pi) = \tan\ \alpha$

Solución

$$\begin{aligned}
\tan\ (\alpha + k\pi) &= \frac{\text{sen}\ (\alpha + k\pi)}{\cos\ (\alpha + k\pi)} \\
&= \frac{\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\ k\pi + \text{sen}\ k\pi \cdot \cos\ \alpha}{\cos\ \alpha \cdot \cos\ k\pi - \text{sen}\ \alpha \cdot \text{sen}\ k\pi} \\
&= \frac{\text{sen}\ \alpha \cdot \cos\ k\pi}{\cos\ \alpha \cdot \cos\ k\pi} \quad \text{¿Por qué?} \\
&= \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} \\
&= \tan\ \alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tan\ (\alpha + k\pi) = \tan\ \alpha$

Ejercicios 16

Compruebe cada una de las siguientes identidades:

1. $\cos\ x \cdot \cos\ (-x) + \text{sen}^2\ x = 1$

2. $\tan\ x \cdot \cot\ (-x) + \text{sen}^2\ x + \cos^2\ x = 0$

3. $\cot^2\ x \cdot \cos^2\ x = \cot^2\ x - \cos^2\ x$

4. $\dfrac{\text{sen}\ (x)}{\csc\ x} + \dfrac{\cos\ (x)}{\sec\ x} = 1$

5. $\sec\ x \cdot (1 - \text{sen}^2\ x) = \cos\ x$

6. $\text{sen}^4\ x = \dfrac{1 - \cos^2\ x}{\csc^2\ x}$

7. $\cos\ 2A = \cos^4\ A - \text{sen}^4\ A$

8. $\tan\ A + \tan\ B = \dfrac{\text{sen}\ (A+B)}{\cos\ A \cdot \cos\ B}$

9. $\cot\ x - \tan\ x = 2\cot\ 2x$

10. $\tan\ \dfrac{x}{2}(1 + \cos\ (x)) = \text{sen}\ (x)$

11. $(\tan\ x + \cot\ x) \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos\ x = 1$

12. $2\csc\ 2x = \sec\ x \cdot \csc\ x$

13. $\text{sen}\ (A+B) + \text{sen}\ (A-B) = 2\,\text{sen}\ A \cdot \text{sen}\ B$

14. $\text{sen}\ (A+B) \cdot \text{sen}\ (A-B) = \cos^2\ B - \cos^2\ A$

15. $-\cos\ (x) \cdot \cos\ (-x) + \text{sen}\ (x) \cdot \text{sen}\ (-x) = -1$

16. $1 + \tan^2\ x = \sec^2\ x$

17. $\tan\ x + \cot\ x = 2\csc 2\ x$

18. $\dfrac{\sec\ x}{\tan\ x + \cot\ x} = \text{sen}\ (x)$

19. $\cos(x + \dfrac{\pi}{3}) - \cos\ (x - \dfrac{\pi}{6}) = 0$

20. $\text{sen}^2\ x = \dfrac{1 - \cos\ (x)}{2}$

21. $\tan\ A - \tan\ B = \dfrac{sen\ (A-B)}{\cos\ A \cdot \cos\ B}$

22. $\tan\ A = \dfrac{\text{sen}\ 2A}{1 + cos\ 2A}$

23. $\text{sen}\ (x) \cdot cos\ x = \dfrac{\text{sen}\ 2x}{2}$

24. $\tan\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos\ (x)}{\text{sen}\ (x)}$

8.8 Ecuaciones trigonométricas

Para resolver ecuaciones en las que intervienen valores de funciones trigonométricas, se pueden usar varios métodos, algunos algebraicos (factorización, por ejemplo) y otros que consisten en la aplicación de las identidades trigonométricas.

■ **Ejemplo 31**

Resolver: $\cos\ (x) = \dfrac{1}{2}$

Solución

Como $\cos\ (x)$ es positiva, esta ecuación tiene soluciones en el primer y cuarto cuadrante.

En el primer cuadrante, una solución particular del $\cos\ (x) = \dfrac{1}{2}$ es $\dfrac{\pi}{3}$, pues $\cos\ \left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Pero como el coseno es función periódica de periodo 2π se tiene que $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$.

Así tenemos que todos los números de la forma $\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ son solución de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ o sea:

$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

En el cuarto cuadrante, una solución particular de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ es $\frac{-\pi}{3}$ pues $\cos(-\pi/3) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ y tomando en cuenta el periodo de la función coseno, todos los números de la forma $\frac{-\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ son solución de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ o sea:

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = \frac{-\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Así $S = S_1 \cup S_2$ es decir $S = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \text{ ó } x = \frac{-\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

Ejemplo 32

Resolver $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Solución

Como $\cos(x)$ es negativo, esta ecuación tiene soluciones en el segundo y tercer cuadrante.

En el segundo cuadrante, una solución particular de $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ es $\pi - \frac{\pi}{4}$, o sea $\frac{3\pi}{4}$ pues:

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Así $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

En el tercer cuadrante, una solución particular de $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ es $\pi + \frac{\pi}{4}$, o sea $\frac{5\pi}{4}$, pues

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Así $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

Por lo tanto $S = S_1 \cup S_2$, es decir

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \text{ ó } x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}\right\}$

Ejemplo 33

Resolver $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Solución

Como $\tan(x)$ es positiva, esta ecuación tiene soluciones en el primer y tercer cuadrante.

En el primer cuadrante una solución particular de $\tan(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ es $\dfrac{\pi}{6}$, pues $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, pero como la función es periódica, de periodo π , se tiene que:

$$\tan(x) = \left(\frac{\pi}{6} + n\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

o sea, todos los números de la forma $\dfrac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ son solución de $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, así

$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

En el tercer cuadrante una solución particular de $\tan(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ es $\pi + \dfrac{\pi}{6}$, o sea $\dfrac{7\pi}{6}$, pues $\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Observe además que $\dfrac{7\pi}{6}$ está contenida en S_1 , pues $\dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + \pi$ por lo tanto $S = S_1$ o sea

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

Ejemplo 34

Resolver $\operatorname{sen}(2x) = 3\operatorname{sen}(x)$

Solución

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) = 3\operatorname{sen}(x) &\implies 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos x = 3\operatorname{sen} x \\
&\implies 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) - 3\operatorname{sen}(x) = 0 \\
&\implies \operatorname{sen}(x)\,(2\cos(x) - 3) = 0 \\
&\implies \textbf{a)}\ \operatorname{sen}(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \textbf{b)}\ 2\cos x - 3 = 0
\end{aligned}$$

a.) Sí $\operatorname{sen}(x) = 0$, entonces $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$; o sea

$S_1 = \{x \in \mathbb{R}/\ x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

b.) Sí $2\cos(x) - 3 = 0$ entonces

$2\cos(x) = 3 \implies \cos(x) = \dfrac{3}{2}$, por lo que $S_2 = \varnothing$ ¿Por qué?

Así $S = S_1$ ó $S = \{x \in \mathbb{R}/x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$