MATEMATICAS PARA ECONOMIA

por
FRANCISCO RIVERO MENDOZA PHD.

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes
Mérida - Venezuela
Octubre de 2000.

Índice general

MATEMATICAS
PARA ECONOMIA

por
FRANCISCO RIVERO MENDOZA PHD.

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes
Mérida - Venezuela
Octubre de 2000.

Capítulo 1

Números Complejos

En este capítulo estudiaremos el Sistema de los Números Complejos, el cual será de gran utilidad para el posterior tratamiento de los polinomiios y la resolución de ecuaciones. Un **Número Complejo** es una expresión del tipo

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e i es un símbolo, cuyo significado será aclarado más adelante.

Este tipo de números, algo misteriosos, por el momento, aparecen dentro de los problemas de resolución de las ecuaciones cuadráticas con una incógnita. Por ejemplo la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0$$

no tiene raices reales. Al tratar de aplicar la fórmula que da la solución de una ecuación de segundo grado, nos encontramos con la expresión

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

la cual no tiene sentido en los números reales. No se puede tener una raíz cuadrada de un número negativo. Sin embargo, si usamos propiedades de los radicales se obtiene

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

luego la solución de este problema es un número algo misterioso de la forma

$$x - \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$$

Imaginemos la sorpresa de los primeros algebristas al encontrarse con este tipo de situaciones imposibles de interpretar dentro de la matemática de la época. ¿ Que significado se le podía dar a una raíz cuadrada de un número negativo? ¿ Porque no dejar de lado esta dificultad y aceptar que este tipo de ecuación no tiene solución? La necesidad de resolver **todas** las ecuaciones cuadáticas, incluyendo estas cuyas soluciones nos dan este tipo extraño de números, motivó la creación de un sistema numérico ampliado, con propiedades similares a las de los números reales. Dentro de este contexto se acepta el símbolo $\sqrt{-1}$ como una entidad matemática nueva. Veamos a continuación como se construyen estos nuevos números.

Comenzaremos por introducir un nuevo número o símbolo, denotado por i, el cual será llamado la **unidad imaginaria** y que cumple con la condición

$$i^2 = -1$$

o bien

$$i = \sqrt{-1}$$

Una vez hecho esto construimos un conjunto C llamado **Números Complejos** cuyos elementos son combinaciones de la forma

$$z = a + bi$$

o bien

$$z = a + b\sqrt{-1}$$

donde a y b son números reales.

Vemos entonces que todo número complejo consta de dos partes, o componentes, llamadas real e imaginaria, dadas por a y b respectivamente. Así pues tenemos $Re(z) = a$ e $Im(Z) = b$.

Ejemplo El siguiente es un número complejo

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i.$$

Su parte real es $\sqrt{2}$ y su parte imaginaria es $\sqrt{3}$.

Ejemplo. El siguiente es un número complejo

$$z = 8$$

Cuando no hay parte imaginaria, como en este caso, se dice que el complejo es **real**. Entonces los Números Reales forman parte del conjunto de los Números Complejos.

Ejemplo. El siguiente es un número complejo

$$z = 12i$$

Cuando un número complejo no tiene parte real, como en el presente caso, se dice que es un **imaginario puro**.

¿ Cuando dos números complejos son iguales?

Dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales sí y sólo si $a = c$ y $b = d$. En otras palabras, dos números complejos son iguales cuando sus componentes respectivas, real e imaginaria, son iguales.

1.1. Suma de números Complejos

Ahora nos dedicaremos al estudio de las propiedades de los números complejos relacionadas con la suma de ellos.

La operación **suma de números complejos** esta basada en la suma de números reales. Cada complejo tiene una parte real y una parte imaginaria. Para sumar complejos hay que sumar las partes reales por un lado y las partes imaginarias por otro lado, como números reales. Al hacer esto nos encontramos de nuevo con otro número complejo. Mas precisamente

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ dos números complejos. Entonces la suma de z_1 con z_2, denotada por $z_1 + z_2$ es el número complejo

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Es decir, para sumar números complejos simplemente se sumam sus componentes correspondientes.

Ejemplo. Para sumar $z_1 = 3 + 2i$ con $z_2 = -8 + 4i$ hacemos

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (-8 + 4i) = (3 - 8) + (2 + 4)i$$

$$z_1 + z_2 = -5 + 6i$$

Resta de números complejos. La resta o diferencia de dos números complejos se realiza restando cada parte por separado. Más precisamente: Sean $Z = a + bi$ y $W = c+di$ dos números complejos, entonces la diferencia o resta entre Z y W viene dada por

$$Z - W = (a - c) + (b - d)i$$

Es decir, para restar dos números complejos se restan sus componentes correspondientes.

Ejemplo. Sean $Z = 4 + 7i$ y $W = 2 + 3i$. Entonces

$$Z - W = (4 - 2) + (7 - 3)i = 2 + 4i$$

Estas operaciones de suma y resta satisfacen las siguientes propiedades generales

1. **Propiedad de Cierre para la suma.** Si Z y W son dos números complejos entonces tanto $Z+W$ como $Z-W$ son números complejos.

2. **Propiedad asociativa.** Si Z, W y U son números complejos, entonces se tiene
$$Z+(W+U)=(Z+W)+U$$

3. **Propiedad Conmutativa.** Si Z y U son números complejos, se tiene
$$Z+U=U+Z$$

4. **Propiedad del elemento neutro.** El número complejo $0 = 0 + 0$i, es el elemento neutro para la suma. En efecto, si $Z=a+bi$ es cualquier número complejo se tiene
$$Z+0=(a+bi)+(0+0i)=(a+0)+(b+0)i=a+bi=Z$$
de la misma forma, se puede probar que $0+Z=Z$

5. **Propiedad del opuesto.** Si $Z=a+bi$ es un número complejo, el opuesto de este es $-Z=-a-bi$, el cual es otro número complejo. Nótese que el opuesto satisface
$$Z+(-Z)=(-Z)+Z=0$$

Usando todas estas propiedades, es posible calcular expresiones complicadas en donde aparezcan sumas y restas de números complejos

Ejemplo. Calcule el valor de Z donde
$$Z=(5+12i)+[(10-8i)+[(6+3i)-(7+2i)]]$$

Para simplificar esta expresión usamos las propiedades estudiadas. Así pues
$$\begin{aligned} Z &= (5+12i)+[(10-8i)+(-1+i)] \\ &= (5+12i)+(9-7i) \\ &= 14+5i \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Efectuar las siguientes sumas y restas de números complejos
   a) (5 + 15i) +(20-2i)
   b) (10 + 10i) +(2 + 8i)
   c) ($\sqrt{3}$ + 2i) + (2 + $\sqrt{3}$i)
   d) $\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i\right)$
   e) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{5i}{\sqrt{2}}\right)$
   f) $\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{3}i\right)$
   g) 5 + (2 - $\sqrt{3}$i)
   h) 6i + (5 + 16i)
   i) 5i + (0 + 9i)
   j) 6i - 87i
   k) (-10 -8i) + (-1 -i)

2. Hallar el resultado de las siguientes operaciones
   a) $(3+2i)+[(4-5i)-(5+i)]$
   b)$[(1-9i)+(7-2i)]=(4+6i)$
   c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{16}{5}i\right)+\left[\left(\frac{1}{20}+\frac{8}{5}i\right)+\left(\frac{10}{20}+\frac{6}{5}i\right)\right]$
   d) $[(16-i)+(1-8i)]-(17-9i)$

3. En cada caso, hallar un número complejo Z con la condición dada
   a) Z + (3 + 2i) = 5 + 20 i
   b) i + (3 +4i) = Z
   c) Z + (1 +i) = 18 + 6i
   d) $Z+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=i$

1.2. Producto de números complejos

Sean $Z = a + bi$ y $W = c + di$ definimos su producto, mediante la fórmula

$$Z \cdot W = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Aunque parezca un poco complicada, esta expresión para el producto es consecuencia de las reglas de multiplicación para los números reales. En efecto, haciendo la multiplicación de Z por W como si se tratara de expresiones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac+adi+bic+bdi^2\\ &= ac-bd+(ad+bc)i\end{aligned}$$

Hemos usado la propiedad distributiva para la multiplicación, la relación $i^2=-1$ y un reagrupamiento de los términos. La multiplicación, entonces puede hacerse de dos maneras; o bien se aplica directamente la fórmula o se multiplican los complejos como expresiones algebraicas, teniendo cuidado de hacer al final la sustitución $i^2=-1$.

Ejemplo. Sean $Z=6+2i$ y $W=3+5i$. Para hallar $Z\cdot W$ hacemos

$$Z\cdot W=(6\cdot 3-2\cdot 5)+(6\cdot 5+2\cdot 3)i=8+36i$$

Ejemplo. Sean $Z=8$ y $W=3+2i$. Entonces para hallar el producto de ambos hacemos

$$Z\cdot W=8(3+2i)=24+16i$$

Vemos entonces, que para multiplicar un número real por un número complejo, se multiplica cada componente de este último por el número real.

Propiedades de la multiplicación La multiplicación de números complejos satisface las siguientes propiedades

1. **Propiedad de Cierre para el producto.** Si Z y W son dos números complejos entonces $Z\cdot W$es un número complejo.

2. **Propiedad asociativa.** Si Z, W y U son números complejos, entonces se tiene
$$Z\cdot(W\cdot U)=(Z\cdot W)\cdot U$$

3. **Propiedad Conmutativa.** Si Z y U son números complejos, se tiene
$$Z\cdot U=U\cdot Z$$

4. **Propiedad del elemento neutro.** El número complejo 1, es el **elemento neutro para el producto**. En efecto, si $Z=a+bi$ es cualquier número complejo se tiene
$$Z\cdot 1=(a+bi)\cdot 1=(a\cdot 1)+(b\cdot 1)i=a+bi=Z$$
de la misma forma, se puede probar que $1\cdot Z=Z$

5. **Propiedad del simétrico.** Si $Z = a + bi$ es un número complejo, distinto de cero, **el simétrico de** Z es otro número complejo, denotado por Z^{-1}, el cual satisface
$$Z \cdot Z^{-1} = Z^{-1} \cdot Z = 1$$
Mas adelante veremos como se calcula Z^{-1}.

6. **Propiedad distributiva.** Si Z, W y U son números complejos se tienen las relaciones
$$Z \cdot (W + U) = Z \cdot W + Z \cdot U$$
$$(Z + W) \cdot U = Z \cdot U + W \cdot U.$$

El conjugado

Definición. Si $Z = a + bi$ es un número complejo, entonces el **Conjugado** de Z, denotado por $\overline{Z}$, es otro número complejo definido por por

$$\overline{Z} = a - bi$$

Ejemplo. Si $Z = 2 + 9i$, su conjugado es $\overline{Z} = 2 - 9i$

Ejemplo. Si $Z = 7 - 9i$, su conjugado es $\overline{Z} = 7 + 9i$

El Módulo

Definición. Si $Z = a + bi$ es un número complejo, el **Módulo** de Z es el número real
$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
Observación: Se puede expresar el módulo de Z en función de él mismo y de su conjugado, usando la relación
$$|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}}$$
Se puede probar que dicha relación se verifica para todo Z. En efecto, pongamos $Z = a + bi$. Luego

$$Z\overline{Z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (ab - ba)i = a^2 + b^2$$

de donde
$$\sqrt{Z\overline{Z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |Z|$$

Ejemplo. Sea $Z = 3 + 4i$, para hallar su módulo hacemos

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Algunas propiedades muy importantes del módulo se dan a continuación. Supondremos que Z, W y U son números complejos

1. $|Z| \geq 0$
2. $|Z| = 0$ sí y sólo si $Z = 0$
3. $|Z + W| \leq |Z| + |W|$
4. $|Z \cdot W| = |Z| \cdot |W|$
5. $|Z^{-1}| = |Z|^{-1}$

División de números complejos ¿ Cómo se dividen entre sí dos números complejos ? El caso más sencillo se presenta al dividir un complejo cualquiera entre un número real. Por ejemplo

$$\frac{1+i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

Si Z y W son dos números complejos, y $W \neq 0$, podemos hacer la división de Z entre W de la forma siguiente

$$\frac{Z}{W} = \frac{Z}{W} \cdot \frac{\overline{W}}{\overline{\overline{W}}} = \frac{Z \cdot \overline{W}}{|W|^2}$$

Tenemos entonces la **regla para dividir números complejos**:

Para hacer la división de dos números complejos Z y W, primero se multiplica Z por el conjugado de W y éste resultado se divide entre el módulo al cuadrado de W, el cual es un número real.

Si hacemos $Z = a + bi$ y $W = c + di$, tendremos

$$\frac{Z}{W} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{a^2 + b^2}$$

Ejemplo. Sea $Z = 3 + 4i$ y $W = 2 + 3i$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{Z}{W} &= \frac{3+4i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} \\
&= \frac{(6+12)+(-9+8)i}{2^2+3^2} \\
&= \frac{18-i}{11} \\
&= \frac{18}{11} - \frac{1}{11}i
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Sean los números complejos $Z_1 = 1 + 2i$, $Z_2 = 5 + 3i$ y $Z_3 = 4 + i$. Efectuar las siguientes operaciones
   a) $Z_1 \cdot Z_2$
   b) $Z_2 \cdot \overline{Z_3}$
   c) $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3$
   d) Z_1/Z_2
   d) $(Z_1 + Z_2)/(Z_3 - Z_2)$
   e) $5Z_2 - 6Z_3$

2. Calcular
   a) $(3 + 2i)^2 - (4 + 2i)$
   b) $[(5 + 2i) + (4 - i)]/(6 + 5i)$
   c) $\overline{(5 + 2i) + 6}$
   d)$(6 + 2i)(1 - 5i)/(7 + 4i)^2$
   e)$5(1 - i) + 6(7 + 1/2i)$
   f) $(-3 - i) + (4 - 8i)[(5 + 3i) - (6 + 7i)]$
   g) $(5 + 4i)^2 - (1 - 5i)^2$
   h) $5(\overline{(3 + 2i)} + (3 + 2i)(1 + 5i)$

3. Verifique la relación $|ZW| = |Z||W|$ para los números complejos $Z = 5 + i$ y $W = 3 - 2i$.

4. Verifique la relación
$$\left|\frac{Z}{W}\right| = \frac{|Z|}{|W|}$$
   para los números complejos $Z = 1 - 5i$ y $W = 2 + 4i$

5. Hallar un número complejo Z, tal que
$$(7 + 2i)Z + (2 + 3i) = 18 + 10i$$

6. Demuestre que si Z es un número complejo tal que $Z = \overline{Z}$, entonces Z debe ser real.

7. Demuestre que si $Z = a + bi$, entonces se tiene $a = (Z + \overline{Z})/2$ y $b = (Z - \overline{Z})/2i$

8. Hallar un número complejo cuyo módulo es igual a 5 y su parte real es igual a 3.

9. Hallar un número complejo Z tal que su parte real es el doble de la parte imaginaria y que además cumple $Z^2 = -7 + 24i$

1.3. Representación geométrica de Z

Así como los números reales se representan geométricamente por medio de una recta, es posible dar una representación geométrica de los números complejos usando un plano bidimensional, llamado **Plano Complejo**. En primer lugar, los puntos del plano complejo se pueden identificar o marcar usando coordenadas cartesianas. En un sistema de tales coordenadas, se tiene un par de ejes que se cortan perpendicularmenet en un punto llamado el origen. El eje en posición horizontal se llama eje de las x o **eje real** y el eje en posición vertical se llama eje de las y o **eje imaginario**. Si P es un punto cualquiera, entonces le asociamos las componentes x e y, donde x, llamada la **componente real**, es la distancia desde el punto hasta el eje Y y y, llamado la **componente imaginaria**, es la distancia desde el punto hasta el eje X. De esta manera, denotamos al punto por P(x,y).

Haremos ahora una identificación entre los números complejos y los puntos del plano complejo. A cada punto P(a,b) del plano se le asocia el número complejo Z = a + bi. De esta forma, se obtiene una **Representación geométrica** de Z, ver la figura

y

$z = a + bi$

b

a x

En esta representación, la componente real de Z se copia sobre el eje X y la componente imaginaria sobre el eje Y. El conjunto de todos estos puntos, será llamado **Plano Complejo**.

Ejemplo. El complejo Z = 4 + 5i se puede representar en el Plano Complejo, para lo cual ubicamos primero al punto de cordenadas (4, 5). Una vez hecho esto se tendrá la representación de Z, ver la figura.

y

$z = 4 + 5i$

5

4 x

Ejemplo. El complejo W = -6 +2i lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas P(-6,2) sobre el plano. En este caso el complejo estará ubicado en el segundo cuadrante. Ver la figura

y

$z = -6 + 2i$

2

6 x

Ejemplo. El complejo Z = -2 +3i lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas P(-2,-3) sobre el plano. En este caso el complejo estará ubicado en el tercer cuadrante. Ver la figura

y

2 x

3

$z = -2 - 3i$

Ejemplo. El complejo W = 2 -4i lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas P(2,-4) sobre el plano. En este caso el complejo estará en el cuarto cuadrante. Ver la figura

y

2 x

4

$W = 2 - 4i$

Interpretación geométrica del módulo y el conjugado

Sea $Z = a+bi$ un número complejo. Entonces nos interesa calcular la longitud del segmento c que une al origen con el punto correspondiente a Z en el plano complejo (ver el dibujo).

y

$z = a + bi$

c

b

a x

De acuerdo a la disposición de los ejes y el segmento dado, se ha formado un triángulo rectángulo, con catetos a y b,e hipotenusa dada por c. Usando el Teorema de Pitágoras, se demuestra que la longitud de este segmento c, es igual a $\sqrt{a^2+b^2}$ y por lo tanto, igual al módulo del complejo Z. Esto es

$$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

y

$z = a + bi$

$\sqrt{a^2+b^2}$

b

a x

Por otro lado, si $Z = a + bi$ es un número complejo, su conjugado viene dado por $\overline{Z} = a - bi$. Luego el conjugado en forma geométrica se obtiene al reflejar el punto correspondiente a Z, alrededor del eje real (ver la figura)

y

$Z = a + bi$

x

$\overline{Z} = a - bi$

Suma geométrica de complejos

Podemos sumar dos números complejos en forma geométrica, mediante un algoritmo muy sencillo, llamado **Regla del paralelogramo**. Si se tienen dos complejos, digamos Z_1 y Z_2, entonces $Z_1 + Z_2$ se halla de la siguiente forma: a partir del punto representando a Z_1 se traslada el segmento que une al punto Z_2 con el origen. Al final de dicho segmento, se hallará el complejo $Z_1 + Z_2$, ver la figura.

y

$Z_1 + Z_2$

Z_2

Z_1

x

Vemos entonces que el complejo suma se halla en el extremo de la diagonal del paralelogramo con lados $|Z_1|$ y $|Z_2|$. Como la longitud de un lado en un triángulo es siempre menor que la suma de los otros dos lados, se obtiene la siguiente desigualdad para los módulos

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

Para hallar el **opuesto o negativo de un número complejo**, en forma geométrica, procedemos de la manera siguiente: Si $Z = a + bi$, entonces $-Z = -a - bi$ se ubica en el extremo del segmento de dirección opuesta a la de Z (ver el dibujo).

y

$Z = a + bi$

x

$-Z = -a - bi$

Para restar dos números complejos en forma geométrica, digamos $Z_1 - Z_2$, se ubica el primer complejo en el plano Z_1 y a continuación se coloca el segmento del opuesto de Z_2 en el punto correspondiente a Z_1. El complejo resultante $Z_1 - Z_2$ se ubica en el extremo final de Z_2 (ver el dibujo)

y

Z_1

$Z_1 - Z_2$

Z_2

x

Representación en la Forma Polar

Podemos asignarle a cada número complejo Z = a + bi en el plano, un radio vector, que conecta al punto con el origen. Este radio vector forma un ángulo con el eje real o de las X, que será denotado por θ. Ver la figura:

y

$z = a + bi$

θ

x

Nota: El ángulo θ se mide a partir del eje real y en sentido contrario a las agujas del reloj. el mismo puede venir expresado en unidades de grados o radianes.

De acuerdo a la disposición de los ejes y el radio vector, se ha formado un triángulo rectángulo, con catetos a y b,e hipotenusa dada por el radio vector. Usando el Teorema de Pitágoras, se demuestra que la longitud de este radio vector es$\sqrt{a^2+b^2}$ igual al módulo del complejo Z. Esto es

$$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

y

$z = a + bi$

$\sqrt{a^2+b^2}$

b

θ

a x

Usando conocimientos de trigonometría en el triángulo anterior, se demuestran las relaciones

$$a = |Z| cos\theta \tag{1.1}$$

$$b = |Z| sen\theta \tag{1.2}$$

Conocidas como **Fórmulas de cambio de coordenadas polares a cartesianas**. Cualquier ángulo α , tal que $sen\alpha = sen\theta$ y $cos\alpha = cos\theta$, se llama una **amplitud o argumento** para el complejo Z. Sabemos por trigonometía, que dos argumentos cualquiera de Z difieren en 2π. El argumento θ, tal que $-\pi \leq \theta \leq \pi$, se llama **amplitud o argumento principal de Z**. Está claro que si conocemos el argumento principal de Z y su módulo, entonces lo podemos representar geométricamente sin ambiguedad y además podremos obtener sus coordenadas cartesianas, de acuerdo a las fórmulas anteriores.

Se tiene entonces **la Representación de Z en Forma Polar**

$$Z = |Z|(cos\theta + i\ sen\theta) \tag{1.3}$$

Reciprocamente, si se conocen las coordenadas cartesianas de $Z = a+bi$, entonces $|Z|$ y θ se calculan de acuerdo a las fórmulas

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.4}$$

$$\theta = arctag\frac{b}{a} \tag{1.5}$$

llamadas **cambio de coordenadas cartesianas a polares**.

Ejemplo. Un número complejo en el primer cuadrante Hallar la Forma Polar del complejo Z = 2 + 2i, y dar su representación geométrica en el plano.

Solución En primer lugar, debemos calcular el módulo y el ángulo del complejo, para lo cual usamos las fórmulas **??**. Luego

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para calcular el ángulo, podemos usar la calculadora de mano

$$\theta = arctg\ 2/2 = arctg\ 1 = 45^o$$

Luego la representación polar de Z es

$$Z = 2\sqrt{2}(cos45^o + i\ sen45^o)$$

La representación de este número en el plano complejo aparece en la figura

y

$Z = 2 + 2i$

2

45^0

2 x

Ejemplo. Un número complejo en el segundo cuadrante Hallar la Forma Polar de W = -3 + 4i .

Solución. Calculamos el módulo y el ángulo usando **??**.

$$|W| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Calculamos el ángulo usando la calculadora, pero teniendo mucho cuidado, pues la calculadora sólo nos da ángulos θ en el intervalo $-90^o \leq \theta \leq 90^o$, al usar la tecla artg. El ángulo dado por la calculadora es

$$\theta' = arctg4/(-3) = -53{,}13^o$$

El argumento principal de W será

$$\theta = 180^o + \theta' = 126{,}87^o$$

La razón para hacer este cambio es que ambos ángulos tienen la misma tangente, ver el dibujo

y

$Z = -3 + 4i$

4

$126{,}87^0$

x

-3

Luego la forma polar de W es

$$W = 5(cos126{,}87^o + i\ sen126{,}87^o)$$

Ejemplo. Un número complejo en el tercer cuadrante. Hallar la forma polar de Z = -3 -4i .

Solución. Al igual que antes, calculamos su módulo y ángulo asociado.

$$|Z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Al tratar de buscar el ángulo, usando la calculadora, nuevamente se presenta el mismo inconveniente. Tenemos entonces

$$\theta' = arctg(-4)/(-3) = 53{,}13^o$$

Sabemos que este es un ángulo correspondiente al primer cuadrante, pero como la componente real de Z es negativa, al igual que su componente compleja, cualquier argumento de Z debe estar en el tercer cuadrante. Al ángulo hallado le sumamos 180^o para obtener un argumento positivo,

Luego

$$\theta = 180^o + \theta' = 233{,}13^o$$

por lo tanto, la forma polar de Z es

$$Z = 5(cos233{,}13^o + i\ sen233{,}13^o)$$

ver el dibujo

y

-3 $233{,}13^0$ x

-4

$Z = -3 - 4i$

Ejemplo.Un número complejo en el cuarto cuadrante. Hallar la Forma Polar de W = 1 -2i.

Solución. En primer lugar, calculamos su módulo y su ángulo

$$|W| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Al buscar el ángulo la calculadora nos da un argumento negativo, en el cuarto cuadrante (esta vez no se presentan problemas de conversión), y para llevarlo a la forma positiva le sumamos 360^o. Luego

$$\theta' = arctg(-2)/1 = -63{,}43^o$$

El argumento buscado es

$$\theta = 360^o + \theta' = 296{,}55^o$$

Por lo tanto, la forma polar de W es

$$W\sqrt{5}(cos 296{,}55^o + i\ sen 296{,}55^o)$$

ver el dibujo

y

$296{,}55^0$

1 x

-2

$Z = 1 - 2i$

Multiplicación y división en la forma polar

Supóngase que tenemos dos complejos en forma polar y queremos hallar el producto y el cociente de ellos. Sean $Z = |Z|(cos\theta + i\ sen\theta)$ y $W = |W|(cos\psi + i\ sen\psi)$ Podemos realizar la multiplicación de éstos números complejos en forma polar

$$Z \cdot W = |Z|(cos\theta + i\ sen\theta) \cdot |W|(cos\psi + i\ sen\psi) \quad = |Z||W|(cos\theta + i\ sen\theta) \cdot (cos\psi + i\ sen\psi) \quad = |Z||W|($$

después de usar un par de identidades trigonométricas muy conocidas, tenemos la fórmula siguiente:

$$Z \cdot W = |Z||W|\left(cos(\theta + \psi) + i\ sen(\theta + \psi)\right) \tag{1.7}$$

También se puede obtener una fórmula similar para la división en forma polar. Dicha fórmula viene dada por

$$\frac{Z}{W} = \frac{|Z|}{|W|}\left(cos(\theta - \psi) + i\ sen(\theta - \psi)\right) \tag{1.8}$$

ObservaciónPodemos dar ahora una interpretación geométrica del producto y la división de números complejos, basándonos en las fórmulas de arriba.

1) Cuando se multiplican dos complejos, el resultado es un número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos y cuya amplitud es igual a la suma de las amplitudes.

2) Cuando se dividen dos números complejos, el resultado es un número complejo cuyo módulo es igual al cociente de los módulos y cuya amplitud es igual a la diferecia de las amplitudes.

Ejemplo. Sea $Z = 2(cos95^o + i\ sen95^o)$ y $W = 3(cos26^o + i\ sen26^o)$. Entonces podemos calcular su producto, usando la fórmula **??**. Luego se tiene

$$Z \cdot W = 2 \cdot 3(cos(95^o + 26^o) + i\ sen(95^o + 26^o)$$

$$Z \cdot W = 6(cos121^o + i\ sen121^o)$$

Si queremos hallar el cociente de Z entre W, hacemos

$$\frac{Z}{W} = \frac{2}{3}(cos(95^o - 26^o) - i\ sen(95^o - 26^o)$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{2}{3}(cos69^o + i\ sen69^o)$$

1.4. Potencias y raices de números complejos.

La fórmula **??** puede ser utilizada para hallar la potencia n-ésima de un número complejo. Supongamos que $Z = |Z|(cos\theta + i\ sen\theta)$, y n es un entero positivo, entonces se obtiene

$$Z^n = |Z|^n(cos(n \cdot \theta) + i\ sen(n \cdot \theta)) \tag{1.9}$$

Esta relación, que se conoce con el nombre de Fórmula de Moivre, nos da un algoritmo bastante eficiente para hallar la potencia nésima de cualquier número complejo en forma polar.

Ejemplo. Sea $Z = 2(cos30^o + i\ sen30^o)$ y calcule la potencia de orden cinco de este número, es decir, Z^5.

Solución. Usamos la relación **??**

$$Z^5 = 2^5(cos(5 \cdot 30^o) + i\ sen(5 \cdot 30^o))$$

$$Z^5 = 32(cos150^o + i\ sen150^o)$$

Ejemplo. Calcular Z^6, donde $Z = 3 + 4\ i$.

Solución. En primer lugar, llevamos Z a la forma polar. Para hallar el módulo hacemos

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por otro lado, el ángulo viene dado por

$$\theta = arctg\ \frac{4}{3} = 53{,}13^o$$

Por lo tanto, tenemos a Z en forma polar

$$Z = 5(cos 53{,}13^o + i\ sen 53{,}13^o)$$

calculamos ahora Z^6 por intermedio de **??**

$$Z^6 = 5^6(cos(6 \cdot 53{,}13^o) + i\ sen(6 \cdot 53{,}13^o))$$

$$Z^6 = 15625(cos 318{,}78^o + i\ sen 318{,}78^o)$$

Finalmente, llevamos este resultado a la forma cartesiana

$$Z^6 = 15625(0{,}7522 - i\ 0{,}6590)$$

$$Z^6 = 11753{,}12 - 10296{,}12\ i$$

En este ejemplo se ha cometido un error de redondeo, al usar la calculadora de mano. El valor exacto de esta operación es $Z^6 = 11753 - 10296\ i$

Si Z es un número complejo tal que para algún n entero positivo se tenga

$$Z = W^n$$

donde W es otro número complejo, entonces se dice que W es una **raíz e-nésima de** Z. Esto lo denotamos por $W = Z^{1/n} = \sqrt[n]{Z}$. En los números reales, todo número posee una raíz de orden impar y dos raíces de orden par. En los complejos hay una mayor abundancia de raíces. Específicamente se tiene la siguiente propiedad

Propiedad
Todo número complejo tiene exactamente n raices n-ésimas.

Así por ejemplo 1 tiene 4 raices cuartas, pues

$$1^4 = i^4 = (-i)^4 = (-1)^4 = 1$$

Luego 1, -1, i, y -i son las raices cuartas de 1.

A continuación damos una fórmula para hallar las raices de un número complejo. Sea $Z = |Z|(cos\theta + isen\theta)$, entonces

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{1/n} = |Z|^{1/n}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \tag{1.10}$$

Ejemplo. Hallar todas las raices cúbicas de $Z = 8(cos30^o + isen30^o)$

Solución. Usando la fórmula **??** se tiene

$$Z^{1/3} = 8^{1/3}(cos\frac{30^o = 2k\pi}{3} + isen\frac{30^o + 2k\pi}{3})$$

con K = 0, 1, 2.

Sustituyendo estos valores de k en la expresión de arriba nos da las tres raices cúbicas

$$W_1 = 2(cos10^o + i\ sen10^o) \qquad k = 0$$

$$W_2 = 2(cos130^o + i\ sen130^o) \qquad k = 1$$

$$W_3 = 2(cos250^o + i\ sen250^o) \qquad k = 2$$

Si representamos gráficamente estas tres raices, veremos que se hallan sobre una circunsferencia con centro en el origen y radio 2 . Ademas todas ellas estan a la misma distancia de las otras: forman los vértices de un triángulo equilátero. Ver la figura

y

W_2

x

W_1

W_3

Ejemplo. Hallar todas las raices sextas de la unidad.

Solución. Tomamos la representación en forma polar de 1, la cual viene dada por

$$1 = 1 \cdot (cos 0^o + i\ sen 0^o)$$

luego hallamos las raices sextas por intermedio de **??**

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(cos\left(\frac{0^o + 2k\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\frac{0^o + 2k\pi}{6}\right)\right)$$

con k = 0,1,2,3,4, y 5.
Estos valores de k nos dan las seis raices

$$W_1 = 1(cos 0^o + i\ sen 0^o) \qquad k = 0$$

$$W_2 = 1(cos 60^o + i\ sen 60^o) \qquad k = 1$$

$$W_3 = 1(cos 120^o + i\ sen 120^o) \qquad k = 2$$

$$W_4 = 1(cos 180^o + i\ sen 180^o) \qquad k = 3$$

$$W_5 = 1(cos 240^o + i\ sen 240^o) \qquad k = 4$$

$$W_6 = 1(cos 300^o + i\ sen 300^o) \qquad k = 5$$

Si las graficamos en el plano complejo, vemos que ellas ocupan los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunsferencia de radio 1.

y

W_3 W_2

W_1 x

W_4

) W_5 W_6

Ejercicios.

1. Representar gráficamente en el plano complejo los siguientes números
   a) $Z = 2(cos60^o + i\ sen60^o)$
   b) $Z = 1/5(cos45^o + i\ sen45^o)$
   c) $Z = 16(cos120^o + i\ sen120^o)$
   d) $Z = 7(cos100^o + i\ sen100^o)$
   e) $Z = 4(cos400^o + i\ sen400^o)$
   f) $Z = 6(cos312^o + i\ sen312^o)$
   g) $Z = (1 + \sqrt{2})(cos - 60^o + i\ sen - 60^o)$

2. Expresar los siguientes números complejos en forma polar
   a) $Z = 3 + 4i$
   b) $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
   c)$Z = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$
   d) $Z = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$
   e) $Z = 1 - i$
   f) $Z = \sqrt{3} + i$
   g) $Z = (6 + i)(2 - i)$
   h) $Z = -7 - 7i$
   i) $Z = 5$

3. Usando la forma polar, efectúe las siguientes operaciones
   a) $(1+i)(\sqrt{3}+i)$
   b) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
   c) $\dfrac{4i}{2+i}$
   d) $(1+i)^4$
   e) $(\sqrt{3}+i)^7$
   f) $(1+i)^{-3}$
   g) $\dfrac{(\sqrt{2}+i)(1-i)}{5i}$

4. Calcular tods las raices cuartas del complejo $Z = 2+i$. Representarlas gráficamente.

5. Calcular las raices cúbicas de los siguientes números complejos
   a)$Z = 1-i$
   b) $Z = -1-i$
   c) $Z = \sqrt{3}+i$
   d) $Z = 1-\sqrt{3}i$
   e) $Z = 8$

6. Resuelva las ecuacións en números complejos

$$Z^3 + 4 = 5 + i$$

$$Z^4 + 2i = 6 + 3i$$

$$Z^5 + 16 = 0$$

7. Dibujar en el plano complejo la región delimitada por
   a) $|Z| \leq 3$
   b) $|Z-5| < 4$
   c) $Re(Z) < 1/2$
   d) $Im(Z) \geq 4$.

Capítulo 2

Factorización de Polinomios

2.1. Introducción.

Sabemos que todo número entero positivo se puede escribir como un produto de números primos. Un número entero es primo cuando sus únicos divisores positivos son 1 y el mismo número. Se acepta por convención que 1 no es primo. Por ejemplo el número 24 se puede escribir como un producto de números primos

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

En este caso se dice que 24 se ha factorizado completamente, pues no podemos ir más allá en este proceso. Los números 2 y 3 son primos y no admiten factorización posible.

En los polinomios encontramos propiedades de factorización, parecidas a las de los números enteros. Por ejemplo el polinomio $p(x) = x^2 - 1$, se puede factorizar de la forma siguiente

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

En general, si a es cualquier número real, entonces siempre se tiene la fórmula de factorización:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

Vemos entonces que este polinomio de grado dos, se puede factorizar como un producto de dos polinomios de grado uno. Lo ideal sería entonces que todo polinomio de grado n se pueda expresar como un producto de n polinomios lineales. Esta tarea se puede llevar a cabo usando los números complejos, como veremos en este capítulo. Sin embargo cuando trabajamos con polinomios reales, el problema de la factorización se puede convertir en un veradero rompecabezas por su complejidad.

2.2. Definiciones Básicas.

Factorizar un Polinomio

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

consiste en representarlo como

$$P(x) = Q_1(x)Q_2(x)\ldots Q_s(x)$$

donde cada $Q_i(X)$ es un polinomio de grado menor que el grado de $P(x)$.
En este capítulo, daremos los elementos teóricos necesarios para factorizar algunos polinomios, como por ejemplo el método de Ruffini. En general, el problema de la factorización puede ser muy dificil con lo cual se hace necesario recurrir a otras áreas de la matemática, como el Análisis Numérico, el cual es muy avanzado para ser estudiado a este nivel.
Cuando un polinomio no se puede factorizar, entonces se dice que es irreducible. El concepto de irreducibilidad depende del sistema numérico en el cual trabajemos. Así por ejemplo, el polinomio cuadrático

$$P(x) = x^2 + 1$$

es irreducible sobre los números reales, pero sin embargo es reducible sobre los números complejos.

Definición: Un Polinomio P(x) se dice que tiene a otro polinomio como factor o que P(X) se factoriza a través de Q(x), si al dividir $P(x)$ entre Q(x), obtenemos un resto igual a cero. En tal caso se tiene

$$P(x) = Q(x)M(x) \tag{2.1}$$

donde M(x) es otro polinomio.

Ejemplo. Sea $P(x) = x^2 - x - 6$. Entonces $Q(x) = x + 2$ es un factor de P(x), pues

$$P(x) = (x + 2)(x - 3)$$

Como el lector se habrá dado cuenta, si se desea constatar que un polinomio Q(X) dado es un factor de otro polinomio P(x), basta con hacer la división de los polinomios, siguiendo el método tradicional, y entonces el cociente de la división sera el factor M(x), que aparece en la deifnición anterior.

Ejemplo. Sean $P(x) = x^3 - x - 6$ y $Q(x) = x^2 + 1$ y hagamos la división de $P(x)$ entre $Q(x)$. Esto nos dará el siguiente resultado:

$$P(x) = x(x^2 + 1) - (2x + 6)$$

Luego, podemos afirmar que $Q(x) = x^2 + 1$ no es un factor de $P(x)$.

Observación. Cuando se tiene un polinomio P(x) factorizado en la forma

$$P(x) = Q(x)M(x)$$

donde el grado de $P(x)$ es mayor que los grados de $Q(x)$ y $M(x)$, entonces se dice que la factorización es **Propia o no trivial**. Así por ejemplo $P(x) = x^2 - x - 6$ posee la factorización propia

$$P(x) = (x + 2)(x - 3)$$

Nótese que tanto el grado de $(x+2)$, como el de $(x-3)$ es igual a uno y por lo tanto son menores que el grado de $P(x)$. Por otro lado, la siguiente es una factorización trivial, o impropia, del polinomio $P(x)$

$$P(x) = \frac{1}{6}(6x^2 - 6x - 36)$$

Este tipo de factorizaciones no son interesantes para nuestros propósitos, y de ahora en adelante cada vez que se hable de una factorización, debe entenderse que es propia.

Definición: Un polinomio P(x) de dice Irreducible si no se puede factorizar.

Ejemplo. Todo polinomio constante, de grado cero es irreducible.

Ejemplo. Todo polinomio lineal, de grado uno, es irreducible.

El concepto de irreducible depende del sistema númerico con el cual estemos trabajando. Es posible que un mismo polinomio sea irreducible, visto como un polinomio real, pero por otro lado sea reducible al considerarlo dentro de los números complejos. Por lo tanto, de ahora en adelante, para evitar confuciones, hablaremos de polinomio real y polinomio complejo, dependiendo del sistema númerico en el que se trabaje.

Ejemplo. El polinomio $P(x) = x^2 + 1$ puede ser visto como un polinomio real o complejo, pues sus coeficientes son números reales y por lo tanto números complejos. Ahora bien como polinomio real es irreducible, pues no se puede factorizar como el producto de dos polinomios reales. Por otro lado, él es reducible como polinomio complejo, pues

$$P(x) = (x - i)(x + i),$$

donde el símbolo i representa la unidad imaginaria.

Ejemplo. El polinomio $P(x) = x^6 - 1$ se puede factorizar

$$P(x) = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$$

Podemos continuar factorizando, para obtener

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

¿ Podremos continuar factorizando ? La respuesta es sí y no. Como polinomios reales no hay mas factorización posible. Como polinomios complejos si se puede factorizar aún mas. Pero dejemos esto para más adelante.

Un polinomio puede tener un factor repetido. Por ejemplo, se puede demostrar que el polinomio

$$P(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$$

se factoriza de la manera siguiente

$$P(x) = (x + 2)(x + 2)(x + 3)$$

Luego podemos escribir en forma compacta

$$P(x) = (x + 2)^2(x + 3)$$

Definición: Sea P(x) un polinomio y Q(x) un factor de P(x). Se llama Multiplicidad de Q(x), al número máximo de veces que Q(x) aparezca en la factorización de P(x).

Si Q(x) tiene multiplicidad mayor que 1, diremos que es un **factor múltiple**. En el ejemplo anterior, vimos que $(x+2)$ es un factor múltiple de P(x), con multiplicidad igual a 2. Mientras que $(x + 3)$ es un factor simple, o de multiplicidad igual a uno.

Definición: Sea $P(x)$ un polinomio. Una factorización del tipo

$$P(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \dots\ Q_s(x)^{m_s} \tag{2.2}$$

donde cada $Q_i(x)$ es irreducible de multiplicidad m_i, se llama factorización total de P(x).

Observación. Nótese que en (2) se debe tener la relación entre los grados

$$\text{grado } (P(x)) = m_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot n_2 + \cdots + m_s \cdot n_s \tag{2.3}$$

donde $n_i =$ grado $(Q_i(x))$, $1 \leq i \leq s$.

Ejemplo. Consideremos la factorización total del polinomio $P(x)$ del ejemplo anterior

$$P(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12 = (x+2)^2(x+3).$$

Vemos que en ella se verifica la relación **??**, pues

$$3 = 2 \cdot 1 + 1.$$

Ejemplo. El polinomio $P(x) = x^5 - 1$ se factoriza sobre $\mathbb{R}$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ambos factores son irreducibles de multiplicidad 1.

Ejemplo. El polinomio $P(x) = x^6 - 1$ se factoriza sobre R

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Los factores son irreducibles de multiplicidad 1. Más adelante, veremos la fac torización de éstos dos polinomios sobre los números complejos.

Ejercicios

1. Hallar los valores de a,b,c y d para que el polinomio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga los siguientes factores

   a) $x^2 + 2$ y $x^2 - 5$
   b) $x + 1,\ x - 3,\ x + 1$ y $x - 7$
   c) $x^3 + 1$ y $x + 5$
   d) $x^2 + x + 1$ con multiplicidad 2
   e) $x + 3$ con multiplicidad 3 y $x - 6$
   f) $x^2 + 6x - 3$ y $x^2 - 1$
   g) $(x - 3)^2$ y $x^2 + 3$
   h) $(x - 3)^3$ y $x + 5$
   i) $x^2 - 6,\ x + 6$ y $x + 7$
   j) $(x + 2)^4$
   k) $(x - 5)^4$

2. Factorizar los siguientes polinomios sobre los número reales

   a) $P(x) = x^4 - 16$
   b) $P(x) = x^3 + 27$
   c) $P(x) = 12x^5 - 12$
   d) $Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
   e) $S(x) = x^3 + 2x^2 + x$
   f) $T(x) = x^8 + x^4$
   g) $P(x) = x^3 - 27$
   h) $S(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
   i) $R(x) = 16x^4 - 1600$
   j) $T(x) = 2x^6 - 18$
   k) $Q(x) = x^2(x + 1) - 8x(x + 1) + 16(x + 1)$

3. Hallar el valor de k en el polinomio

$$P(x) = x^2 + kx + 25$$

para que tenga un factor de multiplicidad 2.

4. Factorizar sobre los números complejos

   a) $P(x) = x^2 + x + 1$
   b) $Q(x) = x^3 + 8$
   c) $S(x) = x^5 - 1$
   d) $T(x) = x^2 + ix - 1$
   e) $P(x) = x^2 + 2x + 3$
   f) $H(x) = x^4 - 2$

Respuestas

4.2 # 1

a) $a = 0$, $b = -3$, $c = 0$, $d = -10$.

b) $a = -8$, $b = 2$, $c = 32$, $d = 21$.

c) $a = 5$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 5$.

d) $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$.

e) $a = 3$, $b = -27$, $c = -135$, $d = -162$.

f) $a = 6$, $b = -4$, $c = -6$, $d = 3$.

g) $a = -6$, $b = 12$, $c = -18$, $d = 27$.

h) $a = -4$, $b = -18$, $c = 108$, $d = -135$.

i) $a = 13$, $b = 36$, $c = -78$, $d = -252$.

j) $a = 8$, $b = 24$, $c = 32$, $d = 16$.

k) $a = -20$, $b = 150$, $c = -500$, $d = 625$.

2

a) $P(x) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$.

b) $P(x) = (x+3)(x^2-3x+9)$.

c) $P(x) = 12(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

d) $Q(x) = (x^2+1)^2$.

e) $S(x) = x(x+1)^2$.

f) $T(x) = x^4(x^4+1)$.

g) $P(x) = (x-3)(x^2+3x+9)$.

h) $S(x) = (x+1)(x^2+1)$.

i) $R(x) = 16\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right)(x^2+10)$.

j) $Q(x) = (x-4)^2(x+1)$.

 # 3 $\qquad k = 10 \quad$ ó $\quad k = -10$

 # 4

a) $P(x) = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)$.

b) $Q(x) = (x+2)\left(x-1-\sqrt{3}\, i\right)\left(x-1+\sqrt{3}\, i\right)$

c) $S(x) = (x+1)(x-w)(x-w^2)(x-w^3)(x-w^4)$ donde

$w = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

d) $T(x) = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

e) $P(x) = \left(x+1-\sqrt{2}\, i\right)\left(x+1+\sqrt{2}\, i\right)$.

f) $H(x) = \left(x-\sqrt[4]{2}\right)\left(x+\sqrt[4]{2}\right)\left(x+\sqrt[4]{2}\, i\right)\left(x-\sqrt[4]{2}\, i\right)$.

2.3. Raices de Polinomios

Definición: Sea $P(x)$ un polinomio y c un número real o complejo. Diremos que el valor del polinomio en c es b, si al sustituir la variable x en $P(x)$, por c se obtiene el número b. Este valor de b se denotará por $P(c)$.

Ejemplo. Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 + 6$, entonces el valor de $P(x)$ en 1 es 8, pues

$$P(1) = 1^3 + 2(1)^2 + 6 = 1 + 1 + 6 = 8.$$

Ejemplo. El valor de $Q(x) = 7x^2 + x - 3$ en -10 es igual a 687, pues

$$Q(-10) = 7(-10)^2 - 10 - 3 = 700 - 10 - 3 = 687.$$

Definición: Un número c (real o complejo) se dice que es raíz de un polinomio $P(x)$, si $P(c) = 0$. Esto es, el valor de $P(x)$ en c es nulo.

También diremos que el polinomio $P(x)$ **se anula** en c.

Ejemplo. El polinomio $P(x) = x^2 + x - 6$ tiene a $x = 2$ y $x = -3$ como raices, pues

$$\begin{array}{lcl} P(2) & = & (2)^2 + 2 - 6 = 6 - 6 = 0\ , \\ P(-3) & = & (-3)^2 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0 \end{array}$$

¿Habrá otras raices aparte de estas dos?.

Ejemplo. El polinomio $P(x) = x^6 - 1$ tiene a $x = 1$ como raíz, pues

$$P(1) = 1^6 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Observación. Si c es una raíz de $P(x)$, entonces $P(x)$ se factoriza

$$P(x) = (x - c)\ Q(x).$$

En efecto, haciendo la división de polinomios entre $(x - c)$ se tiene

$$P(x) = (x - c)\ Q(x) + k \tag{2.4}$$

donde k es una constante.

Calculando el valor de ambos polinomios en c se tiene

$$\begin{array}{rcl} 0 = P(c) & = & (c - c)\ Q(c) + k \\ & = & 0 + k. \end{array}$$

De donde $k = 0$ y por lo tanto se cumple (**??**).

Dado un polinomio $P(x)$, se puede asociar a él una ecuación

$$P(x) = 0 \tag{2.5}$$

la cual se llama **Ecuación Polinomial** asociado a $P(x)$.

Entonces toda raíz de $P(x)$ es una solución de la ecuación polinomial (**??**). El problema de resolución der la ecuación (**??**) es equivalente al de factorización del polinomio $P(x)$.

Este problema en general es bastante difícil. La ecuación de grado 2, o ecuación cuadrática se resuelve mediante la fórmula conocida desde bachillerato. Las ecuaciones cúbicas y cuárticas se pueden resolver mediante fórmulas un poco complicadas y no las estudiamos en estas notas. Las ecuaciones de grado mayor o igual que 5 no se pueden resolver por fórmulas.

Veamos como se resuelve una ecuación cudrática.

Resolver

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.6}$$

Solución: sea $\Delta = b^2 - 4ac$ el **discriminante** de la ecuación. Entonces se presentan tres casos

I)	Si $\Delta > 0$	la ecuación tiene dos soluciones reales.
II)	Si $\Delta = 0$	la ecuación tiene única solución real.
III)	Si $\Delta < 0$	la ecuación tiene dos soluciones complejas.

En cualquiera de los tres casos el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ se factoriza

$$P(x) = a(x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2)$$

donde α_1 y α_2 son las soluciones de (**??**)

Ejemplo. Factorizar $P(x) = 2x^2 + x - 1$.

En primer lugar, resolvemos la ecuación

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

las soluciones vienen dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4}.$$

Luego hacemos $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = -1$
Por lo tanto

$$P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\ (x+1)$$

o bien

$$P(x) = (2x-1)\ (x+1)$$

lo cual nos da la factorización de $P(x)$.

Ejemplo. Factorizar $P(x) = x^2 + x + 1$.
Resolvemos la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0$$

lo cual nos produce

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

De aquí, obtenemos las raices complejas

$$\alpha_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Por lo tanto $P(x)$ se factoriza sobre los complejos.

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

A continuación damos una serie de hechos de carácter general sobre las raices de polinomios.

Teorema Si $P(x)$ es un polinomio real y z es una raíz compleja del mismo, entonces su conjugada $\bar{z}$ también es raíz.

Demostración. Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

tal que z es una raíz.

Luego

$$P(z) = 0$$

Tomando conjugadas en ambos lados se tiene y usando propiedades

$$\begin{aligned} 0 = P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= \overline{a_n}\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\bar{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n (\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0. \end{aligned}$$

Luego $\bar{z}$ también es raíz de $P(x)$.

Teorema Todo polinomio $P(x)$, real o complejo, de grado n, posee a la sumo n raíces sobre $\mathbb{C}$ (y por ende sobre $\mathbb{R}$).

Demostración. Supongamos que $P(x)$ tiene s raíces con $s > n$. Entonces podemos factorizar el polinomio, usando la fórmula (**??**) tantas veces como se desee

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_s) Q(x).$$

Comparando los grados en ambos lados, tenemos

$$n = s + \text{ grado } (Q(x))$$

lo cual es imposible, pues $s > n$.

Teorema (Teorema Fundamental del Algebra)
Todo polinomio $P(x)$ real o complejo, de grado n, posee una raíz en $\mathbb{C}$.

La Demostración de este teorema se debe al Matemático Karl Friedrich Gauss (1777-1850) y está fuera de los alcances de estas notas.

Problema 1. Construya un polinomio de segundo grado tal que la suma de sus raíces sean 6 y -2 y el término independiente sea igual a 24.

Solución. Sean $P(x) = ax^2 + bx + c$ el polinomio. Sabemos que el término independiente debe ser igual a 24 y por lo tanto $c = 24$. Expresando el polinomio en la forma factorizada se tiene

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + 24 = a(x-6)(x+2) \\ &= a(x^2 - 4x - 12) \\ &= ax^2 - 4ax - 12a. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} a &= a \\ b &= -4a \\ 24 &= -12a. \end{aligned}$$

De la última ecuación se tiene que $a = -2$. De la segunda ecuación sale $b = 8$. Luego el polinomio buscado es

$$P(x) = -2x^2 + 8x + 24.$$

Problema 2. Construya un polinomio mónico de segundo grado, tal que sus raíces sean 2 y -3.

Solución: Sea $P(x) = x^2 + ax + b$. Nótese que el coeficiente principal debe ser 1, pues el polinomio a buscar debe ser mónico.

Usando el ejercicio 1, podemos hallar directamente a y b. En efecto

$$\begin{array}{rcl} a & = & 2 - 3 = -1 \ , \\ y & & \\ b & = & 2 \cdot (-3) = -6 \end{array}$$

Luego el polinomio a calcular es

$$P(x) = x^2 - x - 6.$$

Problema 3. Construya un polinomio real de segundo grado con término principal igual a 3 y una de sus raíces complejas es $z = 1 + i$.

Solución. De acuerdo al teorema **??**, todo polinomio real que posea una raíz compleja z, también tiene a su conjugada $\bar{z}$ como raíz. Luego la factorización de $P(x)$ viene dada por

$$P(x) = 3(x - 1 - i)(x - 1 + i)$$

Multiplicando al lado derecho tendremos

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & 3(x-1)^2 + i(x-1) - i(x-1) - i^2 \\ & = & 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ & = & 3x^2 - 6x + 3 + 1 \\ & = & 3x^2 - 6x + 4 \end{array}$$

Luego el polinomio buscado es

$$P(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Problema 4. Construya un polinomio mónico de grado 3, tal que
$P(0) = 1$, $P(1) = 4$, $P(3) = 22$.

Solución. Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ el polinomio a calcular. Tenemos entonces las tres condiciones

$$\begin{aligned} P(0) &= c = 1 \\ P(1) &= 1 + a + b + c = 4 \\ P(3) &= (3)^3 + a(3)^2 + b(3) + c = 22 \end{aligned}$$

De la primera ecuación se tiene $c = 1$. Sustituyendo en la segunda y tercera ecuación nos da

$$\left\{ \begin{aligned} a + b &= 2 \\ 9a + 3b &= -6 \end{aligned} \right.$$

Resolviendo este sistema nos da $a = -2$ y $b = 4$. Luego el polinomio pedido es

$$P(x) = x^2 - 2x^2 + 4x + 1.$$

Problema 5. Construya un polinomio cuadrático mónico tal que tenga una raíz compleja de módulo igual a 5 y argumento igual a 30°.

Solución. Sea z una raíz del polinomio

$$P(x) = x^2 + ax + b = (x - Z)(x - \overline{Z}).$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned} z &= |z| \ (\cos\theta + i \ \operatorname{sen}\theta) \\ &= 5 \ (\cos 30° + i \ \operatorname{sen} 30°) \\ &= 5 \ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i \end{aligned}$$

Con esta información a la mano, podemos calcular a y b. Por lo tanto

$$\begin{aligned} a &= z + \bar{z} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i \right) + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i \right) = 5\sqrt{3} \\ b &= z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 25 \end{aligned}$$

luego el polinomio buscado es

$$P(x) = x^2 + 5\sqrt{3}x + 25.$$

Ejercicios

1. Sea $P(x) = x^2 + ax + b$ un polinomio cuadrático con raíces reales α_1 y α_2. Probar que se verifican las relaciones
$$\alpha_1 \cdot \alpha_1 = b \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 + \alpha_1 = a.$$

2. Construya un polinomio mónico de grado dos con las siguientes características
   a) La suma de las raíces es 5 y el término independiente es igual a 6.
   b) La suma de sus dos raíces es 11 y el término independiente es igual a 30.
   c) El término en x es igual al término independiente y tiene a 6 como una raíz.
   d) Tiene raíces complejas de módulo igual a 2 y argumento 60°.
   e) Tiene una sola raíz real y el término independiente es 25.

3. Evaluar los siguientes polinomios en $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$
   a) $P(x) = 2x^2 + 4x + 6$
   b) $P(x) = x^2 - 5x - 6$
   c) $P(x) = \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{2}$
   d) $P(x) = x^3 + x^2 + 5x$
   e) $P(x) = x^4 + x^2 + 1$
   f) $P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 6$

4. Sea $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ y $Q(x) = 6x^2 + x - 1$ calcular:
   a) $4 \cdot P(2)$
   b) $-Q(10) \cdot P(10)$
   c) $(P + Q)_(5)$
   d) $5 \cdot P(3) - 3 \cdot Q(5)$
   e) $[P(1)]^2 - 6$.

5. Hallar un polinomio mónico de grado 3, tal que $P(0) = 0$, $P(1) = 2$ y $P(2) = 3$.

6. Hallar el valor de k en el polinomio
$$P(x) = 2x^2 + kx + 1$$
tal que $x = 2$ sea una raíz.

7. Hallar el valor de m y n para que el polinomio

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + mx + n$$

sea divisible entre $(x-1)(x-2)$

8. Hallar el valor de k en el polinomio

$$P(x) = 2x^3 + 2x + k$$

tenga a $Q(x) = x^2 + 1$ como factor.

9. Hallar los valores de k , l y m para que el polinomio

$$P(x) = x^3 + kx^2 + lx + m$$

tenga a $1, 2$ y 3 como raíces

10. Determine un polinomio $P(x)$ de tercer grado, que tenga al polinomio $Q(x) = x^2 + x + 1$ como factor y tal que $P(1) = 0$ y $P(2) = 1$.

11. Determine un polinomio de cuarto grado con raíces reales 2 y -2 y siendo una de sus raíces complejas igual a $1 + i$.

12. Hallar un polinomio de cuarto grado que tenga a $x = 2$ como raíz de multiplicidad 3, término principal igual a 3 y término constante igual a 1.

Respuestas

4.3 # 2

a) $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

b) $P(x) = x^2 - 11x + 30$.

c) $P(x) = x^2 - \frac{36}{5}x + \frac{36}{5}$.

d) $P(x) = x^2 + 2x + 4$.

e) $P(x) = x^2 - 10x + 25$.

3

2.4. El Método de Ruffini

En esta sección continuamos estudiando el problema de la factorización de polinomios. De acuerdo al Teorema Fundamental del Algebra, todo polinomio $P(x)$ de grado n, real o complejo, posee una raíz compleja α_1. Luego podemos asegurar que existe otro polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = (x - \alpha_1)Q(x).$$

De la misma manera, $Q(x)$ tiene una raíz compleja α_2 y por lo tanto existe $Q'(x)$ tal que

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)Q'(x).$$

Continuendo este proceso, después de n pasos se tiene que

$$P(x) \quad = \quad a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n) \tag{2.7}$$

Cuando el polinomio $P(x)$ se ha descompuesto de esta manera, se dice que se ha **factorizado totalmente** o que (**??**) es una **factorización completa de** $P(x)$.

Queda claro entonces que el problema de factorizar un polinomio se resuelve cuando se conocen todas sus raíces. De allí la importancia de las raíces dentro de la teoría.

El método más sencillo para hallar raíces viene dado por el siguiente algoritmo

Algoritmo. Sea $P(x)$ un polinomio. Entonces un valor a (real o complejo) es raíz de $P(x)$ sí y sólo sí $P(x)$ es divisible entre $x - a$

Demostración. Si $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0 \cdot Q(a) = 0.$$

De donde se sigue que a es una raíz.
Por otro lado, si a es raíz de $P(x)$ se tendra que $P(a) = 0$ y luego $P(x)$ se factoriza $P(x) = (x - a)Q(x)$, como quedó demostrado en la observación de la página 39.

El algoritmo sirve para probar si un valor a es o no es raíz de $P(x)$, pero no nos dice nada acerca de la forma como a se calcula. En general este es un problema muy difícil. Sin embargo tenemos un criterio para determinar las raíces racionales de un polinomio real con coeficientes enteros, debido a K.F. Gauss, el cual damos sin demostración.

Teorema Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Entonces si $\frac{p}{q}$ es una raíz entera de $P(x)$, se tiene que p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Veamos como se emplea este criterio, a la luz del siguiente ejemplo

Ejemplo. Sea $P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$.
Entonces las posibles raíces racionales de dicho polinomio son de la forma

$$\frac{p}{q}$$

siendo p un divisor de 24 y q un divisor de 1. Como los únicos divisores de 1 son 1 y -1, las raíces racionales (si existen) serán todas enteras.
Los divisores enteros de -24 son

$$\pm 1\ ,\ \ \pm 2\ ,\ \ \pm 3\ ,\ \ \pm 4\ ,\ \ \pm 6\ ,\ \ \pm 8\ ,\ \ \pm 12\ ,\ \ \pm 24$$

Para cada uno de estos valores α, hacemos la división de $P(x)$ entre $(x - \alpha)$. Si obtenemos un resto nulo, la división es exacta y entonces α será una raíz.
Así pues, vemos que $-1, 2, 3$ y 4 son las raíces buscadas y por lo tanto

$$P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x+1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Observación. El proceso de factorización puede hacerse muy lento debido a la gran cantidad de divisiones de polinomios involucradas (16 en el ejemplo!).
A continuación daremos un algoritmo de división entre $(x - a)$ el cual requiere de pocos pasos

División entre (x-a) (**Método de Ruffini**).

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Entonces el cociente y el resto de la división de $P(x)$ entre $x - a$ vienen dados por

$$\begin{aligned} Q(x) &= b_{n-1}x^n - 1 + \cdots + b_1 x + b_0 \\ R(x) &= k \end{aligned}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} b_{n-1} & = & -aa_n \\ b_{n-2} & = & a_{n-1} + ab_{n-1} \\ \vdots & & \\ b_i & = & a_{i+1} + ab_{i+1} \\ \vdots & & \\ b_0 & = & a_1 + ab_1 \\ k & = & a_0 + ab_0. \end{array}$$

Una forma muy práctica de hallar estos coeficientes viene dada en forma de arreglo

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & & & & \\ a & & a \cdot a_n & \cdots & & \\ \hline & a_n & b_{n-1} & & b_0 & k \end{array}$$

En la primera fila colocamos los coeficientes de $P(x)$. La segunda y tercera fila se van formando simultáneamente de la siguiente manera:

1. Todo elemento de la tercera fila es igual a la suma de los dos elementos de la primera y segunda fila que están sobre él.

2. Todo elemento de la segunda fila es igual a a, multiplicado por el elemento de la tercera fila en la posición anterior a la de él.

Ejemplo. Sea $P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$.
Hallar el cociente y el resto de la división de $P(x)$ entre $(x - 4)$.

En primer lugar, colocamos los coeficientes de $P(x)$ en la primera fila y luego vamos generando la segunda y tercera fila, de acuerdo al algoritmo:

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 1 & -8 & 17 & 2 & -24 \\ & & & & & \\ 4 & & 4 & -16 & 4 & 24 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

Luego se tendrá

$$P(x) = (x^3 - 4x^2 + x + 8)(x - 4)$$

Ejemplo. Sea $P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$.
Hallar el cociente y el resto de la división de $P(x)$ entre $(x + 4)$.

Al igual que antes colocamos en la primera fila los coeficientes de $P(x)$ y comenzamos a aplicar el algoritmo.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -8 & 17 & 2 & -24 \\
 & & & & & \\
-4 & & -4 & 48 & -260 & 1032 \\
\hline
 & 1 & -12 & 65 & -258 & 1008
\end{array}$$

Luego se tiene

$$P(x) = (x^3 - 12x^2 + 65x + -258)(x + 4) + 1008.$$

Veremos ahora, mediante una serie de ejemplos, como se puede factorizar totalmente un polinomio usando el Método de Ruffini. El algoritmo lo aplicaremos en forma repetida a fín de ahorrar algunos pasos en el proceso.

Ejemplo. Sea $P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$.
En primer lugar observamos que el término principal del polinomio es 1 y, por lo tanto las raíces racionales serán todos números enteros. Analizamos el algoritmo de Ruffini para los divisores de 12, los cuáles son ± 1 , ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12. Comenzamos a trabajar con estos números siguiendo un orden creciente en valor absoluto.

Vemos que tenemos éxito para -2. En efecto, haciendo las correspondientes divisiones nos da

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 7 & 16 & 12 \\
 & & & & \\
-2 & & -2 & -10 & -12 \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & 0 \\
 & & & & \\
-2 & & -2 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 0 &
\end{array}$$

Luego la factorización buscada es

$$P(x) = (x+2)(x+2)(x+3)$$

Ejemplo. Factorizar $P(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$.
Nuevamente hacemos la observación de que se trata de un polinomio mónico (término principal igual a 1) y por lo tanto las posibles raíces racionales deben ser enteras. Buscamos entre los divisores de 30, los cuáles son ± 1 , ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 15 y ± 30.

Aplicando el algoritmo en orden creciente, vemos que hay raíces en $x = 1$, 2 y 3. Esto es

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -11 & 41 & -61 & 30 \\
1 & & 1 & -10 & 31 & -30 \\
\hline
 & 1 & -10 & 31 & -30 & 0 \\
2 & & 2 & -16 & 30 & \\
\hline
 & 1 & -8 & 15 & 0 & \\
3 & & 3 & -15 & & \\
\hline
 & 1 & -5 & 0 & &
\end{array}$$

Luego

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$$

Ejemplo. Factorizar $P(x) = 4x^4 + 16x^3 + 23x^2 + 14x + 3$.
Buscamos las posibles raíces racionales de $P(x)$. Estas son de la forma $\frac{p}{q}$, donde p divide a 3 y q divide a 4, es decir

$$\frac{p}{q} = \pm 1 \,,\ \pm 3 \,,\ \pm \frac{1}{2} \,,\ \pm \frac{3}{2} \,,\ \pm \frac{1}{4},\ \pm \frac{3}{4}$$

Aplicando el algoritmo en este orden nos da

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 16 & 23 & 14 & 3 \\
-1 & & -4 & -12 & -11 & -3 \\
\hline
 & 4 & 12 & 11 & 3 & 0 \\
-1 & & -4 & -8 & -3 & \\
\hline
 & 4 & 8 & 3 & 0 & \\
-\frac{1}{2} & & -2 & -3 & & \\
\hline
 & 4 & 6 & 0 & & \\
-\frac{3}{2} & & -6 & & & \\
\hline
 & 4 & 0 & & &
\end{array}
$$

Luego la factorización buscada es

$$P(x) = (x+1)^2(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$$

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$4x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 2x + 5 = 0$$

Buscamos las soluciones de la ecuación usando el Método de Ruffini para hallar las raíces del polinomio $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 2x + 5$.
Las raíces racionales son de la forma $\frac{p}{q}$, donde p divide a 5 y q divide a 4. Estas son de la forma

$$\frac{p}{q} = \ \pm\ 1\ ,\ \pm\ 5\ ,\ \pm\ \frac{1}{2}\ ,\ \pm\ \frac{1}{4}\ ,\ \pm\ \frac{5}{2}\ ,\ \pm\ \frac{5}{4}$$

Aplicando el algoritmo en este orden nos da

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 4 & 4 & -15 & 2 & 5 \\
1 & & 4 & 8 & -7 & -5 \\
\hline
 & 4 & 8 & -7 & -5 & 0 \\
1 & & 4 & 12 & 5 & \\
\hline
 & 4 & 12 & 5 & 0 & \\
-\frac{1}{2} & & -2 & -5 & & \\
\hline
 & 4 & 10 & 0 & & \\
-\frac{5}{2} & & -10 & & & \\
\hline
 & 4 & 0 & & &
\end{array}
$$

Entonces las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = 1 \ , \quad x_2 = -\frac{1}{2} \ , \quad x_3 = -\frac{5}{2}$$

Ejemplo. Factorizar el polinomio

$$Q(x) = 375x^4 + 250x^3 - 45x^2 - 36x - 4$$

Buscamos las raíces racionales usando el método de Ruffini, las cuales son de la forma $\frac{p}{q}$, con p un divisor de 4 y q divisor de 375. Una lista completa de todas las posibilidades es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} \ = \ & \pm\, 1 \ , \ \pm\, 2 \ , \ \pm\, 4 \ , \ \pm\, \frac{1}{3} \ , \ \pm\, \frac{2}{3} \ , \ \pm\, \frac{4}{3} \ , \ \pm\, \frac{1}{5} \ , \ \pm\, \frac{2}{5} \ , \ \pm\, \frac{4}{5} \ , \\
& \pm\, \frac{1}{25} \ , \ \pm\, \frac{2}{25} \ , \ \pm\, \frac{4}{25} \ , \ \pm\, \frac{1}{125} \ , \ \pm\, \frac{2}{125} \ , \ \pm\, \frac{4}{125} \ , \\
& \pm\, \frac{1}{15} \ , \ \pm\, \frac{2}{15} \ , \ \pm\, \frac{4}{15} \ , \ \pm\, \frac{1}{75} \ , \ \pm\, \frac{2}{75} \ , \ \pm\, \frac{4}{75} \ , \\
& \pm\, \frac{1}{375} \ , \ \pm\, \frac{2}{375} \ , \ \pm\, \frac{4}{375}
\end{aligned}
$$

Aplicando el algoritmo nos da

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 375 & 250 & -45 & -36 & -4 \\
-\frac{2}{3} & & -250 & 0 & 30 & 4 \\
\hline
 & 375 & 0 & -45 & -6 & 0 \\
\frac{1}{5} & & -75 & 15 & 6 & \\
\hline
 & 375 & -75 & -30 & 0 & \\
-\frac{1}{5} & & -75 & 30 & & \\
\hline
 & 375 & -150 & 0 & & \\
-\frac{2}{5} & & 150 & & & \\
\hline
 & 375 & 0 & & &
\end{array}
$$

Luego el polinomio $Q(x)$ se factoriza:

$$Q(x) = 375 \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(x - \frac{2}{5}\right).$$

Ejemplo. Factorizar el polinomio

$$P(x) = x^4 - 3x^2 - 6x + 8.$$

Aplicando el algoritmo de Ruffini, obtenemos el siguiente resultado

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x^2 + 3x + 4)$$

El último factor $Q(x) = x^2 + 3x + 4$ es irreducible sobre los números reales.
Si se nos pide dar la factorización completa de $P(x)$ sobre $\mathbb{C}$, entonces buscamos las raíces complejas de $Q(x)$, usando la formula conocida.
Resolvemos entonces

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

De donde

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-5}}{2}$$

Luego hay dos raíces complejas

$$\alpha_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\, i \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\, i$$

Por lo tanto la factorización completa es

$$P(x) = (x-1)(x-2)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\ i\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\ i\right)$$

Ejercicios

1. Empleando el Método de Ruffini, expresar el cociente y el resto de las siguientes divisiones

   a) $(5x^3 + x^2 + x + 6) \div (x - 4)$
   b) $(4x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 4) \div (x + 2)$
   c) $(2x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 6) \div (x - 3)$
   d) $(8x^6 + 4x^4 + 3x^3 - 18x^2 + 5x) \div (x - 5)$
   e) $(x^7 + x^6 - 5x^4 + 10x^3 - 4x^2 + 8) \div (x + 2)$
   f) $(4x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 14x + 3) \div (x + \frac{1}{2})$
   g) $(x^5 - x^4 + x^3 + 10x^2 + +12x - 6) \div (x + 3)$
   h) $(x^6 - x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1) \div (x - 2)$
   i) $(6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1) \div (x + 5)$
   j) $(x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 18x + 4) \div (x - 1)$
   k) $(x^8 + 2x^6 + x^5 - x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 1) \div (x + 1)$
   l) $(x^7 + x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 3x - 15) \div (x + 2)$

2. Aplicando el Método de Ruffini, factorizar:

   a) $P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$
   b) $P(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$
   c) $Q(t) = t^6 - 21t^4 + 86t^2 - 64$
   d) $R(s) = s^6 - 30s^4 + 129s^2 - 100$
   e) $P(x) = x^3 - 17x - 15$
   f) $P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$
   g) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$
   h) $S(x) = 3x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 40x + 12$
   i) $T(x) = 3x^3 + 8x^2 - 5x - 6$
   j) $P(s) = 36s^4 - 144s^3 + 161s^2 - 69s + 15$
   k) $P(x) = 6x^4 - 31x^3 + 48x^2 - 29x + 6$
   l) $P(x) = 27x^3 + 36x^2 - 3x - 4$

m) $Q(x) = 16x^4 + 64x^3 + 56x^2 - 16x - 15$

n) $T(s) = 4s^4 - \frac{8}{3}s^3 - \frac{11}{9}s^2 + \frac{11}{9}s - \frac{2}{9}$

ñ) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6$

o) $K(x) = x^5 - 2x^3 - 6x^2 + x + 6$

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^5 + 3x^4 + x^3 - 9x^2 - 20x - 12 = 0$

b) $x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 - 4x + 16 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$

e) $x^6 - 9x^4 + 24x^2 - 16 = 0$

f) $9x^3 - 36x^2 + 29x - 6 = 0$

g) $x^3 - 23x^2 + 167x - 385 = 0$

h) $x^3 - 31x^2 + 311x - 1001 = 0$

i) $2x^4 - 39x^3 + 225x^2 - 433x + 165 = 0$

j) $x^4 - 58x^3 + 708x^2 - 2758x + 2107 = 0$

k) $x^6 - 51x^5 + 450x^4 + 1720x^3 + 3360x^2 - 3312x + 1312 = 0$

Respuestas a los Ejercicios

4.4 # 1

a) Cociente $Q(x) = 5x^2 + 21x + 85$	$R =$	346
b) Cociente $Q(x) = 4x^3 + 17x^2 + 70x + 275$	$R =$	1104
c) Cociente $Q(x) = 2x^4 + 6x^3 + 21x^2 + 59x + 177$	$R =$	537
d) Cociente $Q(x) = 8x^5 + 40x^4 + 204x^3 + 1023x^2 + 5097x + 25490$	$R =$	127450
e) Cociente $Q(x) = x^6 - x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 60x + 120$	$R =$	-232
f) Cociente $Q(x) = 4x^3 + 14x^2 + 25x + \frac{3}{2}$	$R =$	$\frac{9}{4}$
g) Cociente $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 29x + 99$	$R =$	-303
h) Cociente $Q(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 9x + 23$	$R =$	45
i) Cociente $Q(x) = 6x^3 - 35x^2 + 177x - 890$	$R =$	4451
j) Cociente $Q(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x - 16$	$R =$	-12
k) Cociente $Q(x) = x7 - x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3 + 6x^2 - 13x + 15$	$R =$	-14
l) Cociente $Q(x) = x^6 - x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 31x + 65$	$R =$	-145

4.4 # 2

a) $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

b) $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$

c) $Q(t) = (t-1)(t+1)(t-2)(t+2)(t-4)(t+4)$

d) $R(s) = (s-1)(s+1)(s-2)(s+2)(s-5)(s+5)$

e) $P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)$

f) $P(x) = (x+1)(x-2)(x-3)(x-4)$

g) $P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x-4)$

h) $S(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(x-1)(x-2)(x-3)$

i) $T(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x+3)(x-1)$

j) $P(s) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

k) $P(x) = 6(x-1)(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$

l) $P(x) = 27\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right)$

m) $Q(x) = 16\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

n) $T(s) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

ñ) $P(x) = (x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$

o) $K(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$

4.4 # 3

a) Solución $x=-1$, $x=2$, $x=-2$, $x=z$, $x=\bar{z}$, donde z es raíz de $x^2+2x+3=0$.

b) Solución $x=1$, $x=2$, $x=-2$, $x=z$, $x=\bar{z}$, siendo z una raíz de $x^2+3x+4=0$.

c) Solución $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=3$.

d) Solución $x=1$, $x=-1$, $x=3$.

e) Solución $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$.

f) Solución $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{3}$, $x=3$.

g) Solución $x=7$, $x=5$, $x=11$.

h) Solución $x=3$, $x=5$, $x=11$, $x=\frac{1}{2}$.

i) Solución $x=43$, $x=7$, $x=1$.

j) Solución $x=2$, $x=41$.

Capítulo 3

Problemas de Aplicaciones

3.1. Como resolver un Problema

El desarrollo de la matemática ha estado motivado en gran parte por las posibilidades de aplicaciones a la vida del hombre. Cualquier problema que nos podamos plantear, en donde intervengan mediciones o cantidades de cosas, se puede expresar en el lenguaje de la matemática. Uno de los objetivos de éstas notas, es el de dar los elementos esenciales de la modelización en matemáticas, o lo que es lo mismo, traducir el problema enunciado en palabras en el idioma español, a una relación entre variables que represente números reales. Una vez establecida con toda claridad las ecuaciones en estas variables, podemos aplicar los conocimientos teóricos aprendidos para resolver las ecuaciones.
Los Problemas de Palabras ofrecen ciertas dificultades a los estudiantes, debido a varios factores, algunos de ellos ajenos al campo de las matemáticas. Es importante tener en primer lugar un buen dominio del idioma, tener una cabal comprensión de todas las palabras para estructurar un cuadro de la situación planteada en nuestra mente, lo mas claro posible. En segundo lugar, hay que saber razonar logicamente para poder determinar que cosa se nos pide (Indagar cual es la incógnita del problema). Es muy importante también en todo este proceso el saber establecer asociaciones entre ideas en Español e ideas en Matemáticas.

Finalmente, hay que tener un buen dominio de las técnicas a emplear, como por ejemplo la resolución de ecuaciones, la geometría, el cálculo,...etc.

Podemos hacer un resumen entonces de los pasos a seguir cuando resolvemos un Problema de palabras:

1. Comprensión del Problema en Español.

2. Razonar bien para determinar las incógnitas.

3. Traducir del Español a la Matemática.

4. Resolver la ecuaciones usando los conocimientos de Matemáticas.

Pensamos que la mejor manera de dominar la técnica de la resolución de problemas, es tratando de aprender siguiendo los ejemplos resueltos.

3.2. Problemas de Economía

En todos los problemas que siguen, empleamos las siguientes fórmulas de la Economía.

Fórmula de la ganancia (Para un comerciante)

$$G = C.n.T$$

donde:
G = La ganancia o utilidad obtenida al vender n cosas.
n = número de cosas a vender.
T = Porcentaje de ganancia.
C = Costo de cada cosa.

Fórmula de la ganancia (Para un productor)

$$G = I - C$$

donde:
G = ganancia por la venta
I = ingresos por los volúmenes de venta
C = costos de produccción

Fórmula del precio de venta

$$P = C + G,$$

donde:
P = el precio de venta de un artículo o bien

C = el costo al comerciante
G = la ganancia del comerciante.

Problema 1. Utilidad de un comerciante. Un comerciante compró 150 televisores a un costo de Bs. 100.000 por unidad. ¿ Cuál será la ganancia obtenida al vender todos los televisores , si se tiene un porcentaje de utilidad de 25 % en cada televisor ?

Solución Se tienen los siguientes datos:

n = número de televisores = 150
T = porcentaje de ganacia = 0.25
C = costo de cada televisor = 100.000
De acuerdo a las fórmulas vistas, la ganancia total será

$$G = C \cdot n \cdot T = 150 \cdot 100{,}000 \cdot 0{,}25 = 3{,}750{,}000.$$

luego la ganancia del comerciante será de Bs 3.750.000.

Problema 2. Precio de venta de una nevera. Un comerciante compró 75 neveras a Bs. 300.000 cada una ¿ A que precio debería venderlas para tener una ganancia total de Bs. 3.000.000 ?

Solución Sea P el precio de venta de cada nevera. Luego el precio de venta de las 75 neveras será $75P$. Sea C el costo de cada nevera. Entonces tenemos la ecuación

$$75P = 75C + G$$

Sustituyendo cada término por su valor nos queda

$$75P = 75 \cdot (300{,}000) + 3{,}000{,}000 = 25{,}500{,}000$$

de donde

$$P = \frac{25{,}000}{75} = 340{,}000$$

luego el precio de venta de cada nevera es de Bs. 340.000.

Problema 3. El costo de una tostadora. Un comerciante compró 80 tostadoras. De estas, vendió 30 con una ganancia del 25 % y el resto con una ganancia del 35 % ¿ Cuál es el costo de cada tostadora, si el comerciante obtuvo una ganancia de Bs. 1.200.000 por la venta de todas ellas ?

Solución Sea C el costo de cada tostadora. La ganancia obtenida en 30 de ellas fue

$$C \cdot 30 \cdot 0{,}25$$

La ganancia obtenida en la venta de las 50 restantes fue

$$C \cdot 50 \cdot 0{,}35$$

Sumando ambas ganancias, tenemos

$$1{,}200{,}000 = C \cdot 30x0{,}25 + C \cdot 50 \cdot 0{,}35$$

Despejando C en esta ecuación nos da

$$C = \frac{1{,}200{,}000}{30 \cdot 0{,}25 + 50 \cdot 0{,}35} = \frac{1{,}200{,}000}{25} = 48{,}000$$

Luego el costo de cada tostadora es de Bs 48.000.

Problema 4. Venta de computadoras. El Almacén Chévere compró 150 computadoras. De estas vendió 25 con una ganancia de 30 % sobre el costo de cada una. ¿ En cuanto deberá vender las restantes para tener una ganancia total del 40 % ?

Solución Sea C el costo de cada computadora. La ganancia en la venta de las 25 computadoras fue

$$G_1 = C \cdot 25 \cdot 0{,}3$$

Si X es el porcentaje de ganancia en la venta de las restantes computadoras, entonces la ganancia al vender 125 computadoras fue

$$G_2 = C \cdot 125 \cdot X$$

La suma de ambas ganancias, debe ser igual a la ganancia total, la cual es

$$C \cdot 150 \cdot 0{,}40 = C \cdot 25 \cdot 0{,}3 + C \cdot 125X$$

Podemos cancelar C en todas partes para obtener

$$60 = 7{,}5 + 125X$$

de donde

$$X = \frac{60 - 7{,}5}{125} = 0{,}42$$

Luego el Almacén deberá vender las restantes computadoras con una ganancia del 42 %.

Problema 5. Venta de ganado. El Señor Dávila vendió 300 reses en dos lotes y obtuvo Bs. 44.250.000 por la venta de todas ellas. Si el primer lote de 75 reses fue vendido en Bs. 9.375.000 ¿Cuál fue el aumento del precio de venta de cada res del segundo lote ?

Solución El precio de venta de cada res del primer lote fue

$$\frac{9{,}375{,}000}{75} = 125{,}000Bs$$

Sea P el aumento de precio al vender el segundo lote. Entonces el producto de la venta de los dos lotes es

$$44{,}250{,}000 = 9{,}375{,}000 + (125{,}000 + P)225$$

Resolviendo nos queda

$$(125{,}000 + P)225 = 34{,}875{,}000$$

Esto es

$$125{,}000 + P = 155{,}000$$

De donde $P = 30.000$. Es decir, cada res del segundo lote se vendió con un aumento de Bs. 30.000 sobre el precio de venta del primer lote.

Problema 6. Compra de azúcar. Un Abastos compró 300 sacos de azúcar, de los tipos blanca y morena, a un costo de Bs. 262.250. Si el azúcar blanca costó Bs. 850 el saco y la morena Bs. 900 el saco ¿ Cuántos sacos compró el Abastos de cada una ?

Solución Sea X la cantidad de sacos de azúcar blanca. Luego 300 - X es la cantidad de sacos de azúcar morena. Entonces el costo total viene dado por

$$900X + (300 - X)850 = 262{,}250$$

Aquí 900X representa el costo de X sacos de azúcar blanca, y (300 -X) 850 representa el costo de 300 - X sacos de azúcar morena.
Procedemos ahora a despejar X en la ecuación de arriba. Esto nos da

$$900X - 850X = 262{,}250 - 300x850$$

$$50X = 7250$$

$$X = 145$$

Por lo tanto, se compraron 145 sacos de azúcar blanca y 155 sacos de azúcar morena.

Problema 7. Venta de boletos para los toros. Una Plaza de Toros tiene 3600 localidades de sol y 1700 de sombra. Si la entrada a sol vale dos tercios del valor a sombra ¿ Que precio deberá tener cada localidad para recaudar Bs. 5.166.000 a plaza llena ?

Solución Sea X el costo de una entrada a sombra. El total de la recaudación a plaza llena será

$$3{,}600\frac{2}{3}X + 1700X = 5{,}166{,}000$$

$$2400X + 1700X = 5{,}166{,}000$$

$$4100X = 5{,}166{,}000$$

De donde

$$X = \frac{5{,}166{,}000}{4{,}100} = 1260$$

Por lo tanto el precio de venta de una entrada a sombra será Bs. 1260 y el precio de una entrada a sol será Bs.840.

Problema 8. Ingresos de un vendedor. Un vendedor de una compañía de víveres gana Bs. 60.000 mensuales mas una comisión del 5 % sobre las ventas.
¿ Cuánto será la venta mensual del vendedor para tener un ingreso de Bs. 150.000 al mes ?

Solución sea X la venta del mes. Luego el ingreso mensual del vendedor se calcula

$$0{,}05X + 60{,}000 = 150{,}000$$

De donde

$$0{,}05X = 150{,}000 - 60{,}000$$

O sea

$$X = \frac{90{,}000}{0{,}05} = 1{,}800{,}000$$

Por lo tanto el vendedor deberá vender Bs. 1.800.000 mensuales para tener Bs. 150.000 de ingresos.

Problema 9.Financiamiento de un vehículo. Francisco va a comprar un vehículo nuevo. El precio de venta es de Bs. 7.000.000. Francisco dará una cantidad inicial de dinero y el resto lo financia la compañía mediante un pagaré a un año, con un interés del 40 %. ¿ Que cantidad de dinero deberá dar de inicial, para pagar un millón de Bolívares en intereses ?

Solución Sea X la cantidad inicial de dinero aportada por el comprador. Entonces el costo total del vehiculo para Francisco es (en millones)

$$7 + (7 - X)0{,}40 = 8$$

donde $(7 - X)0{,}40$ representa la cantidad a pagar por los intereses. Luego

$$7 + 7 \cdot 0{,}40 - 8 = 0{,}40X$$

de donde

$$X = \frac{1{,}8}{0{,}40} = 4{,}5$$

Luego Francisco debe pagar Bs. 4.500.000 de inicial.

Problema 10. Sueldo por horas de trabajo. Un maquinista de una compañía constructora gana Bs. 50.000 mensual mas una comisión de Bs. 700 por cada hora de trabajo al frente de la máquina. Trabajando durante un mes en la construcción de una vía agrícola se ganó Bs. 108.100. Calcule el número de horas trabajadas por el maquinista.

Solución Sea X el número de horas trabajadas en un mes. Entoces el ingreso mensual del maquinista viene dado por

$$700X + 50{,}000 = 108{,}100$$

Esto es

$$700X = 58{,}100$$

$$X = 83.$$

Luego el maquinista trabajó durante 83 horas.

Problema 11. Producción Agrícola. Una parcela de 3 hetáreas se va a cultivar para producir ajos y papas. El rendimiento de la papa es de Bs. 80 por m^2, mientras que el rendimiento del ajo es de Bs. 250 por m^2. Sin embargo, el cultivo del ajo ofrece mas riesgos que el de la papa. ¿ Como deberán dividirse los cultivos para obtener una ganancia de Bs. 3.165.000 ?

Solución Antes que nada es necesario transformar las hectáreas en m^2. para ello usamos la conversión

1 hectárea = 10.000 m^2

Sea X el área del terreno donde se cultivarán las papas. Entonces 30.000 - X será el área que se dedicará al cultivo del ajo. Por lo tanto, el rendimiento total viene dado por

$$80X + 250(30{,}000 - X) = 3{,}165{,}000$$

$$-170X + 7{,}500{,}000 = 3{,}165{,}000$$

o sea

$$170X = 4{,}335{,}000$$

$$X = \frac{4{,}335{,}000}{170} = 25{,}500$$

Es decir, hay que sembrar 25.500 m^2 de papa y 4.500 m^2 de ajo.

Problema 12. Inversiones Una persona invierte Bs. 100.000 en dos tipos de inversiones : Bonos del Estado y acciones en una Compañía. Los Bonos del Estado dan un rendimiento del 22 % anual, mientras que la Compañía da un rendimiento del 35 % anual. ¿ Que cantidad de dinero invirtió la persona en la compañía, si al final del año obtuvo una utilidad de Bs. 32.400 ?:

Solución Sea X la cantidad de dinero a invertir en la Compañía. Entonces la inversión en Bonos del Estado es de 100.000 -X. La utilidad viene dada por

$$0{,}35X + (100{,}000 - X)0{,}22 = 32{,}400$$

$$0{,}13X = 1{,}04{,}000$$

$$X = \frac{1{,}04{,}000}{0{,}13} = 80{,}000$$

Luego la persona debe invertir Bs. 80.000 en la Compañía y Bs. 20.000 en Bonos del Estado para tener una utilidad total de Bs. 32.400.

Problema 13. Tasa de interés bancaria. Una persona invierte Bs.110.000, a fin de ganar intereses en dos bancos A y B. En el Banco A obtuvo una utilidad, después de un año de Bs. 13.000, mientras que en el Banco B obtuvo una utilidad de 16.800. Si el segundo banco posee una tasa de interés anual dos puntos por encima del primer banco ¿ Cuál es la tasa de interés de ambos bancos?

Solución Sea X la tasa de interés anual en el Banco A. Entonces X+2 será la tasa de interés del Banco B.
La fórmula para calcular la utilidad vendrá dada por:

$$G = \frac{C \cdot T}{100}$$

donde G es la ganancia, C es el capital invertido y T es la tasa de interés. En esta fórmula, podemos despejar el capital invertido para obtener

$$C = \frac{G \cdot 100}{T}$$

Haciendo uso de esta última fórmula, podemos sumar los capitales invertidos en ambos bancos. Esto nos da

$$\frac{13{,}000 \cdot 100}{X} + \frac{16{,}800 \cdot 100}{X+2} = 110{,}000$$

Multiplicando ambos miembros por $X(X+2)$ y dividiendo entre 10.000 nos queda

$$130(X+2) + 168X = 11(X+2)$$

o sea

$$11X^2 - 276X - 260 = 0$$

Resolviendo esta última ecuación de segundo grado obtenemos

$$X = \frac{276 \mp \sqrt{276^2 + 4(260)(1)}}{2(2)}$$

de donde

$$X = 26$$

Luego la tasa de interés anual del Banco A es 26 %, mientras que la tasa del Banco B es 28 % .

Problema 14. Alquiler de Apartamentos. José tiene una torre de 48 apartamentos, los cuales alquila a Bs. 60.000 mensual cada uno. Al aumentar el alquiler, muchos inquilinos dejan vacantes los apartamentos. Por cada Bs. 5.000 de aumento se desocupa uno de ellos. ¿En cuanto debería incrementarse el alquiler de los apartamentos para tener un ingreso de Bs. 3.375.000 por el alquiler de los apartamentos ocupados ?

Solución sea n el número de apartamentos vacantes, después de haber aumentado el alquiler. Entonces el número de apartamentos ocupados será 48-n. Luego el ingreso total por la renta de éstos apartamentos es:

$$(60{,}000 + 5{,}000n)(48 - n) = 3{,}375{,}000$$

Podemos dividir todos los términos de la ecuación entre 1.000 para obtener

$$(60 + 5n)(48 - n) = 3{,}375$$

Desarrollando se tiene

$$2880 + 240n - 60n - 5n^2 = 3{,}375$$

reordenando términos y simplificando nos da

$$n^2 - 36 + 99 = 0$$

y por lo tanto

$$n = \frac{36 \mp \sqrt{36^2 - 4(99)}}{2} = \frac{36 \mp 30}{2}$$

luego se obtienen las soluciones n = 33 o n = 3.
Por lo tanto, los posibles alquileres serán

$$60{,}000 + 33x(5{,}000) = 225{,}000$$

o bien

$$60{,}000 + 3x(5{,}000) = 75{,}000$$

En el primer caso se desocupan 33 apartamentos y en el segundo 3.

Problema 15. Duplicación de un Capital¿ Que tasa de interés anual debe ofrecer un banco a sus clientes, para duplicar un capital en dos años ?

Solución sea C el capital a colocar en dos años y X la tasa de interés anual del banco. Al final del primer año, el cliente obtiene

$$C\frac{X}{100}$$

por concepto de intereses.
Al final del segundo año obtiene

$$(C + C\frac{X}{100})\frac{X}{100}$$

por concepto de intereses.
Al final de los dos años la suma del capital mas los intereses debe ser igual al doble del capital. Poniendo esto en forma de ecuación nos da

$$C + C\frac{X}{100} + (C + C\frac{X}{100})\frac{X}{100} = 2C$$

Eliminando C en todas partes nos da

$$\frac{X}{100} + (1 + \frac{X}{100})\frac{X}{100} = 1$$

Multiplicando ambos miembros por 100 nos produce

$$X + (1 + \frac{X}{100})X = 100$$

De donde se deriva la ecuación cuadática

$$\frac{X^2}{100} + 2X - 100 = 0$$

o sea

$$X^2 + 200X - 10{,}000 = 0$$

De donde

$$X = \frac{-200 \mp \sqrt{(200)^2 + 40{,}000}}{2} = -100 + 100\sqrt{2}$$

Tomando la solución positiva nos da

$$X = 100(\sqrt{2} - 1) \approx 41{,}42$$

Luego el banco debe fijar una tasa de interés de 41.42 % (aproximadamente) para que sus clientes puedan duplicar su capital en dos años.

16. Tiempo para realizar un trabajo. Un obrero realiza un trabajo en 12 horas. Otro obrero realiza el mismo trabajo en 8 horas ¿ En cuantas horas trabajando juntos, realizarán la misma faena ?

Solución. Sea x el número de horas empleadas por los dos obreros en hacer el trabajo juntos. En 1 hora, la parte del trabajo que le corresponde al primer trabajador es 1/12. Similarmente, la parte del trabajo que le corresponde al segundo trabajador es 1/8. La parte total del trabajo será 1/x. Luego se tiene

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{1}{x}$$

De aquí se obtiene

$$\frac{5}{24} = \frac{1}{x}$$

o bien

$$x = \frac{24}{5} = 4{,}8 \; horas$$

Por lo tanto el trabajo lo realizan los dos obreros en 4.8 horas.

Mas problemas para resolver

1. **Venta de ganado.** Un ganadero compra 100 novillos y vende los 20 primeros con una ganancia de Bs. 25.000 por cada novillo. ¿ Cuál será la ganancia en la venta de cada novillo del lote restante para tener una ganancia total de Bs. 2.000.000 ? **Respuesta**: Bs. 18.750.

2. **Precio de las carnes.** En la Carnicería Santa Barbara se compra una res en canal y se clasifica en carnes de los tipos A, B y C para la venta. Se sabe que el Kilo de carne tipo B se vende a 100 Bs. mas que el tipo C. Por otro lado, el tipo A se vende a 300 Bs. mas que el tipo B. Si la res tiene 150 Kg., 180 Kg. y 25 Kg. de los tipos de carne C, B y A respectivamente ¿ Como debe quedar el precio de cada tipo, si el comerciante obtiene Bs. 294.000 al vender toda la res ? **Respuesta** Tipo A Bs. 1150, Tipo B Bs. 850 y Tipo C Bs. 750.

3. Venta de VHS. El Almacén X compró 200 aparatos de V.H.S. De estos vendió 125 con una ganancia de 40 % sobre el costo de cada uno. ¿ En cuanto deberá vender los restantes para tener una ganancia total del 45 % ? **Respuesta** 53.33 %.

4. Costo de Producción. Una Fábrica de pizarrones produce cada unidad a un costo de

$$C = 1750 \cdot X + 50$$

donde X es el área del pizarrón en metros cuadrados.
Si se desea fabricar pizarrones de 1.2 metros de largo ¿ Que altura deberán tener

para producir 36 de ellos a un costo de Bs. 47.160? **Respuesta.** 60 cm. de altura.

5. Comisión por horas de trabajo. Zulay y Xiomara son vendedoras en una tienda por departamentos.Zulay gana Bs. 15.000 mensuales fijos mas una comisión de Bs. 750 por hora de trabajo. Por otra parte, Xiomara gana Bs. 32.000 mensuales fijos mas una comisi'on de Bs. 830 por hora. Trabajando 120 horas mensuales entre las dos se han ganado Bs. 140.200 ¿ Que cantidad de horas al mes ha trabajado cada una ? **Respuesta.** Zulay trabajó 80 horas y Xiomara trabajó 40 horas.

6. Inversiones de Capital. Una Compañía desea invertir Bs. 160 millones en dos bancos para obtener dividendos anuales por concepto de intereses. El Banco Mérida paga un 15 % anual, mientras que el Banco Los Llanos paga 20 % anual. ¿ Que cantidad de dinero deberá invertir la Compañía en cada banco para tener una utilidad de Bs. 30 millones al final de un año ? **Respuesta.** 40 millones en el Banco Mérida y 160 millones en el banco Los Llanos.

7. Cantidad de personas en un Tour. Una agencia de viajes organiza un Tour hacia Miami para 160 personas a un costo de $ 56.000. Si por cada pasajero adicional el pasaje por persona es rebajado en $ 3 ¿ Que cantidad de personas deberán tomar el Tour para tener un costo total de $ 50.875 ? **Respuesta.** 185 pasajeros.

8. Precio de venta de un carro. El precio de venta de un automóvil modelo 98 es de bs. 8.500.000. Si el precio incluye el costo del vehículo mas un impuesto del 16 %, mas un seguro por Bs. 400.000, mas una comisión del 12 % para el concesionario ¿ Cuál es el costo del carro? **Respuesta.** Bs. 6.328.125.

9. Triplicar un Capital. ¿ Que tasa de interés anual debe ofrecer un banco para triplicar un capital al término de dos años ? **Respuesta.** 73.32 %.

10. Boletos para un baile. Un joven empresario planea realizar un baile de gala en un Club. Si el Club cobra Bs. 2.000 por persona al empresario y la orquesta cobra Bs. 500.000 ¿ Cuál será el precio de cada boleto para que 100 personas de asistentes den una utilidad de Bs. 500.000 ? **Respuesta.** Bs.12.000.

11. Pedidos de Mercancía. El Almacén Z dispone de 5 millones de Bolívares para hacer un pedido de pantalones y camisas. La venta de las camisas da una utilidad del 35 %. Por otro lado, la venta de pantalones ofrece mayores riesgos, pero da una utilidad de 40 % ¿ Que cantidad de dinero deberá invertir en cada tipo de mercancía para tener una ganancia total del orden de Bs. 1.825.000 ? **Respuesta.** Bs. 3.5 millones en camisas y Bs. 1.5 millones en pantalones.

12.Tasa de interés bancaria. Una persona invierte bs. 400.000 en los bancos A y B para obtener utilidades por concepto de intereses. En el banco A obtuvo Bs. 20.000, mientras que en el banco B obtuvo Bs. 30.000. Se sabe que la tasa de interés del banco B es cinco puntos mas alta que la del banco A ¿ Cuál es la tasa de interés en ambos bancos ? **Respuesta.** 10 % en el banco A y 15 % en el banco B.

13. Tarifas en un Hotel. El Hotel Los Andes tiene una promoción para sus clientes. Por cada día adicional después de 10 días de alojamiento, se rebajan 500 Bolívares de la tarifa diaria, la cual es Bs. 15.000 ¿ Cuantos días se estuvo alojado un turista para haber pagado Bs. 208.000 ? **Respuesta.** 14 días.

14. Rendimiento de cultivos Una parcela de 5 hectáreas se cultiva con papa y apio. Si la papa da un rendimiento de Bs. 250 por m^2 y el apio da un rendimiento de Bs. 300 por m^2 ¿ Que cantidad de terreno se dedicó a cada cultivo para obtener un rendimiento de Bs. 14.400.000 ? **Respuesta.** 1.2 hectáreas de papa y 3.8 de apio.

15. Boletos para el Baseball. Un Estadium de Baseball tiene tres tipos de localidades A, B, y C. la localidad A es la mas lujosa y la entrada a la misma cuesta el doble que a la localidad B. Por otro lado, la entrada a la localidad C vale 1/3 de la entrada a B. En un partido entraron 2530 personas a la localidad A, 4850 a la localidad B y 6716 a la localidad C, lo cual dió una recaudación de Bs. 18.223.000 ¿ Cuanto vale la entrada a cada localidad ? **Respuesta.** 3.000 Bs. la localidad A, 1500 Bs. la localidad B y 500 Bs. la localidad C.

16. Ingresos por comisión. Juan trabaja en un almacén y gana Bs. 100.000 mensuales mas una comisión del 2 % sobre las ventas. Además, se le retira el 12 % de sus ingresos brutos por concepto de seguridad social. ¿ A cuanto ascienden sus ventas si obtuvo unos ingresos netos de Bs. 176.000 ? **Respuesta.** Bs. 5.000.000.

17. Venta por cuotas. Una persona vendió un terreno y recibe el pago dividido en tres partes iguales: una al momento de la compra otra a los seis meses siguientes y la última al año de haber hecho el trato. Si el precio de venta fue Bs. 12.000.000 y el comprador pagó Bs. 1.400.000 por concepto de intereses ¿ A que tasa de interés se pagaron las cuotas ? **Respuesta.** 33 %.

18. Fábrica de sillas. Una empresa fabrica sillas de madera a un costo por unidad de Bs. 2.500, si fabrica menos de 100 sillas. Si la producción aumenta por encima de 100, entonces los costos de fabricación se reducen en un 25 % ¿ Que cantidad de silllas se pueden fabricar a un costo de Bs. 937.500 ? **Respuesta.** 500 sillas.

19. Empresa Taurina. Un empresario taurino organiza una corrida de toros. La plaza tiene dos tipos de localidades una de Sol y otra de Sombra, con igual cantidad de asientos, para un total de 15.000 espectadores. La Empresa paga Bs. 9.000.000 a los toreros, 2 millones por el alquiler de la Plaza y 5 millones por gastos de ganadería y otros servicios. Si los boletos de Sombra pagan 1/5 mas que los boletos de Sombra ¿ A como debe venderse cada boleto para obtener una ganancia de Bs. 17.000.000 a plaza llena ? **Respuesta.** a Bs. 1000 Sol y Bs. 1200 Sombra.

20. La inflación. Si la inflación en el país en 1996 fue de 108 % y una persona tenía Bs. 5 millones colocados en el Banco al 30 % durante todo el año ¿ Que cantidad de dinero perdió la persona, por concepto de devaluación ? **Respuesta.** Bs. 3.900.000.

21. Lucha contra la inflación. A partir de 1998, gracias a las políticas macroeconómicas impuestas por el gobierno, se logró controlar al monstruo de la inflación. En el ao 2000, la inflación será de un 12 % Una persona gana la lucha contra la inflación, si al final de año su capital se ha incrementado en el mismo porcentaje de la inflación. Si Juan retiró Bs. 4.000.000 millones del banco, en Enero del 2000, compró un vehículo nuevo con dicha cantidad y lo vendió a fin de año en Bs. 4.500.000 ¿ Ganó la lucha contra la inflación? ¿ Que ganancia obtuvo a fin de año?

Respuesta. Si gano la lucha contra la inflación. Su ganancia fue de Bs 80.000.

22. Dividendos bancarios. Carlos y Juan colocaron un capital a ganar intereses en un Banco, a una tasa de 34 % anual. Al final del año cada uno recibió Bs. 510.000 por los intereses. ¿ Cuál fue el capital invertido ? **Respuesta.** Bs. 3.000.000.

23. Valor de un terreno. Una sucesión cambió una parcela de 15x60 metros, por otra situada en una zona mas costosa y con valor por metro cuadrado, igual al doble de la anterior. Si el ancho de la parcela es de 12 m. ¿ Cuanto tiene de fondo? **Respuesta.** 37.5 metros.

24. Ajuste de ganancias por aumento de sueldo. Una finca platanera obtiene una ganancia bruta de Bs. 2.800.000 mensuales, producto de la venta del plátano. El propietario debe pagar a dos obreros, cada una de los cuales percibe un sueldo mensual de Bs. 60.000 y ademas debe cancelar Bs.500.000 mensuales por concepto de fertilizantes y plaguicidas y pagar al banco Bs. 250.000 mensualmente para cancelar un crdito, con el cual adquirió la finca . a) ?Cuál es la ganancia neta del propietario? b) ¿Cuál es el porcentaje de ganancia ? Si a cada obrero se le aumenta su salario en Bs. 100.000. c) ¿ Cuál es el nuevo porcentaje de ganancia ? ¿ Que volumen de venta debe tener el propietario para obtener la anterior ganancia ? **Respuestas.** a) 1.930.000 Bs. 80.000 mensuales. b) 221.8 % . c)194.7 % d) 3.057.100 Bs.

25. Aumento de un producto. ¿En que porcentaje debe aumentar el plátano el agricultor del problema anterior, para obtener la misma ganancia que obtenía con los sueldos viejos? **Respuesta.** 1.02 %

26. Aumento en el pasaje. Un conductor propietario de una autobús, tiene unos gastos mensuales de Bs. 300.000 por concepto de gasolina y Bs. 250.000 por desgaste del vehículo. Sus entradas brutas son de Bs. 1.500.000, por concepto de la venta de los pasajes . a) ¿ Cuál es la ganancia neta del conductor?. Si el precio de la gasolina aumenta en un 20 % b) ¿Cuál es la ganancia neta? c) ¿ Cuál debe ser el porcentaje de aumento de los pasajes para obtener la misma ganancia ? **Respuestas.** a) 950.000 , b) 890.000 c) 1.04 % .

27. Aumento de precios. El Almacén Z vendió 50 televisores en dos lotes y obtuvo bs. 3.800.000 por la venta de todos ellos. Si los primeros 20 televisores los vendió a Bs. 70.000 ¿ Cuál fue el aumento en el precio de venta de cada televisor ? **Respuesta.** Bs. 10.000.

28. Distribución de cultivos. Un agricultor tiene una finca de 16 hetáreas cultivables y piensa sembrar patilla y tomate. la patilla da un rendimiento de Bs. 250 por metro cuadrado, mientras que el tomate da un rendimiento de Bs. 310 por metro cuadrado. ¿ Que cantidad de la finca se debe dedicar a cada cultivo para tener una ganancia de Bs. 4.120.000 ? **Respuesta.** 14 hectáreas de patilla y 2 de tomate.

29. Venta de pollos. Un vendedor de pollos en el mercado vendió 75 pollos por un total de Bs. 68.175, durante dos días. El primer día obtuvo Bs. 27.000 por la venta de los pollos. El segundo día aumento en Bs. 15 el Kilogramo ¿ Cuál fue el precio del pollo por Kg. en cada día ? **Respuesta.** 900 y 915 Bs.por Kg.

30. Trabajo compartido. Un obrero realiza un trabajo en 15 horas, mientras que otro obrero realiza el mismo trabajo en 10 horas. ¿ Cuanto tardan los dos obreros en hacer el mismo trabajo? **Respuesta.** 6 horas.

31. Dos números naturales. Hallar dos números naturales tales que su suma sea 100 y el mayor es igual al doble del menor menos uno. **Respuesta.** 33 y 67.

32. Trabajo en equipo. Un obrero realiza un trabajo en 6 horas. El mismo trabajo, lo realiza junto con otro obrero en 5 horas. ¿ En cuantas horas trabajando solo realiza el trabajo el segundo obrero ? **Respuesta.** en 30 horas.

33. Tres números naturales. Hallar tres números naturales consecutivos, tal que su producto sea igual a 1320. **Respuesta** 10, 11 y 12.

33. Boletos para el cine. Un padre de familia fue al cine junto con su esposa y dos hijos menores de 12 años. Los boletos de los niños cuestan Bs. 200 menos que los de adultos ¿ Cuanto cuesta cada boleto si el padre pagó Bs. 2200 por los cuatro boletos? **. Respuesta** 650 adultos y 450 niños.

34. Comiendo pizzas. Un grupo de 12 jovenes se reunen en una pizería y cada uno ordena una pizza. Los tipos de pizza ordenados fueron de dos tipos; el tipo A que cuesta Bs. 1200 Bs. y el tipo B que cuesta 1000 Bs. La cuenta total, que incluye un 10 % por el servicio fue de Bs. 13860.
¿ Cuantas pizzas de cada tipo consumieron ? **Respuesta.** 3 del tipo A y 9 del tipo B.

35. Sueldo de un empleado. Un empleado gana un sueldo base de Bs. 100.000 mas una comisión de 2500 Bs. por cada hora extra de trabajo. Sus entradas mensuales son superiores en 16.000 Bs. a los que recibió el mes pasado en otro empleo en dode tenía un sueldo fijo de 90.000 Bs. mensuales y 2000 Bs. por cada hora extra de trabajo. Si en ambos empleos trabajó el mismo número de horas extras ¿ Cuanto tiempo extra trabajó? **Respuesta.** 12 horas.

36. Inversiones. Juan tiene un capital de Bs. 3 millones para invertir en acciones de una compañía que producen el 30 % de utilidad y bonos del Estado que dan un rendimiento del 25 % anual. Si al final de anño obtuvo Bs. 837500 ¿ Cómo se repartieron las inversiones ? **Respuesta.** 1.750.000 en acciones y 1.250.000 en Bonos.

37. Juegos. Un jugador dispone de una cantidad de dinero para jugar a la ruleta. En la primera jugada pierde la mitad de su capital. En la siguiente jugada gana Bs. 20.000. Posteriormente apuesta todo lo que tiene y lo duplica para retirarse del juego con Bs. 90.000 ¿ Con cuanto dinero inició el juego? **Respuesta.** Con Bs. 50.000.

38. Cerveza. Una lata de 250 cc. de cerveza cuesta al consumidor Bs. 200. Si el costo del envase es 10 Bs. y la compañía paga de impuesto Bs. 30 por cada litro de cerveza ¿ Cuál es el costo real de la cerveza si la compañía obtiene unas ganancias del 100 % ? **Respuesta.** Bs 91.25.

39. Dividendos por intereses. Una persona dispone de un capital para invertir en un banco, el cual paga el 23 % de interés anual. Al final de un año, después de pagar una comisión de 1500 Bs, recibe Bs. 60.000. ¿Cuál fue el capital invertido ? **Respuesta.** Bs. 50.000.

40. Tarifas de Electricidad. El costo de 1 Kilovatio-hora está subsidiado por el Estado parcialmente. Los primeros 200 Kwh tienen un subsidio del 80 %, desde 200 hasta 600 Kwh hay un subsidio del 30 % y de 600 Kwh en adelante estan sin subsidio alguno. Si un consumidor paga Bs. 15.750 por haber consumido 900 Kwh ¿ Cuanto cobra la Compañía por 1 Kwh ? **Respuesta.** Bs. 25 por Kwh.

41. Consumo de Electricidad. Un consumidor paga Bs. 25.000 por concepto de luz eléctrica mediante una tarifa de Bs. 25 por Kwh con el subsidio del Estado. ¿ Cuantos Kwh consumió ? **Respuesta.** 1280 Kwh.

42. Aumento de tarifas eléctricas. La Compañía de Electricidad cobra a sus suscriptores Bs. 25 el Kwh. El mes siguiente aumenta las tarifas en un 20 %, pero solo a los Kwh sin subsidio. ¿ Cuanto deberá pagar por concepto de electricidad un consumidor que canceló Bs 30.000 en este mes por concepto de electricidad ? **Respuesta.** Bs 34.400.

43. Inversiones. Una persona invierte 30 Bs. en tres bancos A, B y C en partes iguales. El banco B paga una tasa de interés 5 puntos mas alta que el Banco A. El Banco C paga 5 puntos mas que el banco B. Al final de año, la persona obtiene una utilidad de Bs. 6 ¿ Que tasa de interés paga cada banco ?
Respuesta. 15, 20 y 25 %.

44. Pérdidas. Un comerciante compró 10 televisores a Bs. 120.000 cada uno. Si vendió 8, se le dañaron 2 y no obtuvo utilidad alguna por la venta ¿ Cuál fue la ganancia en la venta de los 8 televisores ? **Respuesta.** 0.25 %.

45. Utilidades. Un comerciante adquiere 50 neveras. con la venta de 40 de ellas obtuvo una ganancia igual al costo de las restantes neveras ¿ Cuál fue el porcentaje de ganancia en la venta de las 40 neveras ? **Respuesta.** 25 %.

46. Campaña Publicitaria. Un comerciante compra 150 televisores y los desea vender a Bs. 110.000 cada uno. Un experto en mercadeo le recomienda vender los 50 primeros a un precio a determinar, y los restantes 100 con un descuento de precio del 40 % sobre el precio de los anteriores. Con esta estrategia se obtiene la misma ganancia, pero se venden mucho mas rápido los televisores. ¿ Cuál debe ser el precio de venta de cada televisor del primer lote de 50 ? **Respuesta,** Bs 150.000.

Capítulo 4

Matrices

Definición. Una matriz de orden nxm sobre los números reales es un arreglo rectangular de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m es el número de filas y n es el número de columnas. Los elementos de la matriz son los símbolos a_{ij}, los cuales son números reales. Otra forma de expresar la matriz es

$$A = (a_{ij})$$

Ejemplo. Sea B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

El **orden de una matriz** de m filas y n columnas es mxn. Así pues, la matriz del ejemplo anterior tiene orden 2x3. Una matriz de orden nxn se llama **Matriz cuadrada de orden n**, es decir ellas tienen el mismo número de filas y columnas.

Ejemplo. La matriz C, dada por

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se dicen que son **iguales**, si se tiene

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todo i,j. Es decir, dos matrices son iguales si y sólo si sus elementos correspondientes son iguales

Ejemplo Las matrices A y B son iguales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2 & 3+2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 4 & \sqrt{16} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = B$$

Una matriz $A = (a_{ij})$, en donde $a_{ij} = 0$, para todo i,j se llama **Matriz cero** o matriz nula. Existen matrices nulas para cada tipo de orden. Las siguientes matrices son todas nulas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo la primera de orden 3x3, la segunda de orden 4x3 y la tercera de orden 2x3.

4.1. Operaciones con matrices

Suma de matrices Cuando se tienen dos matrices del mismo orden, entonces las podemos sumar para obtener una nueva matriz del mismo tipo. La suma de matrices se define formalmente de la forma siguiente
Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces $A + B$ es la matriz

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Esto es, para sumar matrices se suman sus elementos correspondientes.

Ejemplo Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-1 & 5+4 & 3+3 \\ 3+5 & 2+0 & -1+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & 0+5 & -1+0 \\ 3+0 & 2+1 & -3-1 \\ 4+3 & 5+2 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por un escalar Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cualquiera y c es un número real, entonces la multiplicación de c por A es la matriz

$$c \cdot A = (ca_{ij})$$

Luego para multiplicar una matriz por un número real c, se multiplican todos los elementos de la matriz por c.

Ejemplo Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & 15 \\ 7 & 7 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces $2A$ es la matriz

$$2A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & -8 & 30 \\ 14 & 14 & 24 & 6 \end{pmatrix}$$

Si $A = (a_{ij})$ es cualquier matriz, entonces la **matriz negativa** de A, es la matriz denotada por $-A$, cuyos elementos son los negativos de los elementos de A. Esto es

$$-A = (-a_{ij})$$

Ejemplo. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -2 & 0 \\ 6 & -6 & -8 & 30 \\ 14 & 3/7 & 24 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces la matriz negativa de A viene dada por

$$-A = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 8 & -30 \\ -14 & -3/7 & -24 & 1 \end{pmatrix}$$

Si sumamos las dos matrices A y $-A$ se obtiene la matriz cero. En efecto

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & -2 & 0 \\ 6 & -6 & -8 & 30 \\ 14 & 3/7 & 24 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -10 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 8 & -30 \\ -14 & -3/7 & -24 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición Se llama **Matriz fila** de orden n a una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Definición Se llama **Matriz Columna** de orden m a una matriz de la forma

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna Una matriz fila de orden n se puede multiplicar por una matriz columna de orden n, y el resultado es un número real. El procedimiento viene expresado por

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Ejemplo. Multiplicación de una matriz fila de orden 4 por una matriz columna del mismo orden

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 + -3 \cdot 2 + 0 \cdot 9 + 1 \cdot 7 = 21$$

Multiplicación de matrices. Sea A una matriz de orden mxn y B una matriz de orden nxk. Entonces las dos matrices se pueden multiplicar entre sí para generar otra matriz, denotada por $A \cdot B$, la cual se llama **Matriz producto** de A por B. Esta operación se describe a continuación

1. Se multiplica la primera fila de A por la primera columna de de B para obtener el primer elemento de la matriz producto en la primera fila.

2. Se multiplica la primera fila de A por la segunda columna de B para obtener el segundo elemento de la primera fila de la matriz producto.

3. Se continúa de esta forma, hasta agotar todas las columnas de B.

4. Se multiplica la segunda fila de A por la primera columna de B para obtener el primer elemento de la segunda fila del producto.

5. Se multiplica la segunda fila de A por la segunda columna de B para obtener el segundo elemento de la segunda fila del producto.

6. Se continúa esta multiplicación de filas por columnas, hasta agotar todas las filas de la matriz A.

Ejemplo. Sea A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz producto AB

Solución

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(1)+3(0)+1(3) & 2(4)+3(2)+1(5) \\ -3(1)+1(0)+4(3) & -3(4)+1(2)+4(5) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz producto AB

Solución

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1(2)+-1(-2)+6(1) & 1(3)-1(0)+6(2) & 1(1)-1(-5)+6(4) \\ 0(2)+4(-2)+3(1) & 0(3)+4(0)+3(2) & 0(1)+4(-5)+3(4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 15 & 30 \\ -5 & 6 & -8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular AB, AC, $A(B+C)$ y $AB+AC$

Solución.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$B + C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$$

Vemos entonces que se obtiene la relación

$$A(B+C) = AB + AC$$

que se conoce con el nombre de Ley distributiva para matrices

Ejercicios.

1. Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Hallar

a) $A+B$	$b)A-B$	$c)AB$	$d)BA$
e) A^2	$f)5A+3B$	$g)C^2$	$h)A+C$
i) ABC			

2. Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar
a) AB $\quad$ $b)AC$ $\quad$ $c)A(B+C)$ $\quad$ $d)CBC$
b) B^2C $\quad$ $f)AB^2$ $\quad$ $g)AC^2$ $\quad$ $h)A(C-B)$

3. Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Hallar
a) $(A+B)C$ $\quad$ $b)AC$ $\quad$ $c)2A-3B$ $\quad$ $d)(2A-3B)C$
e) $AC-AC^2$ $\quad$ $f)BC$ $\quad$ $g)BC+B$ $\quad$ $h)AC+A$

4. Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar las matrices
a) $(A+B)C$ $\quad$ $b)B(A+C)$ $\quad$ $c)C(A-B)$ $\quad$ $d)AB$
e) AC $\quad$ $f)CA$ $\quad$ $g)BA$ $\quad$ $h)ABC$

Respuestas.

1.

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \qquad e) \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad f) \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ -15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad h) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad i) \begin{pmatrix} -18 & 12 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$$

2.

$$a)\quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & -4 \\ -1 & -5 & 16 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 7 & 6 & 15 \\ -3 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} 12 & 12 & 11 \\ -4 & -10 & 9 \end{pmatrix} \qquad d)\quad \begin{pmatrix} -70 & -152 & -54 \\ -5 & -19 & 7 \\ -20 & -80 & 30 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad \begin{pmatrix} 14 & 36 & 8 \\ -12 & -35 & 2 \\ 57 & 92 & 87 \end{pmatrix} \qquad f)\quad \begin{pmatrix} 3 & -10 & 17 \\ 26 & 59 & -87 \end{pmatrix}$$

$$g)\quad \begin{pmatrix} 65 & 66 & 137 \\ -32 & -33 & -64 \end{pmatrix} \qquad h)\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 19 \\ -2 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

3.

$$a)\quad \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 14 & 4 \\ 24 & 24 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 10 & -4 \\ 33 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ -6 & 4 \\ -1 & 19 \end{pmatrix} \qquad d)\quad \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 14 & 4 \\ 24 & 24 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad \begin{pmatrix} 39 & -18 \\ 10 & -52 \\ -63 & -114 \end{pmatrix} \qquad f)\quad \begin{pmatrix} -5 & -22 \\ 4 & 8 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$g)\quad \begin{pmatrix} -10 & -21 \\ 6 & 8 \\ -6 & -15 \end{pmatrix} \qquad h)\quad \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 10 & -2 \\ 37 & 11 \end{pmatrix}$$

4.

$$a)\quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 9 & 15 & 24 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix} 12 & 0 & 12 \\ 21 & -4 & 7 \\ 12 & 12 & 21 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0 \\ -6 & 10 & -2 \\ -3 & -5 & -7 \end{pmatrix} \qquad d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 2 \\ -3 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 12 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad f)\quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$g)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 16 \end{pmatrix} \qquad h)\quad \begin{pmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 36 & -2 & 6 \\ 30 & 41 & 17 \end{pmatrix}$$

4.2. Inversa de una matriz.

En esta sección estudiaremos el producto de matrices cuadradas. Si $A = (a_ij)$ es una matriz cuadrada de orden n, entonces **la diagonal de A** esta formada por los elementos que están en en las posiciones (i,i). Luego

$$Diag(A) = \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$$

Definición Una matriz se llama **Matriz diagonal**, si los elementos que no están en la diagonal son todos nulos.

Ejemplos de matrices diagonales son

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Las matrices diagonales son muy convenientes, pues ellas se pueden multiplicar de una manera bastante simple. El producto de dos matrices diagonales de orden n , es igual a una matriz diagonal de orden n, cuyos elementos son los productos de los elementos de diagonal de las matrices.

Ejemplo. Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces su producto se calcula

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5(11) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4(-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6(-1) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Definición. Se lama **Matriz Triangular Superior**, a una matriz cuadrada cuyos elementos por debajo de la diagonal sean todos nulos

Ejemplo. Un ejemplo de matriz triangular superior es el siguiente

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Definición. Se llama **Matriz identidad de orden n** a una matriz de la forma

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando una matriz cuadrada de orden n se multiplica por la matriz identidad (por cualquier lado), se obtiene la misma matriz

Ejemplo. Sea la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 10 & -3 & -4 & 7 \\ 8 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 10 & -3 & -4 & 7 \\ 8 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 10 & -3 & -4 & 7 \\ 8 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y también

$$I \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 10 & -3 & -4 & 7 \\ 8 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 10 & -3 & -4 & 7 \\ 8 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición. Una matriz cuadrada A se dice que es **invertible o que tiene inversa**, si existe otra matriz B, llamada la inversa de A, tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I,$$

donde I es la matriz identidad.
La matriz inversa se denota por A^{-1}. Luego se tiene

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Ejemplo. Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz B es la inversa de A. En efecto realizando el producto de ambas matrices se obtiene

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota. Si A y B son matrices cuadradas que satisfacen alguna de las relaciones $AB = I$ o $BA = I$, entonces se concluye que B es la inversa de A. Es decir basta verificar un solo producto para asegurar que A tiene inversa. Por esta razón, no fue necesario calcular el producto BA en el ejercicio anterior.

4.3. Método de Gauss para calcular la inversa de una matriz

Para calcular inversas, necesitamos definir primero las siguientes **operaciones sobre las filas** de una matriz. Supongamos que A es una matriz cualquiera (no necesariamente cuadrada), entonces podemos hacer las siguientes operaciones

1. **Intercambiar las filas**. Cuando se intercambia una fila i por otra j, dicha transformación se denota por
$$R_i \leftrightarrow R_j$$

2. **Multiplicación de una fila por un número real.** Cuando se multiplica una fila i por un número real c, dicha transformación la denotamos por
$$R_i \rightarrow cR_j$$

3. **Sumarle a una fila i el resultado de multiplicar otra fila j por un número real c.** Esta transformación la denotamos por
$$R_i \rightarrow R_i + cR_j$$

Cuando se hacen estas operaciones sobre una matriz A, es evidente que la transformada es diferente de A. Esta nueva matriz B se dice que es una matriz **equivalente por filas a la matriz A.**

El método de Gauss para hallar la inversa de una matriz cuadrada A, consiste en lo siguiente

1. Se forma la matriz aumentada, colocando al lado de A la matriz identidad
2. Se hacen operaciones sobre las filas de esta matriz aumentada, hasta obtener la matriz identidad en la posición que ocupaba A (el lado izquierdo de la matriz aumentada.)
3. La matriz inversa de A aparece en le lado derecho de la matriz aumentada.

Ejemplo. Hallar la matriz inversa de A, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. En primer lugar, formamos la matriz aumentada, colocando la matriz identidad de orden 3 al lado de la matriz A. Esto nos da

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguidamente, haremos una serie de operaciones sobre las filas de esta matriz aumentada, hasta conseguir la matriz identidad en al lado derecho. Cada operación entre las filas, será indicada por su símbolo correspondiente

$$R_3 \leftrightarrow R_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to 1/2R_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to R_1 - 2R_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz del lado izquierdo es la matriz identidad, entonces la matriz del lado derecho debe ser la inversa de A. Por lo tanto concluimos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para constatar la veracidad de nuestro resultado, podemos ahora multiplicar A por su inversa A^{-1}. Esto nos da

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se demuestra que la matriz hallada es la inversa de A.

Ejemplo. Hallar la matriz inversa de A, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución. En primer lugar, formamos la matriz aumentada, colocando la matriz identidad de orden 3 al lado de la matriz A. Esto nos da

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Al igual que en el ejemplo anterior, haremos una serie de operaciones sobre las filas de esta matriz aumentada, hasta conseguir la matriz identidad en al lado derecho. Cada operación entre las filas, será indicada por su símbolo correspondiente

$$R_1 \to 1/2R_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 + R_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \longleftrightarrow R_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 \longrightarrow R_2 + R_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 \longrightarrow 2R_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \longrightarrow 1/2R_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 \longrightarrow 3R_3 + R_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

Como la matriz del lado izquierdo es la matriz identidad, entonces la matriz del lado derecho debe ser la inversa de A. Por lo tanto concluimos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para constatar la veracidad de nuestro resultado, podemos ahora multiplicar A por su inversa A^{-1}. Esto nos da

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se demuestra que la matriz hallada es la inversa de A.

Ejemplo. Sea A la matriz del ejemplo anterior y C la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces Hallar una matriz X tal que

$$AX = C$$

Solución. Si A^{-1} es la matriz inversa de A, se tiene entonces

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C$$

Luego la matriz buscada es

$$X = A^{-1}C$$

Por lo tanto se tendrá

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios.

Usando el método de Gauss, hallar la matriz inversa de las siguientes matrices

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 3/2 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 5 & -15 & 8 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 13 & -31 & 16 \\ -5 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 7/5 & -4/5 \\ 3/5 & -4/5 & 3/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad H^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 4/21 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/26 & 2/13 \\ 0 & 7/26 & -1/13 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} -5/13 & 1/13 & 7/13 \\ 1/13 & 5/13 & -4/13 \\ 7/13 & -4/13 & -2/13 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Usando las matrices del ejercicio anterior, obtenga una matriz X con las condiciones dadas
   a) XB = C
   b) BX = C
   c) CX + I = B
   d) FX - 2B = C
   c) F - C = GX .

4.4. Sistemas de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales en las variables x_1, x_2, ... x_n es un conjunto de m ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde los números reales a_{ij} se llaman los **Coeficientes del sistema**.

Podemos expresar un sistema de ecuaciones en forma matricial. Para ello definimos la matriz A asociada al sistema, como la matriz formada por los coeficientes. Esto es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El sistema anterior se representa en forma matricial

$$A \cdot X = Y$$

donde X e Y son las matrices columnas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo. El siguiente es un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + 3y + z & = & 7 \\ 3x - y + z & = & 5 \\ -2x + y + 2z & = & -8 \end{array} \right.$$

La matriz A asociada al sistema viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema se expresa en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Definición. Una **solución de un sistema de ecuaciones** con 3 incógnitas es una tripleta ordenada (a,b,c) de números reales, tal que al hacer la sustitución

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

en el sistema, este se satisfaga.

Ejemplo. Una solución del sistema anterior viene dada por (3,2,-2) . En efecto, si hacemos la multipliación de matrices obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

La resolución de los sitemas de ecuaciones se puede hacer por varios métodos. Entre los mas utilizados están el de reducción y el de inversión de la matriz A. El método de inversión se utiliza cuando se quieren resolver varios sistemas usando la misma matriz de coeficientes.

Ejemplo. (Método de Inversión) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z & = & 7 \\ 3x - y + z & = & 5 \\ -2x + y + 2z & = & -8 \end{cases}$$

Solución. En primer lugar, buscamos la matriz asociada, la cual es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Seguidamente procedemos a calcular su inversa, según el método estudiado. Esta viene dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/26 & 5/26 & -2/13 \\ 4/13 & -2/13 & -1/13 \\ -1/26 & 7/26 & 5/13 \end{pmatrix}$$

Luego resolvemos el sistema

$$AX = Y$$

esto es

$$X = A^{-1}Y$$

Como se conocen las matrices A^{-1} e Y, podemos hallar la matriz X. Esta se calcula

$$X = A^{-1}Y \begin{pmatrix} 3/26 & 5/26 & -2/13 \\ 4/13 & -2/13 & -1/13 \\ -1/26 & 7/26 & 5/13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y de aquí sale que la solución buscada es x = 3, y = 2, z = -2.

Si cambiamos el sistema, modificando el lado derecho, entonces aun podemos resolverlo sin mucho trabajo adicional. Por ejemplo, supongamos que deseamos resolver

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + 3y + z & = & 33 \\ 3x - y + z & = & 31 \\ -2x + y + 2z & = & 18 \end{array} \right.$$

Entonces la solución se obtiene

$$X = A^{-1}Y \begin{pmatrix} 3/26 & 5/26 & -2/13 \\ 4/13 & -2/13 & -1/13 \\ -1/26 & 7/26 & 5/13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 31 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Luago la solución a este nuevo sistema es (7,4,14).

Antes de pasar a estudiar el segundo método de resolución de ecuaciones, es necesario introducir algunos conceptos básicos sobre los sistemas equivalentes.

Definición. Una operación sobre las filas de un sistema de ecuaciones es cualquiera de los tres tipos de operaciones

1. Intercambiar ecuaciones.
2. Multiplicación de una ecuación por un número real.
3. Sumarle a una ecuación, el resultado de multiplicar otra ecuación por un número real.

Definición. Dos sistemas de ecuaciones se dicen **Sistemas equivalentes** , si uno de ellos se puede obtener a partir del otro, por medio de operaciones sobre las filas.
Cuando dos sistemas son equivalentes, entonces ellos poseen las mismas soluciones.

Ejemplo. El sistema de tres ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + 3y + z & = & 7 \\ 3x - y + z & = & 5 \\ -2x + y + 2z & = & -8 \end{array} \right.$$

es equivalente a este otro

$$\begin{cases} x + 3y + z & = & 7 \\ -10y + -2z & = & -16 \\ -2x + y + 2z & = & -8 \end{cases}$$

El segundo sistema se obtuvo a partir del primero multiplicando la primera ecuación por -3 y sumándole esto a la segunda.
Observar que (3, 2, -2) es solución de ambos sistemas.

Tipos de sistemas. De acuerdo al número de soluciones, los sistemas se clasifican en los siguientes tipos

1. **Sistema Consistente** La solución es única.
2. **Sistema Consistente dependiente.** Existen infinitas soluciones.
3. **Sistema inconsistente.** No existe solución.

Ejemplo. El sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y & = & 6 \\ x + y & = & 2 \end{cases}$$

es consistente dependiente, pues posee infinitas soluciones de la forma (x, 2-x), donde x es cualquier número real. Por ejemplo (0,2), (1,1), (2,0), (3,-1)... etc son todas soluciones.

Ejemplo. El sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y & = & 6 \\ x + y & = & 4 \end{cases}$$

es inconsistente. En efecto, si la segunda ecuación se multiplica por -3 y se le suma a la primera se obtiene

$$0 = -6$$

lo cual es absurdo. Luego el sistema no posee solución alguna.

Ejemplo. El sistema

$$\begin{cases} x + y & = & 2 \\ x + 2y & = & 1 \end{cases}$$

es consistente. En efecto, si multiplicamos la primera ecuación por -1 y se le suma a la segunda se obtiene

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ \quad\;\; y &= -1 \end{cases}$$

Es claro entonces que la única solución es (3, -1).

Ejemplo. Resolución por el método de reducción. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + z &= 4 \\ x - 2y + 4z &= 2 \\ 5x - 9y - 10z &= 1 \end{cases}$$

Para resolverlo haremos operaciones sobre las ecuaciones, hasta llevarlo a la forma escalonada. A continuación indicamos los pasos

$$\begin{cases} x - 2y + 4z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 4 \qquad R_1 \leftrightarrow R_2 \\ 5x - 9y - 10z &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z &= 2 \\ \quad y - 7z &= 0 \quad R_2 \leftrightarrow -2R_1 + R_2 \\ 5x - 9y - 10z &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z &= 2 \\ y - 7z &= 0 \qquad R_3 \leftrightarrow -5R_1 + R_3 \\ y + 10z &= -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z &= 2 \\ y - 7z &= 0 \qquad R_3 \leftrightarrow -R_2 + R_3 \\ -3z &= -9 \end{cases}$$

Luego procedemos a despejar los valores de x, y, z de abajo hacia arriba en el sistema final. En primer lugar, de la tercera ecuación tenemos

$$z = 3$$

Sustituyendo este valor de z en la segunda ecuación y despejando y nos queda

$$y = -21$$

Sustituyendo los valores de z e y en la primera ecuación nos queda

$$x = 52$$

Ejercicios

1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y+4z &= 2 \\ 5x+y+3z &= 4 \end{cases} \qquad R:(1,-1,0)$$

2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x+2y-z &= 8 \\ x+y+z &= 1 \\ x+5y-z &= 13 \end{cases} \qquad R:(1,2,-2)$$

3. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+y+z &= 6 \\ x+y-z &= -4 \end{cases} \qquad R:(4,-5,3)$$

4. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y+4z &= 12 \\ x-y+4z &= 0 \\ 5x+y+z &= 17 \end{cases} \qquad R:(2,6,1)$$

5. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x+2y &= 3 \\ y+z &= 0 \end{cases} \qquad R:Inconsistente$$

6. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 5x+2y+z &= 1 \\ 6x+3y+2z &= 1 \end{cases} \qquad R:Consistente\ Dependiente$$

7. Una persona coloca dos inversiones en los bancos A y B, recibiendo Bs. 8750 como dividendos. El banco A tiene una tasa de interés anual de 15 %, mientras que el banco B tiene una tasa del 17 %. Si triplica la inversión en el banco A y quintuplica la inversión en el banco B, recibiría Bs. 34750 ¿ Que cantidad de dinero coloca la persona en cada banco ? Respuesta 30.000 y 25.000

8. Una fábrica produce tres tipos de juguetes construidos a base de piezas de madera, plástico y hierro. El primer juguete se construye con 10 piezas de madera 10 de plástico, 2 de hierro y tiene un costo de Bs. 180. El segundo juguete se construye con una pieza de madera, una de plástico y una de hierro y tiene un costo de Bs. 30. El tercer juguete se construye usando una pieza de madera, 5 de plástico, 5 de hierro y tiene un costo de Bs. 130. ¿ Cuál es el costo de cada pieza de madera, plástico y hierro ? Respuesta 5, 10 y 15.

9. La suma de las edades de Juan, Luis y María es 100. La edad de Juan es el doble de la edad de Luis, dentro de 10 años. La edad de María es igual a la de Juan hace 20 años. Calcular las tres edades. Respuesta 52, 16 y 32.

10. Una herencia de Bs 200 millones se reparte entre tres personas A, B y C. La parte de A menos la de B es igual a la parte de C. El doble de la parte de C menos la de A es igual a la parte de B mas 10 millones. ¿ Cuanto reciben A, B y C ? Respuesta 100, 30 y 70 millones.

11. Un comerciante compra dos tipos de televisores a un costo de Bs. 250.000. El primero lo vende con una utilidad del 25 % y el segundo con una utilidad del 30 % para obtener unos dividendos de Bs. 69.000 ¿ Cuál es el costo de cada televisor ? Respuesta 120.000 y 130.000.

12. Un Estadium de Futbol tiene una capacidad de 15.000 espectadores, distribuidos en tres tipos de localidades A, B y C. Cuando se llenan las localidades A y B, y la mitad de C entonces hay 14.000 espectadores. Cuando se llenan las localidades B y C, y la mitad de A, entonces hay 10.000 espectadores. ¿ Cuál es el cupo de cada localidad ? Respuesta 10.000, 3.000 y 2.000.

13. Una Sociedad está compuesta por tres socios capitalistas A, B y C. La suma de los capitales de A y B, mas cuatro veces el capital de C alcanzan Bs. 15 millones. Por otro lado, la suma de los capitales de A y B es igual a tres veces el capital de C mas un millón. La mitad del capital de A, mas la suma de los capitales de B y C es igual a 7 millones. ¿ Cuáles son los capitales de A, B y C ? Respuesta 4, 3 y 2 millones.

14. Un agricultor piensa sembrar 150 Hectáreas de papa, apio y zanahoria. La mitad de las tierras dedicadas a papa y apio, las cultivará con zanahorias.

El rendimiento de papa, apio y zanahoria por metro cuadrado es 200, 350 y 120 respectivamente, y el agricultor espera tener un rendimiento total de Bs 36.500.000 ¿ Que área deberá dedicar a cada cultivo ? Respuesta. 30, 70 y 50 hectáreas.

15. Un comerciante compró 150 bombillas de tres tipos en 35.000 Bolívares. El costo de cada tipo de bombilla es 175, 225 y 300. Resultaron 40 bombillas en mal estado: 1/5 del primer tipo, 1/10 del segundo tipo y la mitad del tercer tipo ¿ Que cantidad de bombillas hay de cada tipo? Respuesta 50, 50, y 50.

16. Se construyó una carretra de 100 Kms en tres tramos A, B y C. El costo de cada uno de los tramos por Km. fue Bs 20, 30 y 40 millones, respectivamente y el costo total de la carretera fue de Bs. 3350 millones. El tramo C es igual al doble del tramo B mas 5 Kilómetros. Calcular la longitud de cada tramo. Respuesta 20, 25, 55.