Matemáticas Avanzadas

Dr. **Erick E. Luna Rojero**

Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Universidad Nacional Autónoma de México

2009 (ver. 0.1)
http://basicas.fi-c.unam.mx

Índice general

"Daría todo lo que sé, por la mitad de lo que ignoro"

René Descartes

Parte I

Variable compleja

Objetivo: El alumno manejará los conceptos y los métodos básicos de la teoría de las funciones de variable compleja, para la resolución de problemas de matemáticas e ingeniería.

Capítulo 1

Funciones de variable compleja y mapeos

Números complejos

Definición
Si se postula a la unidad imaginaria como

$$i^2 = -1$$

se puede definir a un número complejo como:

$$z = x + iy,$$

en donde x y y son números reales.
A x se le llama parte real de z

$$x = \mathrm{Re}\,(z)$$

y a y parte imaginaria de z

$$y = \mathrm{Im}\,(z)$$

Igualdad: Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ cumplen que

$$z = w \Leftrightarrow \{a = c \qquad \text{y} \qquad b = d\}$$

Suma: La suma de dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ se define como

$$z + w = (a + c) + i\,(b + d)$$

Multiplicación: La multiplicación de dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ se define como

$$\begin{aligned} zw &= (a + ib)\,(c + id) \\ zw &= (ac - bd) + i\,(ad + bc) \end{aligned}$$

Complejo conjugado: El complejo conjugado de $z = x + iy$ se denota como $\bar{z}$ o z^*, y se define por

$$\bar{z} = z^* = x - iy$$

Módulo o magnitud: El módulo o la magnitud de un número complejo $z = x + iy$ se denota como $|z|$ y se define como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

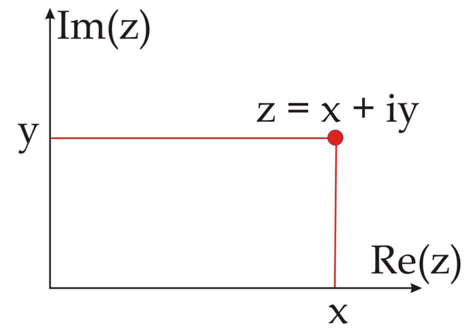
Cociente: El cociente de dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id \neq 0$ se define como:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} \\ \frac{z}{w} &= \frac{ac + db}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Teorema 1 *Sean z y w dos números complejo, entonces*

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= |z|^2 \\ \overline{(z + w)} &= \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{(zw)} &= \overline{z}\overline{w} \\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \end{aligned}$$

Plano de Argand o complejo: Se puede representar geométricamente a un número complejo en un plano de Argand o complejo, $\mathbf{Z}$, éste consiste en dos ejes ortogonales, el horizontal representa a la parte real del número complejo y el vertical a la parte imaginaria.

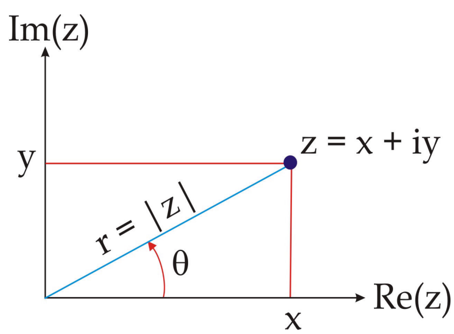


Plano de Argand

Forma polar de un número complejo. Sea $z = x + iy$ un punto en el plano de Argand. Si se define a r como la distancia del origen al punto (x, y) y a θ como el ángulo que forma el eje horizontal con r (ver figura), de argumentos trigonométricos se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} = |z| \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$



Representación polar de un número complejo

entonces

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ z &= |z|\,e^{i\theta} \end{aligned}$$

o en forma simbólica

$$\begin{aligned} z &= r\mathrm{cis}\,(\theta) \\ z &= r\angle\theta. \end{aligned}$$

De las fórmulas se observa que r es la magnitud o módulo de z. A θ se le nombra el argumento de z, y se denota:

$$\theta = \arg(z).$$

Argumento principal: En general θ es cualquier ángulo tal que $\theta = \tan^{-1}(y/x)$, esto es, hay un número infinito de argumentos de z. Para evitar la confusión de tener una función multivaluada se define al argumento principal de z como el θ tal que

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

y se denota:

$$\theta = Arg\,(z)$$

Teorema 2 *Sean z y w dos números complejos* $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |zw| &= |z|\,|w| \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|} \quad \textit{sólo si} \quad w \neq 0 \\ \arg(zw) &= \arg(z) + \arg(w) \\ \arg\left(\frac{z}{w}\right) &= \arg(z) - \arg(w) \\ \arg(z) &= \arg(cz) \quad \textit{si} \quad c > 0 \end{aligned}$$

Potencias enteras de un número complejo: Sea el número complejo $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ entonces

$$z^n = r^n\left\{\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)\right\}$$

donde n es un número entero.

Potencias fraccionarias de un número complejo: Sea el número complejo $z = r[\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta]$ entonces

$$z^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right)\right\}$$

donde $m \geq 1$ es un número entero y

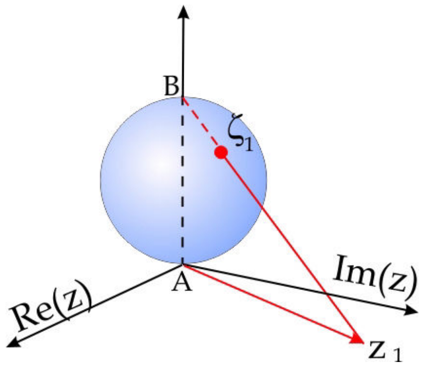
$$k = 0, 1, 2, ..., m - 1.$$

Al igual que en los números reales existen m posibles valores para la raíz $m - \acute{e}sima$ de z.

El número complejo infinito: Definimos al número complejo infinito como el que satisface a

$$\begin{aligned} \frac{z}{\infty} &= 0 \\ z \pm \infty &= \infty : z \neq \infty \\ \frac{z}{0} &= \infty : z \neq 0 \\ z \cdot \infty &= \infty : z \neq 0 \\ \frac{\infty}{z} &= \infty : z \neq \infty. \end{aligned}$$

Esfera de Riemann: Cuando el plano de Argand incluye al punto infinito, se llama plano z extendido. Para entender mejor lo que significa el punto infinito se utiliza la esfera numérica de Riemann. El punto z_1 es proyectado en el punto ζ_1 de la esfera de Riemann con la ayuda de un segmento de recta que une a los puntos B y z_1. El punto $z = 0$ de Argand es el A de la esfera de Riemann y el punto ∞ del plano de Argand es el B de la esfera de Riemann.



Esfera de Riemann

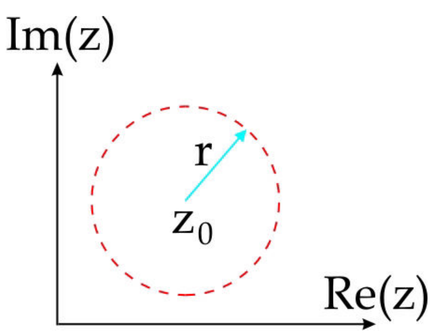
El plano de Argand

Para poder estudiar el cálculo son necesarias las definiciones que a continuación se muestran:

Punto: (.)

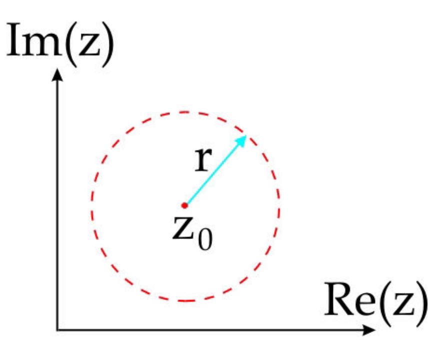
Conjunto: Una colección de puntos en el plano complejo.

Vecindad: Se llama vecindad (o entorno) de radio r, de un punto z_0, al conjunto de puntos situados en el interior de un círculo de radio r centrado en z_0, es decir la región $|z - z_0| < r$



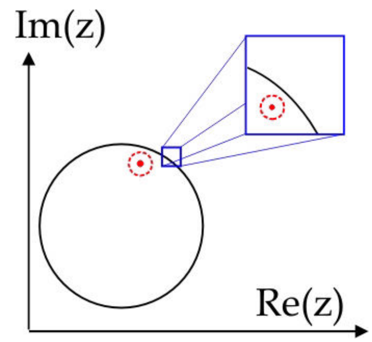
$|z - z_0| < r$

Vecindad punteada: Una vecindad punteada de z_0 es el conjunto de puntos tal que $0 < |z - z_0| < r$



$0 < |z - z_0| < r$

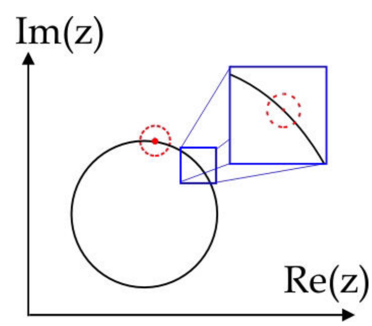
Conjunto abierto: Un conjunto abierto es aquel en el que, para todo elemento, existe una vecindad cuyos puntos pertenecen al conjunto.



Conjunto abierto

Ejemplo.- $|z| < 1$.

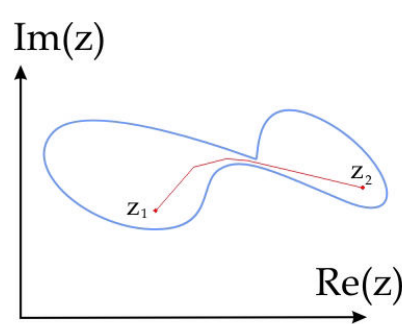
Conjunto cerrado: Un conjunto cerrado es aquel en el que, para al menos un elemento, no existe una vecindad cuyos puntos pertenecen todos al conjunto.



Conjunto cerrado

Ejemplo .- $|z| \leq 1$.

Conjunto conexo: Un conjunto es conexo si dados dos puntos cualesquiera del conjunto, existe una trayectoria formada por segmentos de recta que los une, y cuyos puntos pertenecen al conjunto.

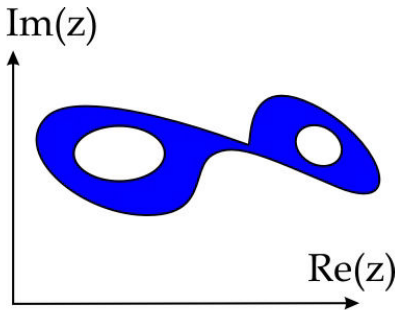


Conjunto conexo

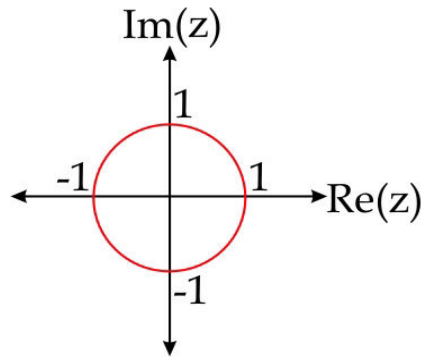
Dominio: Llamamos dominio a un conjunto abierto conexo.

Dominio simplemente conexo: Un dominio sin agujeros.

Dominio multiplemente conexo: Un dominio con agujeros.



Conjunto multiplemente conexo



$|z|=1$

Punto frontera: Es un punto tal que toda vecindad de dicho punto contiene al menos un punto que pertenece al conjunto y otro que no.

Punto interior: Es un punto tal que toda vecindad de dicho punto contiene puntos que pertenece al conjunto.

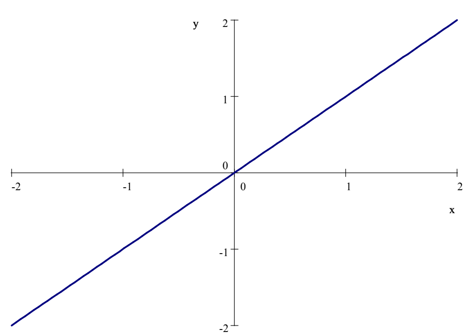
Punto exterior: Es un punto tal que toda vecindad de dicho punto no contiene puntos que pertenece al conjunto.

Región: Es la unión de un dominio y posiblemente algunos, ninguno o todos sus puntos frontera.

Conjunto acotado: Un conjunto para el cual existe un círculo de radio finito que circunscribe al conjunto.

Ejemplos de Regiones en el plano:

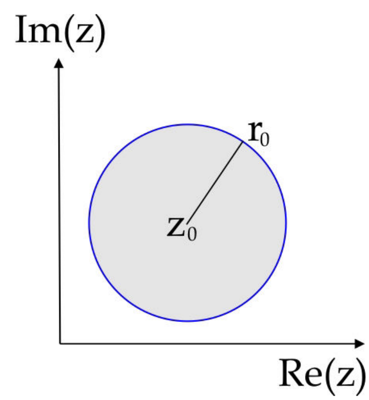
Ejemplos

- 

$\mathrm{Re}\,(z)=\mathrm{Im}\,(z)$

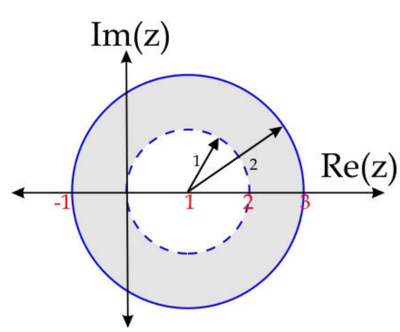
- $|z|=1$, aquí se puede utilizar la definición de módulo, $\sqrt{a^2+b^2}=1$, esto es, $a^2+b^2=1^2$, una circunferencia con centro en el origen y radio 1.

- $|z-z_0|\le r_0$



$|z-z_0|\le r_0$

- $1<|z-1|\le 2$. En la figura se muestra al círculo interno punteado, lo que significa que la región no toca a la frontera, mientras que el círculo externo es continuo, ya que la región incluye a la frontera.



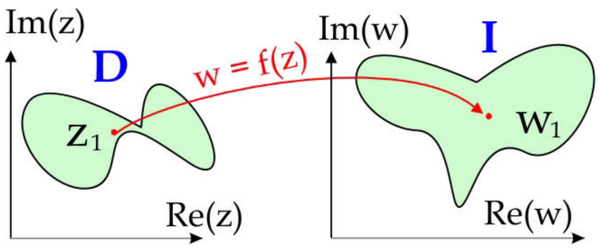
$1<|z-1|\le 2$

Función Compleja

Una función compleja se define como

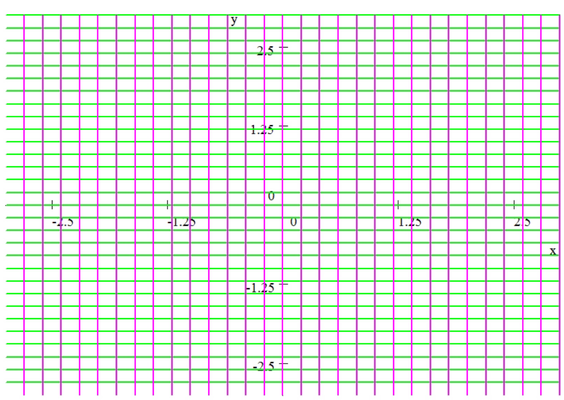
$$w=\{z\in\mathbf{D},w\in\mathbf{I}\,|w=f\,(z)\}$$

En donde **D** es el dominio de la función en el plano **Z**, e **I** es la imagen (rango o recorrido) de la función en el plano $\mathbf{W}$. Decimos que la función mapea el punto $z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbf{D}$ al punto $w_1 = u_1 + iv_1 \in \mathbf{I}$. La gráfica natural de la regla de correspondencia $w = f(z)$ es imposible ya que se requieren cuatro dimensiones, dos para z (una para x y otra para y) y dos para w (una para u y otra para v). Si se quiere analizar gráficamente a una función compleja un método es utilizar dos espacios independientes en dos dimensiones, uno para z y otro para w tal como se muestra en la siguiente figura.

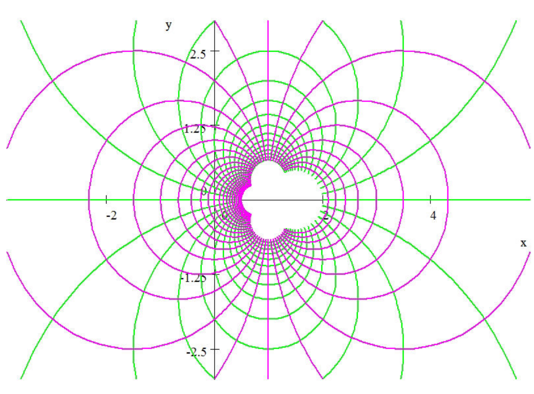


Función compleja $w = f(z)$.

Una forma adecuada de visualizar el mapeo de la función es analizar como se transforman el conjunto de segmentos de líneas $x = C_i$ y $y = C_j$, la figura siguiente representa la cuadrícula que forma estas rectas



Estos segmentos de recta se mapean mediante $f(z)$ al espacio $w = u + iv$. Por ejemplo, la función $f(z) = (z-1)/(z+1)$ mapea a dicha cuadrícula en la siguiente gráfica



Ejemplo

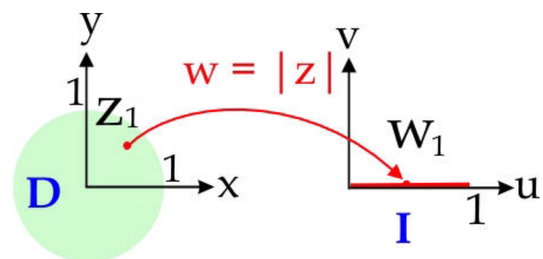
$$\begin{aligned} w &= \{z \in \mathbf{D}, w \in \mathbf{I} : w = |z|\} \\ \mathbf{D} &= \{|z| \leq 1\} \end{aligned}$$

$w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

si tomamos $|z| = 1 = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow w = 1$ y

si $|z| = 0 = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \rightarrow w = 0$,

es decir, la circunferencia unitaria con centro en el origen, se mapea en el segmento de recta de 0 a 1 como se muestra en la figura.



Polinomios

Una de las funciones complejas más simples es el polinomio, esta función tiene la regla de correspondencia:

$$w = f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

donde las a_n son números complejos y n es un número entero positivo. En general los teoremas y propiedades de estas funciones que se estudian en cualquier curso de algebra son válidos para el caso complejo (en realidad en un curso de algebra implícitamente todas las variables y constantes son complejas).

Función exponencial compleja

La función exponencial compleja se define como:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{1.1}$$

De aquí se observa que $\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y$ e $\operatorname{Im}(e^z) = e^x \operatorname{sen} y$. Algunas de las propiedades de esta función se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema 3 *Sean z_1, z_2 y z números complejos* $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{z_1 + z_2} \\ (e^z)^a &= e^{az} \text{ con } a \geq 0 \\ \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{z_1 - z_2} \\ |e^z| &= e^x \\ e^z &\neq 0 : \forall z \\ \arg(e^z) &= y + 2k\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{aligned}$$

Periodicidad de e^z. Aunque la función exponencial real no es periódica, la forma compleja de la exponencial presenta una comportamiento periódico, para mostrar ello tomemos

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^{x+i(y+2k\pi)} \\ &= e^x\left(\cos\left[y+2k\pi\right]+i\,\mathrm{sen}\left[y+2k\pi\right]\right) \\ &= e^x\left(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y\right) \\ e^{z+2k\pi i} &= e^z \end{aligned}$$

por lo tanto la función exponencial es periódica con periódo imaginario $2\pi i$.

Algunos valores de e^z

$$\begin{aligned} e^{0+i0} &= 1 \\ e^{i\pi/2} &= i \\ e^{i\pi} &= -1 \\ e^{i3\pi/2} &= -i \end{aligned}$$

Note que de la tercera igualdad $e^{i\pi}+1=0$, esta igualdad contiene a los cinco números más importantes en matemáticas: $e, i, \pi, 1$ y 0.

Función logaritmo

Definimos, si $z \neq 0$, al logaritmo de z como

$$w = \log z \Leftrightarrow z = e^w \qquad (1.2)$$

De la definición tenemos que

$$\begin{aligned} z &= e^w \\ re^{i\theta} &= e^{u+iv} \\ re^{i\theta} &= e^u e^{iv} \end{aligned}$$

comparando

$$\begin{aligned} e^u &= r \\ e^u &= |z| \\ u &= \ln|z| \\ \mathrm{Re}\,w &= \ln|z| \\ \mathrm{Re}\left(\log z\right) &= \ln|z| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e^{iv} &= e^{i\theta} \\ v &= \theta + 2n\pi : n = 0, \pm1, \pm2, ... \\ v &= \arg\left(z\right) + 2n\pi \\ \mathrm{Im}\,w &= \arg\left(z\right) + 2n\pi \\ \mathrm{Im}\left(\log z\right) &= \arg\left(z\right) + 2n\pi \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} w &= u + iv \\ w &= \ln|z| + i\left(\arg\left(z\right) + 2n\pi\right) \\ \log z &= \ln|z| + i\left[\arg\left(z\right) + 2n\pi\right] \qquad (1.3) \end{aligned}$$

Teorema 4 *Sean z y w números complejos diferentes de cero, r un número racional y n cualquier entero $\Rightarrow$*

$$\begin{aligned} e^{\log(z)} &= z \\ \log\left(e^z\right) &= z + 2n\pi i \\ \log\left(zw\right) &= \log z + \log w \\ \log\left(\frac{z}{w}\right) &= \log z - \log w \\ \log\left(z^r\right) &= r\log z \end{aligned}$$

Logaritmo principal: La ecuación 1.3 representa a un conjunto infinito de números complejos, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$, para poder definir a una función compleja (por lo tanto univaluada) tomamos sólo al argumento principal de $\log z$, y obtenemos el logaritmo principal de $\log z$, que denotamos por $\mathbf{Log}\,(z)$:

$$\mathbf{Log}\left(z\right) = \ln|z| + i\mathbf{Arg}\left(z\right) \qquad (1.4)$$

Funciones trigonométricas

Definimos al seno y coseno imaginarios como:

$$\mathrm{sen}\left(z\right) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (1.5)$$

$$\cos\left(z\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (1.6)$$

además

$$\tan\left(z\right) = \frac{\mathrm{sen}\left(z\right)}{\cos\left(z\right)} \qquad (1.7)$$

$$\sec\left(z\right) = \frac{1}{\cos\left(z\right)} \qquad (1.8)$$

$$\csc\left(z\right) = \frac{1}{\mathrm{sen}\left(z\right)} \qquad (1.9)$$

$$\cot\left(z\right) = \frac{\cos\left(z\right)}{\mathrm{sen}\left(z\right)} \qquad (1.10)$$

Propiedades

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{sen}^2\left(z\right) + \cos^2\left(z\right) \\ 1 + \tan^2\left(z\right) &= \sec^2\left(z\right) \\ \mathrm{sen}\left(2z\right) &= 2\,\mathrm{sen}\left(z\right)\cos\left(z\right) \\ \mathrm{sen}\left(z \pm w\right) &= \mathrm{sen}\left(z\right)\cos\left(w\right) \pm \cos\left(z\right)\mathrm{sen}\left(w\right) \\ \cos\left(z \pm w\right) &= \cos\left(z\right)\cos\left(w\right) \mp \mathrm{sen}\left(z\right)\mathrm{sen}\left(w\right) \\ \cos\left(2z\right) &= \cos^2\left(z\right) - \mathrm{sen}^2\left(z\right) \end{aligned}$$

Periodicidad de las funciones trigonométricas: Las funciones seno y coseno son periódicas con periódo real 2π, es decir:

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\left(z\right) &= \mathrm{sen}\left(z + 2\pi n\right) \\ \cos\left(z\right) &= \cos\left(z + 2\pi n\right) \end{aligned}$$

Ejercicios

Ejercicios en clase

1. Estudie la forma en que $w = \sin z$ transforma a la franja $y \geq 0$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

2. Demuestre que la transformación $w = 1/z$ transforma a la recta infinita $\mathbf{Im}z = 1$ en un círculo en el plano w. Encuentre la ecuación del círculo.

3. Determine la imagen del arco semicircular $|z| = 1$, $0 \leq arg z \leq \pi$, bajo la transformación $w = z + 1/z$. *Sugerencia: tome* $z = e^{i\theta}$.

4. Identificar las imágenes de $\cos z$ de las rectas paralelas al eje real.

5. Determine la imagen de la banda $1 \leq y \leq 2$ en el plano z bajo la transformación $w = z^2$.

Tarea

1. Demuestre que

$$\begin{aligned} \overline{(z_1 - z_2)} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{aligned}$$

2. Sea n un número entero $n \geq 0$. Encuentre el módulo de

$$\left(\frac{x + iy}{x - iy}\right)^n$$

3. Encuentre la forma $a + ib$ de un número complejo con $r = 2$ y $\theta = 3$.

4. Escriba a las siguientes expresiones en la forma $a + ib$

$$\begin{aligned} & i^{1/2} \\ & (1 - i)^{1/2} \end{aligned}$$

5. Describa con una relación matemática, a los puntos que pertenecen a la circunferencia y al interior del círculo de radio 2 y centro en $3 + 4i$, excepto en el centro del círculo.

6. Escriba a las siguientes funciones en la forma $u + iv$:

$$\begin{aligned} & (z - i)^2 \\ & (\bar{z})^{-2} + i \end{aligned}$$

7. Escriba en términos de z y $\bar{z}$ a:

$$\begin{aligned} w &= -2xy + i\left(x^2 - y^2\right) \\ w &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

8. Determinar todos los valores tales que $e^{iz} = 2$.

9. Si $\cos z = 2$ obtener $\cos 2z$.

10. Emplee logaritmos para resolver z en:

$$\begin{aligned} \left(e^z - 1\right)^2 &= e^z \\ e^z &= e^{2z} \end{aligned}$$

11. Estudie la forma en que el conjunto $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)$ se transforma mediante $w = \sin(z)$.

12. Estudie la forma en que $w = e^z$ transforma a la región $0 \leq y \leq \pi/2$ y $0 \leq x \leq 1$

13. Determine la imagen de $|z| = 1$, bajo la transformación $w = z^2 + 2 + 1/z^2$.

14. Identificar las imágenes de $w = z + z^2$ de las rectas paralelas al eje real.

Capítulo 2

Funciones analíticas y mapeos conformes

Límites

Sean una función compleja $f(z)$ y una constante compleja L. Si para todo número real $\epsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - L| < \epsilon$$

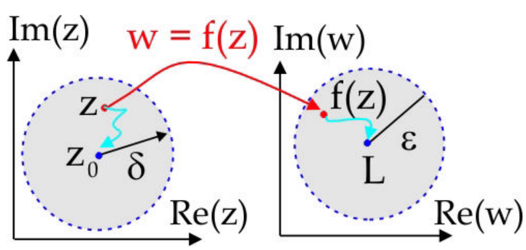
para todo z tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

entonces decimos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

es decir, que $f(z)$ tiene límite L cuando z tiende a z_0.



Límite complejo

Es fácil notar que la definición de límite real y límite complejo son muy similares, sin embargo, existen diferencias entre ellas. Para ilustrar lo anterior recuerde que en el caso real si los límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales, entonces el límite existe. Por otro lado, en el caso complejo, no hay sólo dos direcciones, sino un número infinito de trayectorias por las cuales z tiende a z_0, y para que el límite exista, todos estos límites deberán existir y ser iguales.

Teorema 5 *Suponga que*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \quad y \quad \lim_{z \to z_0} g(z) \quad existen \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] &= \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) \\
\lim_{z \to z_0} [\alpha f(z)] &= \alpha \lim_{z \to z_0} f(z) : \forall \alpha \\
\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] &= \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) \\
\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] &= \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} \; si \; \lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0
\end{aligned}$$

Ejemplo

Analice al siguiente límite

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \left[\frac{x^2 + x}{x + y} + i\frac{y^2 + y}{x + y}\right]$$

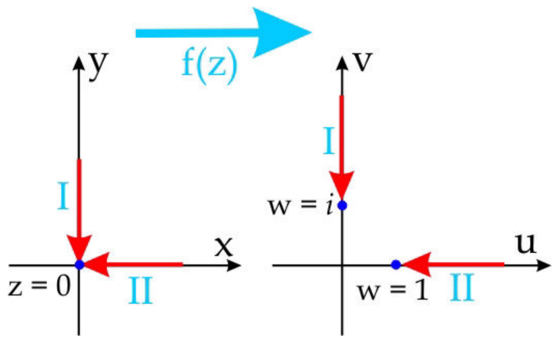
tomemos dos trayectorias, la primera a lo largo del eje y acercándose por arriba, sobre esta trayectoria $x = 0$ y el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 0} f(z) &= \lim_{y \to 0} \left[i\frac{y^2 + y}{y}\right] \\
&= \lim_{y \to 0} [i(y + 1)] = i
\end{aligned}$$

la segunda a lo largo del eje x acercándose por la derecha, sobre esta trayectoria $y = 0$ y el límite.

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+x}{x}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}[x+1] = 1
\end{aligned}
$$

como los límites por diferentes trayectorias son diferentes el límite no existe.



El límite no existe

Continuidad

Decimos que una función $w = f(z)$ es continua en $z = z_0$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. $f(z_0)$ está definido
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)\ \exists$, y $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Teorema 6 *Sean $f(z)$ y $g(z)$ continuas en z_0, entonces en z_0*

$$
\begin{aligned}
&f(z) \pm g(z), \\
&f(z)\, g(z), \\
&f[g(z)] \ \ y \\
&|f(z)|
\end{aligned}
$$

son continuas y

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

es continua si $g(z_0) \neq 0$,
además si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces

$$u(x,y) \ \ y \ v(x,y)$$

son continuas.

Ejemplo
Estudie la continuidad en $z = i$ de la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+1}{z-i} & z \neq i \\ 3i & z = i \end{cases}$$

Primero se analiza si $f(z_0)$ existe, para este problema $f(i) = 3i$, lo que sigue es encontrar el límite

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i} \\
=\ &\lim_{z\to i}\frac{z^2-i^2}{z-i} \\
=\ &\lim_{z\to i}\frac{(z+i)(z-i)}{z-i} \\
=\ &\lim_{z\to i}(z+i) \\
=\ &2i
\end{aligned}
$$

aunque el límite existe tenemos que,

$$\left(\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i} = 2i\right) \neq (f(i) = 3i)$$

por lo tanto no es continua.

Derivada compleja

Dada una función de variable compleja $f(z)$, la derivada en z_0, se define como:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0} \\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}
\end{aligned}
$$

siempre y cuando el límite exista. La definición anterior es muy similar al caso real, sin embargo, se debe tener cuidado ya que el límite complejo, es más complicado de obtener. El problema de la existencia de la derivada se estudiará más adelante.

Teorema 7 *Si f y g son funciones derivables en $z_0 \Rightarrow$*

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(\alpha f)' &= \alpha f' \\
(f\cdot g)' &= fg' + f'g \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{gf' - fg'}{g^2} : g \neq 0 \\
\frac{df[g(z)]}{dz} &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Si $f(z) = z^n$,

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

Ejemplo
Sea $f(z) = \bar{z}$, pruebe que $f'(i) \nexists$.
La definición de la derivada es:

$$\begin{aligned} f'(i) &= \lim_{z\to i} \frac{\bar{z} - (-i)}{z - i} \\ f'(i) &= \lim_{z\to i} \frac{\bar{z} + i}{z - i} \end{aligned}$$

para analizar este límite utilizaremos dos trayectorias diferentes:

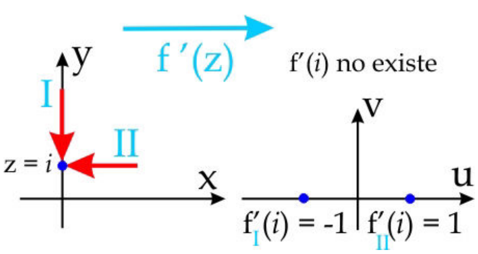
la primera sobre el eje imaginario, aquí, $x = 0$, entonces el límite es

$$\begin{aligned} f'(i) &= \lim_{z\to i} \frac{x - iy + i}{x + iy - i} \\ &= \lim_{y\to 1} \frac{-iy + i}{iy - i} \\ &= -\lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

a la segunda trayectoria la definimos como la recta horizontal $y = 1$, en este caso el límite

$$\begin{aligned} f'(i) &= \lim_{z\to i} \frac{x - iy + i}{x + iy - i} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - i + i}{x + i - i} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

como ambos límites tienen diferentes valores, la derivada no existe.



La derivada no existe

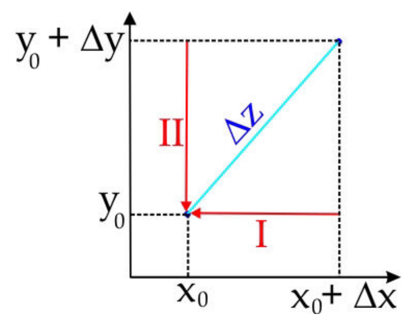
Ecuaciones de Cauchy-Riemann-(D'Alembert)

Como se mostró en ejemplos anteriores probar que la derivada existe apartir de un límite es complicado, aún en funciones sencillas. En esta sección se estudia una manera simple de probar si la derivada existe y cómo calcularla.

Suponga que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ tiene derivada en $z_0 = x_0 + iy_0$, es decir,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \exists,$$

en donde el incremento es $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Si se toma el límite por dos diferentes trayectorias como se muestra en la figura



Se toman dos diferentes trayectorias

para la trayectoria I, $y = y_0$, $\Delta y = 0$ y $\Delta z = \Delta x$, entonces la derivada

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\begin{array}{c} u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) \\ -u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) \end{array}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \left\{ \begin{array}{c} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + \\ i\frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x} \end{array} \right\} \\ f'(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x_0,y_0} \end{aligned}$$

para la trayectoria II, $x = x_0$, $\Delta x = 0$ y $\Delta z = i\Delta y$, entonces la derivada

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\begin{array}{c} u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) \\ -u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) \end{array}}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \left\{ \begin{array}{c} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + \\ i\frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{i\Delta y} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \left\{ \begin{array}{c} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + \\ i\frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{i\Delta y} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \left\{ \begin{array}{c} -i\frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{\Delta y} + \\ \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta y} \end{array} \right\} \\ &= \left(-i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x_0,y_0} \end{aligned}$$

Si la derivada existe los límites son iguales:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

o bien,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2}$$

Las ecuaciones 2.1 y 2.2 se conocen como las ecuaciones de **Cauchy-Riemann**, si estas ecuaciones no son válidas en algún punto, la derivada no existe en ese punto, es decir, sólo son condición necesaria, pero no suficiente, para que la derivada exista.

Teorema 8 *Si tanto u y v como sus primeras derivadas parciales $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ son continuas en alguna vecindad de z_0, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condición suficiente para que la derivada exista. El valor de la derivada es:*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Forma polar de las ecuaciones 2.1 y 2.2

Algunas veces es más fácil utilizar la forma polar de una función compleja, en este caso las ecuaciones de Cauchy-Riemann tienen la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{2.4}$$

Ejemplo

En donde es diferenciable $|z|^2$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

entonces

$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\right) &= \left(\frac{\partial v}{\partial y} = 0\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} = 0\right) &= \left(-\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\right) \end{aligned}$$

u, v y sus derivadas son continuas en todo el plano, y las ecuaciones de Cauchy-Riemann sólo se cumplen en el origen, entonces la derivada existe únicamente en el origen y su valor es

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Teorema 9 ***Regla de L'Hôpital.*** *Si $g(z_0) = 0$ y $h(z_0) = 0$, y si $g(z)$ y $h(z)$ son diferenciables en z_0 con $h'(z_0) \neq 0$*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Funciones Analíticas

Decimos que una función $f(z)$ es **analítica** en z_0 si $f'(z)$ no sólo existe en z_0, sino en todo punto de alguna vecindad de z_0. Si la función es analítica en todo el plano complejo decimos que la función es **entera**.

Si una función no es analítica en z_0, pero es analítica en al menos un punto de toda vecindad de z_0, decimos que z_0 es una **singularidad** de la función.

Teorema 10 *Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas en alguna región, entonces también son analíticas*

$$\begin{aligned} & f(z) \pm g(z) \\ & f(z) \cdot g(z) \\ & f[g(z)] \\ & \frac{f(z)}{g(z)} \ \ si \ \ (g(z) \neq 0) \end{aligned}$$

para la misma región.

Ejemplo

Un polinomio es entero

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0$$

y una función racional

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z^1 + b_0}$$

es analítica excepto en los puntos para los que

$$b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z^1 + b_0 = 0$$

Funciones armónicas

Considere el siguiente problema, dada una función real $\phi(x, y)$, bajo que condiciones puede ser parte real o imaginaria de una función analítica?, es decir,

$$\begin{aligned} f(z) &= \phi(x,y) + iv(x,y) \\ &\text{ó} \\ f(z) &= u(x,y) + i\phi(x,y) \end{aligned}$$

para contestar a esta pregunta considere una función analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Si es analítica, u y v satisfacen la ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.6}$$

Si diferenciamos a la ecuación 2.5 respecto a x y a la 2.6 respecto a y, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Si consideramos que la función v y sus derivadas son continuas, podemos invertir el orden de derivación de los lados derechos de la ecuaciones anteriores, si sumamos ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \nabla^2 u &= 0 \end{aligned}$$

la ecuación anterior se conoce como la **Ecuación de Laplace**

Con un procedimiento similar podemos obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \\ \nabla^2 v &= 0 \end{aligned}$$

Función Armónica

Decimos que una función $\phi(x,y)$ es armónica en un dominio, si para dicho dominio se satisface la ecuación de Laplace, es decir,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Ejemplo

La función $\phi(x,y) = x^2 - y^2$, es armónica:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2\right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\right) = 0$$

Teorema 11 *Si una función es analítica en cierto dominio, su parte real y su parte imaginaria son funciones armónicas en dicho dominio.*

Teorema 12 *Dada una función real $\phi(x,y)$ armónica en un dominio simplemente conexo D, existe una función analítica en D cuya parte real es igual a $\phi(x,y)$. De manera similar existe una función analítica en D cuya parte imaginaria es igual a $\phi(x,y)$.*

Función Armónica Conjugada

Dada una función armónica $u(x,y)$, decimos que $v(x,y)$ es la función armónica conjugada de $u(x,y)$ si $u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica.

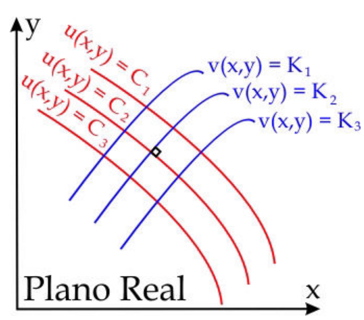
Teorema 13 *Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica y sean $C_1, C_2, C_3, ...$ y $K_1, K_2, K_3, ...$, constantes reales. La familia de curvas en el plano xy (real) para las que*

$$u = C_i$$

es ortogonal a la familia de curvas tales que

$$v = K_i,$$

es decir, una curva de una de las familias interseca a una curva de la otra familia a 90^o, salvo quizá en puntos en que $f'(z) = 0$.



Ortogonalidad funciones armónicas conjugadas

Ejemplo

Demuestre que $\phi = x^3 - 3xy^2 + 2y$ puede ser parte real de una función analítica, encuentre la parte imaginaria y verifique que forman familias ortogonales.

Si es armónica puede ser parte real o imaginaria de una función analítica

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6x\right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -6x\right) = 0$$

para encontrar la parte imaginaria utilizamos las ecuaciones Cauchy-Riemann con $u = \phi = x^3 - 3xy^2 + 2y$, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= 6xy - 2 = \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2-3y^2\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy-2\end{aligned}$$

este sistema de ecuaciones lo podemos integrar, para ello tomamos la primera ecuación, e integramos

$$\begin{aligned}v &= \int\left(3x^2-3y^2\right)\partial y\\ v &= 3x^2y-y^3+C\left(x\right)\end{aligned}$$

si ahora sustuimos este resultado en la segunda ecuación

$$\begin{aligned}6xy+\frac{dC\left(x\right)}{dx} &= 6xy-2\\ \frac{dC\left(x\right)}{dx} &= -2\\ C\left(x\right) &= -2x+c\end{aligned}$$

entonces,

$$v=3x^2y-y^3-2x+c.$$

Sean las familias de curvas

$$\begin{aligned}u &= x^3-3xy_u^2+2y_u=C_i\\ v &= 3x^2y_v-y_v^3-2x+c=K_i\end{aligned}$$

si derivamos con respecto a x

$$\begin{aligned}3x^2-3y_u^2-6xy_u\frac{dy_u}{dx}+2\frac{dy_u}{dx} &= 0\\ 3x^2\frac{dy_v}{dx}+6xy_v-3y_v^2\frac{dy_v}{dx}-2 &= 0\end{aligned}$$

despejando a las derivadas

$$\begin{aligned}\frac{dy_u}{dx} &= \frac{3y_u^2-3x^2}{2-6xy_u}\\ \frac{dy_v}{dx} &= -\frac{2-6xy_u}{3y_u^2-3x^2}\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{dy_u}{dx}=-\left(\frac{dy_v}{dx}\right)^{-1}$$

por lo tanto son ortogonales.

Derivadas de funciones importantes

Función exponencial

Analiticidad de e^z

La función e^z se puede expresar como

$$e^z=e^x\cos y+ie^x\operatorname{sen} y$$

entonces

$$\begin{aligned}u &= e^x\cos y\\ v &= e^x\operatorname{sen} y\end{aligned}$$

y las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\operatorname{sen} y\end{aligned}$$

se satisfacen para todo x y y, entonces como u y v y sus derivadas son continuas en todo el plano, la función e^z es analítica en todo el plano complejo, es decir, es función entera.

Derivada de e^z

La derivada de e^z la podemos obtener de

$$\begin{aligned}\frac{de^z}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= e^x\cos y+ie^x\operatorname{sen} y\\ &= e^x\left(\cos y+i\operatorname{sen} y\right)\\ \frac{de^z}{dz} &= e^z\end{aligned}$$

Funciónes trigonométricas

Analiticidad de las funciones trigonométricas

Las funciones $\operatorname{sen}\left(z\right)$ y $\cos\left(z\right)$ son analíticas por ser suma de funciones analíticas del tipo e^z.

Las funciones 1.7, 1.8, 1.9 y 1.10 son analíticas si el denominados es diferente de cero.

Derivadas de las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\frac{d\operatorname{sen}\left(z\right)}{dz} &= \cos\left(z\right)\\ \frac{d\cos\left(z\right)}{dz} &= -\operatorname{sen}\left(z\right)\\ \frac{d\tan\left(z\right)}{dz} &= \sec^2\left(z\right)\\ \frac{d\sec\left(z\right)}{dz} &= \tan\left(z\right)\sec\left(z\right)\\ \frac{d\csc\left(z\right)}{dz} &= -\cot\left(z\right)\csc\left(z\right)\end{aligned}$$

Función logaritmo

Podemos utilizar la forma polar de $\mathbf{Log}\left(z\right)$ para estudiar su analiticidad, para ello utilizamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar (ecuaciones 2.3 y 2.4).

$$\mathbf{Log}\,(z) = \ln r + i\theta,$$

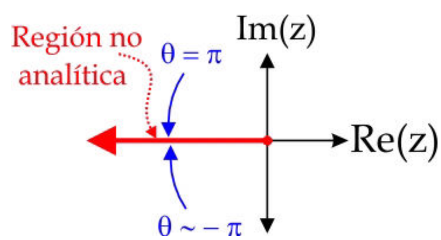
es decir,

$$\begin{aligned} u &= \ln r \\ v &= \theta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\right] &= \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\right] \\ \left[\frac{\partial v}{\partial r} = 0\right] &= \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0\right] \end{aligned}$$

por lo tanto se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Reimann en todo el plano complejo excluyendo al origen. Por otro lado, las funciones u, v y sus derivadas, son continuas en todo el plano excepto sobre la parte negativa del eje imaginario, la razón de ello es que existe un salto de θ al cruzar esta parte del eje, si nos acercamos por abajo de él la función tiende a $-\pi$, y por arriba a π, esto es, hay una discontinuidad de tamaño 2π. Finalmente, podemos concluir que la región de analiticidad de $\mathbf{Log}\,(z)$, es la zona del plano complejo que excluye al origen y a la parte negativa del eje real.



Región de analiticidad de Log(z)

Derivada de Log (z): Para calcular la derivada de $\mathbf{Log}\,(z)$, partimos de

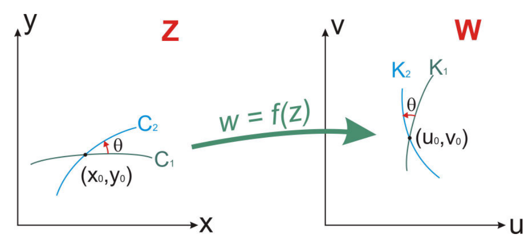
$$\begin{aligned} z &= e^{w} \\ \frac{dz}{dz} &= \frac{de^{w}}{dw}\frac{dw}{dz} \\ 1 &= e^{w}\frac{dw}{dz} \\ \frac{dw}{dz} &= e^{-w} \\ \frac{dLog\,(z)}{dz} &= e^{-Log(z)} \\ \frac{d}{dz}\left[Log\,(z)\right] &= e^{Log\left(\frac{1}{z}\right)} \\ \frac{d}{dz}\left[Log\,(z)\right] &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

entonces la derivada del logaritmo complejo existe en su región de analiticidad y su valor es

$$\frac{d}{dz}\left[Log\,(z)\right] = \frac{1}{z} \qquad (2.8)$$

Mapeo conforme

Sea la función analítica $f\,(z) = u\,(x,y) + iv\,(x,y)$ que define una correspondencia entre los puntos de los espacios Z (plano (x,y)) y W (plano (u,v)). Suponga que el punto (u_0, v_0) es la imagen del punto (x_0, y_0), suponga además que las curvas $C_1\,(x,y)$ y $C_2\,(x,y)$ se intersecan en (x_0, y_0) y tienen curvas imágen $K_1\,(u,v)$ y $K_2\,(u,v)$ respectivamente (las cuales se cortan en (u_0, v_0) en el espacio imagen). Entonces se dice que el mapeo es conforme en (x_0, y_0) si el ángulo entre $C_1\,(x,y)$ y $C_2\,(x,y)$ es igual tanto en dirección como en sentido al ángulo entre $K_1\,(u,v)$ y $K_2\,(u,v)$.



Mapeo isogonal

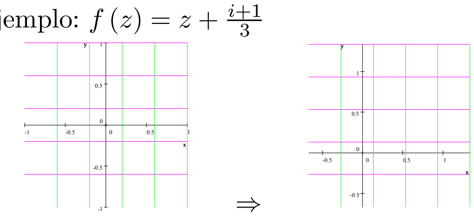
Cuando en un mapeo las curvas $K_1\,(u,v)$ y $K_2\,(u,v)$ sólo conservan la magnitud pero no el ángulo de $C_1\,(x,y)$ y $C_2\,(x,y)$ se dice que el mapeo es isogonal.

Algunos mapeos

Traslación: Un mapeo de este tipo desplaza o traslada a la región mapeada en dirección β :

$$w = z + \beta$$

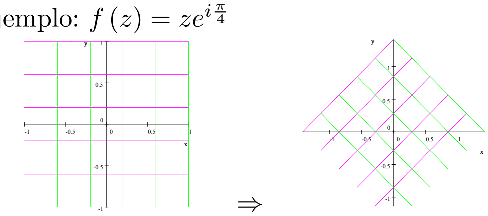
Ejemplo: $f\,(z) = z + \frac{i+1}{3}$



Rotación: Con este mapeo la región en el plano Z gira un ángulo θ_0 :

$$w = e^{i\theta_0} z$$

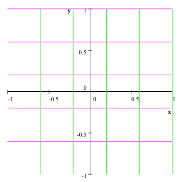
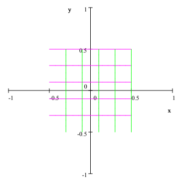
Ejemplo: $f\,(z) = ze^{i\frac{\pi}{4}}$



Alargamiento: Con esta transformación las figuras en el plano Z se alargan ($a > 1$) o contraen ($a < 1$):

$$w = az$$

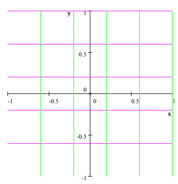
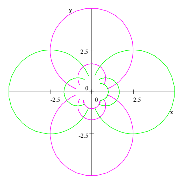
Ejemplo: $f(z) = \frac{z}{2}$

 $\Rightarrow$ 

Inversión:

$$w = \frac{1}{z}$$

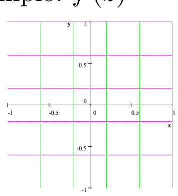
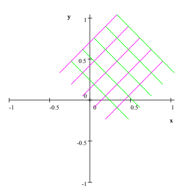
Ejemplo: $f(z) = \frac{1}{z}$

 $\Rightarrow$ 

Transformación lineal: Es una combinación de traslación, rotación y alargamiento, dependiendo de los valores de α y β :

$$w = \alpha z + \beta$$

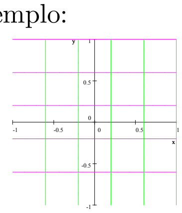
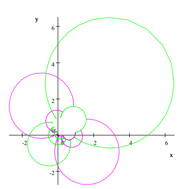
Ejemplo: $f(z) = \frac{ze^{i\frac{\pi}{4}}}{2} + \frac{i+1}{3}$

 $\Rightarrow$ 

Transformación fraccional: Una combinación de traslación, rotación, alargamiento e inversión:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ con } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Ejemplo:

 $\Rightarrow$ 

Tarea

1. ¿Es la siguiente función continua en $z = 3i$?

$$f(z) = \begin{cases} (z^2+9)/(z-3i), & z \neq 3i \\ 6i, & z = 3i \end{cases}$$

2. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Suponga que existe la segunda derivada $f''(z)$. Compruebe que

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

y

$$f''(z) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

3. ¿En que regiones del plano son analíticas las siguientes funciones?. Si existe la derivada encuentre su valor.

$$\begin{aligned} f(z) &= 2z^2+3 \\ f(z) &= z+z^{-1} \\ f(z) &= -xy+\frac{i}{2}\left(x^2-y^2\right) \\ f(z) &= \frac{z^2}{e^x cosy + ie^x seny} \end{aligned}$$

4. En donde es analítica la función:

$$f(z) = r\cos\theta + ir$$

5. ¿Para cuáles valores de n la función $x^n - y^n$ es armónica?

6. ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas?,¿En qué dominio?

$$\begin{aligned} \phi &= x+y \\ \phi &= \frac{y}{x^2+y^2} \\ \phi &= e^{x^2-y^2} \end{aligned}$$

7. Determinar la región de analiticidad de la función

$$f(z) = \cos(\bar{z})$$

8. Sea $\phi = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$. Compruebe que podría ser parte real o imaginaria de alguna función analítica. Si ϕ es la parte real de $f(z)$ encuentre la parte imaginaria. Si ϕ es la parte imaginaria de $f(z)$ encuentre la parte real.

9. Sea

$$f(z) = e^{z^2+1}$$

demostrar que es entera y encontrar su derivada.

10. Sea $f(z)$ una función entera. Si

$$f'(z) = \left(6x^2 - 6y^2 - 2x + 3\right) + i\left(12xy - 2y\right)$$

con $f(0) = 2 - i$. Encuentre $f(z)$. Calcular $f''(2-i)$.

11. Suponga que $f(z) = u + iv$ es analítica y que $g(z) = v + iu$ también lo es. Demuestre que u y v deben ser constantes.

12. Suponga que $f(z) = u + iv$ es analítica y que $\bar{f}(z) = u - iv$ también lo es. Demuestre que u y v deben ser constantes.

13. Encuentre a una función armónica conjugada de

$$e^x \cos y + e^y \cos x + xy$$

14. Demostrar que la función

$$f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

es analítica en todo el plano complejo y que

$$f''(z) = -f(z)$$

15. Para la función $f(z) = (z+i)^2$, demostrar que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2$$

en donde este último es el jacobiano de la transformación

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

Capítulo 3

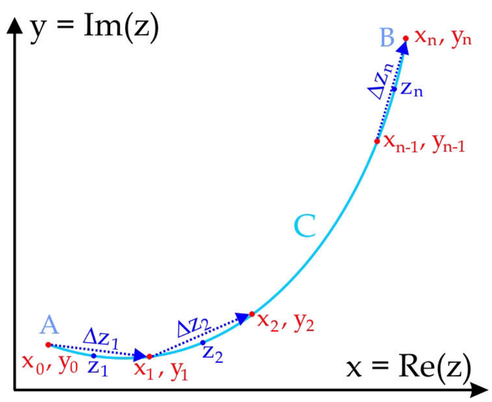
Integral de línea de funciones de variable compleja

Integral de línea compleja

La clase de integral que aparece con más frecuencia en variable compleja es la integral de línea compleja.

Curva suave a trozos

Una curva suave a trozos es una trayectoria formada por un número finito de arcos suaves concatenados.



Curva suave sobre la que se integra $f(z)$

Definimos la integral de línea como

$$\int_C f(z)\,dz = \int_A^B f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k \tag{3.1}$$

Definición

Sea la curva suave C, que va de A hasta B en el plano complejo, se divide la curva en n arcos como se muestra en la figura, los puntos de unión tiene coordenadas (x_0, y_0), (x_1, y_1), ...,(x_n, y_n). En donde la variable compleja toma los valores $z_1, z_2, ..., z_n$. Los incrementos en z se relacionan con x y y.

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

si $n \to \infty$, $\Delta z_k \to 0$

Para evaluar esta integral de línea compleja tenemos que:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ dz &= dx + idy \end{aligned}$$

y además

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

sustituyendo en la integral 3.1

$$\begin{aligned}\int_A^B f(z)\,dz &= \int_C [u(x,y) + iv(x,y)](dx + idy) \\ &= \int_C udx - \int_C vdy + \\ & \quad i\left[\int_C udy + \int_C vdx\right]\end{aligned} \tag{3.2}$$

es decir, a la integral de línea compleja la convertimos cuatro integrales de línea reales.

Integración paramétrica

Otro método para calcular la integral es utilizar técnicas de integración paramétrica. Sea C la curva sobre la que hay que integrar, usamos al parámetro t para describir a la curva

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t) \text{ con } t_a \leq t \leq t_b \tag{3.3}$$

entonces sobre la curva

$$z(t) = x(t) + iy(t) \tag{3.4}$$

y

$$f(z) = f[z(t)] \tag{3.5}$$

y el diferencial dz en términos de dt

$$dz = \frac{dz}{dt}dt \tag{3.6}$$

entonces la integral compleja

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_a}^{t_b} f[z(t)]\,\frac{dz}{dt}dt, \tag{3.7}$$

se convierte en una integral real simple de la variable t.

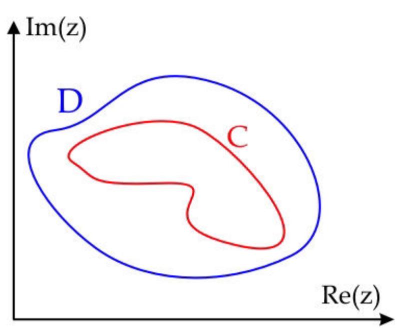
En general existen diferentes formas de elegir a 3.3, la facilidad de hacer la integral depende en gran medida de tal elección.

Capítulo 4

Teorema integral de Cauchy-Goursat

Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D. Si C es cualquier curva cerrada simple en $D \Rightarrow$

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{4.1}$$



D es un dominio simplemente conexo y $C \in D$.

Demostración: Para demostrar lo anterior se hace uso del teorema de Green en dos dimensiones, el cual sólo se enuncia a continuación:

Teorema de Green ($\Re^2$). *Si C es una curva cerrada simple que encierra a una región A en el plano y $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones continuas con derivadas parciales continuas, entonces:*

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \int\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Por otro lado, sea la integral compleja

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \oint_C (u+iv)(dx+idy) \\ &= \oint_C (udx + (-v)\,dy) \\ &\quad +i\oint_C (vdx + udy)\end{aligned}$$

aplicando el teorema de Green a las dos integrales se tiene que:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \int\int_A \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \\ &\quad +i\int\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy\end{aligned}$$

Si la función es analítica sobre y dentro de C, para todo el dominio de integración A se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Entonces en la última integral se tiene que

$$\oint_C f(z)\,dz = \int\int_A 0dxdy + i\int\int_A 0dxdy$$

o bien

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

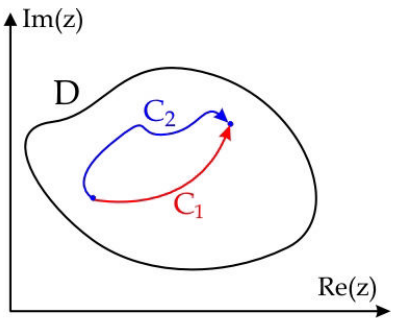
Corolarios

Independencia de la trayectoria

Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D y que z_0 y $z_1 \in D$. Sean C_1 y C_2 curvas desde z_0 a z_1 en $D \Rightarrow$

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz, \tag{4.2}$$

es decir, $\oint f(z)\, dz$ es independiente de la trayectoria por lo que podemos escoger la trayectoria más fácil de integrar.



Independencia de la trayectoria

Antiderivada

Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D. $\Rightarrow$ existe una función $F(z)$ que es analítica en D, tal que para $z \in D$

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z) \tag{4.3}$$

con este resultado,

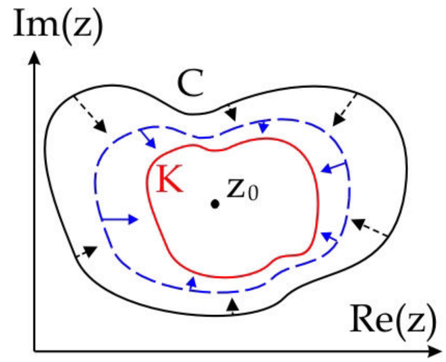
$$\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{dF(z)}{dz} dz \\
&= \int_{z_1}^{z_2} dF \\
&= F(z_2) - F(z_1)
\end{aligned}$$

Deformación

Decimos que dos curvas C y K son homotópicas si podemos deformar a C hasta llegar a K (o K hasta llegar a C) de manera continua, es decir, sin pasar por puntos no analíticos.

Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D excepto en z_0, sean C y K dos curvas homotópicas que encierran a $z_0 \Rightarrow$

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_K f(z)\, dz \tag{4.4}$$



Teorema de la deformación

Capítulo 5

Fórmulas integrales de Cauchy

Un corolario adicional al teorema integral de Cauchy se conoce como la fórmula integral de Cauchy. Dicho corolario es tan importante que enuncia de manera separada.

Fórmula integral de Cauchy

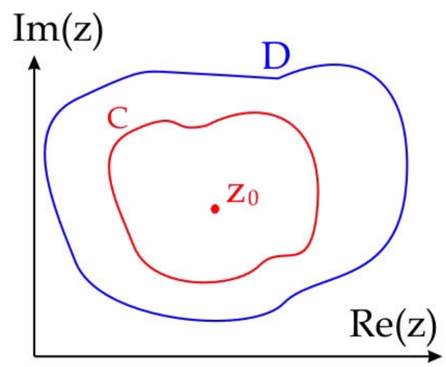
Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea z_0 cualquier punto de D y sea C cualquier curva cerrada simple en D que encierra a z_0. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

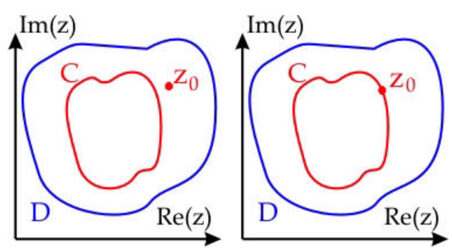
es decir, la función en z_0, esta relacionada con la función en C, este es un resultado muy importante en variable compleja. Se puede utilizar este resultado para calcular integrales si lo ponemos como

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \tag{5.1}$$

La ecuación 5.1 se conoce como la fórmula integral de Cauchy y es una herramienta muy poderosa para calcular integrales.



El punto z_0 está dentro de C



No se aplica la fórmula de Cauchy

Derivadas de funciones analíticas

Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea z_0 cualquier punto de D y sea C cualquier curva cerrada simple en D que encierra a z_0. Entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

es decir, no sólo la función en z_0, esta relacionada con la función en C, sino sus derivadas. Este resultado se puede utilizar para calcular integrales si lo reordenamos

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \tag{5.2}$$

La ecuación 5.2 se conoce como la fórmula integral de Cauchy para derivadas superiores y es una herramienta muy poderosa para calcular integrales.

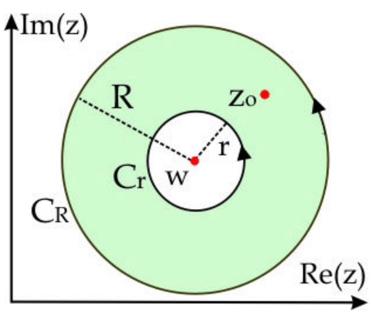
Extensión de la fórmula integral de Cauchy para una anillo

Un **anillo** con centro en w es un dominio acotado D, de $z's$ que satisfacen a

$$r < |z-w| < R$$

Sea C_r la circunferencia $|z-w| = r$, y sea C_R la circunferencia $|z-w| = R$ orientadas en sentido antihorario. Si $f(z)$ es analítica en D, C_r y $C_R \Rightarrow$ para cualquier $z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{5.3}$$



Fórmula de Cauchy para una anillo.

Ejercicios de Tarea

1. Evalúe a:
$$\int_i^1 \overline{z}dz$$
sobre las trayectorias
$$\begin{aligned} &\text{a) } C \;:\; x+y=1 \\ &\text{b) } C \;:\; y=(1-x)^2 \end{aligned}$$

2. Evalúe a:
$$\int e^z dz$$
a) de $z=0$ a $z=1$ por $y=0$, b) de $z=1$ a $z=1+i$ por $x=1$

3. Integre
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{z}dz$$
por C : medio círculo unitario con centro en el origen, en el semiplano superior

4. Integre
$$\int_1^i \overline{z}^4 dz$$
por C : círculo unitario con centro en el origen, en el primer cuadrante.

5. ¿A cuál de las siguientes integrales se aplica directamente el teorema de Cauchy-Goursat? ¿Por qué?

   a)
$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z+2}dz$$
   b)
$$\oint_{|z+2|=2} \frac{\cos z}{z+2}dz$$
   c)
$$\oint_{|z-1|=4} \frac{\cos z}{z+2}dz$$
   d)
$$\oint_{|z+i|=1} \log z dz$$
   e)
$$\oint_{|z-1-i|=1} \log z dz$$
   f)
$$\oint_{|z|=\pi} \frac{1}{1+e^z}dz$$
   g)
$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{1-e^z}dz$$

6. Demuestre que
$$\oint_{|z-3|=2} \frac{\log z}{(z+1)(z-3)}dz = \oint_{|z-3|=2} \frac{\log z}{4(z-3)}dz$$

7. Evalúe las siguientes integrales a lo largo de la curva $y=\sqrt{x}$

   a)
$$\int_{1+i}^{9+3i} e^{2z}dz$$
   b)
$$\int_{1+i}^{9+3i} z\cos z dz$$

8. ¿Cuál es el error en:

$$\int_0^{1+i} \overline{z} dz = \left.\frac{\overline{z}^2}{2}\right|_0^{1+i} = -i \ ?$$

9. Evalúe las integrales:

   a)
   $$\oint \frac{dz}{e^z (z-2)}$$
   alrededor de
   $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

   b)
   $$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\cos z + \sin z}{(z^2+25)(z+1)} dz$$
   alrededor de
   $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

   c)
   $$\oint \frac{\cosh z}{z^2+z+1} dz$$
   alrededor de
   $$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

   d)
   $$\oint \frac{\sin(e^z + \cos z)}{(z-1)^2 (z+3)} dz$$
   alrededor de
   $$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

10. *Calcular
$$\int_2^{2i} \frac{dz}{\overline{z}}$$
por el arco de circunferencia con radio 2 y centro en el origen, en sentido horario.

11. *Calcular
$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-\pi)}$$
si C encierra a $-\pi$.

12. *Calcular la integral
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$
si C a) no encierra a $z=1$; b) no encierra a $z=0$; c) encierra a ambos.

13. *Evalúe
$$\int_C (2z + \overline{z})\, dz$$
C : el segmento de recta que va de $1+i$ a $3+3i$.

14. *Calcular a la integral real
$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{5 - 4\cos\theta} d\theta$$
usando el cambio de variable $z = e^{i\theta}$

15. *Calcular
$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^3 - 3iz^2 - 3z + i} dz$$

16. *Calcular
$$\int_C \frac{dz}{z^2+9}$$
con C : a) $|z-3i| = 1$; b) $|z+3i| = 1$; c) $|z-3i| + |z+3i| = 10$.

Capítulo 6

Serie Laurent y teorema del residuo

Series Complejas

Sucesión: Una regla que asigna a cada entero positivo n un número complejo. Al n-ésimo término de la sucesión lo denotamos z_n, y a la sucesión $\{z_n\}$.

Suma parcial: Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja. Definimos las n-ésima suma parcial S_n como la suma de los primeros n-términos de la sucesión $\{z_n\}$:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j.$$

A su vez $\{S_n\}$ es una sucesión compleja. Si esta sucesión de sumas parciales converge decimos que la serie infinita:

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j$$

converge.

Teorema: Sea $z_n = x_n + iy_n \Longrightarrow$

1.) $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ convergen.

2.) $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \to a$ y $\sum_{j=1}^{\infty} y_j \to b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} z_j \to a + ib$.

Teorema: Si $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge $\Longrightarrow \{z_n\} \to 0$.

Este resultado se utiliza para saber si la serie diverge, es decir, si $\{z_n\} \to L \neq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ diverge, pero si $\{z_n\} \to 0$, el teorema no da información.

Ejemplo.- $\left\{\frac{i}{n}\right\} \to 0$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}$ diverge.

Convergencia absoluta: Si la serie real $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ converge, se dice que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge absolutamente.

Además si $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ también converge.

Criterio de la razón: Sea $z_n \neq 0$ para cada n, y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = q \Longrightarrow$$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si $0 \leq q < 1$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diverge si $q > 1$.

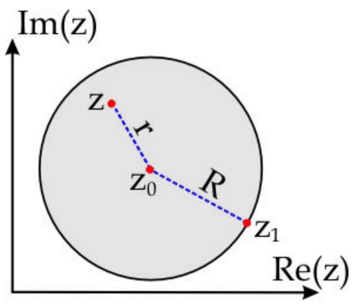
Series de potencias complejas

Sean $z_0, a_0, a_1, a_2, ...$ números complejos dados. Una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + ...$$

se llama una serie de potencias con centro en z_0 y secesión de coeficientes $\{a_n\}$. La serie empieza en la potencia 0 para permitir el término constante. La serie converge en z_0 a a_0.

Teorema: Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge para $z_1 \neq z_0$. Entonces la serie converge para toda z tal que $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.



Disco de Convergencia

El máximo valor de R se llama radio de convergencia, y el disco que forma, disco de convergencia. Existen tres posibilidades para el radio de convergencia R.

1. $R \to \infty$
2. $R = 0$
3. $0 < R < \infty$

Teorema: Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, que converge para algún $z_1 \neq z_0$, existe R (posiblemente $R \to \infty$), tal que la serie converge absolutamente si $|z-z_0| < R$, y diverge si $|z-z_0| > R$.

Teorema: Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia R, con $R \neq 0$. Para $|z-z_0| < R$, sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Entonces:

1. $f(z)$ es analítica para $|z-z_0| < R$.
2. Para las derivadas tenemos:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

y

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k}$$

3. Si C es una curva suave a pedazos cuya gráfica esta dentro del disco de convergencia de la serie de potencias

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-z_0)^n\,dz$$

Serie de Taylor compleja

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ tiene radio de convergencia R. Si definimos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Evaluando en z_0,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= a_0 \\ a_0 &= f(z_0) \end{aligned}$$

y evaluando en z_0 a la derivada k-ésima

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z_0) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (0)^{n-k} \\ f^{(k)}(z_0) &= k(k-1)\ldots(1) a_k \\ a_k &= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados obtenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Serie de Taylor

Una serie de Taylor con $z_0 = 0$, se llama serie de Maclaurin.

Teorema

Si $f(z)$ es analítica en z_0 entonces tiene representación en serie de Taylor para todo z dentro un disco con centro en z_0.

Algunas series de Taylor complejas

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n : |z| < 1 \\ \frac{1}{1+z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n : |z| < 1 \end{aligned}$$

Serie de Laurent compleja

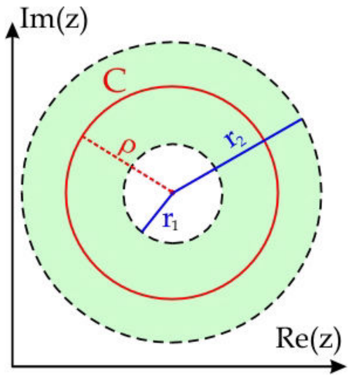
Sea $f(z)$ analítica en el anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Entonces para z en este anillo,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

en donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

y C es cualquier circunferencia $|z - z_0| = \rho$ con $r_1 < \rho < r_2$.



Anillo de Laurent

Ejemplos:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} : 0 < |z| < \infty$$

$$\frac{\cos z}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n-5} : 0 < |z| < \infty$$

Teorema del Residuo

Clasificación de singularidades

Si $f(z)$ es analítica en un anillo $0 < |z - z_0| < \infty$ pero no en z_0, decimos que $f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0.

Sea $f(z)$ una función con una singularidad aislada en z_0. Si desarrollamos en serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n$$

z_0 es:

- Una singularidad removible.- Si no aparecen potencias negativas de $z - z_0$ en la serie de Laurent.
- Una singularidad esencial.- Si aparecen una infinidad de potencias negativas de $z - z_0$.
- Una sigularidad polar con un polo de orden m.- Si m es un entero positivo y $(z - z_0)^{-m}$ aparece en esta serie pero no aparecen potencias más negativas ($a_{m-1} = a_{m-2} = ... = 0$).

Ejemplos:
Singularidad removible

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n}$$

Singularidad esencial

$$e^{1/(z-1)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}$$

Polo de orden 3

$$\frac{1}{(z+i)^3}$$

Ceros de una función

Una función tiene un cero en z_0 si $f(z)$ es analítica en z_0 y $f(z_0) = 0$. Decimos que una función tiene un cero de orden m en z_0 si:

$$f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

pero

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Ejemplos:
z^m tiene un cero de orden m en 0.
$\sin^2(z)$ tiene un cero de orden 2 en π.

Teorema: Sea $h(z)$ una función con un cero de orden m en z_0. Sea $g(z)$ una función analítica en z_0, o con una singularidad removible en z_0 y además

$$\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$$

entonces:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

tiene un polo de orden m en z_0.

Ejemplo

$$\frac{e^z}{z^3}$$

polo de orden 3 en 0.

$$\frac{\cos z}{(z-i)^5}$$

polo de orden 5 en i.

$$\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

polo simple en $n\pi$.

Residuos

Si desarrollamos a $f(z)$ en serie de Laurent

$$\begin{aligned} & f(z) \\ = \quad & \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots \end{aligned}$$

Definimos al residuo de $f(z)$ en la singularidad z_0 como el coeficiente a_{-1} en su desarrollo en serie de Laurent.

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$$

De la fórmula de los coeficientes de Laurent tenemos:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

o bien,

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}$$

Esta última fórmula es frecuentemente usada para resolver la integral.

Ejemplos:

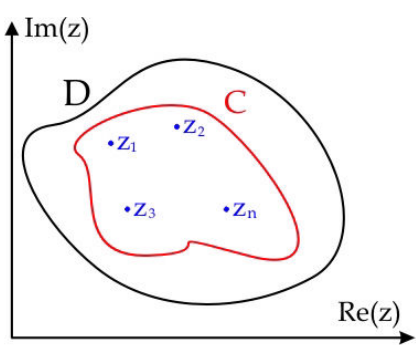
$$\operatorname*{Res}_{1} e^{1/(z-1)} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{i\cos(3z)}{3z} &= \frac{i}{3}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \\ \operatorname*{Res}_{0}\frac{i\cos(3z)}{3z} &= \frac{i}{3} \end{aligned}$$

Teorema del Residuo

Sea $f(z)$ analítica en un dominio D, excepto en los puntos $z_1, z_2, ..., z_n$, donde $f(z)$ tiene singularidades. Sea C una curva cerrada suave a pedazos en D que encierra a $z_1, z_2, ..., z_n$.$\Rightarrow$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z_j} f(z)$$



C encierra a las sigularidades $z_1, z_2, ..., z_n$

Ejemplo: Si C encierra al origen. Encontrar

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}dz$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\sum(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \operatorname*{Res}_{0}\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2} &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}dz = 2\pi i$$

Residuos y polos

Sea $f(z)$ con un polo de orden m en z_0. $\Rightarrow$

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

esta es una forma más fácil de calcular los residuos de una función, siempre y cuando $f(z)$ tenga un polo de orden m.

Ejemplo: Si C encierra al origen. Utilizar el teorema anterior para calcular:

$$\oint_C \frac{\cos(z)}{z^2}dz$$

La función $\cos(z)/z^2$ tiene un polo de orden 2 en $z=0$, entonces $m=2$ y

$$\operatorname*{Res}_{0}\frac{\cos(z)}{z^2} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[(z-0)^2\frac{\cos(z)}{z^2}\right] = 0$$

entonces

$$\oint_C \frac{\cos(z)}{z^2}dz = 0$$

Ejercicios de tarea

1. Demuestre que las siguientes series divergen en la región indicada

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ en $|z| \geq 1$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(2z)^n$ en $|z| \geq 1/2$

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{inz}$ en $\mathbf{Im}(z) \leq 0$

2. Use el criterio del cociente para demostrar que las siguientes series convergen

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{in^2 z}$ en $\mathbf{Im}(z) > 0$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$ en $|z| > 0$

3. Desarrolle en serie de Taylor y encuentre la región de convergencia de:

    a) $\frac{1}{z}$, alrededor de $z = 1 + i$

    b) $\frac{1}{(z+i)^2}$, alrededor de $z = i$

    c) e^z, alrededor de $z = i\pi$

    d) $z^2 + z + 1$, alrededor de $z = 0$

    e) $z^2 + z + 1$, alrededor de $z = i$

4. Encuentre los coeficientes y el disco de convergencia de:

    a) $\frac{1}{z^4+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n$

    b) $\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

    c) $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

    d) $\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

    e) $\frac{z}{(z-1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

    f) $\frac{z}{(z-1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n$

5. Desarrolle en serie de Laurent a:

$$\frac{1}{z-3}$$

    en potencias de $(z-1)$, determine en que región converge.

6. Desarrolle en serie de Laurent a:

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

    en potencias de $(z-1)$, determine en que región converge.

7. Desarrolle en serie de Laurent a:

$$\frac{1}{(z-1)z}$$

    en potencias de $(z-1)$, determine en que región converge.

8. Desarrolle en serie de Laurent y encuentre el anillo de convergencia de:

$$\frac{1}{z^4}\cos z$$

9. Desarrolle en serie de Laurent y encuentre el anillo de convergencia de:

$$z^4 \cos \frac{1}{z}$$

10. Desarrolle en serie de Laurent y encuentre el anillo de convergencia de:

$$ze^{1/(z-1)}$$

11. Calcule los residuos de:

    a)

$$\frac{e^z}{(z^2+1)z^2}$$

    b)

$$\tan z$$

12. Utilice expansiones en serie de Laurent para evaluar por el método de residuos a las integrales:

    a)

$$\oint_{|z+1+i|=4} z^3 \cos \frac{1}{z} dz$$

    b)

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^8} dz$$

13. Encuentre los residuos por polos e integre:

    a)

$$\oint_{|z-6|=4} \frac{1}{\sin z} dz$$

    b)

$$\oint_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{e^{1/z}}{z^2-1} dz$$

    c)

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{\sinh^2 z} dz$$

Capítulo 7

Aplicación del análisis complejo

Fractales

Conjunto de Mandelbrot

Considere al conjunto de puntos C en el plano de Argand tales que en:

$$z \mapsto z^2 + C$$

con órbita cero, o bien,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n^2 + C \\ z_0 &= 0 \end{aligned}$$

z permance acotado,

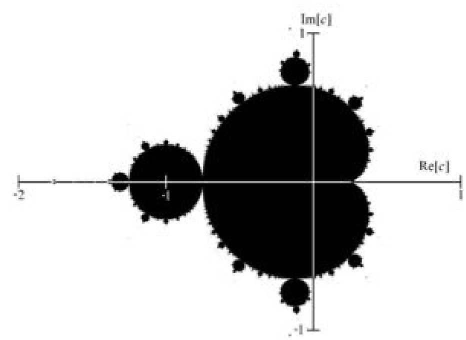
$$\left| \lim_{n\to\infty} z_n \right| < \infty.$$

Por ejemplo si $C = 1, \{z_n\} = \{0, 1, 2, 5, 26, \ldots, \infty\}$ por lo cual $C = 1$ no pertenece al conjunto. Por otro lado, si $C = i$ se tiene que

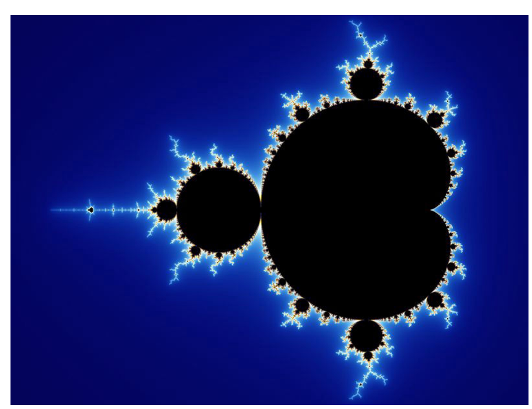
$$\{z_n\} = \{0, i, (-1+i), -i, (-1+i), -i, ...\} < \infty$$

por lo tanto pertenece al conjunto.

El conjunto está acotado y cabe dentro de $|z| < 2$. Douady y Hubbard mostraron que el conjunto es conexo. Si se grafican algunos puntos del conjunto en el plano complejo se obtiene la siguiente figura.



En otros colores.



La frontera del conjunto de Mandelbrot es un fractal. El área que ocupa el conjunto se ha estimado en 1.50659177 ± 0,00000008.

Fenómenos de transporte

Muchos de los problemas de naturaleza difusiva o dispersiva en estado estacionario se pueden modelar mediante la ecuación

$$\nabla^2 \psi = 0.$$

Algunos de los fenómenos que se medelan mediante la ecuación anterior son:

- Transferencia de calor en estado estacionario (temperatura).
- Difusión de especies químicas en estado estacionario (concentración).
- Un campo eléctrico en un espacio sin cargas (campo eléctrico).
- Un campo magnético en el vacío (campo magnético).
- La presión en un medio poroso (presión).
- Flujo potencial en un fluido (Función de corriente).

Lo anterior significa que todas estas variables, temperatura, concentración, etc. son funciones armónicas y entonces pueden ser parte real o imaginaria de una función analítica compleja y además satisfacen el siguiente teorema.

Teorema. Sea $w = f(z)$ una función analítica que transforma el dominio D del plano z en un dominio D_1 del plano w. Sea $\phi_1(u, v)$ una función armónica en D_1, es decir,

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial v^2} = 0$$

Entonces introduciendo el cambio de variables dado por

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = w$$

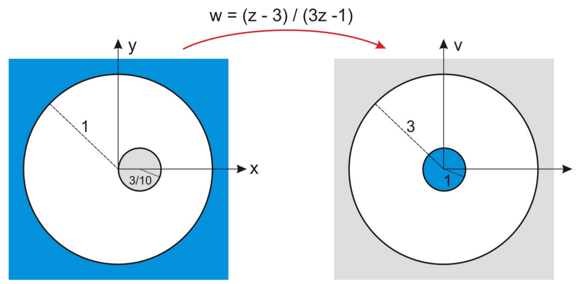
se tiene que $\phi(x, y) = \phi_1(u(x, y), v(x, y))$ es armónica en D, es decir,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Lo anterior significa que cuando una función armónica es trasformada medianto un mapeo conforme ésta sigue siendo armónica.

Transferencia de calor

Supónga el problema de un intercambiador de calor consistente en un cilíndro con un canal descentrado dentro de él tal como se muestra en el plano xy de la figura siguiente.



La temperatura en la cavidad interior es de $100^0 C$ y la de la superficie exterior del cilíndro es de $0^0 C$. La ecuación que rige a la transferencia de calor es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Las condiciones de frontera las podemos poner en términos de variable compleja

$$\begin{aligned} T &= 0 \text{ en } |z| = 1 \\ T &= 100 \text{ en } \left|z - \frac{3}{10}\right| = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

El problema visto desde un punto de vista de variable compleja consiste en encontrar una función armónica en la región entre $|z| = 1$ y $\left|z - \frac{3}{10}\right| = 3/10$ que satisfazga las condiciones de frontera anteriores. El mapeo

$$w = \frac{z - 3}{3z - 1}$$

transforma a:

$$|z| = 1 \text{ en } |w| = 1$$

y a

$$\left|z - \frac{3}{10}\right| = \frac{3}{10} \text{ en } |w| = 3$$

tal como se muestra en la figura anterior. En el espacio w el problema se reduce a encontrar la función armónica tal que cumpla con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} T &= 0 \text{ en } |w| = 1 \\ T &= 100 \text{ en } |w| = 3 \end{aligned}$$

Este último problema se reduce a resolver el siguiente problema

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0$$

pero este problema tiene simetría en el ángulo, es decir, la solución sólo debe depender de la distancia al origen, entonces es adecuado resolver la ecuación en coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

debido a la simetría $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) &= 0 \\ r\frac{dT}{dr} &= A \\ T &= A\ln r + B \end{aligned}$$

aplicando las condiciones de frontera se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= A\ln 1 + B \\ 100 &= A\ln 3 + B \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} 100 &= A\ln 3 \\ A &= \frac{100}{\ln 3} \\ B &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$T = \frac{100}{\ln 3}\ln r = \frac{100}{\ln 3}\ln|w|$$

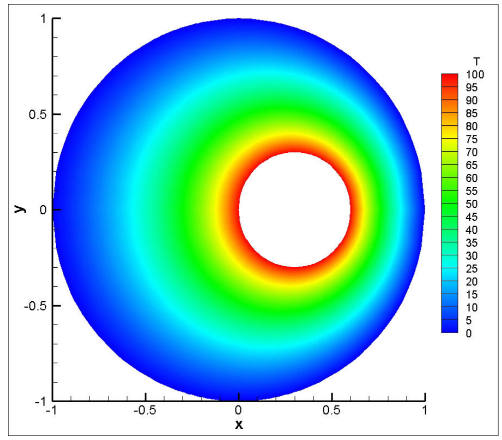
para regresar al espacio original

$$|w| = \left|\frac{z-3}{3z-1}\right| = \sqrt{\frac{(x-3)^2+y^2}{(3x-1)^2+9y^2}}$$

entonces la solución es:

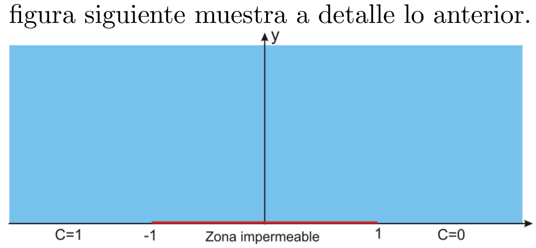
$$\begin{aligned} T &= \frac{100}{\ln 3}\ln r = \frac{100}{\ln 3}\ln\sqrt{\left(\frac{(x-3)^2+y^2}{(3x-1)^2+9y^2}\right)} \\ T &= \frac{100}{\ln 3^2}\ln\left(\frac{(x-3)^2+y^2}{(3x-1)^2+9y^2}\right) \end{aligned}$$

la figura siguiente muestra la solución en el espacio original



Difusión molecular

Considere un depósito lleno de un fluido en reposo, el depósito es tan grande que puede considerarse seminfinito (ocupa el plano $y \geq 0$). En $y = 0$ se tiene que para $x < -1$ el recipiente está en contacto con una placa que cede por disolvencia una especie química, la concentración en esta región es $C = 1$, por otro lado en $y = 0$ se tiene que para $x > 1$ el recipiente consume mediante una reacción química a dicha especie, entonces la concentración en esta región es $C = 0$. Por otro lado, la región en $-1 < x < 1$ es impermeable. La figura siguiente muestra a detalle lo anterior.



El problema matemático anterior tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} C\left(y=0, x<-1\right) &= 1 \\ C\left(y=0, x>1\right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0,-1<x<1} &= 0 \end{aligned}$$

Con el mapeo

$$z = \sin w$$

la región se transforma a:

El problema en este plano es

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} = 0$$

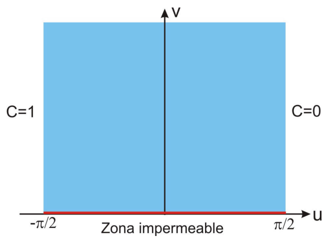


Figura 7-1

sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} C\left(u=\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ C\left(u=-\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ \left(\frac{\partial C}{\partial v}\right)_{v=0} &= 0 \end{aligned}$$

Por simetría, en este espacio el problema se simplifica a:

$$\begin{aligned} \frac{d^2C}{du^2} &= 0 \\ C\left(u=\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ C\left(u=-\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

es decir,

$$C = Au + B$$

aplicando las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} 0 &= A\frac{\pi}{2} + B \\ 1 &= -A\frac{\pi}{2} + B \end{aligned}$$

, se obtiene: $A = -\frac{1}{\pi}$ $B = \frac{1}{2}$

$$C = -\frac{u}{\pi} + \frac{1}{2}$$

necesitamos obtener a u en términos de x e y. Para ello,

$$z = x + iy = \sin w = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v$$

o bien

$$\begin{aligned} x &= \sin u \cosh v \\ y &= \cos u \sinh v \end{aligned}$$

si utilizamos que $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$ se obtiene

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1$$

si se tiene que $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{1-\sin^2 u} &= 1 \\ x^2\left(1-\sin^2 u\right) - y^2 \sin^2 u &= \left(1-\sin^2 u\right)\sin^2 u \\ x^2 - x^2\sin^2 u - y^2\sin^2 u &= \sin^2 u - \left(\sin^2 u\right)^2 \end{aligned}$$

$$\left(\sin^2 u\right)^2 - \left(x^2+y^2+1\right)\sin^2 u + x^2 = 0$$

cuya solución es:

$$\sin^2 u = \frac{x^2+y^2+1 \pm \sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)^2 - 4x^2}}{2}$$

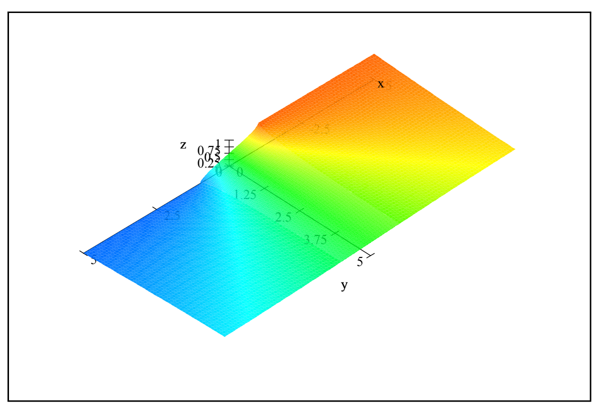
$$\sin u = \pm\sqrt{\frac{x^2+y^2+1 \pm \sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)^2 - 4x^2}}{2}}$$

$$u = \sin^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{x^2+y^2+1 \pm \sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)^2 - 4x^2}}{2}}\right)$$

entonces la solución en términos de x y y es:

$$C = -\frac{u}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} - \\ &\quad \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{x^2+y^2+1 \pm \sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)^2 - 4x^2}}{2}}\right) \end{aligned}$$



Parte II

Series de Fourier

Capítulo 8

Series de Fourier

Funciones períodicas y señales físicas

Una función $f(t)$ es períodica si satisface la relación:

$$f\left(t\right)=f\left(t+mT\right) \tag{8.1}$$

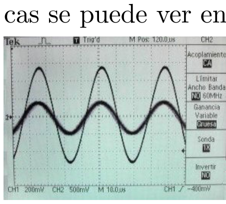
donde $m=0,\pm1,\pm2,...$ y T es un número real positivo conocido como el período. Una medida del número de repeticiones por unidad de t es la frecuencia, f, la cual se define como:

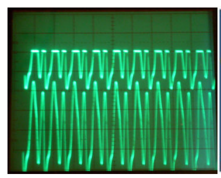
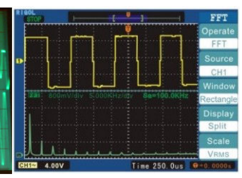
$$f=\frac{1}{T} \tag{8.2}$$

una medida alternativa del número de repeticiones es la frecuenca angula o circular, la cual se define como:

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \tag{8.3}$$

En la naturaleza existen muchas señales físicas de naturaleza períodica, para su estudio en ingeniería dichas señales son almacenadas en formato digital o analógico. Ejemplos de señales períodicas se puede ver en las siguientes imágenes.



Funciones ortogonales

Algebra lineal

Sea $\mathbf{S}=\{s,\cdot,+\}$ un espacio de dimensión n en donde esta definida una operación interna:

$$s_1\cdot s_2 \tag{8.4}$$

A cualquier elemento del espacio s lo podemos representar como:

$$s=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\phi_i \tag{8.5}$$

en donde el conjunto $\{\phi_k(t)\}$ se llama base de $\mathbf{S}$ y es linealmente independiente y ortogonal, (genera al espacio),

$$\phi_i\cdot\phi_j\begin{cases}=0 & i\neq j\\ \neq0 & i=j\end{cases}.$$

Las λ_i son constantes y se obtienen a partir de:

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i \\ s \cdot \phi_j &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i \cdot \phi_j \\ s \cdot \phi_j &= \lambda_j \phi_j \cdot \phi_j \end{aligned}$$

$$\lambda_j = \frac{s \cdot \phi_j}{\phi_j \cdot \phi_j} \tag{8.6}$$

Funciones

El producto interno para funciones se define para el intervalo $a < t < b$ como

$$f_1(t) \circ f_2(t) = \int_a^b f_1(t) f_2^*(t)\, dt.$$

Un conjunto de funciones $\{\phi_k(t)\}$ es ortogonal en un intervalo $a < t < b$ si para dos funciones cualesquiera del conjunto $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$, se cumple:

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n^*(t)\, dt = \delta_{mn} r_n,$$

en donde δ_{mn} es la delta de Kronecker que se define como:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} . \tag{8.7}$$

Definición de la Serie de Fourier

Considere al espacio infinito de funciones periódicas con período T, $(f(t) = f(t+T))$ y al conjunto de funciones

$$\{1, \cos(n\omega_0 t), \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\} : n = 1, 2, ...$$

en donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \text{ (frecuencia angular)}$$

Demostremos que el conjunto es ortogonal en el intervalo $-T/2 < t < T/2$.

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1)(1)\, dt = T$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cos(n\omega_0 t)\, dt = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \operatorname{sen}(m\omega_0 t)\, dt = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \operatorname{sen}(m\omega_0 t)\, dt = \delta_{mn} \frac{T}{2}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t)\, dt = \delta_{mn} \frac{T}{2}$$

entonces a cualquier función periódica de Ω la podemos expresar como una combinación lineal de la base $\{1, \cos(n\omega_0 t), \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\}$:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \tag{8.8}$$

en donde los coeficientes los obtenemos a partir de la ecuación (8.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_0 &= \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1) f(t)\, dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1)(1)\, dt} \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt \end{aligned} \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t)\, dt} \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt} \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\, dt \end{aligned} \tag{8.11}$$

Una representación alternativa de la serie de Fourier es:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + \phi_n) \tag{8.12}$$

recordando que:

$$\begin{aligned} A_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t + \phi_n) &= A_n \cos(\phi_n) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \\ &\quad + A_n \operatorname{sen}(\phi_n) \cos(n\omega_0 t) \end{aligned} \tag{8.13}$$

y definiendo

$$\begin{aligned} b_n &= A_n \cos(\phi_n) \\ a_n &= A_n \operatorname{sen}(\phi_n) \end{aligned}$$

se llega a la serie definida en la ecuación 8.8.

Condiciones de Dirichlet

Una función $f(t)$ se puede representar en serie de Fourier si se cumple que:

- La función tiene un número finito de discontinuidades en un período.
- La función tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.

La integral del valor absoluto de la función es finita:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|\, dt < \infty.$$

Las condiciones de Dirichlet son suficientes pero no necesarias, las condiciones necesarias y suficientes fueron encontradas por Carleson (L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. 116 (1966), 135-157.) y generalizadas por Hunt (R. A. Hunt, On the convergence of Fourier series en Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, 1968, 235-255). Aún enunciar dichas condiciones está fuera del alcance de este curso.

Aproximación por Fourier

Sean las sumas parciales:

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right),$$

$$\varepsilon_k(t) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right),$$

la función $f(t)$ en términos de $S_k(t)$ y $\varepsilon_k(t)$ es:

$$f(t) = S_k(t) + \varepsilon_k(t)$$

podemos aproximar a $f(t)$ como:

$$f(t) \simeq S_k(t).$$

Para medir que tan buena es la aproximación $f(t) \simeq S_k(t)$, definimos al error cuadrático medio, E_k :

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [\varepsilon_k(t)]^2\, dt$$

$$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2\, dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

si E_k es pequeño la aproximación es válida.

Fenómeno de Gibbs

Cuando una función se aproxima por una serie parcial de Fourier, habrá un error considerable en las vecindad de las discontinuidades.

Ejemplo

La función

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$
$$f(t) = f(t + 2\pi)$$

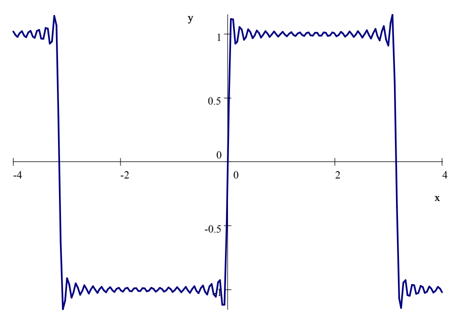
tiene un desarrollo en serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)t]}{(2n-1)}$$

utilizando los primeros 20 términos

$f(t) \simeq \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{20} \frac{\sin[(2n-1)t]}{(2n-1)}$

$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{20} \frac{\sin((2n-1)t)}{(2n-1)}$



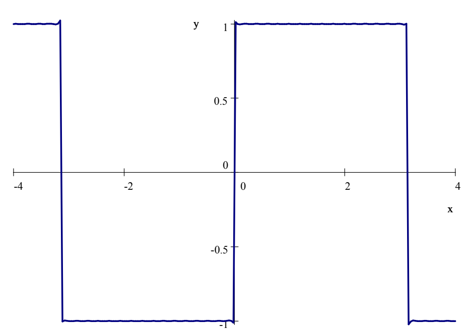
en este caso el error cuadrático medio será:

$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2\, dt - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20} a_n^2$

$E_k = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{(2n-1)^2} = 0\ ,0\,1013$

los primeros 1000

$f(t) \simeq \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{1000} \frac{\sin[(2n-1)t]}{(2n-1)}$



el error cuadrático medio será:

$E_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2\, dt - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{1000} a_n^2$

$E_k = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{(2n-1)^2} = 2.0264 \times 10^{-4}$

Fourier en las discontinuidades

En un punto singular t_s la serie de Fourier converge a

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{t_-\to t_s} f(t) + \lim_{t_+\to t_s} f(t)\right], \tag{8.14}$$

es decir, aunque la función no exista en t_s, su desarrollo en serie de Fourier existe y su valor esta dado por 8.14.

Teorema de Parseval

Si a_0, a_n y b_n son los coeficientes en la expasión en serie de Fourier de la función $f(t) = f(t+T)$. Entonces:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\, dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{8.15}$$

este valor representa a la potencia contenida en la señal.

Simetrías (propiedades de paridad)

Con frecuencia las simetrías simplifican a los problemas matemáticos. En el caso de series de Fourier, utilizaremos a la simetría en la paridad para simplificar el problema.

Funciones pares e impares

Una función es par si se cumple que

$$f(t) = f(-t)$$

e impar si

$$f(t) = -f(-t)$$

En el caso de funciones pares el desarrollo en serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

y para impares

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

Es decir, sólo se necesitan calcular a_0 y a_n, para funciones pares, y sólo b_n para impares.

Derivación e Integración de Series de Fourier

Derivación

Sea la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

si derivamos término a término obtenemos:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 \left[b_n \cos(n\omega_0 t) - a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right].$$

El término extra que aparece al derivar, $n\omega_0$, disminuye el grado de convergencia de la serie, llegando ésta incluso a diverger. Note que la derivada sólo esta definida en donde la función es continua. La derivación en los puntos singulares se verá más adelante.

Integración

Sea la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

si integramos término a término

$$\int f(t)\, dt = \frac{1}{2}a_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}\left[a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) - b_n \cos(n\omega_0 t)\right] + C$$

El término extra que aparece al derivar $1/n\omega_0$ aumenta el grado de convergencia de la serie. La integración esta definida aún en los puntos singulares.

Ejemplos

Considere a la función

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < t < -\pi/2 \\ 1 & \text{para } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0 & \text{para } +\pi/2 < t < \pi \end{cases} \\ f(t) &= f(t+2\pi) \end{aligned}$$

Como es una función par

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

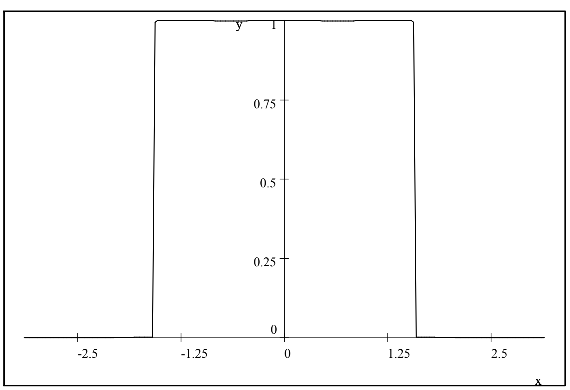
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt \\
a_0 &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} f(t)\,dt \\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \int_{\pi/2}^{\pi} 0dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt\right] = \frac{1}{\pi}\left. t\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi/2 - (-\pi/2)\right] \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)
\end{aligned}
$$

o bien,

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\cos(n\omega_0 t) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{2n-1}\cos((2n-1)\,t)
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{100}\frac{-(-1)^n}{2n-1}\cos((2n-1)\,t)$



Función Heaviside y Delta de Dirac

Función Heaviside, H

La función escalón o heaviside está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

Delta de Dirac, δ

La delta de Dirac es una regla de selección (no es función) que se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{para } t = 0 \\ 0 & \text{para } t \neq 0 \end{cases}$$

Algunas propiedades de la delta de Dirac son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,H(t-a)\,dt = \int_{a}^{\infty} f(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,f(t)\,dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,f(t)\,dt = f(a)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \delta(t)$$

Derivación en puntos singulares

Considere a la función $f(t)$ que tiene discontinuidades súbitas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en $t_1, t_2, t_3, \ldots$, y la función $f'(t)$ que esta definida en todo t excepto en las discontinuidades.

Definimos a la función

$$g(t) = f(t) - \sum_k a_k H(t - t_k)$$

La función $g(t)$ es continua en todas partes y su derivada es

$$g'(t) = f'(t) - \sum_k a_k \delta(t - t_k)$$

o bien,

$$f'(t) = g'(t) + \sum_k a_k \delta(t - t_k)$$

lo anterior se conoce como la derivada generalizada de una función continua por tramos.

Capítulo 9

Serie de Fourier compleja y espectro de frecuencia

Forma compleja de las series de Fourier

Dada la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right]$$

podemos representar al seno y coseno en términos de la exponencial compleja:

$$\begin{aligned} \cos(n\omega_0 t) &= \frac{e^{in\omega_o t} + e^{-in\omega_o t}}{2} \\ \operatorname{sen}(n\omega_0 t) &= \frac{e^{in\omega_o t} - e^{-in\omega_o t}}{2i} \end{aligned}$$

lo anterior dará el siguiente resultado:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t} \tag{9.1}$$

en donde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega_o t} dt \tag{9.2}$$

además

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0,\ c_n = |c_n|\, e^{i\phi_n} \text{ y } c_{-n} = |c_n|\, e^{-i\phi_n}$$

en donde:

$$|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

y

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

a $|c_n|$ le llamaremos amplitud y a ϕ_n ángulo de fase.

Espectros de frecuencia compleja

En realidad c_n es una función de $\omega_n = n\omega_0$. A la gráfica discreta de $|c_n|$ contra ω_n se le denomina espectro de amplitud, esta función especifica a la función periódica $f(\omega)$ en el espacio de las frecuencias, al igual que $f(t)$ lo hace en el espacio del tiempo.

De igual forma a la gráfica de ϕ_n contra ω_n se le denomina espectro de fase.

Contenido de potencia y teorema de Parseval

Para cualquier señal periódica se define a la potencia promedio como:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt$$

el teorema de Parseval para el caso complejo relaciona a la potencia promedio con las amplitudes de la onda

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[f(t)]^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \qquad (9.3)$$

Ejemplo

Encontrar los espectros de frecuencia para la función:

$$f(t)=\begin{cases} A & \text{para } -\frac{1}{2}d<t<\frac{1}{2}d \\ 0 & \text{para } -\frac{1}{2}T<t<-\frac{1}{2}d : \frac{1}{2}d<t<\frac{1}{2}T \end{cases}$$

para calcular c_n utilizamos:

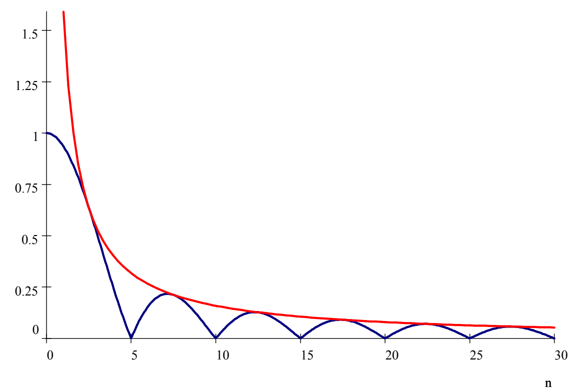
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-in\omega_0 t}dt \\ &= \frac{A}{T}\int_{-d/2}^{d/2} e^{-in\omega_0 t}dt \\ &= \frac{A}{T}\frac{1}{-in\omega_0}e^{-in\omega_0 t}\Big|_{-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{A}{T}\frac{1}{in\omega_0}\left(e^{in\omega_0 d/2}-e^{-in\omega_0 d/2}\right) \\ &= \frac{A}{T}\frac{2}{n\omega_0}\left(\frac{e^{in\omega_0 d/2}-e^{-in\omega_0 d/2}}{2i}\right) \\ &= \frac{A}{T}\frac{2}{n\omega_0}\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right) \\ &= \frac{Ad}{T}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)} \end{aligned}$$

y $|c_n|$

$$|c_n|=\left|\frac{Ad}{T}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)}\right|$$

si hacemos $d=1/20$, $A=5$ y $T=1/4$, $\omega_0=8\pi$

$$|c_n|=\left|\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{\left(\frac{n\pi}{5}\right)}\right|$$



Espectro de amplitud

Capítulo 10

Ejercicios de Serie de Fourier

1. Desarrolle en serie de Fourier real a la función $f(t) = |t|$ para $(-\pi, \pi)$ y $f(t) = f(t + 2\pi)$.

2. Grafique a la función

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 0 & -1 < t < 0 \\ t^2 & 0 > t > 1 \end{cases} \\ f(t) &= f(t+2) \end{aligned}$$

   encuentre su desarrollo en serie de Fourier real.

3. Desarrolle en serie de Fourier real a la función $f(t) = cos\,(\pi t)$, $-1 \leq t \leq 1$.

4. Desarrolle en serie de Fourier real a la función $f(t) = e^{2t}/2$, $-1 \leq t \leq 1$.

5. Grafique a la función

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 0 & -1 < t < 0 \\ e^{-t} & 0 > t > 1 \end{cases} \\ f(t) &= f(t+2) \end{aligned}$$

   encuentre su desarrollo en serie de Fourier compleja. Grafique al espectro de frecuencia.

6. Encuentre la serie de Fourier compleja y el espectro de frecuencia (al menos unos de sus puntos) para:

   a) $f(t) = t^2 : 0 \leq t < 2 : f(t+2) = f(t)$

   b) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2 \\ 0, & 2 < t < 3 \end{cases} \quad : f(t+3) = f(t)$

Parte III

Transformada de Fourier

Capítulo 11

Transformada de Fourier

Las series de Fourier son muy útiles para estudiar funciones periódicas, por lo tanto, es natural querer extrapolar esta teoría para el caso de cualquier función.

Deducción

Sea la serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_o t}$$

con

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega_o t} dt \text{ y } T = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

combinando ambas

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega_o x} dx\right] e^{in\omega_o t} \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega_o x} dx\right] \omega_o e^{in\omega_o t} \end{aligned}$$

si hacemos $T \to \infty$, ó $\omega_o = d\omega \to 0$ y $n\omega_o \to \omega$. Obtenemos la identidad de Fourier.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx\right] e^{i\omega t} d\omega$$

si definimos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt \qquad (11.1)$$

obtenemos,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \qquad (11.2)$$

Transformada de Fourier

La ecuación 11.1 sirve para definir a la transformada de Fourier $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega) \qquad (11.3)$$

y la 11.2 a la antitransformada de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$:

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t) \qquad (11.4)$$

En general la función $F(\omega)$ es compleja y contiene la misma información que $f(t)$.

$$F(\omega) = |F(\omega)|\, e^{i\phi(\omega)}$$

Integral de Fourier

Utilizando el hecho de que $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t$ las ecuaciones 11.1 y 11.2 se pueden escribir como:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\operatorname{sen}(\omega t)\right] d\omega$$

donde

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt \\ B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(\omega t)\, dt \end{aligned}$$

(en esta forma reciben el nombre de intergral de Fourier) esta forma recuerda a la serie real de Fourier.

Espectro de frecuencia continuo

A la gráfica de $|F(\omega)|$ contra ω se le llama espectro continuo de frecuencia. En esta gráfica se pueden observar si existen frecuencias preferenciales o características en la señal.

Transformadas seno y coseno de Fourier

Si la función $f(t)$ esta definida sólo en el intervalo $t \in [0, \infty)$ definimos a la transformada seno de Fourier como

$$\mathcal{F}_s(f(t)) = F(\omega) = \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen}(\omega t) dt \tag{11.5}$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}(F(\omega)) = f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\omega) \operatorname{sen}(\omega t) d\omega \tag{11.6}$$

y a la transformada coseno

$$\mathcal{F}_c(f(t)) = F(\omega) = \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt \tag{11.7}$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}(F(\omega)) = f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F(\omega) \cos(\omega t) d\omega \tag{11.8}$$

Convolución y correlación

Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones dadas. La convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, esta definida por

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \tag{11.9}$$

La función $f(t)$ se conoce como la función de correlación entre las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$. La correlación es una medida de la similitud o interdependencia de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ como función de un parámetro τ. La autocorrelación se define como $f_1(t) * f_1(t)$.

Propiedades

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= f_2(t) * f_1(t) \\ [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) &= f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \\ f(t-t_1) * \delta(t-t_2) &= f(t-t_1-t_2) \end{aligned}$$

Teorema de convolución

Si $\mathcal{F}(f_1(t)) = F_1(\omega)$ y $\mathcal{F}(f_2(t)) = F_2(\omega)$ entonces

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) F_2(\omega)] \tag{11.10}$$

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] \tag{11.11}$$

Ejemplos

Transformada de Fourier

1) Encontrar $\mathcal{F}\left(te^{-at^2}\right)$ y graficar su espectro de frecuencia si $a = 1$.

sabemos que $\mathcal{F}\left(e^{-at^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$ y que $\mathcal{F}(tf(t)) = iF'(\omega)$

entonces:

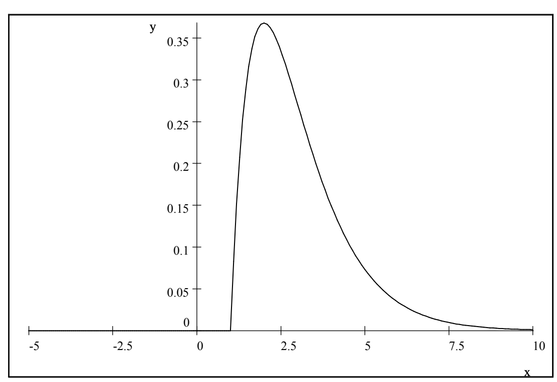
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(te^{-at^2}\right) &= i\frac{d}{d\omega}\left[\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}\right] \\ \mathcal{F}\left(te^{-at^2}\right) &= -\frac{i\omega}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \end{aligned}$$

El espectro de frecuencia

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &= \left|-\frac{i\omega}{2}\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}\right| \\ |F(\omega)| &= \frac{|\omega|}{2}\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} \end{aligned}$$

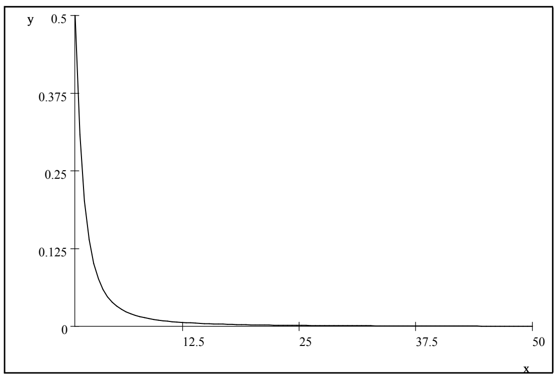
2) Encontrar $\mathcal{F}\left\{(t-1) e^{-a(t-1)} H(t-1)\right\}$

$(t-1) e^{-(t-1)}$ Heaviside $(t-1)$



$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\left\{(t-2)\,e^{-a(t-2)}H\,(t-2)\right\} \\
= \;& e^{-2i\omega}\mathcal{F}\left\{(t)\,e^{-a(t)}H\,(t)\right\} \\
= \;& e^{-2i\omega}\frac{1}{(i\omega+a)^2}
\end{aligned}$$

$\left|e^{-2i\omega}\frac{1}{(i\omega+1)^2}\right|$



3) Encontrar $\mathcal{F}\left\{e^{-a|3t|}\right\}$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\left\{e^{-s|3t|}\right\} \\
= \;& \frac{1}{|3|}\left[\mathcal{F}\left\{e^{-s|t|}\right\}\right]_{\omega=\frac{\omega}{3}} \\
= \;& \frac{1}{|3|}\left[\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right]_{\omega=\frac{\omega}{3}} \\
= \;& \frac{1}{|3|}\left[\frac{2s}{s^2+\frac{\omega^2}{9}}\right]
\end{aligned}$$

Transformada inversa de Fourier

1) Obtener $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{5}{2-\omega^2+3i\omega}\right]$

$$\begin{aligned}
& 5\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(2+i\omega)\,(1+i\omega)}\right\} \\
= \;& 5\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}-\frac{1}{2+i\omega}\right\} \\
= \;& 5\left[\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+i\omega}\right\}-\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+i\omega}\right\}\right] \\
= \;& 5\left[e^{-t}H\,(t)-e^{-2t}H\,(t)\right] \\
= \;& 5H\,(t)\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]
\end{aligned}$$

Convolución

1) Calcular $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{5}{2-\omega^2+3i\omega}\right]$ utilizando el teorema de convolución

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5}{2-\omega^2+3i\omega}\right\} \\
= \;& 5\mathcal{F}^{-1}\left\{\left[\frac{1}{2+i\omega}\right]\left[\frac{1}{1+i\omega}\right]\right\} \\
= \;& 5\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left[H\,(t)\,e^{-2t}\right]\mathcal{F}\left[H\,(t)\,e^{-t}\right]\right\} \\
= \;& 5\left[H\,(t)\,e^{-2t} * H\,(t)\,e^{-t}\right] \\
= \;& 5\int_{-\infty}^{\infty} H\,(\tau)\,e^{-2\tau}H(t-\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau \\
= \;& 5\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}e^{-\tau}H\,(\tau)\,H(t-\tau)d\tau \\
= \;& 5e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}H\,(\tau)\,H(t-\tau)d\tau
\end{aligned}$$

pero

$$H\,(\tau)\,H(t-\tau)=\begin{cases} 0 & \text{si } \tau<0 \text{ ó } \tau>t \\ 1 & \text{si } 0<\tau<t \end{cases}$$

de aquí si $t<0$ la segunda condición nunca se cumple, por lo tanto $H\,(\tau)\,H(t-\tau)=0$. Y para $t>0$ $H\,(\tau)\,H(t-\tau)=1$ en el intervalo $0<\tau<t$.

entonces

$$\begin{aligned}
= \;& 5e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}H\,(\tau)\,H(t-\tau)d\tau \\
= \;& \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 5e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau & \text{si } t>0 \end{cases} \\
= \;& \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 5e^{-t}\left[1-e^{-t}\right] & \text{si } t>0 \end{cases} \\
= \;& H(t)5e^{-t}\left[1-e^{-t}\right] \\
= \;& 5H(t)\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]
\end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales

1) Resolver a la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
y'-4y &= H\,(t)\,e^{-4t} \\
-\infty &< t<\infty
\end{aligned}$$

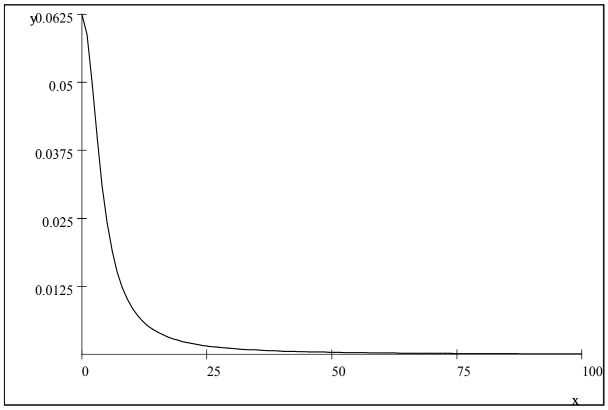
graficar su espectro de frecuencias

aplicando la transformada de Fourier a toda la ecuación obtenemos

$$\mathcal{F}\left\{y'-4y=H\,(t)\,e^{-4t}\right\}$$

$$\begin{aligned}
i\omega Y\,(\omega)-4Y\,(\omega) &= \frac{1}{i\omega+4} \\
Y\,(\omega) &= \frac{1}{(i\omega-4)\,(i\omega+4)} \\
Y\,(\omega) &= \frac{-1}{(4-i\omega)\,(4+i\omega)} \\
Y\,(\omega) &= \frac{-1}{(4^2+\omega^2)}
\end{aligned}$$

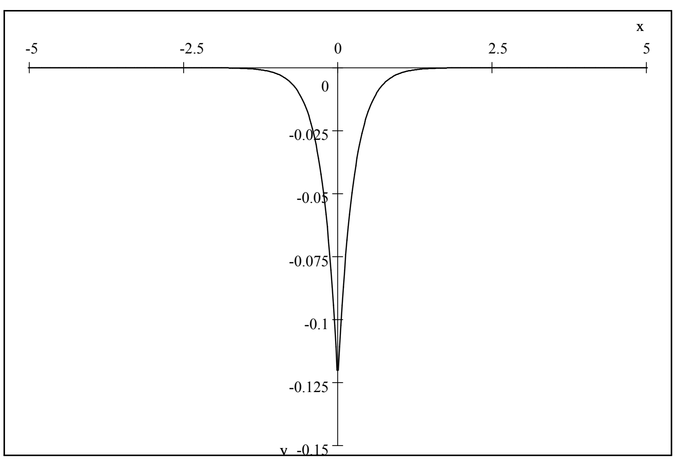
$\frac{1}{(4^2+\omega^2)}$



$Y(\omega)$ ya es la solución a la ecuación diferencial en el espacio de frecuencias, si queremos regresar al espacio del tiempo aplicamos la transformada inversa de Fourier.

$$\begin{aligned}
y &= \mathcal{F}^{-1}\left[Y(\omega)\right] \\
&= -\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(4^2+\omega^2)}\right] \\
&= -\frac{1}{2(4)}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2(4)}{(4^2+\omega^2)}\right] \\
y &= -\frac{1}{8}e^{-4|t|}
\end{aligned}$$

$-\frac{1}{8}e^{-4|t|}$



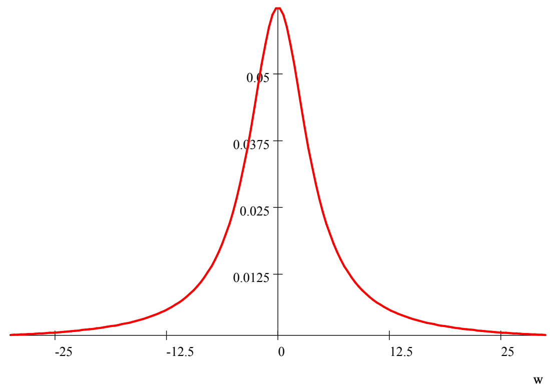
Note que al resolver la ecuación diferencial no se utilizaron constantes arbitrarias, lo anterior es porque implícitamente existen dos condiciones extras:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt < \infty$

2. $f(t)$ es continua

Su espectro de frecuencia es:

$$\begin{aligned}
|Y(\omega)| &= \left|\frac{-1}{(4^2+\omega^2)}\right| \\
&= \frac{1}{(4^2+\omega^2)}
\end{aligned}$$



Uso de la computadora para transformada de Laplace

$$x^2e^x$$

, Fourier transform is: $-2\pi\,\mathrm{Dirac}(w-i,2)$

$$e^{aw}$$

, Is Fourier transform of $\mathrm{Dirac}(-ia-x)$

Capítulo 12

Transformada Discreta de Fourier

Los datos discretos son de uso común en ingeniería. Se obtienen cuando se mide una señal en el tiempo o el espacio. En estos datos no es posible utilizar la transformada de Fourier directamente, por ello se define la transformada discreta de Fourier. Con esta transformada es posible obtener información de las frecuencias de la señal.

Suponga al conjunto de valores $\{y_0, y_1, ..., y_m, ..., y_{N-1}\}$ de una función muestreados en los tiempos $\{t_0, t_1, ...t_m, ..., t_{N-1}\}$ respectivamente. Donde $t_m = m\Delta t$ para $m = 0 \to N-1$, $t_0 = 0$, $t_{N-1} = T$ y $\Delta t = \frac{T}{N-1}$.

La trasformada discreta

$$Y_k\left(f_k\right) = \sum_{m=0}^{N-1} y_m\left(t_m\right) e^{-2\pi i \frac{km}{N}} \tag{12.1}$$

se puede utilizar para generar el conjunto de valores $\{Y_0, Y_1, ..., Y_k, ..., Y_{N-1}\}$ para cada frecuencia $\{f_0, f_1, ..., f_k, ..., f_{N-1}\}$ donde $f_k = k\Delta f$ donde $\Delta f = \frac{f_s}{N}$ donde $f_s = \frac{1}{T}$ se define como la frecuencia de muestreo. La transformada inversa es:

$$y_m\left(t_m\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2\pi imk/N} \tag{12.2}$$

La frecuencia de **Nyquist** se define como $\frac{1}{2\Delta t}$ e indica cual es la más alta frecuencia que puede ser detectada con el periódo de muestreo Δt.

Capítulo 13

Ejercicios de Transformada de Fourier

1. Encuentre la transformada de Fourier y grafique a la función en el espacio de frecuencias para:

   a) $e^{-c(t-4)} \operatorname{sen}(b(t-4))\, H(t-4)$

   b) $\frac{5\cos(\omega_0 t)}{4+t^2} + 2$

   c) $e^{-at^2} e^{i\omega_0 t}$

   d) $\frac{d}{dt}\left(e^{-3t^2}\right)$

   e) $(t-3)\, e^{-4t} H\,(t-3)$

   f) $\frac{5e^{3it}}{t^2-4t+13}$

2. Encuentre la antitransformada de Fourier para

   a) $\frac{a}{i\omega-2-\omega^2}$

   b) $\frac{a}{i(\omega-1)-2-(\omega-1)^2}$

3. Encuentre una solución acotada y continua para

   a)
   $$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = H\,(t)$$

   b)
   $$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 3\delta\,(t)$$

Parte IV

Apéndices

Apéndice A: Tabla de transformada de Fourier

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \tag{a1}$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \Leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \tag{a2}$$

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{a3}$$

$$f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega) \tag{a4}$$

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-i\omega t_0} \tag{a5}$$

$$f(t) e^{i\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \tag{a6}$$

$$f(t)\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) \tag{a7}$$

$$f(t)\sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2i} F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2i} F(\omega + \omega_0) \tag{a8}$$

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{a9}$$

$$f^{(n)}(t) \Leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega) \tag{a10}$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\,\delta(\omega) \tag{a11}$$

$$(-it)^n f(t) \Leftrightarrow F^{(n)}(\omega) \tag{a12}$$

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \tag{a13}$$

$$f_1(t) f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \tag{a14}$$

$$e^{-at} H(t) \Leftrightarrow \frac{1}{i\omega + a} \tag{a15}$$

$$e^{-a|t|} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \tag{a16}$$

$$e^{-at^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \tag{a17}$$

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \frac{\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\left(\frac{\omega a}{2}\right)} \tag{a18}$$

$$\frac{\sin(at)}{\pi t} \Leftrightarrow p_{2a}(\omega) \tag{a19}$$

$$te^{-at} H(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(i\omega + a)^2} \tag{a20}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} H(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(i\omega + a)^n} \tag{a21}$$

$$e^{-at}\sin(bt) H(t) \Leftrightarrow \frac{b}{(i\omega + a)^2 + b^2} \tag{a22}$$

$$e^{-at}\cos(bt) H(t) \Leftrightarrow \frac{i\omega + a}{(i\omega + a)^2 + b^2} \tag{a23}$$

$$\frac{1}{a^2 + t^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} \tag{a24}$$

$$\frac{\cos(bt)}{a^2 + t^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2a}\left[e^{-a|\omega - b|} + e^{-a|\omega + b|}\right] \tag{a25}$$

$$\frac{\sin(bt)}{a^2 + t^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2ai}\left[e^{-a|\omega - b|} - e^{-a|\omega + b|}\right] \tag{a26}$$

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \tag{a27}$$

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-i\omega t_0} \tag{a28}$$

$$\delta^{(n)}(t) \Leftrightarrow (i\omega)^n \tag{a29}$$

$$H(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \tag{a30}$$

$$H(t - t_0) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t_0} \tag{a31}$$

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \tag{a32}$$

$$t^n \Leftrightarrow 2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega) \tag{a33}$$

$$e^{i\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{a34}$$

$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right] \tag{a35}$$

$$\sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow -i\pi\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right] \tag{a36}$$

$$\begin{aligned} & H(t)\sin(\omega_0 t) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2i}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right] \end{aligned} \tag{a37}$$

$$\begin{aligned} & H(t)\cos(\omega_0 t) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{i\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2i}\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right] \end{aligned} \tag{a38}$$

$$tH(t) \Leftrightarrow i\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \tag{a39}$$

$$\frac{1}{t^n} \Leftrightarrow \frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\pi i - 2\pi i H(\omega)\right] \tag{a40}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega)\,d\omega \tag{a41}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \tag{a42}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) G(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) g(\omega)\,d\omega \tag{a43}$$

$$sgn(t) \Leftrightarrow \frac{2}{i\omega} \tag{a44}$$

Apéndice B: Tabla de transformada seno de Fourier

$$f(t) \Leftrightarrow F_S(\omega) \tag{S1}$$

$$\frac{1}{t} \Leftrightarrow \pi H(\omega) - \frac{\pi}{2} \tag{S2}$$

$$t^{r-1} \Leftrightarrow \Gamma(r)\,\omega^{-r} \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right) : r \in (0,1) \tag{S3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} \tag{S4}$$

$$e^{-at} \Leftrightarrow \frac{\omega}{a^2+\omega^2} : (a > 0) \tag{S5}$$

$$te^{-at} \Leftrightarrow \frac{2a\omega}{\left(a^2+\omega^2\right)^2} : (a > 0) \tag{S6}$$

$$te^{-a^2t^2} \Leftrightarrow \frac{\omega\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\omega^2/4a^2} : (a > 0) \tag{S7}$$

$$\frac{e^{-at}}{t} \Leftrightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) : (a > 0) \tag{S8}$$

$$\frac{t}{a^2+t^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} e^{-a\omega} : (a > 0) \tag{S9}$$

$$\frac{t}{\left(a^2+t^2\right)^2} \Leftrightarrow 2^{-3/2} \frac{\omega e^{-a\omega}}{a} : (a > 0) \tag{S10}$$

$$\frac{1}{t\left(a^2+t^2\right)} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \frac{\left(1-e^{-a\omega}\right)}{a^2} : (a > 0) \tag{S11}$$

$$e^{-t/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \frac{\omega}{1+\omega^4} \tag{S12}$$

$$\frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{t}\right) \Leftrightarrow \frac{1-e^{-a\omega}}{\omega} : (a > 0) \tag{S13}$$

$$\frac{4}{\pi} \frac{t}{4+t^4} \Leftrightarrow e^{-\omega} \sin\omega \tag{S14}$$

Apéndice C: Tabla de transformada coseno de Fourier

$$f(t) \Leftrightarrow F_C(\omega) \tag{C1}$$

$$t^{r-1} \Leftrightarrow \Gamma(r)\,\omega^{-r} \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) : r \in (0,1) \tag{C2}$$

$$e^{-at} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2+\omega^2} : (a > 0) \tag{C3}$$

$$te^{-at} \Leftrightarrow \frac{a^2-\omega^2}{\left(a^2+\omega^2\right)^2} : (a > 0) \tag{C4}$$

$$e^{-a^2t^2} \Leftrightarrow \frac{\omega\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\omega^2/4a^2} : (a > 0) \tag{C5}$$

$$\frac{1}{a^2+t^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2a} e^{-a\omega} : (a > 0) \tag{C6}$$

$$\frac{1}{\left(a^2+t^2\right)^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \frac{e^{-a\omega}\left(1+a\omega\right)}{a^3} : (a > 0) \tag{C7}$$

$$\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\left(\frac{\omega^2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega^2}{2}\right)\right) \tag{C8}$$

$$\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\left(\frac{\omega^2}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega^2}{2}\right)\right) \tag{C8}$$

Apéndice D: Referencias Bibliográficas

- A. David Wunsch, *Variable compleja con aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
- Hwei P. Hsu, Análisis de Fourier, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- Peter V. O'Neil, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Volumen II, CECSA, 1998.
- T. W. Korner, *Fourier Analysis*, Cambridge, 1995.
- G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Miami University, 2000, 5e.