Fundación POLAR

Matemática Maravillosa

Trigonometría

La *trigonometría* se refiere a las relaciones cuantitativas entre ángulos y segmentos de rectas, especialmente en los triángulos. La palabra *trigonometría* proviene del griego *trigonon* = triángulo y *metron* = medida. El término trigonometría fue introducido por el clérigo alemán Bartholomeo Pitiscus (1561-1613) en un libro que data de 1595 y lleva por título “Trigonometriae sive...”.

In the Hold (imagen superior realizada entre 1913 y 1914) de David Bomberg (1890-1957) es un cuadro donde hay una estructura reticular, en la que se dibujan polígonos como triángulos, trapecios, pentágonos, que le confieren una dinámica al mismo.

Todas las matemáticas salen del mundo físico, en la medida donde ellas han nacido del estudio de las formas y de las dimensiones de los objetos reales.

Paul Halmos, matemático estadounidense (1916 -).

Fascículo 9

En la búsqueda de la musa de la Astronomía.
Tapiz flamenco (c. 1510).

La utilización de instrumentos para medir angulos y calcular distancias es muy antigua. Desde siglos atrás los astrónomos, los navegantes, los geógrafos y los matemáticos, usaron instrumentos como: los cuadrantes, los sextantes, los astrolabios, los teodolitos, que progresivamente se fueron perfeccionando hasta llegar a los teodolitos actuales utilizados por los topógrafos.

Astrolabio árabe del siglo X.
Realizado por Ahmad ibn Khalaf en Bagdad.
(París, Biblioteca Nacional de Francia).
Es el astrolabio más antiguo en el mundo. Fue fabricado para Jafar, hijo del califa Muktafi bi-Ilah, que reinó entre 900 y 907.

Astrolabio de Abu Bakr ibn Yusuf.
Realizado en Marrakech en 1216-1217
(Museo Paul-Dupuy de Toulouse).

Astrónomos del medioevo utilizando un astrolabio. Fuente: Hulton Getty.

Astrónomos observan las estrellas con la ayuda de un teodolito (instrumento de medidas de distancias verticales y horizontales).

La invención de los astrolabios es atribuida a los griegos, pero su desarrollo y perfección se debe a los astrónomos árabes. Estos son instrumentos que permiten calcular la altitud o altura de los astros (el ángulo desde el horizonte) y el azimut (distancia angular desde un meridiano).

Los teodolitos son instrumentos utilizados en topografía y geodesia para medir ángulos horizontales y verticales.

Teodolito.
Museo de la Escuela Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía.
Universidad Politécnica de Madrid, España.

El mundo de las demostraciones con ayudas visuales

Tomando las palabras de R.B. Nelsen: “La idea de estas figuras o dibujos es la de ayudar al lector a ver por qué un enunciado puede ser verdad y, en algunos casos, a ver cómo se puede iniciar la demostración”. Presentamos a continuación un ejemplo de una propiedad de figuras planas en la que los gráficos ayudan en la demostración, y también el teorema de Pitágoras.

Propiedad: Las diagonales del rectángulo tienen igual longitud.

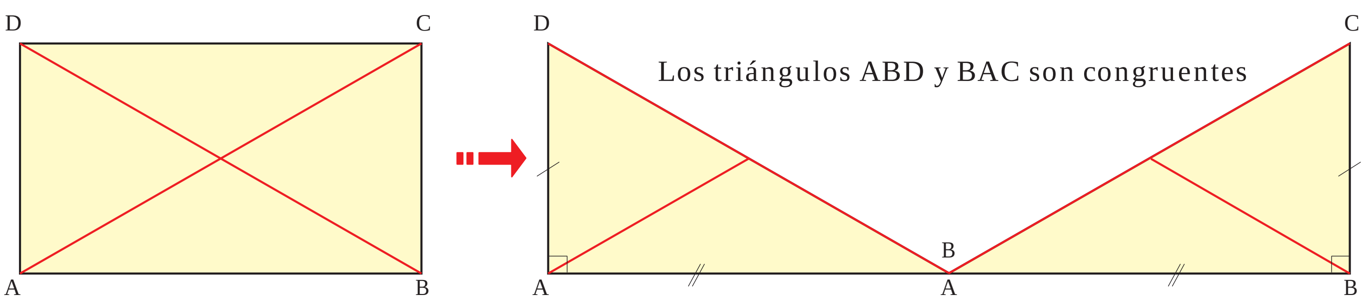
Rectángulo ABCD

Demostrar AC=BD

Conocido:

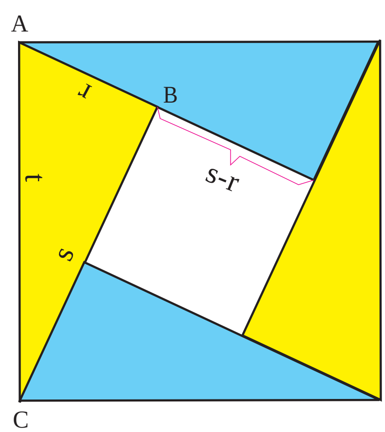
AB=DC y AD=BC

Los ángulos del rectángulo son rectos



Teorema de Pitágoras:

El matemático hindú Bhaskara (India, 1114-1185) hizo una reconstrucción del teorema de Pitágoras a la que se le añadió la palabra ¡MIRA!, de forma que a partir de la observación de la figura se pudiera reconstruir el teorema.



El teorema de Pitágoras dice: "Si un triángulo ABC es rectángulo, entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

El área del cuadrado del lado t es igual a:

t^2 = 4 veces el área del triángulo ABC + el área del cuadrado blanco

$$t^2 = \frac{4\,(s \cdot r)}{2} + (s-r)^2 = 2\,(\cancel{s}\cdot r) + s^2 \cancel{-2s}\cdot r + r^2 = s^2 + r^2$$

Es decir $t^2 = s^2 + r^2$

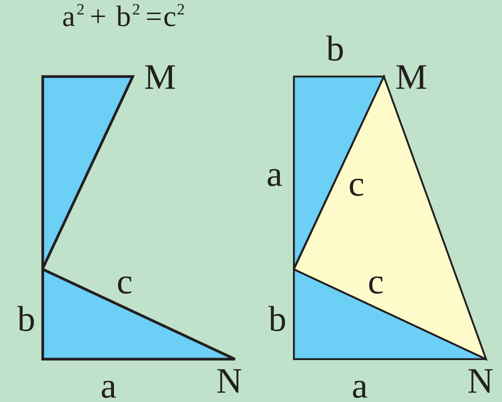
INTERESANTE

Otra demostración del teorema de Pitágoras es la atribuida a J.A. Garfield (vigésimo Presidente de los Estados Unidos). Utilizó una figura en forma de trapecio y la dividió en triángulos.

Área del trapecio = suma de las áreas de triángulos

$$\frac{a+b}{2}(a+b) = \frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2} = \frac{c^2}{2} + ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Relativity.
M.C. Escher (1898-1972) .
Galería Nacional de
Canadá.

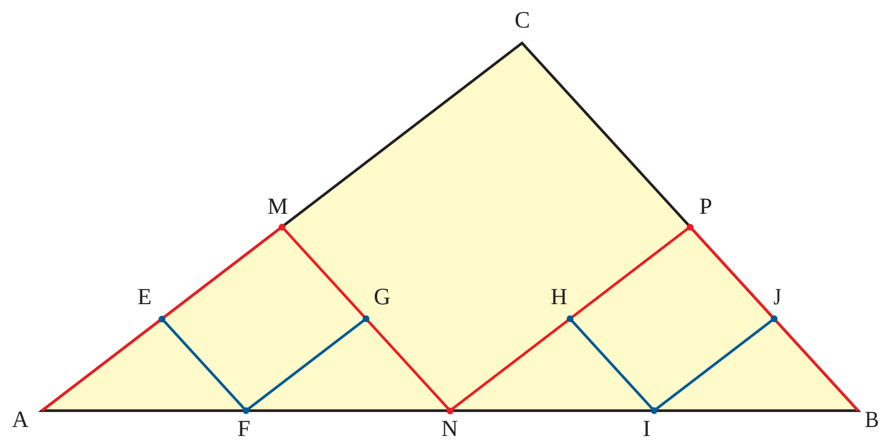
Se pueden dar muchos ejemplos de “demostraciones visuales o gráficas” que conducen a conclusiones verdaderas. Sin embargo, es menester prestar atención y tener cuidado con este tipo de demostraciones puesto que a veces lo visual puede engañarnos y producir errores conduciéndonos a resultados falsos, como mostramos a continuación.

Consideremos un triángulo cualquiera ABC. Marquemos los puntos medios de sus lados M, N y P, como se muestra en el dibujo.

Dibujamos la poligonal AMNPB (en rojo).

Como MNPC es un paralelogramo, resulta MN = CP y NP = MC.

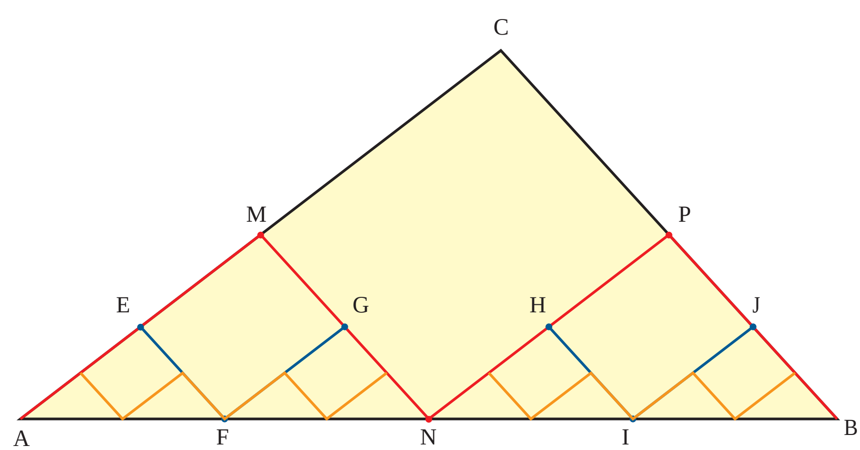
Por lo tanto, la longitud de la poligonal es:

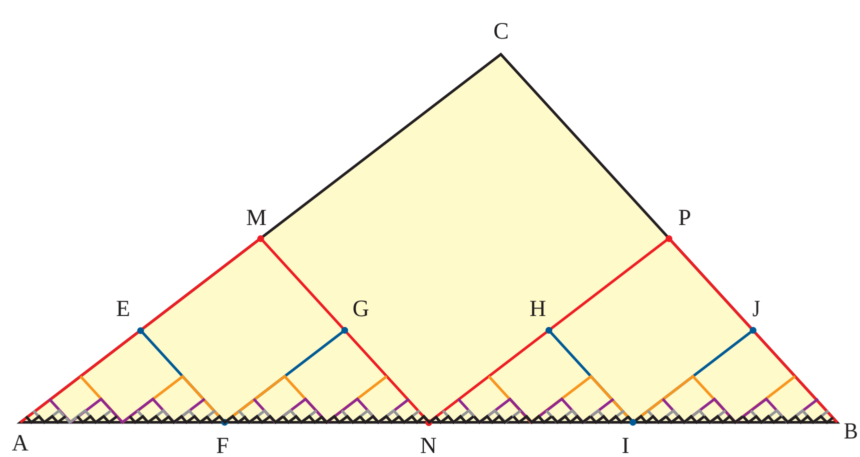


AM + MN + NP + PB = AM + CP + MC + PB = AC + CB, la suma de las longitudes de los dos lados AC y CB.

De forma análoga procedemos con los triángulos AMN y NPB, obteniendo la poligonal AEFGNHIJB y fácilmente se demuestra que, con un razonamiento semejante, la longitud de esa poligonal es igual a la suma de los dos lados AC y CB.

Si seguimos ese procedimiento “indefinidamente”, observamos que los lados de las poligonales obtenidas se van haciendo cada vez más pequeños y sus vértices “tienden” a estar situados en el lado AB. Sin embargo, las longitudes de esas poligonales siempre permanecen constantes e igual a AC + CB. Lo que conduce con ese procedimiento sucesivo que la suma AC + BC sea igual a AB, es decir, “la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es igual a la longitud del otro lado”, conclusión que es falsa.





El mundo de las demostraciones

Sherlock Holmes.
Fuente: http://www.nidhin.com/wallpapers/sherlock.html

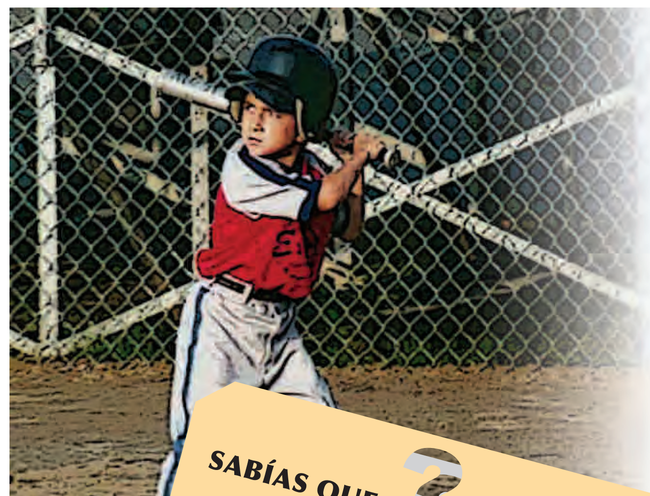
En la vida diaria con la expresión ¡Eso es lógico!, nos referimos a la utilización de la capacidad de razonamiento o a una forma ordenada de pensamiento. Un argumento lógico consiste de un conjunto de premisas y una conclusión que se deriva de ellas.

Observa cómo si utilizas la lógica o un argumento lógico puedes descubrir la profesión de cada persona en la situación presentada a continuación.

"Edith, Ernesto y Eva tienen las profesiones de economista, electricista e ingeniero, pero no necesariamente en ese orden. El economista es asesor de Eva en su trabajo. Ernesto contrata al electricista para instalar un aire acondicionado. Edith gana menos que el ingeniero pero más que Ernesto". Cual es la profesión de cada uno de ellos?

Otra expresion de uso frecuente es: ¡Pruébalo! y se pide con ello que se presenten unas reglas ya aceptadas, autoridad, testimonios o hechos que soporten en forma lógica lo exigido. En cada uno de los siguientes casos, piensa cómo puede una persona probar lo que se le pide:

- Pruébame que estabas en la oficina a las 8 p.m. del día sábado.
- Pruébame que vives en el apartamento 32 del edificio La Trampa.
- Pruébame que me ponché jugando béisbol.



La noción de prueba en matemática es más formal y rigurosa: consiste de un argumento lógico convincente de un hecho particular, del que no debe quedar ninguna posibilidad de duda de su veracidad.

¿Cómo se establecen en matemática ciertos hechos que luego se deben demostrar? Bueno, de una forma que pareciera fácil: mediante el razonamiento inductivo se observan datos, se reconocen patrones y se establecen conjeturas de esas observaciones y, luego, mediante el razonamiento deductivo se utilizan enunciados aceptados como verdaderos (axiomas) y teoremas demostrados para probar las nuevas conjeturas o hipótesis establecidas. Es decir, se utiliza razonamiento inductivo para realizar nuevos descubrimientos y con razonamiento deductivo se demuestra que los nuevos descubrimientos son lógicamente consistentes con otros ya establecidos.

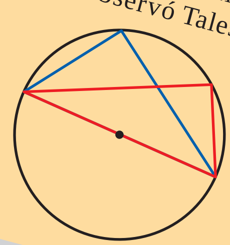
En general, las conjeturas tienen una forma condicional: "Si α, β y γ son las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, entonces $\alpha + \beta + \gamma = 180º$. En esta forma se establece lo que se considera como verdadero y lo que quiere demostrar:

Hipótesis: α, β y γ son las medidas de los ángulos de un triángulo (aceptado). Tesis: $\alpha+\beta+\gamma = 180º$ (lo que se quiere demostrar).

SABÍAS QUE...?

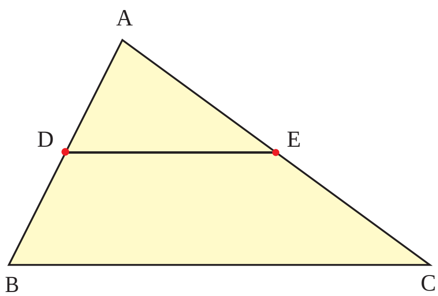
Tales (636-546 a.C.) es considerado el padre de la geometría. Es reconocido como el primero en introducir el uso de "pruebas lógicas" sobre la base del razonamiento deductivo.

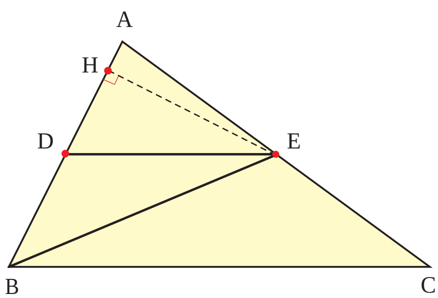
Algunas veces, un dibujo puede comunicar más información que las palabras. En ese sentido, Tales escogió puntos de una semicircunferencia y los unió a los extremos de un diámetro y midió en cada punto elegido el ángulo formado. Dice la leyenda que su alegría fue tal que sacrificó un buey por el descubrimiento. Observa la figura. ¿Qué observó Tales?

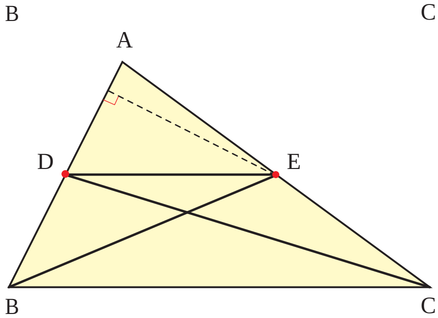


En forma esquemática un teorema puede expresarse así:

Hipótesis: enunciados aceptados como verdaderos	Argumentos lógicos →	Tesis: enunciado que se quiere demostrar







Teorema de Tales:

"En un trángulo ABC, si D y E son puntos de AB y AC , respectivamente, tales que el segmento DE es paralelo al lado BC, entonces D y E determinan segmentos proporcionales a los lados", esto es:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{DB}{EC}$$

En lo que sigue nos referiremos únicamente a la primera igualdad.

Hipótesis:

1. Se considera un triángulo ABC cualquiera.
2. D y E nombran puntos de los lados AB y AC, respectivamente.
3. El segmento DE es paralelo al lado BC del triángulo.

Tesis:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Demostración:

Tracemos el segmento BE y la perpendicular EH desde el vértice E al lado AB (en forma punteada). Observa que los triángulos ABE y ADE tienen la misma altura HE. Luego:

$$\text{área }(\triangle ABE) = \frac{AB \cdot HE}{2} \quad \text{y} \quad \text{área }(\triangle ADE) = \frac{AD \cdot HE}{2}$$

$$\text{Así } = \frac{\textit{área }(\triangle ABE)}{\textit{área }(\triangle ADE)} = \frac{AB}{AD} \quad (1)$$

En forma similar se demuestra que: $\dfrac{\textit{área }(\triangle ACD)}{\textit{área }(\triangle ADE)} = \dfrac{AC}{AE}$ (2)

Pero los triángulos DEB y DEC tienen la misma base DE y como DE y BC son paralelas, tienen la misma altura, entonces área($\triangle$DEB) = área($\triangle$DEC) (3)

$$\begin{aligned} \text{Asi: } \textit{área}(\triangle ABE) &= \textit{área}(\triangle ADE) + \text{área}(\triangle DEB) \\ &= \textit{área}(\triangle ADE) + \text{área}(\triangle DEC) \\ &= \textit{área}(\triangle ACD) \end{aligned}$$

Esta igualdad junto con (1) y (2) permite concluir:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$ l.q.q.d. (lo que se quería demostrar).

Esquemáticamente, el Teorema de Tales se expresa así:

Hipótesis: En el $\triangle$ABC, D y E son puntos de los lados AB y AC respectivamente, tales que el segmento DE es paralelo al lado BC.	Argumentos lógicos →	Tesis: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

Análogamente se puede demostrar la otra igualdad.

SABÍAS QUE...

Las culturas babilónica y egipcia resolvían problemas geométricos en forma empírica: no utilizaban un sistema lógico deductivo. Tenían conocimientos intuitivos y para su comprobación les bastaba el hecho que al utilizarlos en la práctica los resultados no contradecían lo que ya sabían por experiencia.

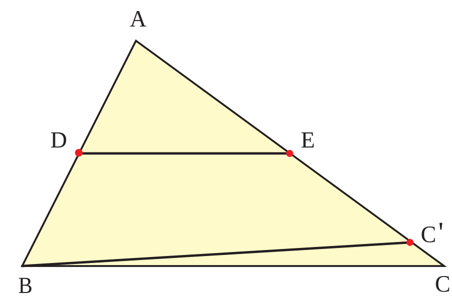
El Teorema recíproco de Tales se expresa esquemáticamente así:

Hipótesis: En el $\triangle ABC$, D y E son puntos de los lados AB y AC respectivamente, tales que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$	Argumentos lógicos →	Tesis: El segmento DE es paralelo al lado BC.

Teorema Recíproco del Teorema de Tales:

"Si en el triángulo ABC tenemos puntos D y E sobre los lados AB y AC , respectivamente, tales que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$, entonces el segmento DE es paralelo al lado BC".



Demostración:

Para la demostración se utiliza un método llamado reducción al absurdo y consiste en negar lo que se quiere demostrar. Supongamos que el segmento DE no es paralelo al lado BC. Sea BC' la recta paralela a DE que pasa por el punto B y corta a la recta AC en C'. Por el teorema anterior tenemos que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE'}$$

Por hipótesis tenemos: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$

Por tanto, AC' = AC y entonces C' = C.

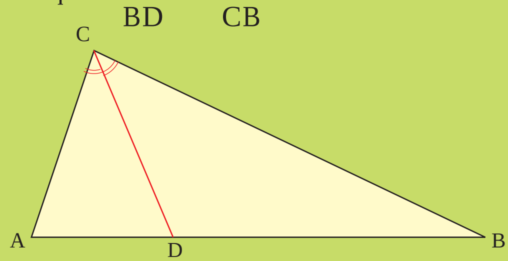
Fish.
M.C. Escher (1898-1972)

Existe una estrecha relación entre figuras semejantes y segmentos proporcionales: si dos figuras son semejantes sus "lados" correspondientes son proporcionales.

RETO

Demostrar que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los otros dos lados del triángulo. En otras palabras: Sea el $\triangle ABC$ y CD la bisectriz del ángulo ACB.

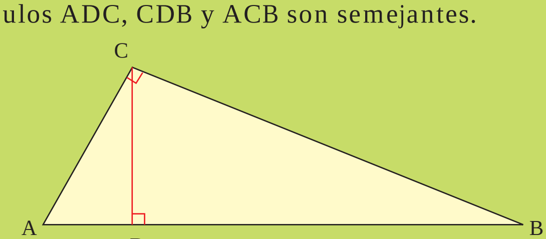
Demostrar que $\frac{AD}{BD} = \frac{CA}{CB}$



Sugerencia: Traza por el punto A una recta paralela al segmento CD que encuentre la prolongación del lado BC.

RETO

Demostrar que la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo lo divide en dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al triangulo original. En otras palabras: Sea el $\triangle ABC$, rectángulo en C, y CD la altura desde el vértice C. Demostrar que los triángulos ADC, CDB y ACB son semejantes.



Sugerencia: Utiliza el criterio de dos ángulos iguales para la semejanza de triángulos.

Pythagoras. Estatua en la isla de Samos. Grecia.

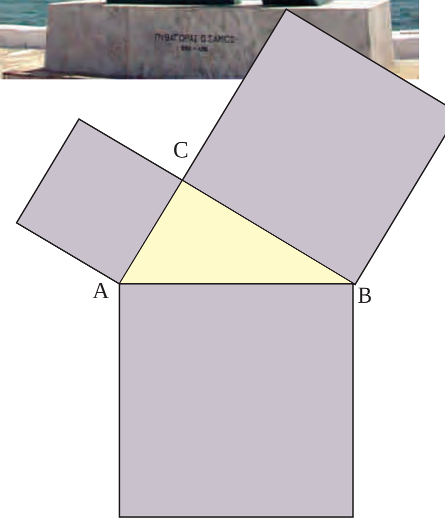
Los antiguos chinos, babilonios y egipcios utilizaron una sorprendente relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo: el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Pitágoras demostró que la relación anterior es cierta para cualquier triángulo rectángulo.

El teorema de Pitágoras es uno de los teoremas con mayor número de demostraciones. Por ello se ha considerado importante presentar otras demostraciones con cierto sentido histórico.

Teorema de Pitágoras:

"Si un triángulo ABC es rectángulo, siendo recto el ángulo ACB, entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".



Hipótesis:

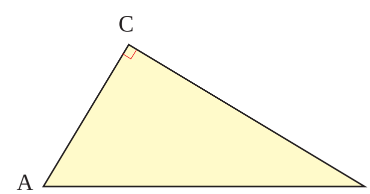
1. El triángulo ABC es rectángulo.
2. AC y BC son catetos. AB es la hipotenusa.

Tesis:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$.

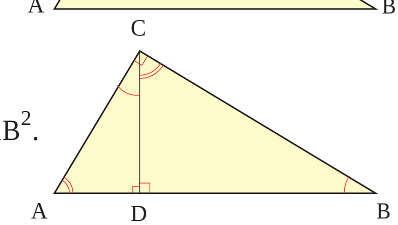
Demostración:

Consideremos el triángulo rectángulo ABC y tracemos la altura CD correpondiente a la hipotenusa:



Como los triángulos ADC y ACB son semejantes y también lo son los triángulos CDB y ACB, entonces:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \quad (1) \qquad \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} \quad (2)$$



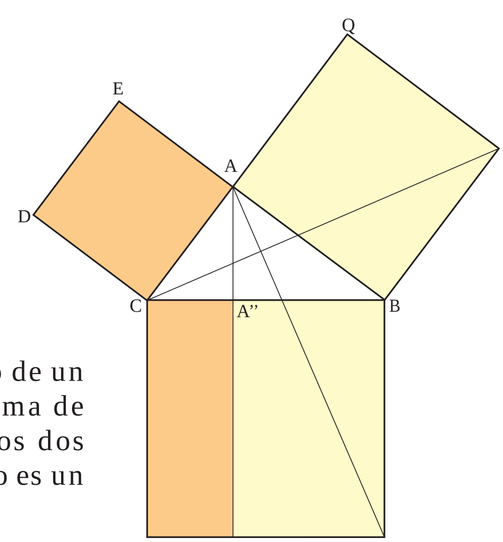
De (1) $AC^2 = AD \cdot AB$. De (2) $BC^2 = BD \cdot BA$.

Sumando las igualdades $AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot BA = AB\,(AD + DB) = AB^2$.

Se concluye: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

SABÍAS QUE...?

Euclides (Grecia, c.200 a.C.), en el Libro 1 de los Elementos, proposición 47, enuncia el Teorema de Pitágoras en términos de área: "En los triángulos rectángulos, el cuadrado sobre el ángulo opuesto al ángulo recto es equivalente al cuadrado sobre los lados que forman el ángulo recto". La figura de la derecha ilustra la demostración.



Teorema Recíproco del Teorema de Pitagoras:

"Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados entonces el triángulo es un triángulo rectángulo".

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
http://www.fpolar.org.ve/matematica3