Fundación POLAR

Matemática Maravillosa

Polígonos y poliedros

La forma del Gran Arco de La Defense (París) es la de un cubo hueco y abierto dentro de otro cubo, como en el diagrama de Schlegel del hipercubo, con arista de casi 110 m.

Debido a los problemas estructurales de estabilidad que tiene tal forma cúbica, la base del cubo está sobre piedra caliza colocada a 35 m debajo de la superficie y reposa sobre 12 pilares, disponiendo de un sistema de tres computadores que monitorean sus movimientos mediante sensores muy sensibles ("Es un edificio inteligente").

Fotografía tomada desde el Arco de Triunfo situado en Los Campos Elíseos (París, Francia).

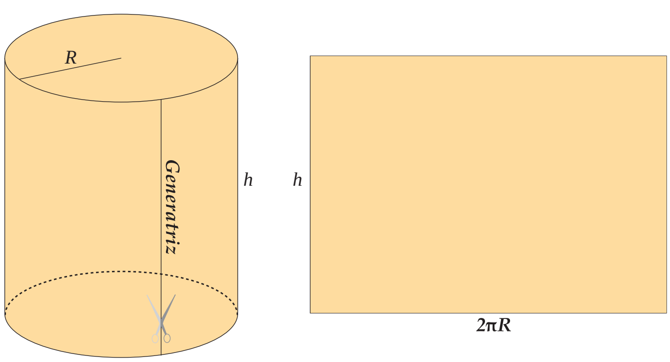
MM

Fascículo 8

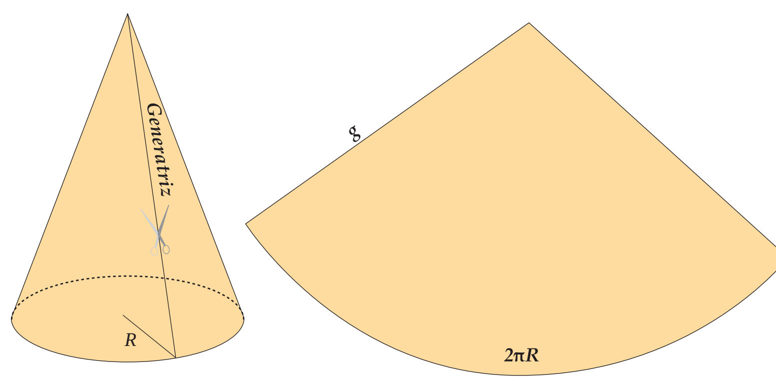
¿Cómo estudiar el hipercubo?

Los objetos en el espacio tridimensional (3D) se representan en un plano (2D) utilizando ciertas técnicas, entre ellas la perspectiva. También algunas figuras geométricas tridimensionales se pueden desarrollar o extender en un plano. Por ejemplo, un cilindro o un cono. Si lo cortamos por una generatriz, lo podemos extender en un plano (son superficies desarrollables, lo que no es posible hacer con una esfera).

Sin título, superfice desarrollable realizada por Antón Pevsner (Rusia, 1886-1962). La luz resbala sobre la superficie de esta escultura y da la impresión de movimiento. Pevsner es célebre por sus grandes “superficies desarrollables” en cobre o bronce.

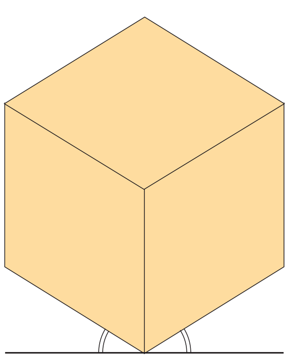


La superficie cilíndrica desarrollada en un plano da un rectángulo.

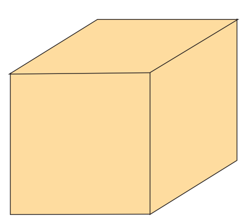


La superficie cónica desarrollada en un plano da un sector circular.

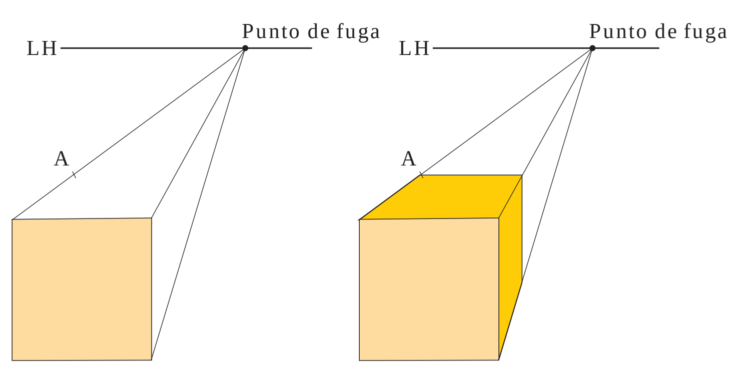
Consideremos un cubo que puede ser dibujado o representado en un plano de diversas formas, algunas de las cuales se hacen a continuación.



Representación isométrica (todas las aristas tienen igual longitud).



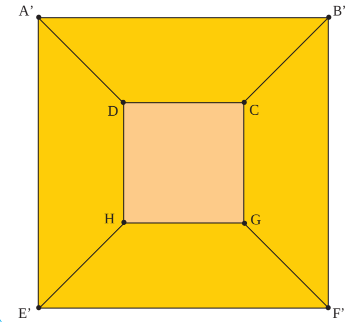
La perspectiva caballera mantiene la cara frontal y la arista que indica la profundidad se modifica un poco en longitud y también en su inclinación.



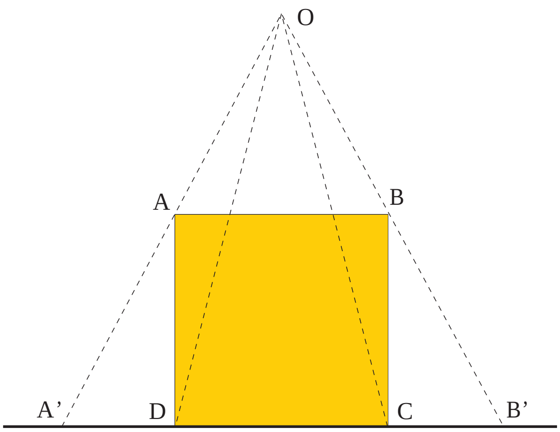
Perspectiva con un punto de fuga exterior. LH es la línea del horizonte.

En estas dos representaciones se conserva el paralelismo.

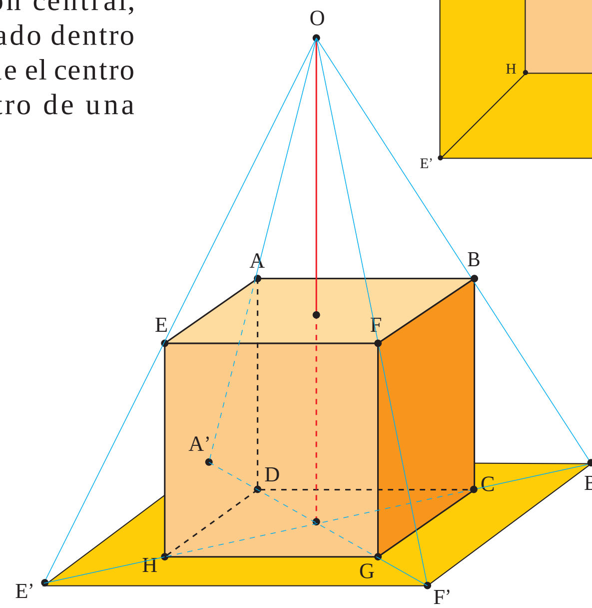
No se conserva el paralelismo.



También se puede representar con una proyección central, como se ilustra a continuación, resultando un cuadrado dentro de otro cuadrado. Es el diagrama de Schlegel, donde el centro de la proyección es un punto por encima del centro de una cara.

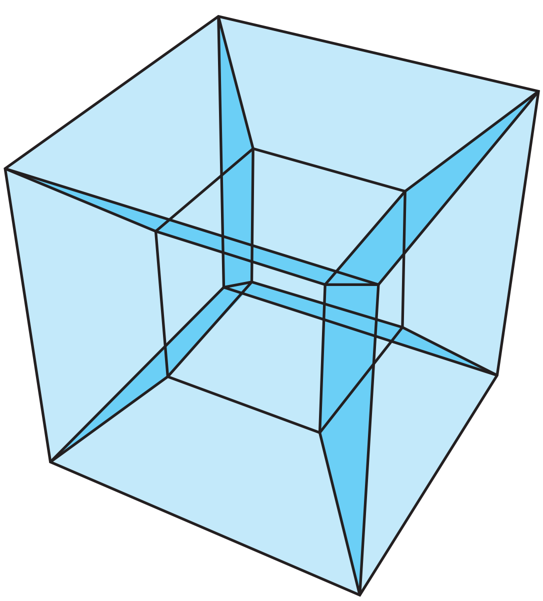


Éste es el diagrama corresponpondiente a un cuadrado. Se proyecta desde O sobre el lado CD, resultando un segmento CD dentro de otro segmento A'B'.

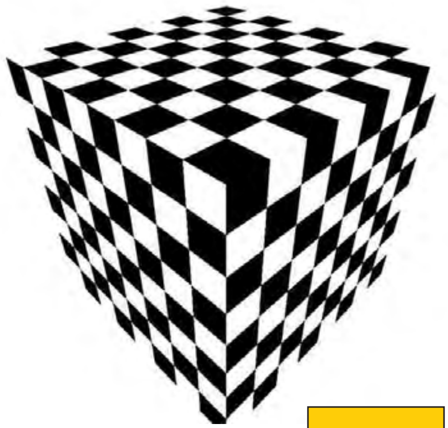


Éste es el diagrama correspondiente a un cubo. Imagina un cubo transparente y un bombillo encima del centro de una de las caras (por ejemplo, en el polo Norte de la esfera circunscrita). Las sombras arrojadas por las aristas (en alambre) dan ese diagrama: un cuadrado dentro de otro cuadrado.

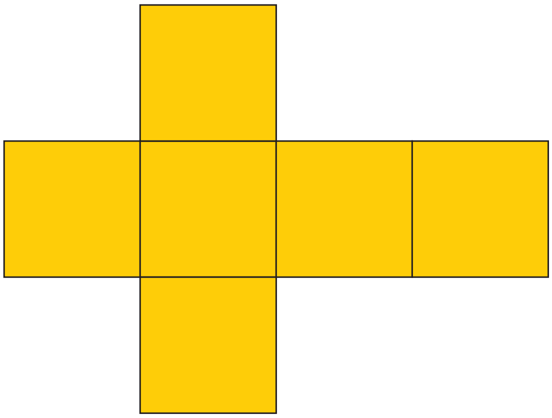
Por analogía se tiene la representación del hipercubo en el espacio 3D, que luce como un cubo dentro de otro cubo.



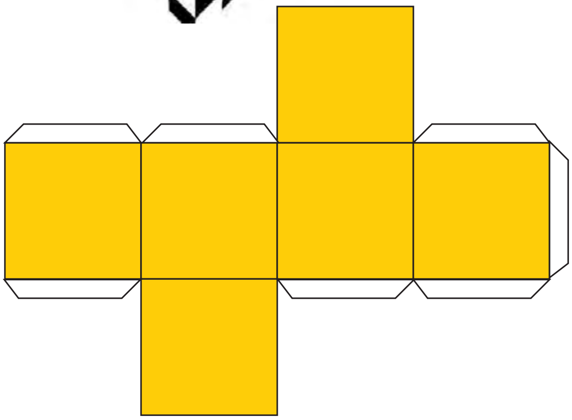
Ipercubo. Escultura en acero de Attilio Pierelli (Italia 1924-1990).



Los cinco tipos de poliedros regulares en 3D se pueden desarrollar o desplegar en un plano, de forma análoga a como desarrollamos o desplegamos una superficie cilíndrica y una superficie cónica. Así, se tiene el desarrollo del cubo en seis cuadrados que son sus caras:

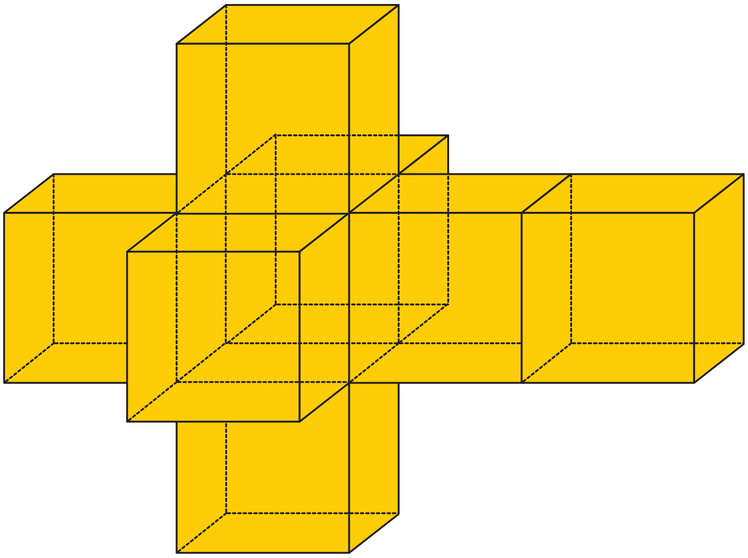


En la educación básica (1ª y 2ª etapas) se arma el cubo a partir de estos desarrollos, colocando unas lengüetas a fin de poder pegarlo con cola.

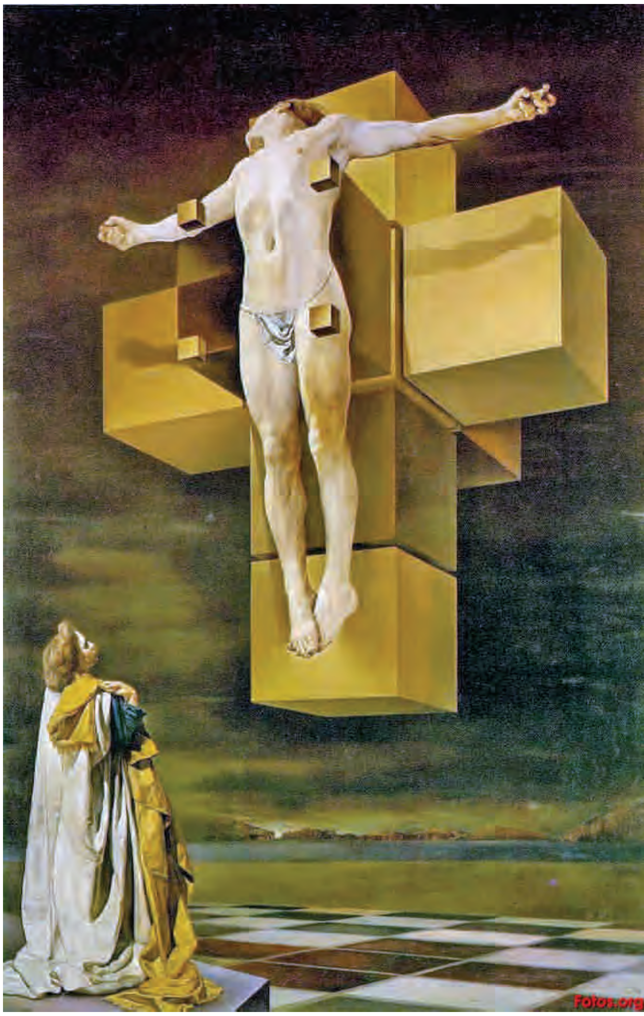


Lo análogo para el hipercubo, desplegado o desarrollado en 3D, es la figura siguiente que consta de 8 cubos que son sus caras tridimensionales.

Si habitáramos en un mundo de 4D espaciales, entonces colocaríamos lengüetas en esos cubos y al doblarlas se armaría el hipercubo en ese espacio 4D.



Ese desarrollo 3D del hipercubo ha inspirado a artistas, como se muestra al lado con *La Crucifixión* (*El Corpus Hipercubicus*, 1954) del gran artista catalán Salvador Dalí (1904-1989) en el que está Jesucristo crucificado en los cubos de ese despliegue 3D del hipercubo. Dalí es considerado el paradigma del pintor surrealista. En el año 2004 se celebró mundialmente el centenario de su nacimiento, en especial en su pueblo natal Figueras donde hay un museo en su honor.

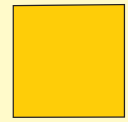
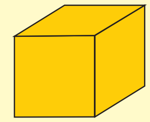
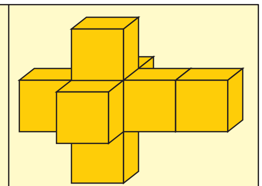


La compañia Bit-Tech tomó la forma del hipercubo para el diseño de una computadora a la cual llamaron HyPercube2.

El arquitecto y diseñador Claude Bradgon (Estados Unidos, 1866-1946), a inicios del s. XX incorporó el hipercubo y otros diseños en 4D en sus trabajos. Un ejemplo de esto es el edificio de la Cámara de Comercio de Rochester cuya foto se encuentra a la derecha.

El Gran Arco de La Defense en París fue diseñado por el arquitecto danés Johan Otto von Spreckelsen, quien a su vez designó al arquitecto francés Paul Andreu para la ejecución de la obra. Este Gran Arco se sitúa en el eje histórico de la capital francesa, eje donde se encuentran el Museo El Louvre, la Plaza de La Concorde, la gran avenida de los Campos Elíseos, el Arco de Triunfo (donde está inscrito el nombre del precursor de la Independencia, Francisco de Miranda) y sigue por una gran avenida hasta el complejo de La Defense, con sus plazas, edificios y el Gran Arco.

Resumiendo lo visto en estos fascículos:

	O Punto (0D)	O A Segmento (1D)	 O A Cuadrado (2D)	 O A Cubo (3D)	 Hipercubo (4D)
Dimensión (n=)	0	1	2	3	4
Vértices (puntos)	1	2	4	8	16
Segmentos (lados; aristas)	0	1	4	12	32
Caras planas (cuadrados)	0	0	1	6	24
Caras cúbicas (cubos)	0	0	0	1	8

Para calcular los vértices (V), segmentos (S), caras planas (P) y cubos (C) se utilizan las siguientes fórmulas:

$$V = 2^n \qquad S = n.\, 2^{n-1} \qquad P = \frac{n(n-1)}{2}\, 2^{n-2} \qquad C = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\, 2^{n-3}$$

INTERESANTE

Los poliedros del espacio 3D son lo análogo de los polígonos de un plano (2D). Sabemos que cualquiera sea el número k≥3 existen polígonos regulares (convexos) de k lados, por lo tanto existen infinitos polígonos regulares convexos. También hay infinitos polígonos regulares estrellados (no convexos) de k≥5 lados.

En dimensiones n mayores que 2 la situación cambia, como exponemos a continuación:

n=3: Solamente existen cinco tipos de poliedros regulares convexos (los cuerpos platónicos) y cuatro tipos de poliedros regulares estrellados (no convexos).

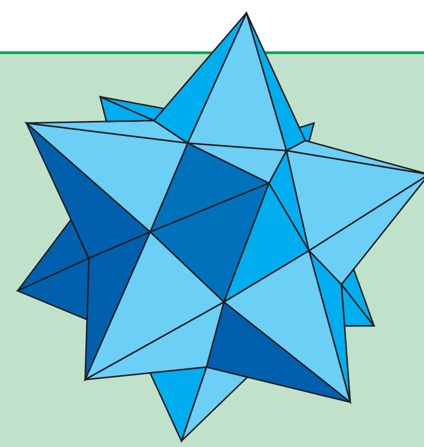
Aún más, en dimensión cuatro (n=4) ya sabemos que el hipercubo (lo análogo del cubo) es un poliedro cuatridimensional regular y convexo.

¿Hay más poliedros regulares convexos en 4D? ¿Y los regulares estrellados (no convexos) en 4D? ¿Cómo es esta situación en dimensiones mayores que 4?

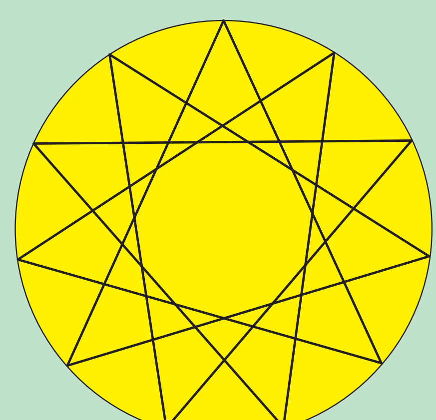
El estudio de esos problemas geométricos ocupó mucho tiempo y dedicación a distinguidos matemáticos y fue solamente en el s. XIX que un matemático suizo, Ludwig Schläfli en 1850, demostró lo siguiente:

a) En dimensión n = 4 solamente hay seis poliedros regulares convexos y diez regulares estrellados (no convexos).

b) En dimensión n ≥ 5 solamente hay tres poliedros regulares convexos y ningún poliedro regular estrellado.



Pequeño dodecaedro estrellado



Undecágono estrellado (n=11, p=4)

Bibliografía

- BANCHOFF, Thomas F. (1996): Beyond the third dimension. Scientific American Library, New York.
- BANCHOFF, Thomas F. (2000): Dimensión. En la obra "La Enseñanza agradable de la matemática" (dir. Lynn. A. Steen), Limusa y Noriega-Editores, México, 17-65. Es una parte del texto anterior.
- DEVLIN, Keith (2001): The Language of Mathematics. Making the invisible visible. W. H. Freeman and Co., New York.
- KINSEY, L. Christine y MOORE, Teresa E. (2002): Symmetry, Shape and Space. Key College Publishing, Estados Unidos.
- La Recherche (1998): L'Origine des formes. Número especial, 305.
- Pour la Science (1998): Les symmetries de la nature. Número fuera de serie. Edición francesa de Scientific American.
- SENECHAL, Marjorie (2000): Forma. En la obra "La Enseñanza agradable de la matemática" (dir. Lynn A. Steen), Limusa y Noriega-Editores, México, 149-192.
- SERRA, Michael (1993): Discovering Geometry: an inductive approach. Key Curriculum Press, Berkeley (California), Estados Unidos.

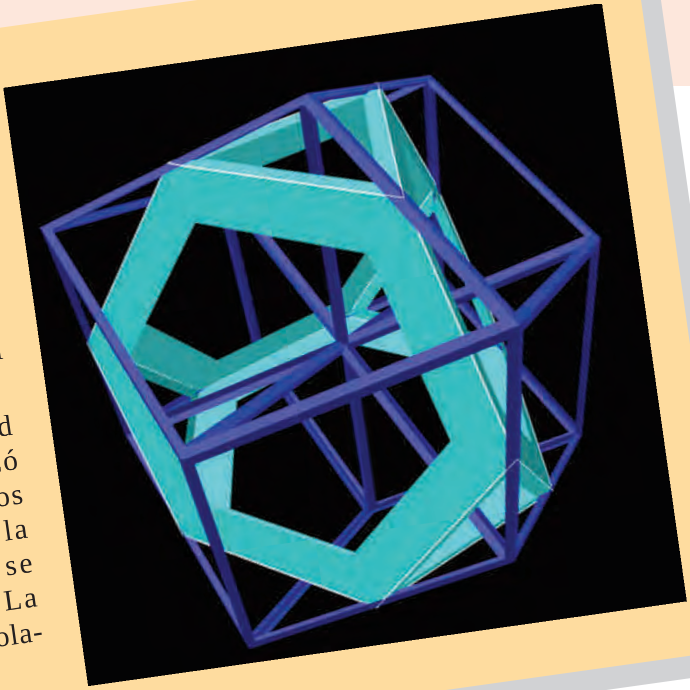
Páginas web

- http://www.ac-nuomea.nc/maths/amc/polyhedr/
- http://www.dibujotecnico.com

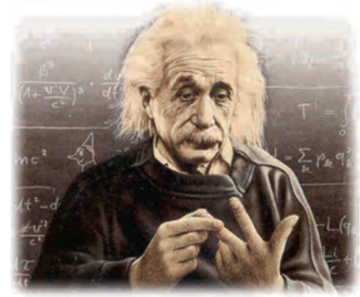
SABÍAS QUE...

Acerca del hipercubo (también denominado tesaracto) se han hecho varias películas. La más completa es la de Thomas Banchoff y Charles Strauss (1978) "The Hypercube: Projections and Slicing", de la Brown University, presentada en el Congreso Internacional de Matemáticos en Helsinki. Un film anterior a éste data de 1960 y fue realizado por Michael Noll et al. en los Laboratorios Bell.

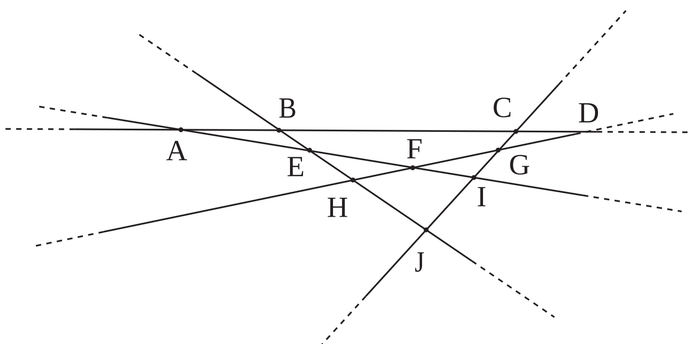
En Venezuela, el Prof. Andrés Zavrotsky, de la Universidad de Los Andes, conjuntamente con Fausto González, realizó en el año 1952 una película de dibujos animados y 3 minutos de duración sobre el hipercubo con el fin de ayudar a la visualización de la cuarta dimensión. Más detalles se encuentran en el artículo de Oswaldo Araujo (1997): "La ejemplar vida de Andrés Zavrotsky", Bol. Asoc. Mat. Venezolana, vol. IV, No. 2, 9-12.



Tengo que pensar lo

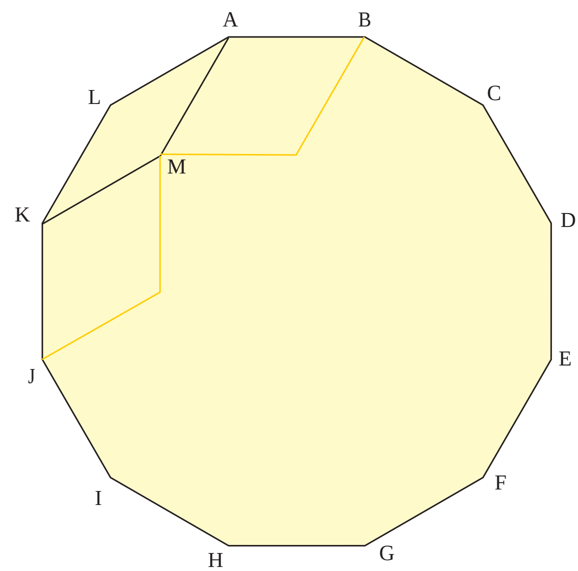


1 La figura está formada por cinco rectas que se cortan. Nombra y dibuja por lo menos 8 cuadriláteros.

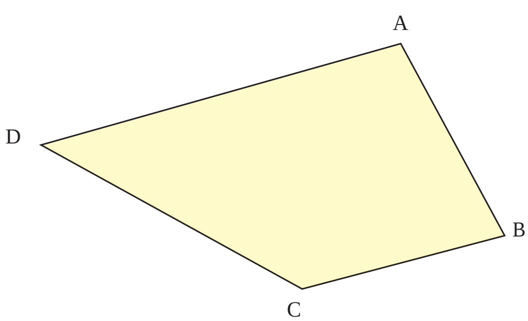


2 Dibuja un dodecágono regular, como el de la figura, y un paralelogramo de lados KM y KL.

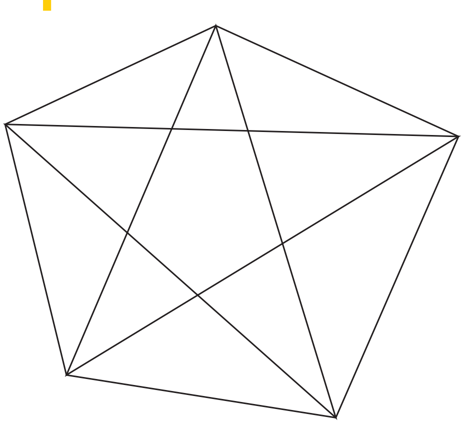
Luego dibuja un paralelogramo de lados KM y KJ y otro de lados AM y AB. Si continúas el proceso, ¿cuántos paralelogramos necesitarás para llenar todo el dodecágono?



3 Dibuja un cuadrilátero ABCD y determina los puntos medios de los lados. Si unes con segmentos los puntos medios de los lados adyacentes ¿se forma un paralelogramo? ¿Qué relación tiene el área del paralelogramo con el área del cuadrilátero?



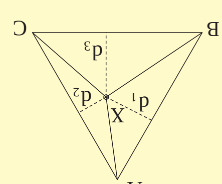
4 ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



5 Dibuja un triángulo equilátero ABC y elige un punto X cualquiera en su interior. Traza los segmentos perpendiculares desde el punto X a cada lado del triángulo. Compara la suma de las longitudes de los segmentos perpendiculares con la altura del triángulo equilátero. ¿Qué observas? Enuncia una conjetura y demuéstrala.

Respuestas:

1. Un respuesta es: AFGC, AEHD, AIGD, BEIC, BEFD, BHGC, EJGF, HJIF.
2. 15 rombos cubren el dodecágono regular.
3. El área del paralelogramo es la mitad del área del cuadrilátero.
4. 35 triángulos.
5. Conjetura: “La suma de las distancias desde un punto interior X del triángulo equilátero a los lados del triángulo es igual a la altura del triángulo”. Se demuestra trazando los segmentos desde el punto X a los vértices del triángulo y comparando las áreas de los triángulos formados (tríangulos AXC, AXB y BXC) y el área del triángulo original (ABC).



Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
http://www.fpolar.org.ve/matematica3