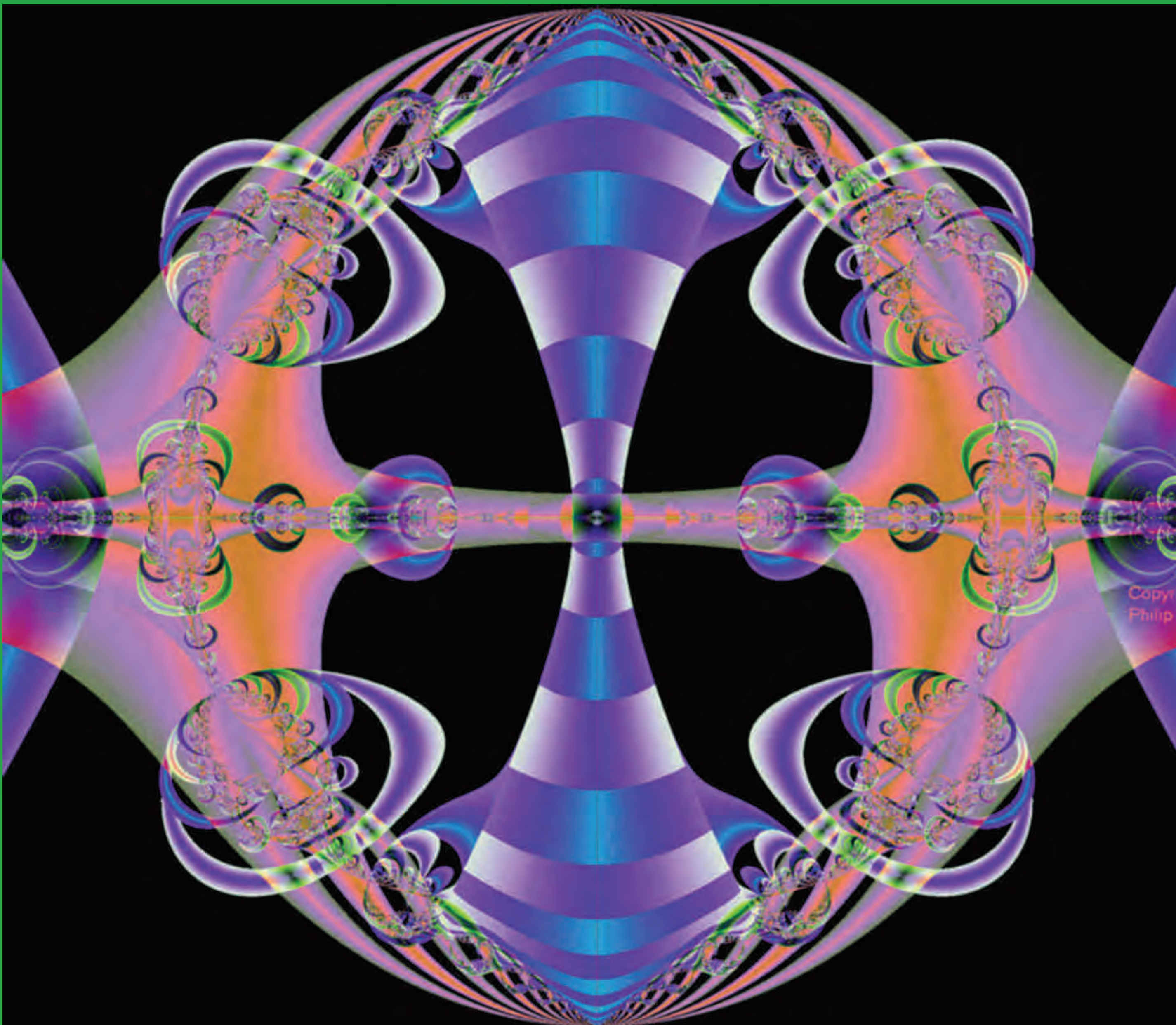
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa

Polígonos y poliedros



El sentido de la vista, aún con un solo ojo, junto con las sensaciones musculares relativas a los movimientos del globo ocular, podría bastar para hacernos conocer el espacio de tres dimensiones. Las imágenes de los objetos exteriores vienen a pintarse sobre la retina, que es un cuadro de dos dimensiones: son perspectivas (...). Y bien, lo mismo que se puede hacer sobre un plano la perspectiva de una figura de tres dimensiones, se puede hacer la de una figura de cuatro dimensiones sobre un cuadro de tres (o de dos) dimensiones. Esto no es más que un juego para el geómetra.

Henri Poincaré en su libro *La Ciencia y la hipótesis* (1902).
Versión en español de Colección Austral, Espasa-Calpe, 3ª edición, 1963.

Cuarta Dimensión de la estudiante Jin Hua Dong del 4º año en el Shepherd College y vicepresidenta del Club Math que promueve trabajos sobre matemática y arte. Este trabajo se realizó utilizando la técnica de fractales.

MM

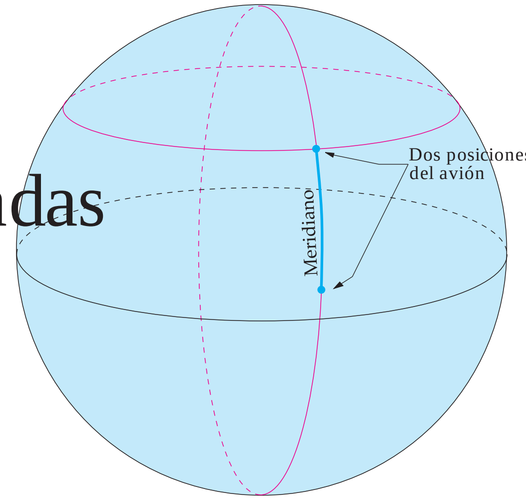
Fascículo 7

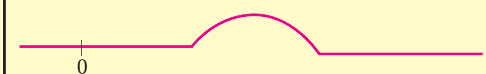
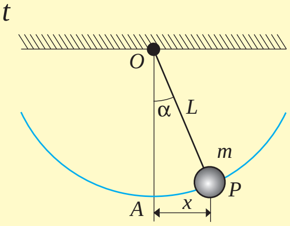
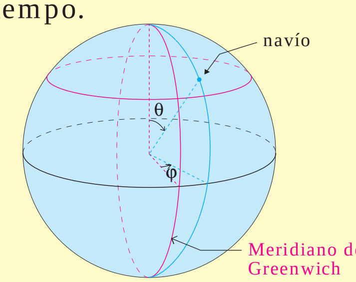
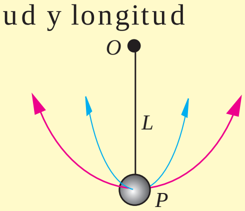
EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela

Últimas Noticias

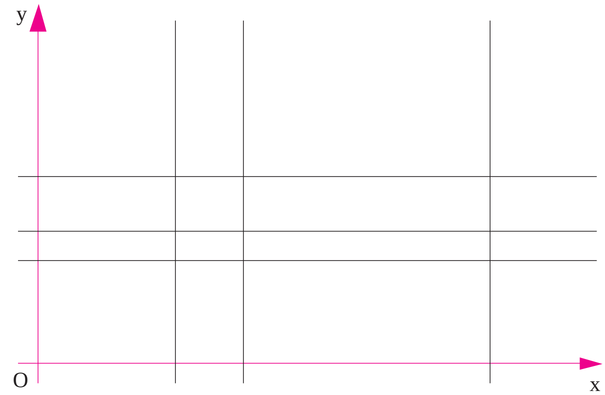
Grados de libertad y coordenadas

Los parámetros, como en el caso del avión, son independientes entre sí: es posible cambiar un parámetro sin que esto altere los otros. Así, podemos modificar la latitud de un avión moviéndolo a lo largo de un meridiano de la Tierra, y esto no modifica su longitud. Cada parámetro representa un grado de libertad y por lo tanto una dimensión.

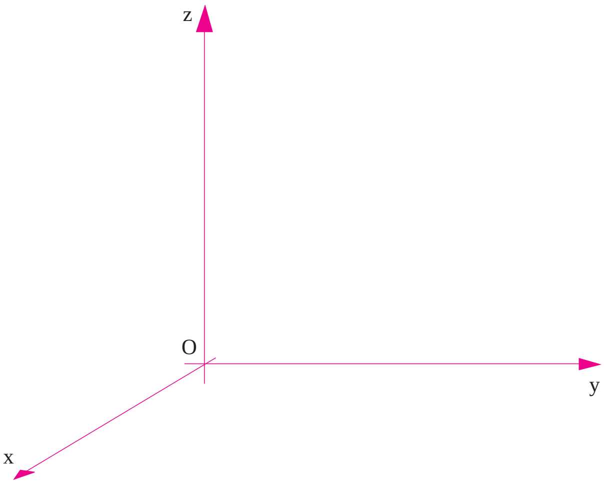


SITUACIÓN	DIMENSIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	COORDENADAS (PARÁMETROS)
Movimiento de un tren	1	Una “dirección”, dos sentidos: adelante-atrás	 La distancia s=s(t) al origen como función del tiempo
Movimiento de un péndulo simple de longitud L	1	Uno. El movimiento de la masa m es oscilatorio y en cada instante de tiempo su distancia a O es fija L	El ángulo α como función del tiempo *t*  También se puede tomar como parámetro, en función del tiempo, la longitud s del arco PA o la distancia horizontal x (elongación)
Movimiento de un navío en un océano	2	Dos “direcciones” y cada una con dos sentidos: adelante-atrás, derecha-izquierda	Latitud φ y longitud θ en función del tiempo. 
Movimiento libre de una varilla en torno a un extremo fijo (péndulo esférico)	2	Dos: el extremo no fijo P se mueve sobre una esfera de radio la longitud L de la varill	Latitud y longitud 
Movimiento de un avión (posición)	3	Tres “direcciones” y cada una de ellas con dos sentidos	Latitud, longitud y altura
Movimiento de un avión (posición y velocidad)	4	Cuatro: las tres del ejemplo anterior y la velocidad	Latitud, longitud, altura y velocidad

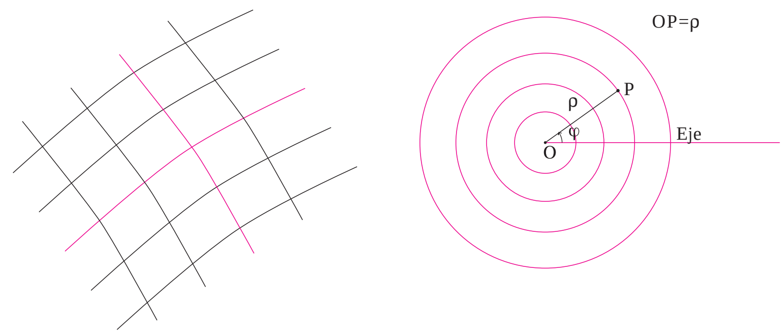
Los sistemas de coordenadas, creados durante el siglo XVII por el matemático francés René Descartes (Francia, 1596-1650) en uno de los tres apéndices de su obra conocida como “El Discurso del Método” (1637), permitieron tratar los problemas geométricos mediante el álgebra. Estos sistemas de coordenadas se denominan cartesianos o rectilíneos, y se construyen utilizando rectas, usualmente perpendiculares.



Sistema de coordenadas cartesianas en un plano.



Sistema de coordenadas cartesianas en el espacio.



Sistema de coordenadas no cartesiano en un plano (se denominan coordenadas generalizadas). Por ejemplo, las coordenadas polares (ρ,φ) del punto P.

En cada una de las situaciones siguientes determina cuántos grados de libertad tiene el sistema descrito, es decir, de cuántos parámetros depende el movimiento del sistema y cuáles son éstos.

a) El sistema masa-polea-resorte de la figura 1. Se trata del movimiento de la masa m.

b) El péndulo doble de la figura 2, donde m_1 y m_2 son masas unidas por una varilla de longitud L_2 y m_1 está sujeta a otra varilla de longitud L_1 con un extremo fijo O.

c) El sistema formado por tres carros unidos con resortes de la figura 3.

d) La denominada máquina de Atwood: se trata del movimiento de las masas m_1 y m_2 unidas a través de una polea mediante una cuerda sin rozamiento de longitud L (figura 4).

e) Una partícula de masa m que se mueve sobre una circunferencia de radio R.

f) Piensa en otros sistemas mecánicos con uno, dos o tres grados de libertad.

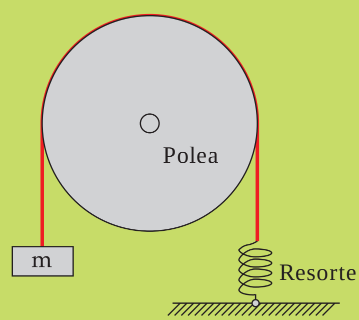


Figura 1

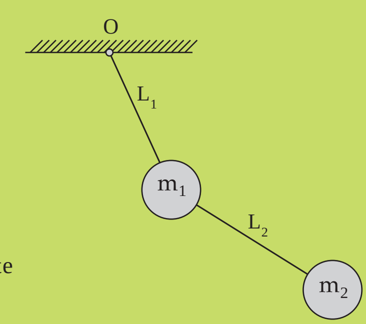


Figura 2

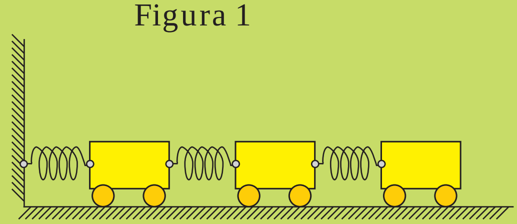


Figura 3

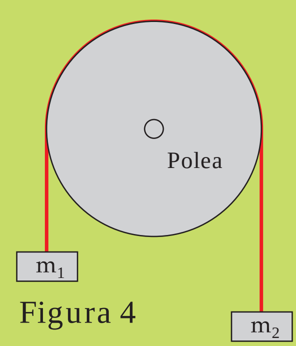
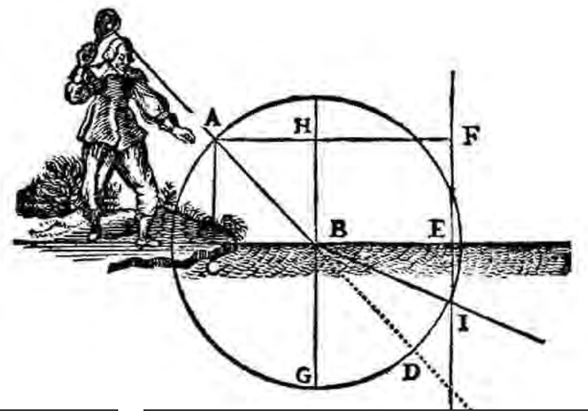


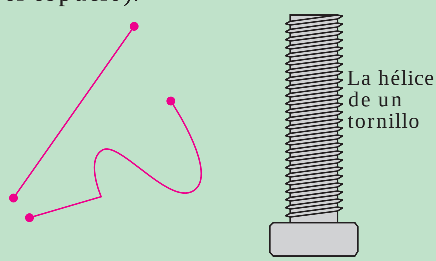
Figura 4



Anterior a Descartes la geometría era "sintética" y luego, con la utilización de las coordenadas, se creó la geometría analítica, esto es la vinculación de la geometría con el álgebra, etiquetando los puntos con números y los entes geométricos mediante relaciones entre variables.

UNIDIMENSIONAL

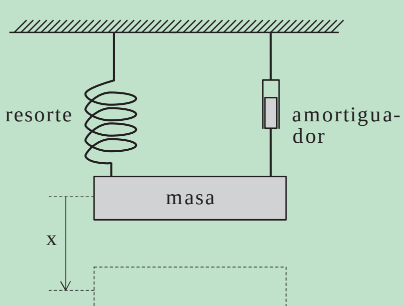
Segmentos, curvas (en el plano o en el espacio).



En una dimensión un punto se localiza mediante una sola coordenada (un número).

Para los objetos unidimensionales se calculan longitudes.

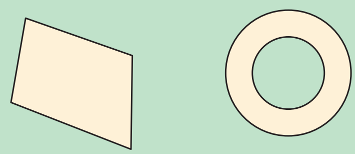
Hay sistemas físicos que tienen un grado de libertad.



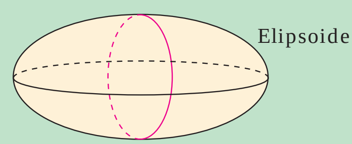
En el sistema masa-resorte-amortiguación, la masa m se mueve verticalmente. Se necesita solamente una coordenada $x=x(t)$ para definir la localización de la masa en un instante cualquiera t (x se mide a partir de la posición de equilibrio estático).

BIDIMENSIONAL

Regiones del plano encerradas por curvas, como los polígonos.

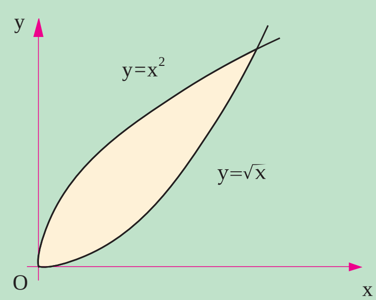


Superficies en el espacio. Por ejemplo: la superficie de la Tierra (la esfera terrestre).



En dos dimensiones un punto se localiza mediante dos coordenadas (dos números).

Para las regiones del plano encerradas o limitadas por curvas se calculan las áreas.

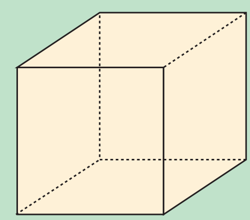


El área de la región comprendida entre los dos arcos de parábolas dibujadas es igual a 1/3.

Hay sistemas físicos que tienen dos grados de libertad.

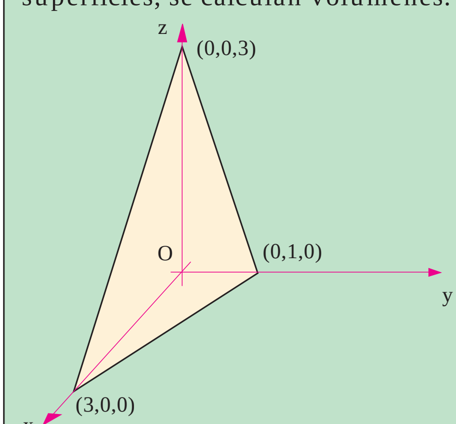
TRIDIMENSIONAL

Sólidos del espacio. La Tierra se considera como esfera sólida y no solamente la superficie terrestre.



En tres dimensiones un punto se localiza mediante tres coordenadas (tres números).

Para los sólidos del espacio, los que están "encerrados"o limitados por superficies, se calculan volúmenes.

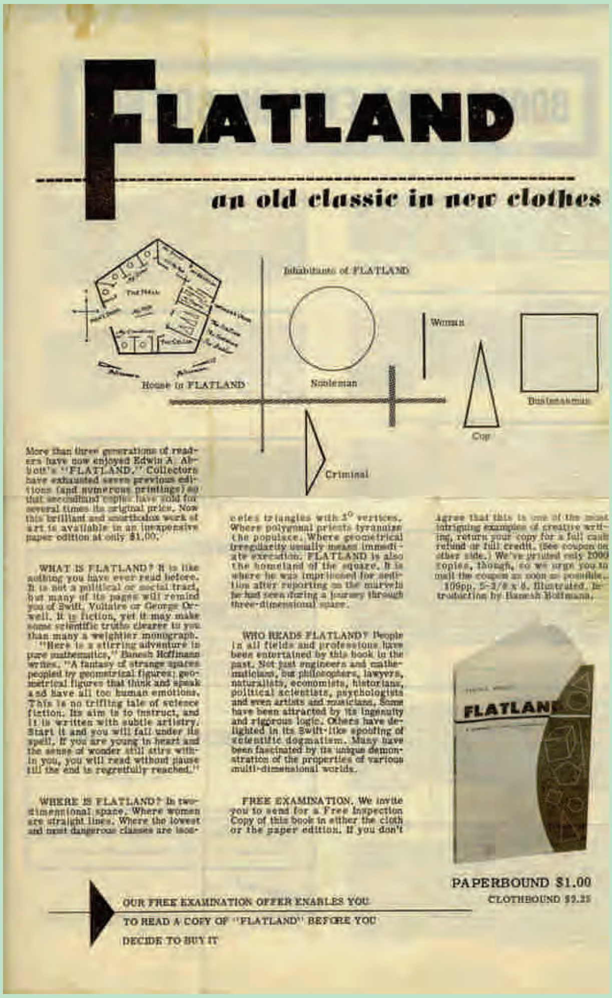


El volumen del tetraedro limitado por los planos de coordenadas y el plano dibujado es 3/2.

Hay sistemas físicos que tienen tres grados de libertad.

Al inicio de la geometría analítica los matemáticos restringían el uso de las coordenadas a una y dos dimensiones. Ya Fermat, creador de la geometría analítica junto con Descartes, estuvo consciente de una geometría analítica con más de dos dimensiones, pero no fue sino en el s. XVIII que se entendió bien que el álgebra con una o dos coordenadas podía ser extendida al espacio tridimensional y, posteriormente, a espacios con mayor número de dimensiones.

En 1884 salió publicado un libro del clérigo y educador inglés Edwin Abbot Abbot titulado “Flatland. A romance of many dimensions”, que era un sátira social y una introducción para entender lo que es dimensión y dimensiones mayores que tres. Abbot promovía la igualdad de oportunidades en la educación de los (las) jóvenes de todas las clases sociales, lo que no ocurría en la Inglaterra de la época Victoriana en donde había muchos prejuicios sociales. Abbot describe la vida de seres que viven en un mundo plano (Flatland; Flat=plano, land=país o tierra) y establece una interrelación entre mundos de distintas dimensiones. En la portada del libro, “A Square” (Square=cuadrado) es el nombre que utiliza para el narrador. Allí se observa una casa plana (en forma de pentágono regular), que nosotros podemos ver en su totalidad, pero *A Square* viviendo en el mundo plano solamente puede observar una parte de ella aunque puede “caminar” en todo su alrededor.


FLATLAND

an old classic in new clothes

More than three generations of readers have now enjoyed Edwin A. Abbott's "FLATLAND." Collectors have exhausted seven previous editions (and numerous printings) so that secondhand copies have sold for several times its original price. Now this brilliant and unorthodox work of art is available in an inexpensive paper edition at only $1.00.

WHAT IS FLATLAND? It is like nothing you have ever read before. It is not a political or social tract, but many of its pages will remind you of Swift, Voltaire or George Orwell. It is fiction, yet it may make some scientific truths clearer to you than many a weightier monograph.

"Here is a stirring adventure in pure mathematics," Banesh Hoffmann writes. "A fantasy of strange spaces peopled by geometrical figures; geometrical figures that think and speak and have all too human emotions. This is no trifling tale of science fiction. Its aim is to instruct, and it is written with subtle artistry. Start it and you will fall under its spell. If you are young in heart and the sense of wonder still stirs within you, you will read without pause till the end is regretfully reached."

WHERE IS FLATLAND? In two-dimensional space. Where women are straight lines. Where the lowest and most dangerous classes are isosceles triangles with 3° vertices. Where polygonal priests tyrannize the populace. Where geometrical irregularity usually means immediate execution. FLATLAND is also the homeland of the square. It is where he was imprisoned for sedition after reporting on the marvels he had seen during a journey through three-dimensional space.

WHO READS FLATLAND? People in all fields and professions have been entertained by this book in the past. Not just engineers and mathematicians, but philosophers, lawyers, naturalists, economists, historians, political scientists, psychologists and even artists and musicians. Some have been attracted by its ingenuity and rigorous logic. Others have delighted in its Swift-like spoofing of scientific dogmatism. Many have been fascinated by its unique demonstration of the properties of various multi-dimensional worlds.

FREE EXAMINATION. We invite you to send for a Free Inspection Copy of this book in either the cloth or the paper edition. If you don't agree that this is one of the most intriguing examples of creative writing, return your copy for a full cash refund or full credit. (See coupon on other side.) We've printed only 2000 copies, though, so we urge you to mail the coupon as soon as possible.

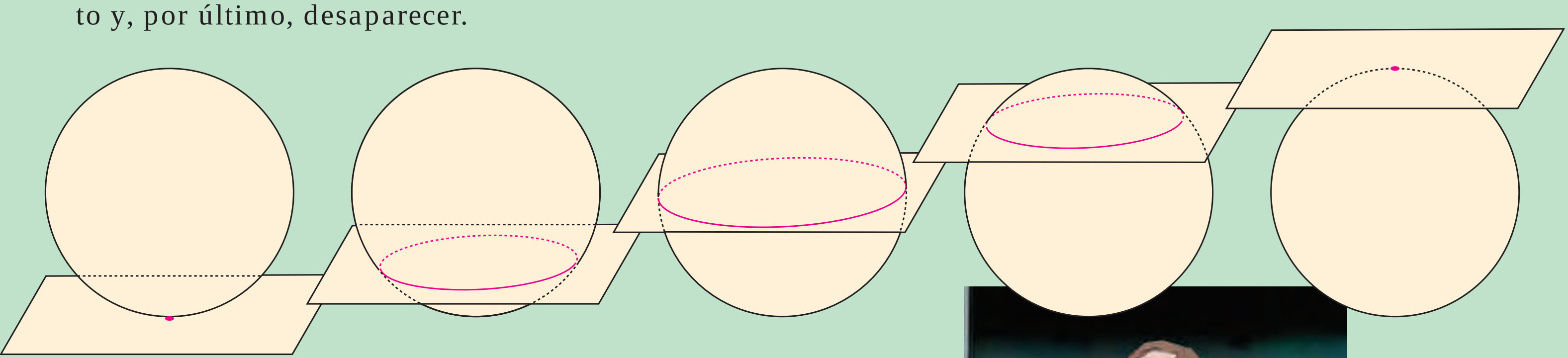
109pp. 5-3/8 x 8. Illustrated. Introduction by Banesh Hoffmann.

FLATLAND

PAPERBOUND $1.00
CLOTHBOUND $2.25

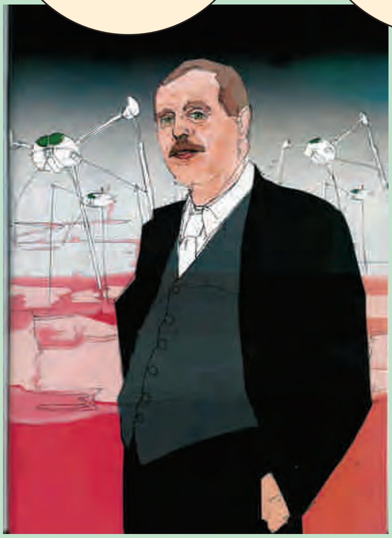
OUR FREE EXAMINATION OFFER ENABLES YOU TO READ A COPY OF "FLATLAND" BEFORE YOU DECIDE TO BUY IT

En Flatland se visita otra tierra, unidimensional, Lineland, donde los habitantes se representan por segmentos (los hombres) y puntos (las mujeres), y el rey es un segmento más grande. A Square intenta convencer, inútilmente, al rey de Lineland (Line=línea) de la existencia de una segunda dimensión. A su vez, *Flatland* es visitada por *Una Esfera del espacio* que intenta convencer a *A Square* de la existencia de una tercera dimensión y argumenta inicialmente que él puede ver toda la casa desde arriba describiendo a todos los habitantes. *La Esfera* atraviesa el plano, y *A Square* primero ve un punto, luego una parte de circunferencia que se va agrandando hasta llegar a lo máximo, para luego contraerse, reducirse a un punto y, por último, desaparecer.



Finalmente A square se convence y pregunta para ver la cuarta dimensión. La Esfera le niega esa posibilidad y lo envía a Flatland, donde intenta convencer a los otros de la tercera dimensión, siendo arrestado de por vida y escribe FLATLAND (Planilandia).

En el siglo XX se han escrito varios trabajos inspirados en Flatland, como el *Mundo esférico* (*Sphereland*) de Dionis Burger (1964) y *Planiverse* de A.K. Downey, en 1984, conmemorando el centenario de Flatland. Asimismo, el escritor británico H.G. Wells (1866-1946), autor de obras de ciencia ficción como *El hombre invisible* (1897), *La guerra de los mundos* (1898) y *La máquina del tiempo* (1895), en la que la idea del tiempo como una dimensión está claramente explicada.



H.G. Wells y *La guerra de los mundos.*

Fuente:forums.eveofthewar.com/photos/displayimage.php

¿ Cuántas dimensiones podemos considerar que tengan utilidad tanto en matemática como en otras disciplinas ?

Hemos visto que el movimiento de un avión o de un submarino depende de cuatro parámetros: tres son de posición (latitud, longitud y altura o profundidad) y el cuarto es la velocidad. Por lo tanto necesitaríamos cuatro ejes de coordenadas para representar esas variables en función del tiempo (cuatro dimensiones, 4D) y, si además queremos representar el tiempo, necesitaríamos un quinto eje de coordenadas (cinco dimensiones, 5D). Con nuestros ojos no es posible ver ni imaginarnos más de tres dimensiones. Aquí tenemos que razonar y hacer analogías con lo que ocurre en 1D, 2D y 3D. Aún más, hay situaciones prácticas en las que se necesitan más dimensiones. Por ejemplo, en los procesos productivos intervienen muchos parámetros: precios de materiales que se compran, precios de lo que se vende, cantidad de personal que interviene en la producción, cantidad de material que se utilizará (materia prima), transporte, tiempo de fabricación, entre otros. Esto requiere trabajar con más de tres variables independientes y algunas dependientes de las anteriores, y lo cual implica un cierto número de dimensiones que no es posible representar gráficamente pero sí calcular con las mismas. Así, se hacen cálculos con muchas variables utilizando computadoras, y para esto ha sido necesario crear y estudiar los "espacios n-dimensionales".

Simulación de movimiento a través de un túnel de viento, donde se puede probar la aerodinamia de un vehículo. Esta imagen proviene de una simulación por computadora utilizado por una empresa taiwanesa.

Fuente: www.syzygia.com.tw

"La geometría es a las artes plásticas lo que la gramática es al arte de escribir. Hoy los científicos ya no se atienen a las tres dimensiones de la geometría euclidiana. Los pintores han sido llevados natural y, por así decirlo, intuitivamente, a preocuparse por las nuevas medidas posibles del espacio que se indican brevemente en su conjunto, en lenguaje figurativo de los modernos con el término de cuarta dimensión. La cuarta dimensión aparece generada por las tres dimensiones conocidas y representa la inmensidad del espacio que se eterniza en todas las direcciones en cualquier momento dado".

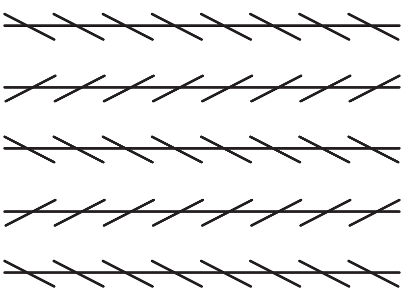
Guillaume Apollinaire, francés nacido en Roma (1880-1918), poeta, escritor y crítico de arte, precursor del surrealismo. La cita es de "Los pintores cubistas" (1913) considerado el manifiesto de ese movimiento.

Fuente de la imagen: french.chass.utoronto.ca / fcs195 / apollinaire.html

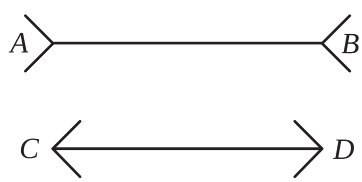
La cuarta dimensión y el hipercubo

A mediados del s. XIX se crean las denominadas geometrías no euclidianas y uno de los principales matemáticos de este siglo, Bernhard Riemann (Alemania, 1826-1866), había pensado en espacios con muchas dimensiones. En 1908, otro matemático alemán, Hermann Minkowski (1864-1909), quien fue profesor de Einstein, fusionó las tres dimensiones espaciales y la dimensión temporal en un continuo de 4D. La teoría de la relatividad de Einstein, inicios del s. XX, utiliza ese espacio de 4D con coordenadas (x,y,z,t). Las 4D eran objeto de estudio por matemáticos, físicos y filósofos y también fueron objeto de variadas especulaciones en el período 1880-1910, en el cual Abbot publicó su Flatland.

Las geometrías no euclidianas, las dimensiones mayores que tres, y el estudio de las ilusiones ópticas en las que intervinieron el astrofísico Johann Zöllner (1834-1882), el físico Hermann von Helmotz (1821-1894) y otros, crearon un ambiente científico (lo no euclidiano, dimensiones mayor que tres e ilusión óptica) que tuvo repercusión en las artes.



Segmento cortando a rectas paralelas que no se ven como tales.



Los segmentos AB y CD tienen igual longitud

El *Sello Blanco* (1965) de René Magritte (Bélgica, 1898-1967), obra surrealista, es una paradoja visual que forma parte de sus pinturas imposibles. Magritte afirmó: “Cada cosa que nosotros vemos esconde algo más que queremos ver”.

INTERESANTE

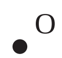
Una de las primeras manifestaciones artísticas en tal sentido lo testimonia el siguiente cuadro, de inspiración cubista, del pintor francés, nacionalizado norteamericano y precursor en Nueva York de un movimiento denominado dadaísmo, Marcel Duchamp (1887-1968), titulado *Desnudo bajando una escalera* (1912), en el que se vincula el análisis cubista del espacio con la representación del movimiento, y de allí las 4D. Fue una pintura futurista con insinuaciones cubistas, “Una expresión del tiempo y del espacio a través de una presentación abstracta del movimiento”, como lo escribió el mismo Duchamp.

En este cuadro, las secuencias de la figura moviéndose hacia abajo de la escalera tiene lugar de manera simultánea y son reveladas las distintas facetas de la figura.

¿De qué forma podemos representar e intentar imaginarnos la cuarta dimensión y algunas de sus figuras, análogamente cómo se representa la tercera dimensión en un papel?

Observemos primero cómo se van generando las dimensiones por analogía e iniciando con la dimensión cero.

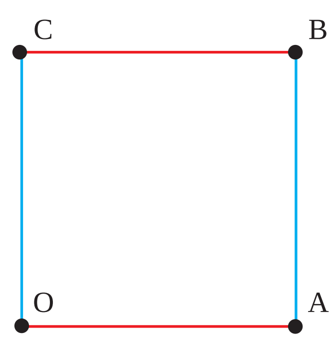
Dimensión cero: un punto O



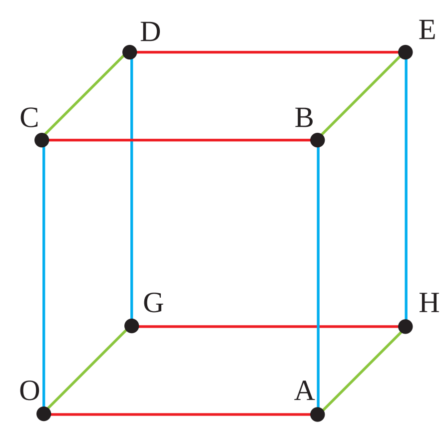
Dimensión 1: una recta

Un segmento construido a partir de un punto O, teniendo a éste como un extremo o vértice.

Dimensión 2: una segunda recta perpendicular a la anterior indica la segunda dimensión. Un cuadrado construido a partir de un segmento perpendicular en O al segmento OA.

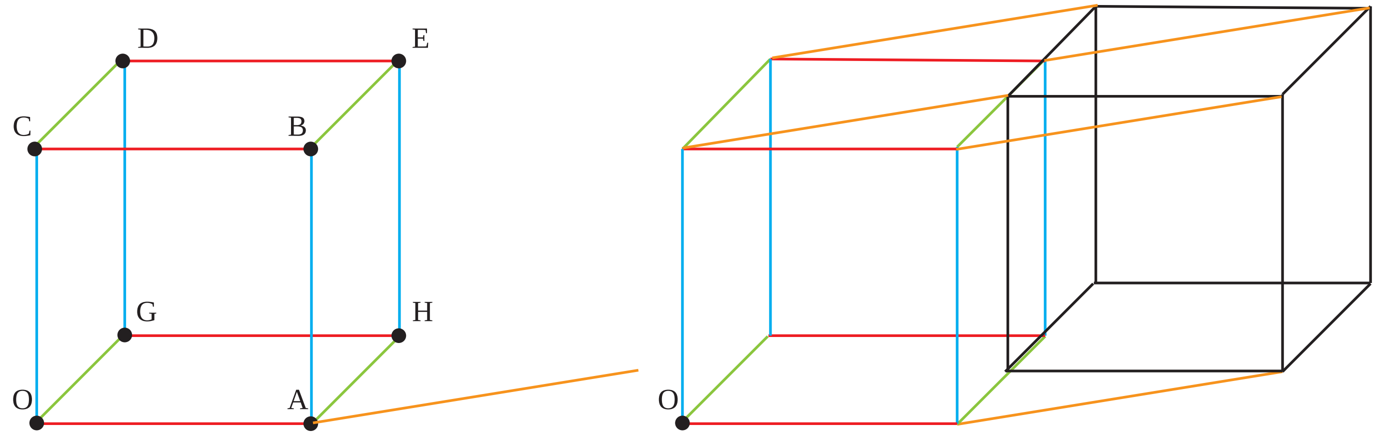


Dimensión 3: una tercera recta perpendicular a las dos anteriores, esto es, perpendicular al plano que ellas forman, indica la tercera dimensión. Un cubo construido a partir de un segmento perpendicular en O al cuadrado OABC.



Dimensión 4: tenemos que pensar en una recta perpendicular a nuestro espacio 3D y mover el cubo según esa dirección perpendicular. Esto genera el hipercubo que es un "poliedro" regular en el espacio de cuatro dimensiones.

Es claro que en la realidad no podemos efectuar ese movimiento, pero sí podemos dibujar como luciría un tal hipercubo al proyectarlo en una hoja de papel.



El cubo de la izquierda trasladado en la dirección de la 4ta. dimensión.

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web: **http://www.fpolar.org.ve/matematica3**