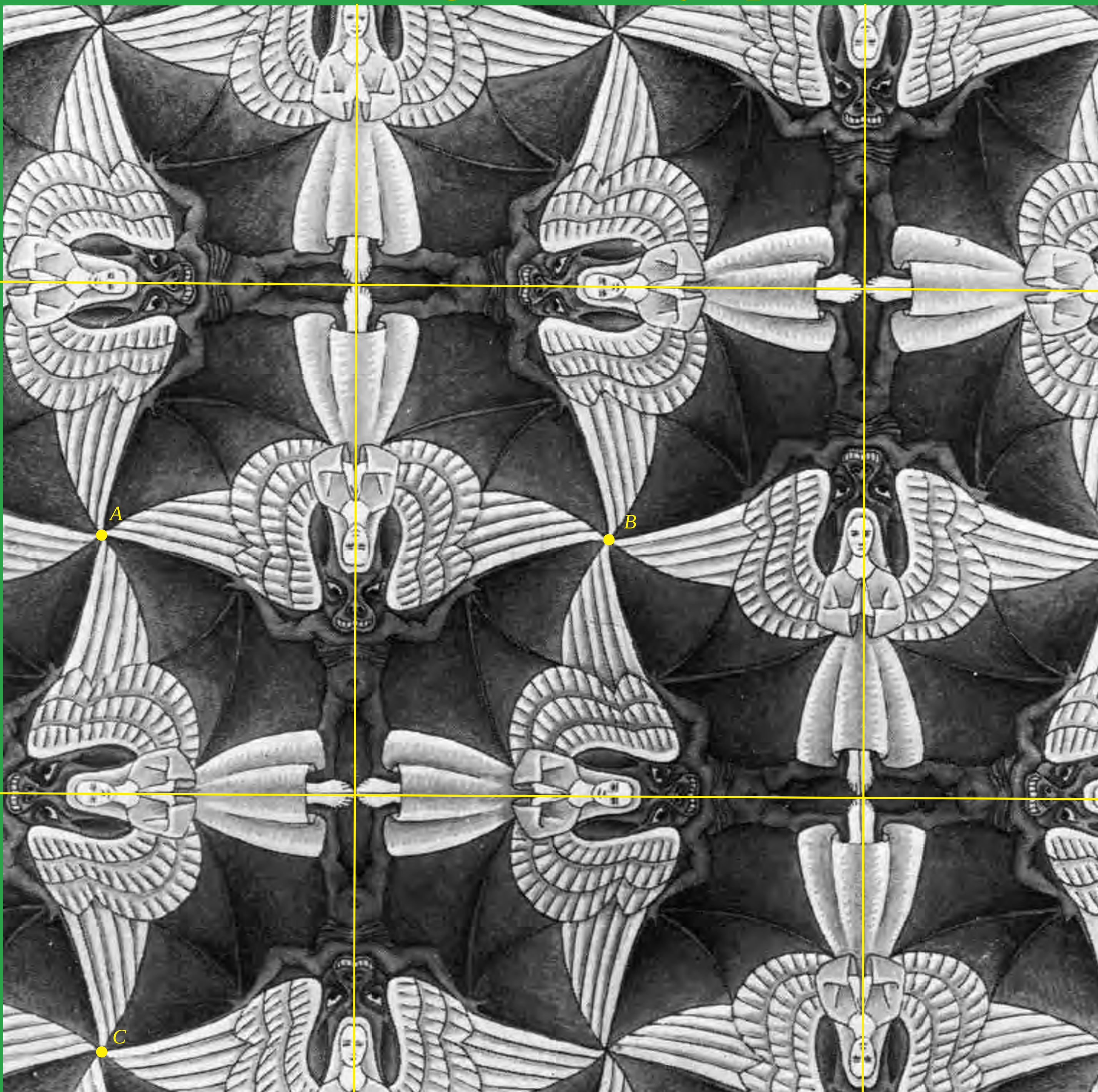
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa

Polígonos y poliedros



Ángeles y Demonios (M. Escher). Con centro en A, B y C (puntos de encuentro de 4 alas) y mediante rotación de 90° se obtiene la misma figura (simetría rotacional de orden 4). Las rectas (de color amarillo) L_1, L_2, L_3,... ubicadas en los ejes de los ángeles y los demonios, son ejes de simetría axial (reflexiones). Así, si doblamos "el plano" por uno de ellos, se obtiene la misma figura.

MM

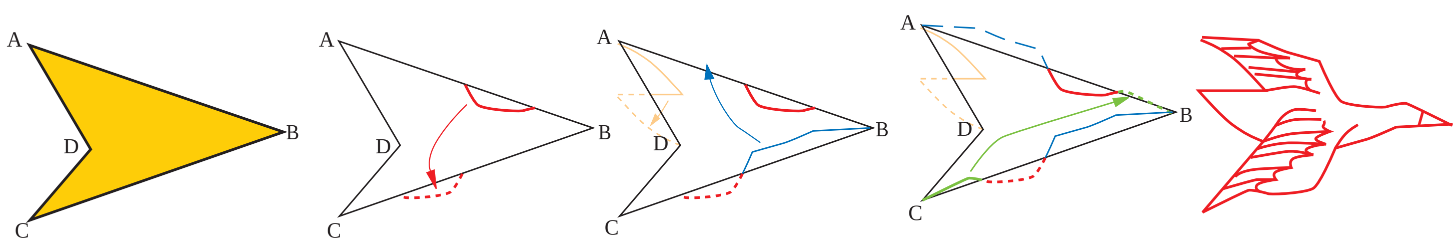
Fascículo 6

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela
Últimas Noticias

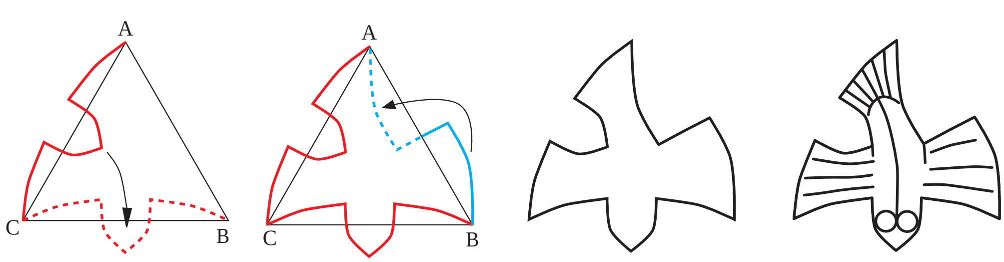
Mosaicos de Escher

Escher (Holanda, 1898-1972) visitó Granada el año 1936 junto con su esposa y allí estudió detenidamente la decoración de las paredes, techos y pisos islámicos de La Alhambra (el gran palacio construido por los moros durante los s. XIII-XIV). Observó los motivos islámicos en las paredes, todos ellos de tipo geométrico, donde por cuestiones religiosas no hay figuras humanas ni de animales. Allí realizó sus dibujos y descubrió las diecisiete posibilidades de teselar el plano (los 17 grupos de simetría del plano). Durante una labor de cerca de treinta años, Escher creó más de cien teselaciones periódicas de un plano utilizando una gran variedad de motivos.

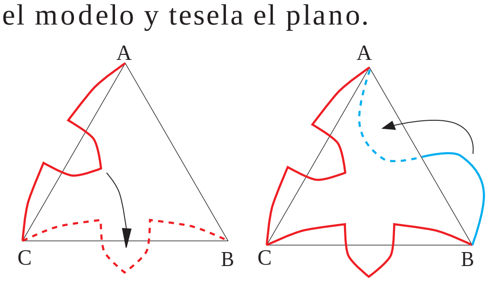
Para construir tales mosaicos a partir de polígonos que teselan el plano, debe mantenerse el principio de conservación de áreas, esto es, si quitamos una parte hay que colocarla con igual área en otra parte. Esto lo podemos observar en un motivo islámico de La Alhambra de Granada como es la pajarita donde se preserva el área del triángulo equilátero de partida, y en el "paralelogramo deformado". Observa, abajo, la creación de la figura de un pato a partir del polígono ABCD.

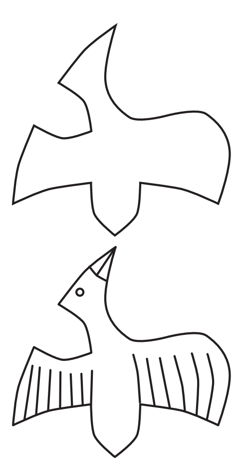


Observa, abajo, la creación de un "pez volador" (M.C. Escher) a partir de un triángulo equilátero.



Observa cómo con pequeñas variaciones en las curvas aparecerá la figura de un pájaro en vez de un pez volador. Recorta el modelo y tesela el plano.

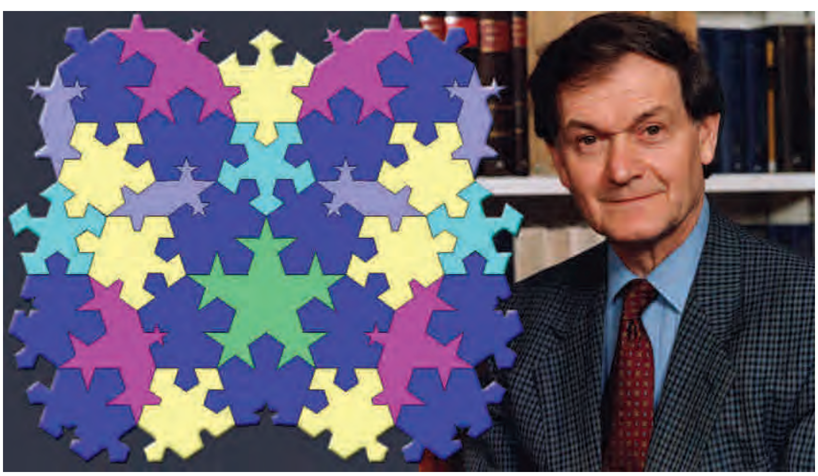


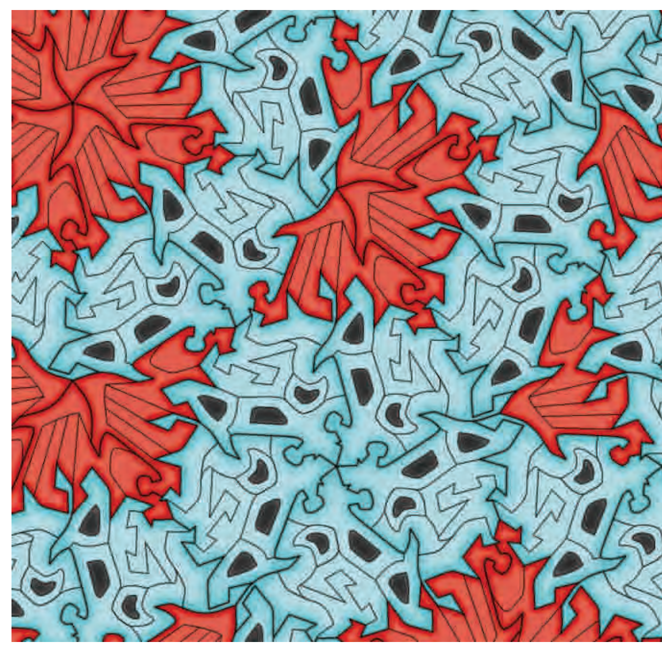


Mosaicos de Penrose

Entre 1972 y 1973, el matemático británico Roger Penrose descubrió un conjunto de teselas que recubren el plano en forma no periódica; es decir, no se puede obtener la teselación a partir de un motivo y mediante dos traslaciones independientes. Posteriormente los químicos (1984) descubrieron una aleación de Aluminio (Al) y Manganeso (Al_6Mn) que tenía ciertas características de un cristal, pero al mismo tiempo no podía serlo pues tenía simetrías rotacionales pentagonales (ángulo de rotación 360°/5 = 72°) lo que es incompatible con la estructura de un cristal. Le dieron el nombre de cuasicristal y su conformación molecular bidimensional es como un teselado de Penrose.

Algunas teselaciones de Penrose, como las del cometa y del dardo, utilizan para su construcción el número de oro $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$. Transformando los dardos y los cometas Penrose creó una teselación no periódica llamadas las *gallinas aperiódicas de Penrose*. Como las teselaciones son explotadas comercialmente y en rompecabezas, Penrose tardó cierto tiempo en dar a conocer sus embaldosados hasta que los patentó en los Estados Unidos, Japón y el Reino Unido.





SABÍAS QUE...

El alicatado es un revestimiento plano conseguido colocando pequeñas piezas de diferentes formas geométricas (Alíceres). El alicatado fue el primer revestimiento cerámico utilizado en Al-Andaluz (espacio geocultural y político hispano-árabe, s. VIII-XV) para adornar los muros interiores de las edificaciones, ya que para los exteriores y los pavimentos de las casas se conocía el uso de losetas esmaltadas con estaño. En Sevilla, los zócalos del alicatado más sobresaliente pueden admirarse en los Reales Alcázares, en la iglesia de San Gil y en la Casa Olea, así como pueden verse muestras de alicatado en la portada del monasterio de San Isidoro del Campo y en las ventanas y fachada lateral de la iglesia de Omnium Sanctorum.

Un alicatado de la Alhambra (s. XIV). Fuente: Canal Cultural de Barcelona, España (213.27.152.28/ cron373_ceram1g.jpg).

Teselaciones en el espacio

Ya conociendo algo del mundo de las teselaciones de un plano, caben ahora las siguientes preguntas:

¿Y qué hay de las teselaciones del espacio. Se podrán hacer con los poliedros regulares o con otro tipo de poliedros ?

¿Se pueden teselar superficies en el espacio, por ejemplo, la esfera?

Damos algunas respuestas parciales pues un desarrollo del tema sería bastante extenso.

Con los tetraedros regulares no es posible teselar el espacio, pues el ángulo diedro entre dos caras de un tetraedro mide 70° 32’ que no es un submúltiplo de 360° (recuerda el caso de los pentágonos regulares).

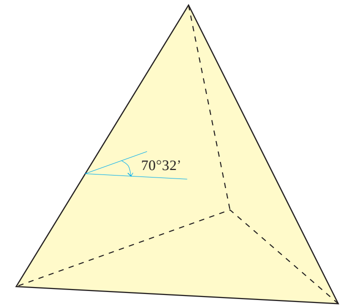
En cambio con cubos si es posible teselar todo el espacio; el ángulo diedro entre dos caras mide 90° que es un submúltiplo de 360°. También con los octaedros truncados como se ve en la figura.

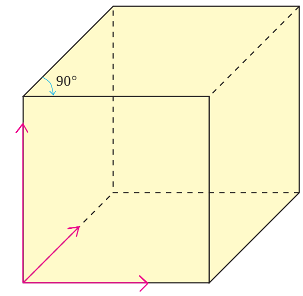
Cuando hablamos de teselación sobre una esfera significa con polígonos situados sobre la misma (polígonos “curvos”), cuyos lados son arcos de circunferencia máxima que son las “rectas” sobre una esfera en la denominada “geometría esférica”). Es conocido que la esfera se puede teselar con triángulos.

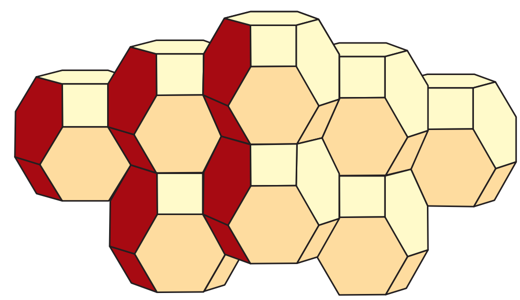
Observa los diez triángulos ubicados en el centro A y los seis triángulos que rodean el punto B, en que los ángulos son de 60°.

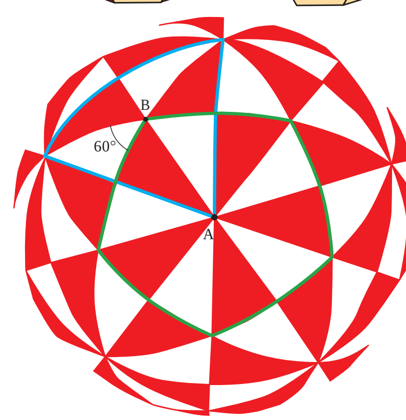
Utilizando doce pentágonos regulares se puede teselar una esfera.

Es imposible de teselar la esfera únicamente con hexágonos regulares. Pero, una combinación de pentágonos y de hexágonos regulares da una teselación de la esfera, tal como se aprecia en las pelotas de fútbol.









SABÍAS QUE...

El pintor y matemático Piero Della Francesca (1416-1492), considerado actualmente como uno de los primeros artistas del Renacimiento, se fascinó por los poliedros y esto le condujo a desarrollar propiedades de antiguos y nuevos poliedros. Uno de sus libros, “Libellus de quinque corpibus regularibus” (1480) conservado en la Biblioteca Vaticana, contiene la figura que conocemos del icosaedro truncado, cuyas sesenta caras son pentágonos y hexágonos en la misma distribución que ahora se utiliza para construir balones de fútbol.

Dimensiones, coordenadas y grados de libertad

Anterior al Renacimiento (s. XV), la pintura que se hacía en madera (trípticos), lienzo y murales era muy estática. Las figuras en cuestión carecían de movimiento y sus proporciones a veces no eran las más adecuadas. Todo se reflejaba en un único plano sin lograr una sensación de profundidad en el cuadro. Sin embargo, el mundo en que vivimos, el de nuestra experiencia cotidiana, es tridimensional (3D) y para entenderlo a cabalidad necesitamos comprender tanto lo unidimensional (1D) como lo bidimensional (2D).

En el Renacimiento italiano se producirá un cambio significativo en cuanto a las artes y la arquitectura.

De una parte con "los colores venecianos" (Venecia) y por la otra con "la perspectiva florentina" desarrollada en la ciudad de Florencia (Italia), lo cual permitió capturar el realismo del mundo tridimensional y crear la ilusión de profundidad en la pintura, la escultura y la arquitectura, dando lugar a la representación de la realidad tridimensional (largo, ancho y profundidad) en una superficie bidimensional (la tela de un cuadro, una pared o un papel) y creando así la imagen de profundidad.

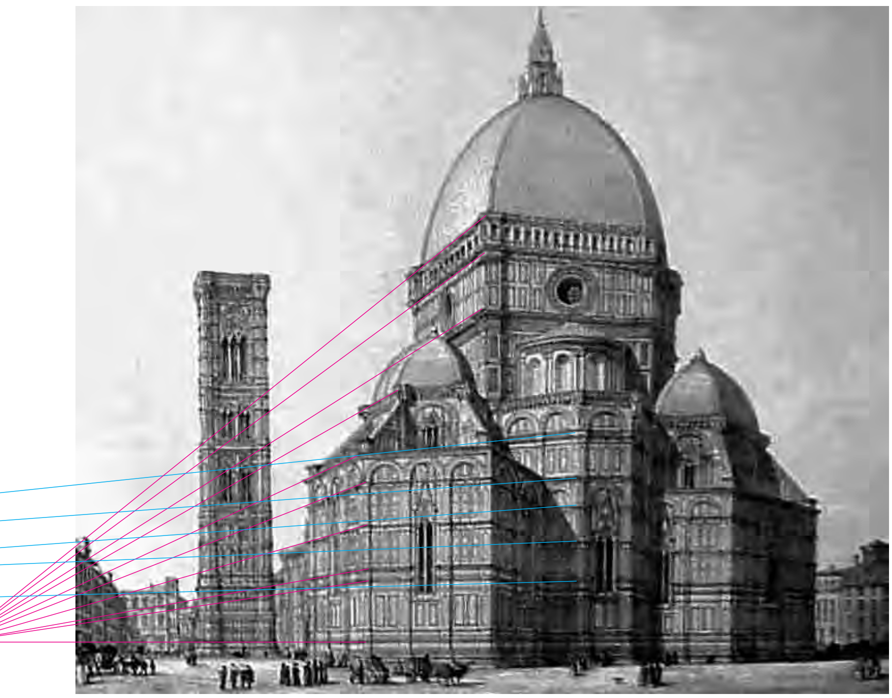
Un mural egipcio (s. XIX a.C.). Las figuras están pintadas en un solo plano (son bidimensionales) sin ilusión de profundidad. Este tipo de pintura es típico de antes del Renacimento.

La alabanza de las abejas. Pintura del Medioevo. Biblioteca Apostólica Vaticana, Roma. Fuente: www.library.nd.edu

La anunciación. Filippo Lippi, pintor renacentista (Italia c. 1406-1469). Fuente: keptar.demasz.hu

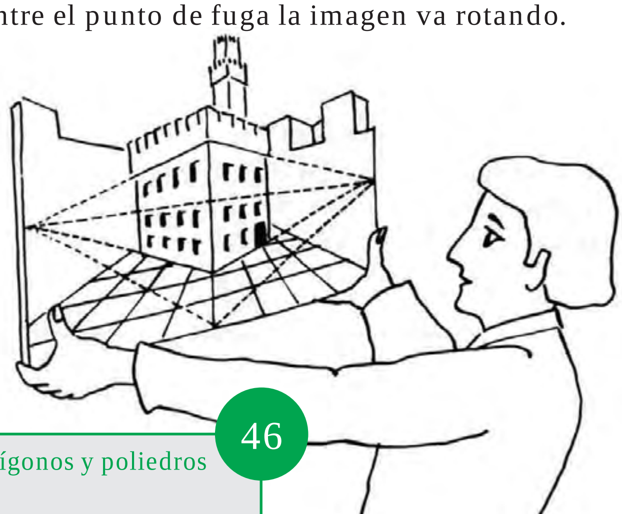
El Renacimiento se caracteriza por el estudio y dominio de la perspectiva. Para lograrla se pueden utilizar los llamados puntos de fuga, los cuales permiten darle profundidad a un cuadro o ilustración. En esta página presentamos varios ejemplos correspondientes tanto al Renacimiento como a fechas posteriores a él.

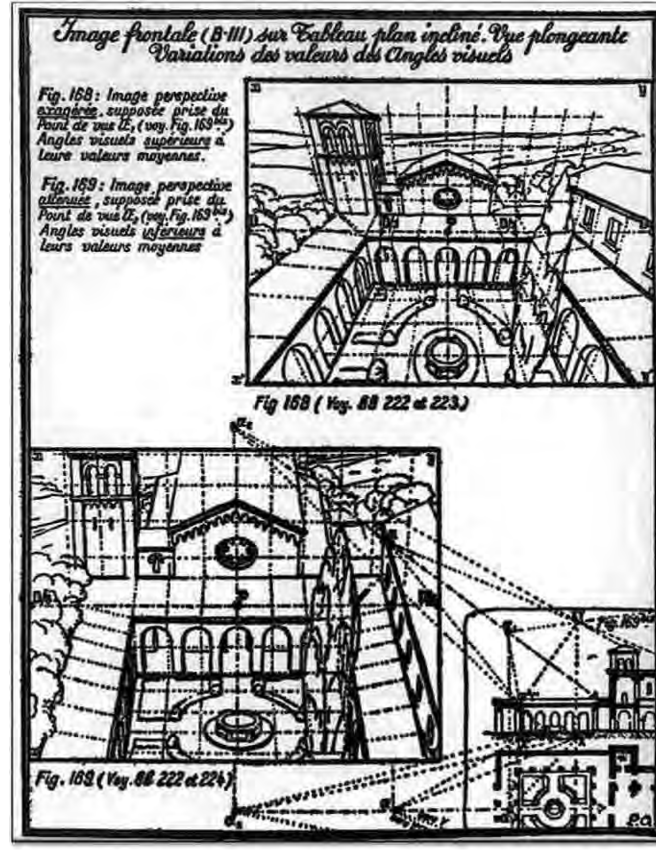
El punto del horizonte donde convergen las líneas de una perspectiva se denomina punto de fuga.



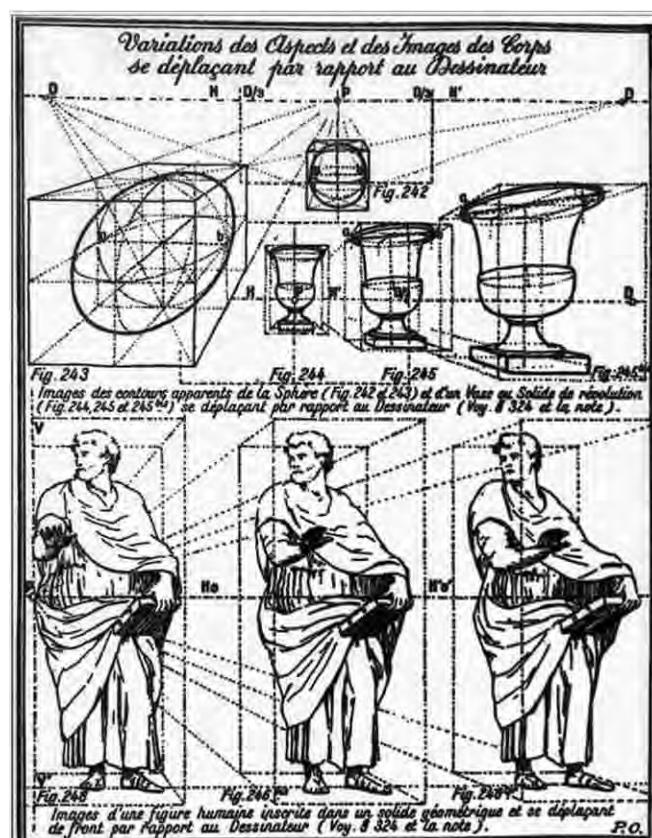
En la ilustración podemos observar como Filippo Brunelleschi (Italia, 1377-1445) utilizó varios puntos de fuga para ilustrar el Duomo en Italia, ya que la figura al no ser rectangular así lo amerita.

La perspectiva puede generar distorsiones que se visualizan en la lámina renacentista de la derecha, donde las proyecciones central y lateral de una esfera hacen verla como una elipse. En el caso de la proyección central esta deformación es menor. En la parte inferior están ilustradas tres imágenes del *Aristóteles* de Rafael (Rafaello Sanzio, Italia, 1483-1520) utilizando un mismo punto de fuga. Se puede notar que mientras más alejado de él se encuentre el punto de fuga la imagen va rotando.





Utilización de dos puntos de fuga centrales para la ilustración de la plaza central de una edificación.



Muchos objetos de nuestra vida cotidiana son bidimensionales, tales como las superficies de: pantallas de televisión, pantallas de computadoras, pantallas cóncavas de cine; así como las páginas de los libros y de los cuadernos, los pisos y las paredes.

De igual manera dan idea de lo que es unidimensional los hilos de coser, los alambres finos, una hebra, un filamento...

La noción de dimensión es fundamental para la comprensión de la realidad. Con este concepto están aparejados los sistemas de coordenadas y los grados de libertad que utilizan los físicos e ingenieros en sus trabajos.

Una línea representa una sola dimensión (1D). No necesariamente tiene que ser representada rectilíneamente: un tren o el Metro de alguna ciudad que se mueve en una vía férrea lo hace en una dimensión. Esta línea férrea puede ser recta o curva, y subir o bajar en una colina, pero el vagón del tren tiene solamente una "dirección" de movimiento. Puede ir hacia adelante o hacia atrás y son la misma "dirección" pero sentidos opuestos.

La línea del tren está situada en nuestro mundo tridimensional, pero el movimiento del tren es unidimensional. Si fijamos una estación del tren como origen O, su posición en un instante de tiempo determinado queda especificada por un único número, se dice por un sólo parámetro: la distancia al origen medida a lo largo de la línea (recta o curva), lo cual se expresa con que ese movimiento tiene un grado de libertad.

Un barco navegando en el océano tiene dos grados de libertad para moverse, son dos direcciones independientes: en una dirección, de popa a proa, puede ser en sentido hacia delante o en sentido hacia atrás, y en la otra dirección, la transversal, de babor a estribor, puede ser hacia la izquierda o hacia la derecha. Así el barco se mueve en dos dimensiones, que en este caso no es plano sino curvo por ser la Tierra y, por lo tanto, su posición en un instante de tiempo determinado está dado por dos parámetros como son la latitud y la longitud.

En las principales ciudades de muchos países, los taxistas conductores tienen un equipo denominado Global Position System (GPS) que les permite localizar una dirección específica así como las vías (dos dimensiones) que debe utilizar para llegar a su destino.

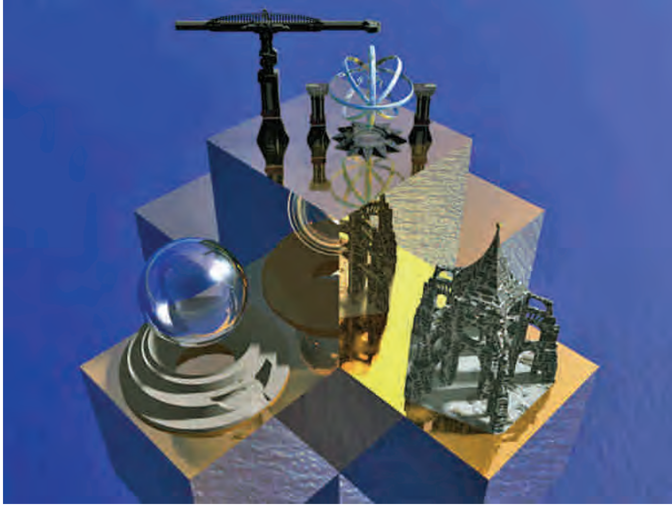
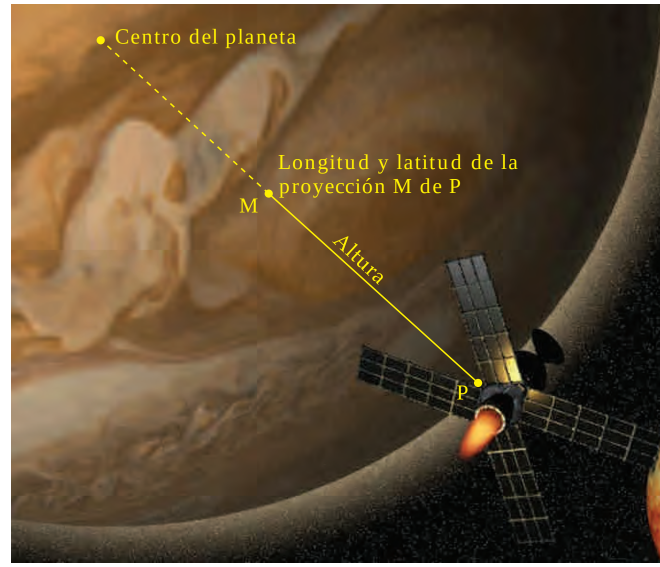


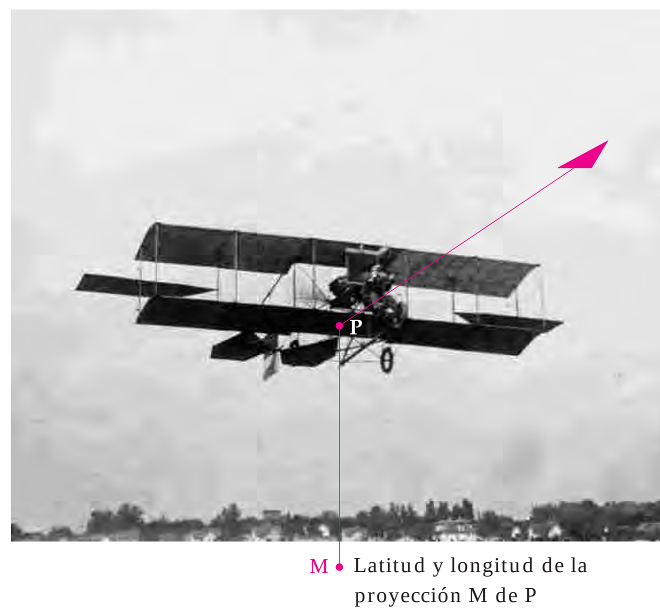
Figura tridimensional generada por computadora para ser visualizada en un monitor bidimensional.

Un avión se mueve en el espacio tridimensional y tiene tres grados de libertad para moverse, son tres "direcciones independientes": en "dirección" de la cola a la punta lo hace hacia delante o hacia atrás (después de girar); en "dirección transversal" al avión lo hace hacia la derecha o hacia la izquierda; y en la "tercera dirección" puede ser hacia arriba o hacia abajo. Su posición, en un instante de tiempo, está dada por tres parámetros como son la latitud, la longitud y la altura.

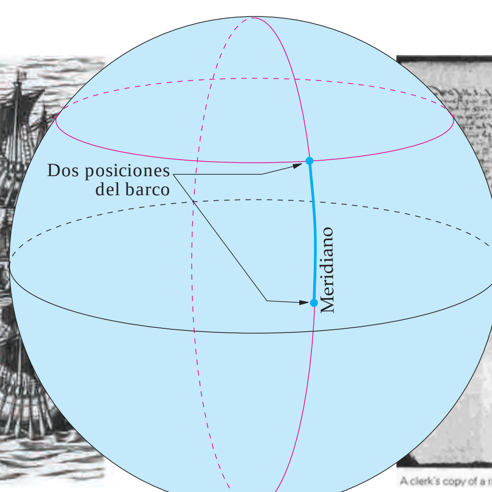


Análogamente, si se trata de un submarino en lugar de un barco, se necesita la latitud, la longitud y la profundidad a la que se encuentra el submarino.

Si un automóvil viaja dentro de un túnel con sólo dos canales de circulación, está obligado a permanecer en el canal de la derecha (si cambia de canal comete infracción lo que es altamente penalizado en muchos países). Así, su trayectoria es unidimensional. Al salir del túnel, puede girar hacia la izquierda, ha tomado otra "dirección", y luego volver a su canal, es decir puede moverse en 2D.



En esos ejemplos los grados de libertad y su respectivas dimensiones son coordenadas geométricas. Los parámetros son entes geométricos, a lo máximo tres. No necesariamente esto ocurre siempre. El vuelo del avión o la navegación del submarino, en función del tiempo, requiere otra información: la velocidad con que se mueve. Luego se tienen cuatro grados de libertad que se determinan, en cada instante de tiempo, mediante cuatro parámetros: tres que son geométricos (latitud, longitud, altura o profundidad) y otro que es dinámico (velocidad). Entonces estamos en un espacio de cuatro dimensiones o con cuatro grados de libertad.



Bitácora de Cristóbal Colón donde se reflejaban los datos de posición (longitud y latitud), profundidad y tiempo de travesía.

Fuente: http://history.missouristate.edu

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
http://www.fpolar.org.ve/matematica3