Fundación
POLAR

Matemática Maravillosa
Polígonos y poliedros

En el diseño de edificaciones, monumentos y pabellones encontramos los poliedros.

El Complejo Cultural Teresa Carreño, en Caracas, tiene una forma tronco-piramidal resaltada por una vertiente de estructuras salientes. En el mismo, a la entrada de la Sala Ríos Reyna, podemos admirar en el techo una obra de Jesús Soto, artista cinético venezolano (1923-2005).

MM

Fascículo 5

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela

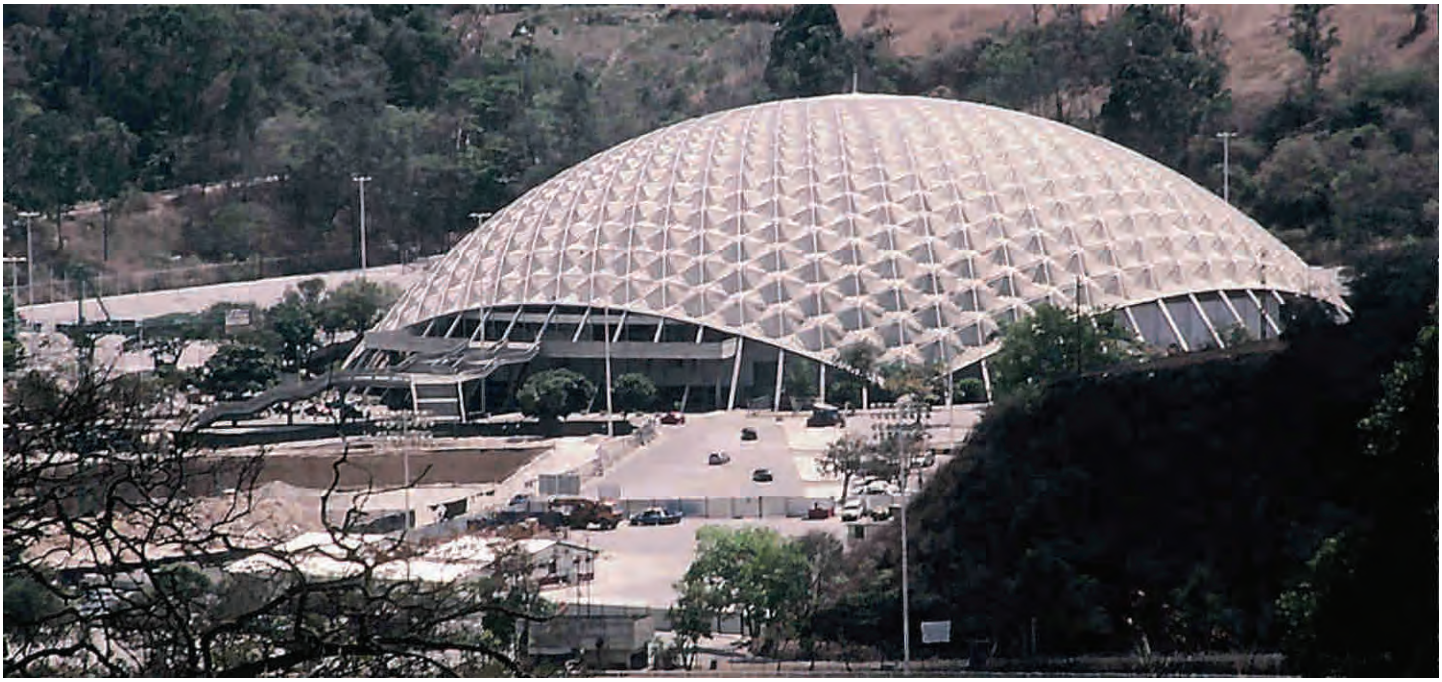
Últimas Noticias

Superficies esféricas y poliedros en arquitectura e ingeniería

Las superficies esféricas han sido utilizadas por los arquitectos e ingenieros para hacer cúpulas y domos esféricos, coronando los templos cristianos, las mezquitas islámicas y en los capitolios de muchas ciudades y naciones.

En 1954, el ingeniero, inventor y diseñador Richard Buckminster Fuller (Estados Unidos, 1895-1983), depositó una patente para sus domos o cúpulas geodésicas, que son una manera de construir domos, de forma esférica, conteniendo un máximo de volumen con un mínimo de material y bastante resistentes. Estos domos no tienen necesidad de tener soporte interior y se realizan a partir de triángulos que forman una grilla semiesférica, distribuyendo esfuerzos de manera pareja a los distintos miembros de la estructura y logrando de esta forma un cociente alto en la razón resistencia / peso. Esos triángulos conforman una red pentagonal y hexagonal como en el balón de fútbol. Son muy sólidos y luminosos.

Hoy en día se cuentan unos 300 000 domos construidos en el mundo. Tres ejemplos notables de tal construcción son: el pabellón norteamericano en la American Exchange Exhibition (1959) en Moscú, la cúpula geodésica del pabellón norteamericano en la Exposición Mundial (1967) de Montreal (Fotografía superior), y la cúpula en la ciudad de ciencia y tecnología de La Villete, París-Francia (Fotografía intermedia).



En Caracas, se construyó el *Poliedro* utilizando el concepto estructural de las cúpulas geodésicas de Fuller.

Durante el año 2004, el Servicio Postal de los Estados Unidos (USPS por sus siglas en inglés) emitió una estampilla conmemorativa de los cincuenta años en que Fuller patentó su invención.

Recientemente, el diseñador y arquitecto Sanford Ponder diseñó unos refugios utilizados para la recreación y el trabajo, como las carpas de los vacacionistas, denominados ICOSA por su forma icosaédrica y con un diámetro de 9 a 23 pies (2,74 – 7,01 metros) y un peso máximo de 500 libras (≈ 227 kg) el mayor de ellos. Son como icosaedros cortados por la mitad y con ventanas triangulares.

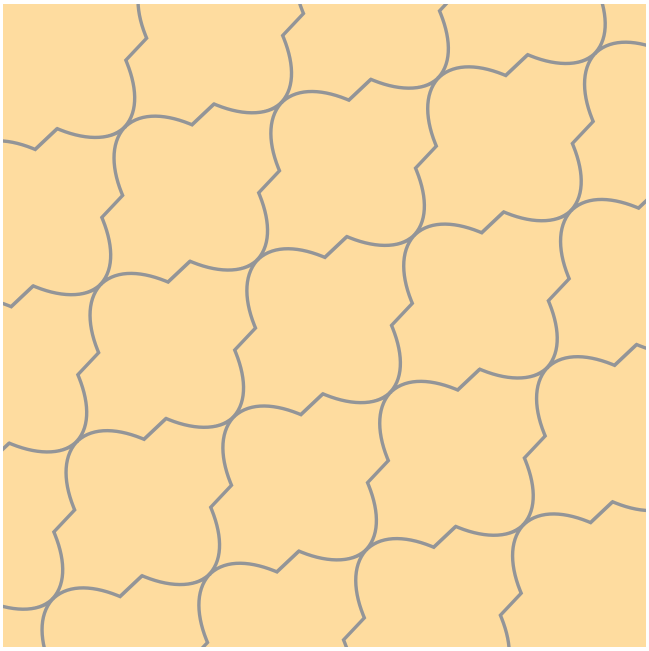
Los diseños del matemático, como los del pintor o el poeta, han de ser bellos; las ideas, como los colores o las palabras deben relacionarse de manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas.

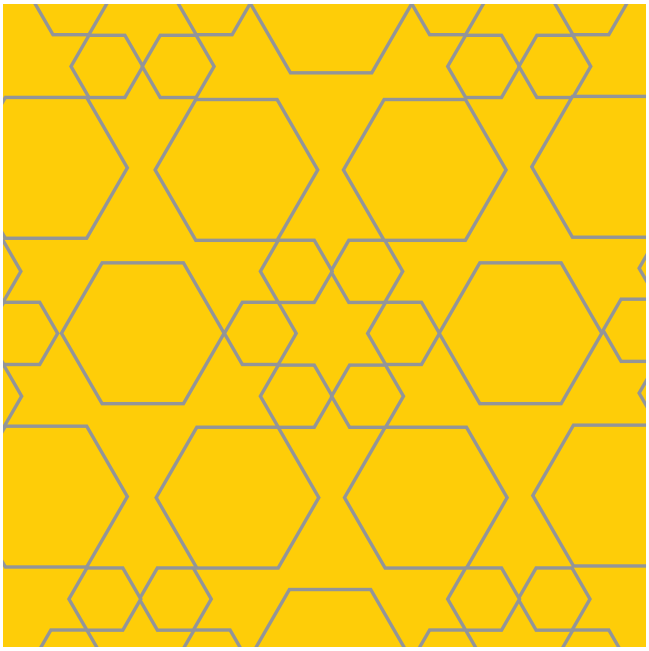
G. H. Hardy
(matemático británico,
1877-1947).

Teselaciones

Los teselados son los diseños de figuras geométricas que por sí mismas o en combinación cubren una superficie plana sin dejar huecos ni superponerse, o sea, el cubrimiento del plano con figuras yuxtapuestas. Las civilizaciones antiguas utilizaban teselados para la ornamentación de casas y templos, cerca del año 4000 a.C. Por ese tiempo los sumerios realizaban decoraciones con mosaicos que formaban modelos geométricos. El material utilizado era arcilla cocida que coloreaban y esmaltaban. Posteriormente otros grupos demostraron maestría en este tipo de trabajo, como los persas, los moros y los musulmanes.

Esos diseños con motivos repetidos son muy corrientes en nuestra vida cotidiana. Podemos pensar en las baldosas que recubren los pisos en forma de rectángulos, de cuadrados, de hexágonos regulares y con otros motivos, y también en los papeles decorativos de las paredes y los papeles que envuelven regalos. He aquí dos de tales diseños con motivos repetidos:



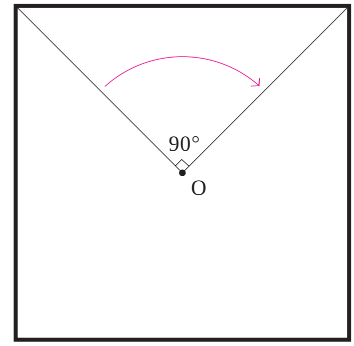


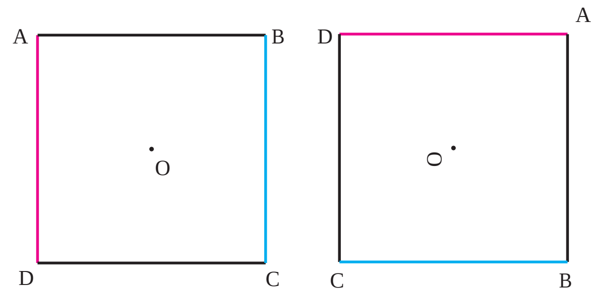
El estudio de las teselaciones o embaldosados de un plano está vinculado con las simetrías de los mismos y éstas, a su vez, se refieren a las simetrías rotacionales (rotaciones con centro en un determinado punto), simetrías axiales (reflexiones respecto de ejes) y simetrías de traslación (traslación según algún vector) y sus combinaciones (composición de tales movimientos rígidos).

Si tenemos un cuadrado podemos rotarlo con centro en O (centro del cuadrado) y ángulo 90°. El cuadrado rotado es el mismo que el inicial y no se distingue uno del otro.

Para distinguirlos tendríamos que etiquetar los vértices y observar la acción de la rotación sobre éstos.

Se dice que el cuadrado es invariante por tal rotación de centro O y ángulo 90° o que tiene una simetría rotacional de orden 4 (360° / 4 = 90°). También el cuadrado tiene simetría axial pues es invariante, por ejemplo, cuando aplicamos una reflexión respecto de la recta que une los puntos medios de dos lados AB y CD.





Rotación en sentido horario con centro en O y ángulo de 90°.

RETO

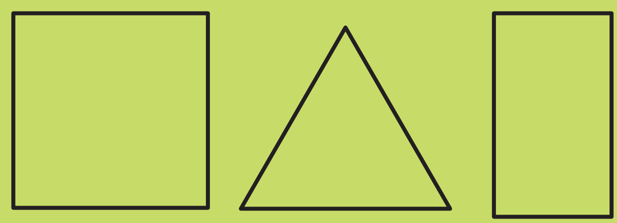
Determinar todas las simetrías rotacionales y axiales de:

a) un cuadrado,

b) un triángulo equilátero,

c) un rectángulo.

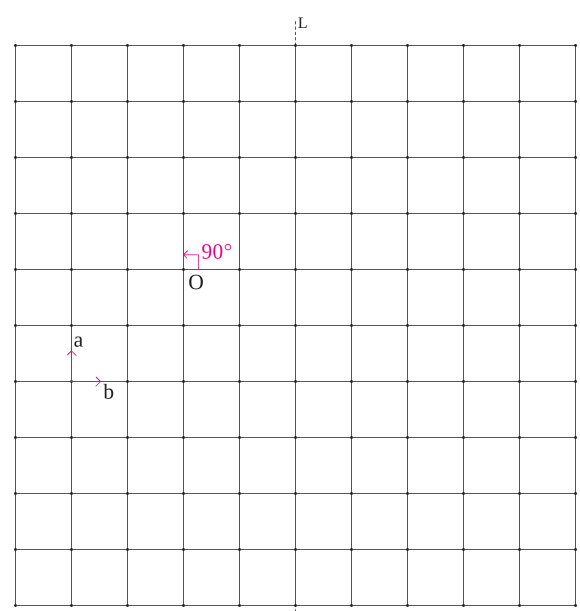
Observa la diferencia con el caso de un cuadrado.



Si tenemos una teselación del plano realizada únicamente con cuadrados congruentes, observamos que ella queda invariante por rotación de centro O y ángulo 90°. Esto se comprueba fácilmente si dibujamos la misma teselación en un papel transparente o en un acetato el cual colocamos encima haciendo coincidir el punto O y giramos 90°. Asimismo, por traslación según el vector a y traslación según el vector b, y por simetría axial respecto del eje L (el diseño se repite continuamente al mover la “vista” verticalmente y horizontalmente).

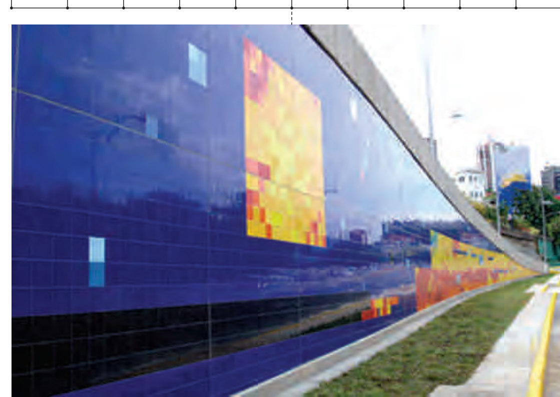
Determina otras simetrías de esta teselación.

Las teselaciones de un plano (*pavage* en francés y *tile* en inglés) son de diversos tipos. Aquí destacamos los llamados grupos de simetría del plano y los denominados mosaicos de los que hay una gran variedad y por cuestiones de espacio solamente damos algunos de ellos.

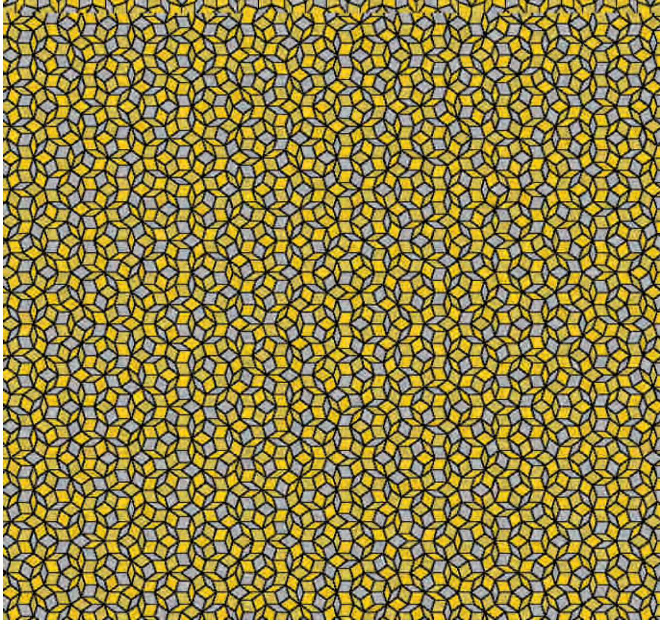


El *Jardín Lumínico*, ubicado en la autopista de Prados del Este de la ciudad de Caracas, parte de la idea del collage como matriz y del pixelado como resolución visual de una intervención que será vista y percibida a diferentes velocidades. Patricia Van Dalen utilizó un fondo azul intenso, el cual está salpicado de una historia cromática con 14 matices diferentes. A través del pixelado logra transiciones entre un color y otro, y nos sugiere la abstracción de un paisaje urbano.

Fuente: www.patriciavandalen.com



Mosaicos

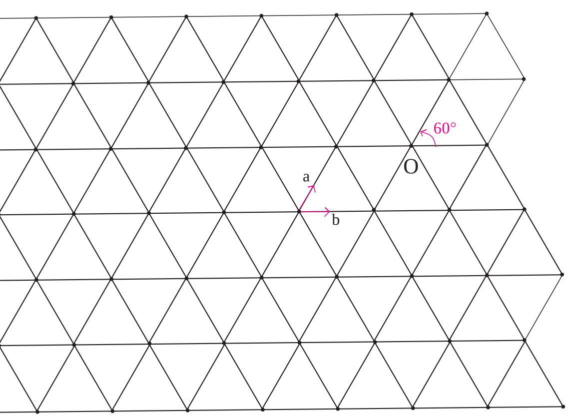


Cuando se recubre un plano con baldosas que no dejen huecos y que no se superpongan (encajan bien), se produce un mosaico.

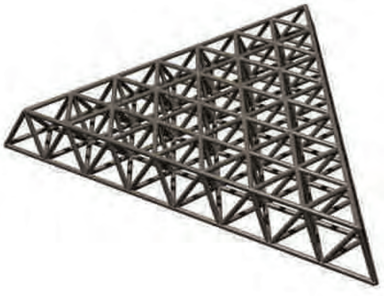
Existen diferentes tipos de mosaicos de los cuales podemos diferenciar: los regulares (solamente existen 3), los semirregulares (solamente existen 8), los de Escher y los de Penrose (imagen a la derecha).

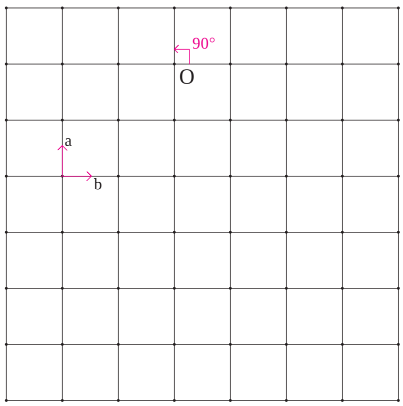
Mosaicos regulares

Los mosaicos regulares se logran a partir de la repetición y traslación de un mismo polígono regular. Existen únicamente tres tipos de tales mosaicos que son familiares por el embaldosado de los pisos y se forman con: triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares.

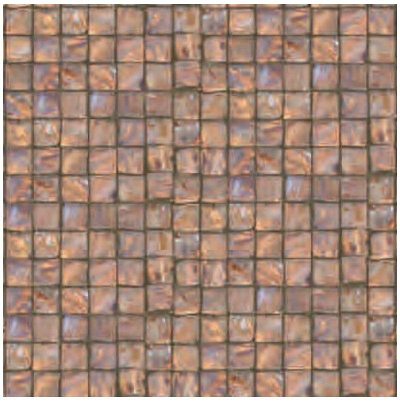


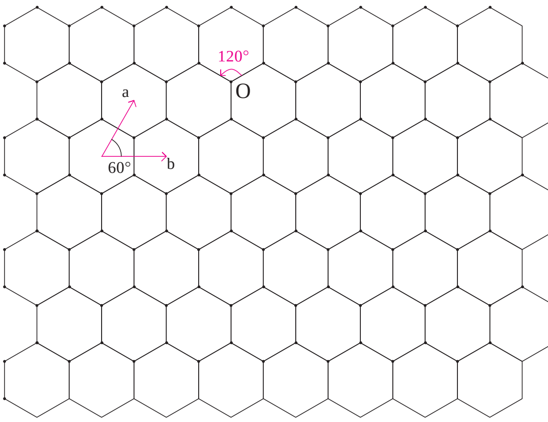
Tiene una simetría rotacional de orden 6 (360° / 6 = 60°).





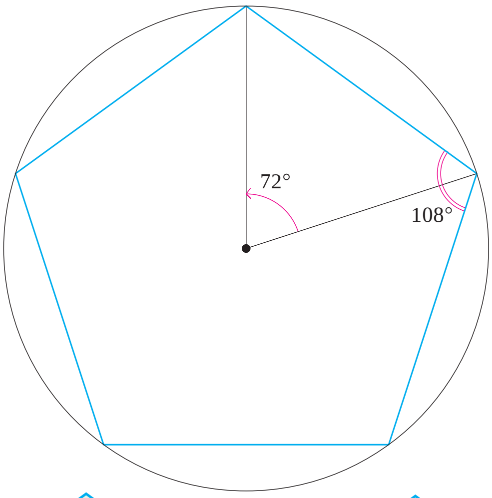
Tiene una simetría rotacional de orden 4 (360° / 4 = 90°). Es un mosaico que se observa con frecuencia en los pisos y en los papeles cuadriculados y milimetrados.





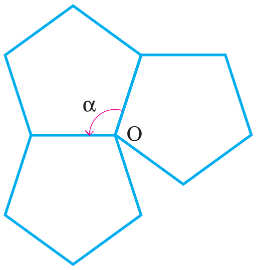
Tiene una simetría rotacional de orden 3 (360° / 3 = 120°) y de orden 6. Es un mosaico que se observa bastante en los pisos y en los panales de abejas.

Observa que en cada uno de ellos indicamos dos vectores independientes, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con el fin de señalar que mediante traslación del polígono en esas direcciones se obtiene el respectivo mosaico. Se dice que tales mosaicos son periódicos. Estos mosaicos son invariantes por traslaciones de vector $p\vec{a} + q\vec{b}$, siendo p y q números enteros cualesquiera.



Un plano no se puede teselar con pentágonos regulares pues no encajan bien, por ello no existen mosaicos regulares pentagonales (los pisos de las viviendas no se pueden embaldosar con pentágonos regulares):

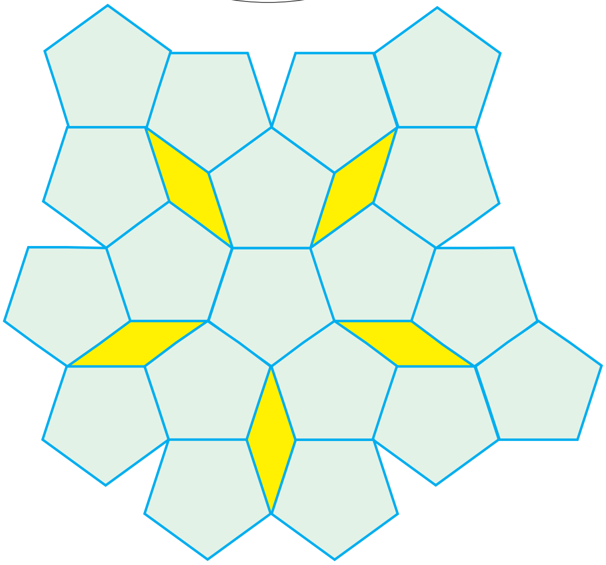
$$360° / 5 = 72°$$



$3\alpha = 3 \times 108° = 324°$

Con tres pentágonos regulares alrededor del punto O no se cubren 360°, ya queda un hueco.

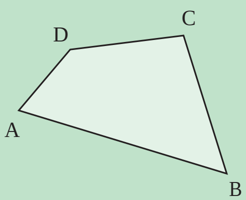
Hay algunos pentágonos, no regulares, con los que se pueden teselar los planos.

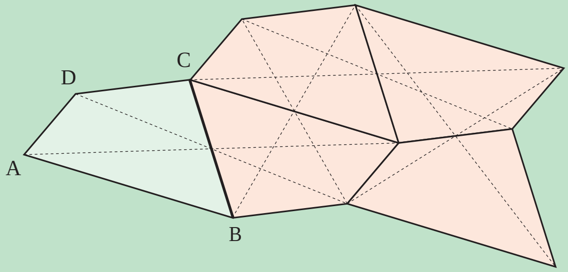


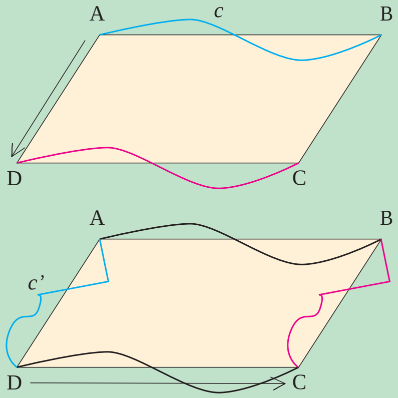
En cambio con pentágonos regulares (azules) y rombos (amarillos) sí se puede embaldosar un plano, lo cual era conocido por A. Durero (1471-1528).

INTERESANTE

Con cualquier triángulo o cualquier cuadrilátero convexo del plano se puede, por repetición, teselar completamente el plano. Observa la construcción, en el caso de un cuadrilátero, donde es suficiente con dibujar los simétricos respecto de los puntos medios de los lados.





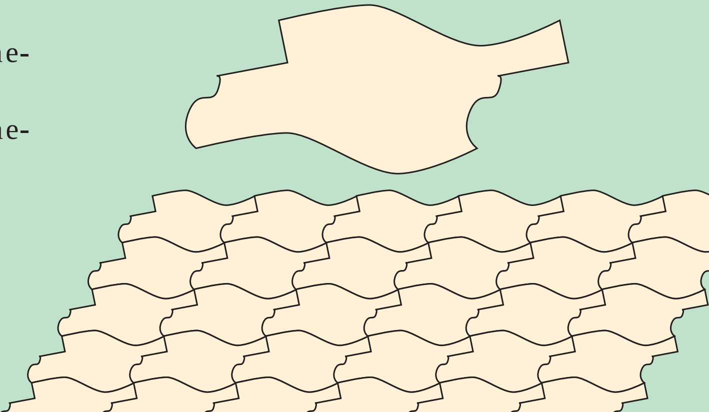


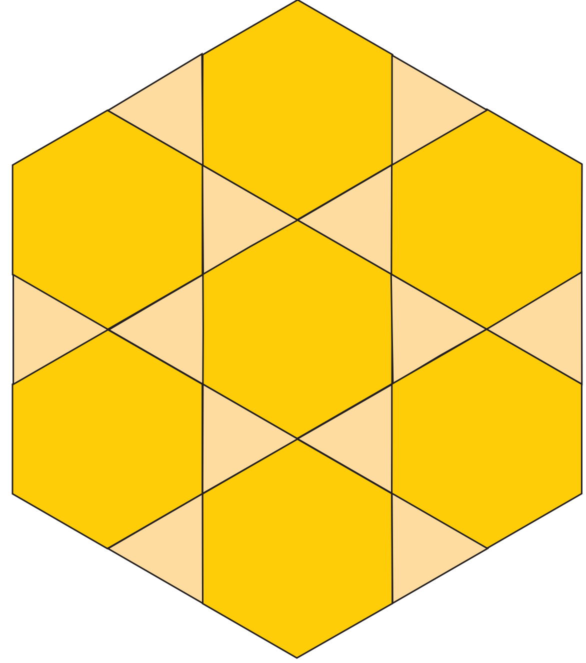
Observa una de las técnicas que hay para hacer teselaciones de un plano, partiendo de un paralelogramo ABCD (un paralelogramo deformado).

Paso 1: Dibuja una curva *c* que una A con B y su imagen mediante la traslación de vector AD.

Paso 2: Dibuja otra curva *c'* que una A con D y su imagen mediante la traslación de vector DC.

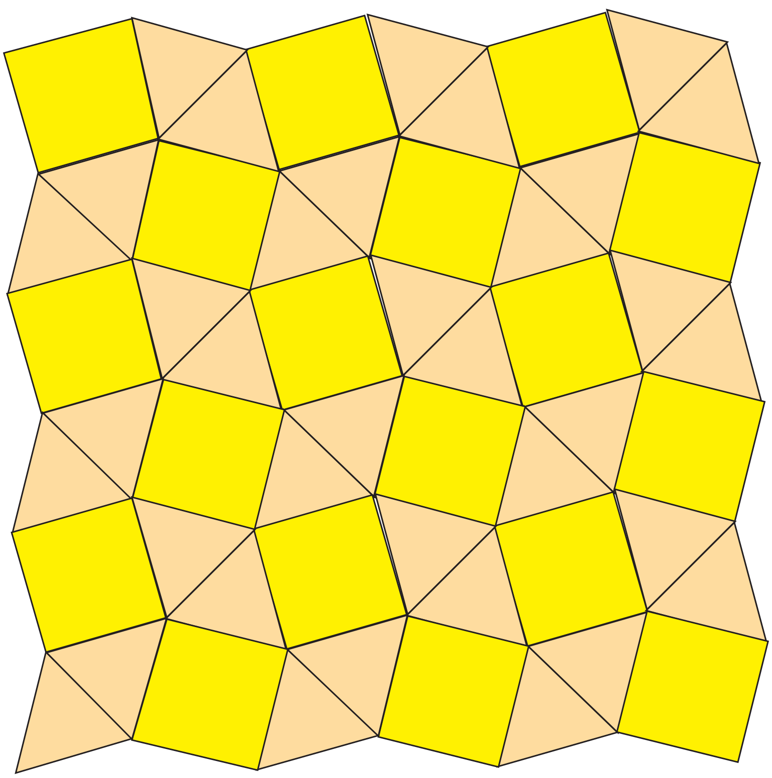
Paso 3: Repite el motivo utilizando esas dos traslaciones.

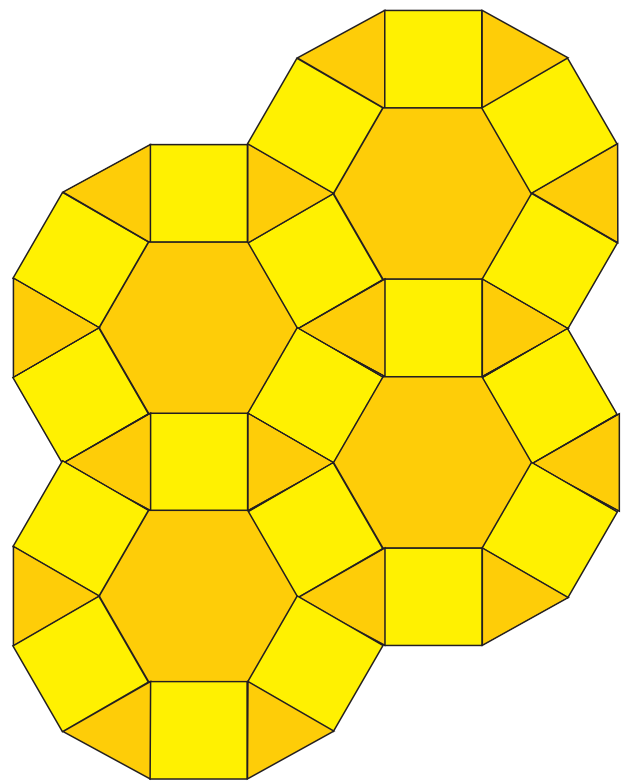


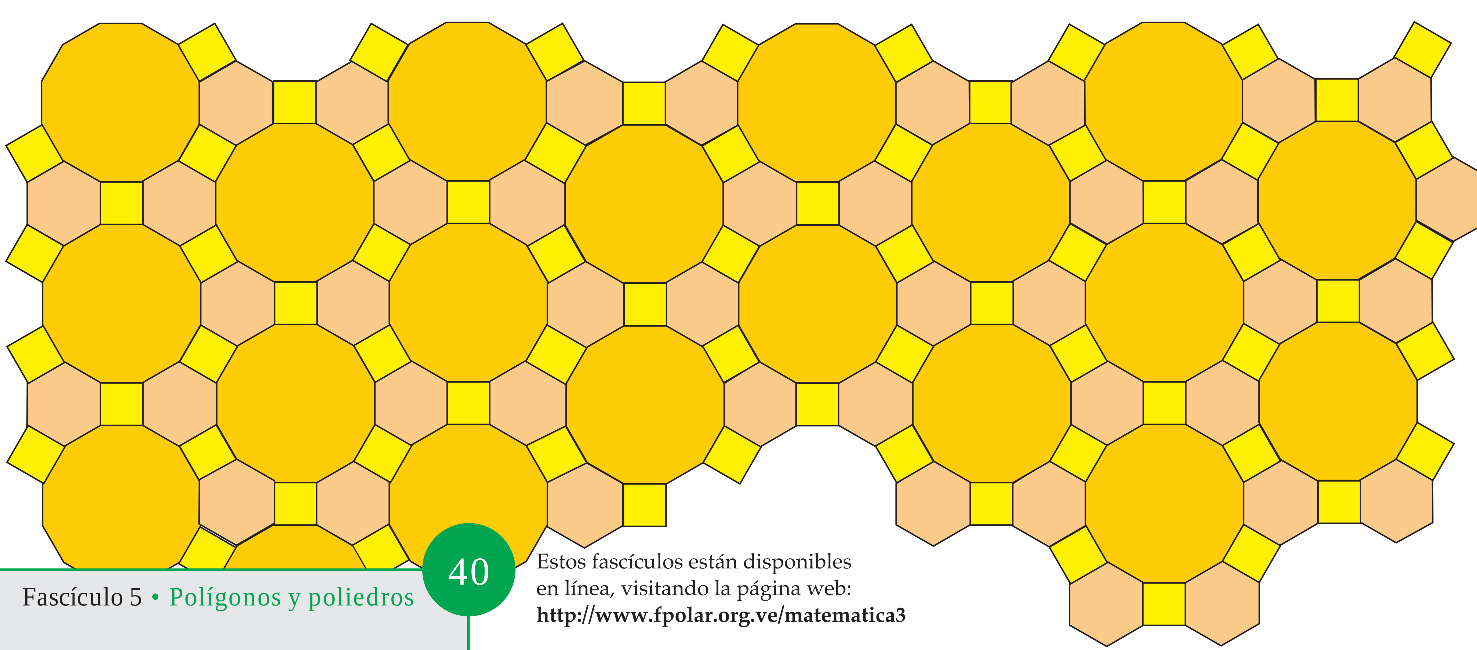


Mosaicos semirregulares

En éstos se combinan dos o más polígonos regulares bien acoplados y distribuidos, de tal modo que en todos los vértices aparecen los mismos polígonos. Existen solamente ocho tipos de mosaicos semirregulares, de los que a continuación mostramos cuatro de ellos.







Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
http://www.fpolar.org.ve/matematica3