



La disposición de los pétalos de las flores es, frecuentemente, en forma poligonal.

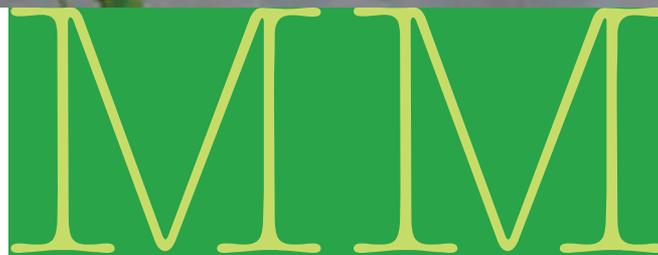
Aquí tenemos una fotografía de la malva (*Malva sylvestris*) que tiene simetría pentagonal. Esta planta, cuyas flores son de color rosado o violáceo, se usa para infusiones calmantes y laxantes.

“La simetría, ya sea que se defina en un sentido amplio o restringido, es una idea por medio de la cual el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear belleza, el orden y la perfección.”

H. Weyl, “La Simetría”, p. 5.

Fascículo

4



# Los polígonos y los poliedros en las ciencias naturales

Desde la antigüedad se han estudiado los polígonos y los poliedros. Se ha encontrado un dodecaedro en esteatita de civilización etrusca que data de unos 500 años a.C.

Asimismo, hay un par de dados icosaédricos de la dinastía de los Ptolomeo que se conserva en el Museo Británico de Londres.

Diversas formas matemáticas aparecen en muchos fenómenos naturales. Las formas poligonales y poliédricas son frecuentes en la naturaleza.

Algunos esqueletos de radiolarios tienen forma poliédrica, como los aquí mostrados a la derecha; unos son un octaedro, otros un dodecaedro y los hay con forma de icosaedro regular. Los radiolarios son protozoos marinos que en su mayoría tienen un esqueleto formado por agujas muy finas o varillas silíceas sueltas o articuladas entre sí. Miden una fracción de milímetro de diámetro.

## Los cristales

Igualmente encontramos los poliedros convexos en una variedad de formas, como los cristales de sal en forma de cubos, los diamantes naturales en forma octaédrica y otras estructuras cristalinas.

A diferencia de un cristal, el vidrio es una estructura amorfa, translúcida y frágil a la temperatura ambiente.

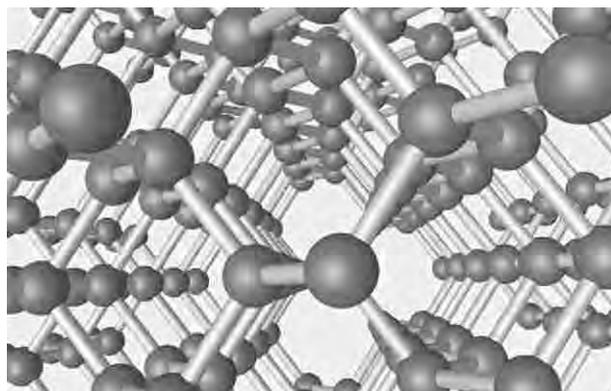
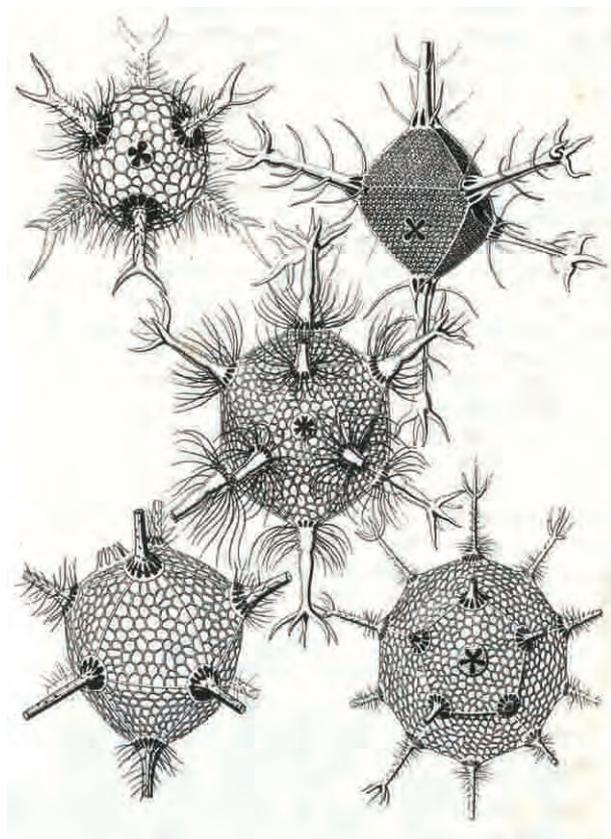
Un cristal es la repetición de un motivo básico que está compuesto de un mínimo de átomos (la malla elemental o célula unitaria).

Así, el cristal está compuesto de un arreglo “periódico de bloques idénticos”, que son las mallas elementales que definen la estructura molecular interna del cristal. Pero no siempre es de esta forma como encontramos los cristales a escala macroscópica.

Por ejemplo, los diamantes naturales se presentan como octaedros. Sin embargo, en 1913, los cristalógrafos William H. Bragg y su hijo Lawrence bombardearon los diamantes con rayos X y descubrieron que la malla elemental es un cubo en donde los 8 vértices y los centros de las 6 caras están ocupados por átomos de carbono y cada átomo de carbono está ligado a sus cuatro vecinos más próximos formando una configuración tetraédrica. A partir de esta malla elemental se construye todo el cristal mediante simple yuxtaposición a sí misma y por traslación paralela. La malla elemental tesela el espacio. La imagen de la derecha nos muestra el ordenamiento de los iones para formar la malla de un cristal de diamante.



Estrellas de mar: tienen sobre todo formas pentagonales



La forma externa refleja la estructura molecular interna de la molécula de sal que es una red cúbica, constituida por iones de sodio (Na, esferas rojas) e iones de cloruro (Cl, esferas amarillas) que se alternan en diferentes direcciones.

Al intersectar planos paralelos y observar la estructura bidimensional resulta la de un mosaico regular con cuadrados.

La forma del cristal del mineral de hierro (pirita) al igual que la de la sal es de tipo cúbica, reflejando su estructura molecular interna.

Las formas cristalinas se estudiaron desde la época de Kepler (s. XVII) y posteriormente, a inicios del s. XX, se utilizaron los rayos X para su estudio mediante diagramas de difracción. Los mineralogistas clasificaron esas formas en 7 sistemas (cúbico, tetragonal, rómbico, triclínico, hexagonal, romboédrico y monoclinico) y 32 grupos cristalográficos o clases de cristales (2D) de acuerdo con sus simetrías macroscópicas. Por ejemplo: todos los cristales poseen una simetría rotacional de orden 4 (1/4 de vuelta o giro de 90° alrededor de un eje privilegiado –eje principal–). El orden de la rotación significa que si la aplicamos cuatro veces consecutivas se obtiene la transformación identidad pues  $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$  y la figura que se rota retoma su posición inicial.

En el cubo dibujado se han marcado ejes de rotación con 2-2, 3-3, 4-4, que indican, respectivamente, rotaciones de órdenes 2, 3 y 4 (180°, 120°, 90°). Cada una de esas rotaciones deja invariante el cubo (transforma el cubo en sí mismo). Se dice que son simetrías rotacionales del cubo.

Asimismo, el plano que pasa por el centro del cubo y por los puntos medios de las aristas AB y CD es un plano de simetría del cubo (simetría especular).

La simetría externa de los cristales se caracteriza mediante planos de reflexión (simetrías especulares) y ejes de rotación (simetrías rotacionales), tal como los poliedros, pues las formas cristalinas son formas poliédricas. Los cristales son formas muy bellas de “teselación” del espacio.

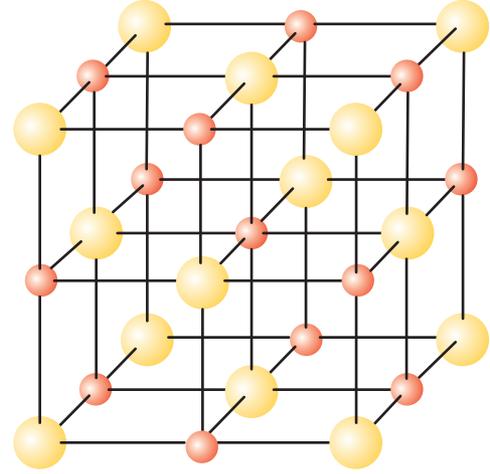
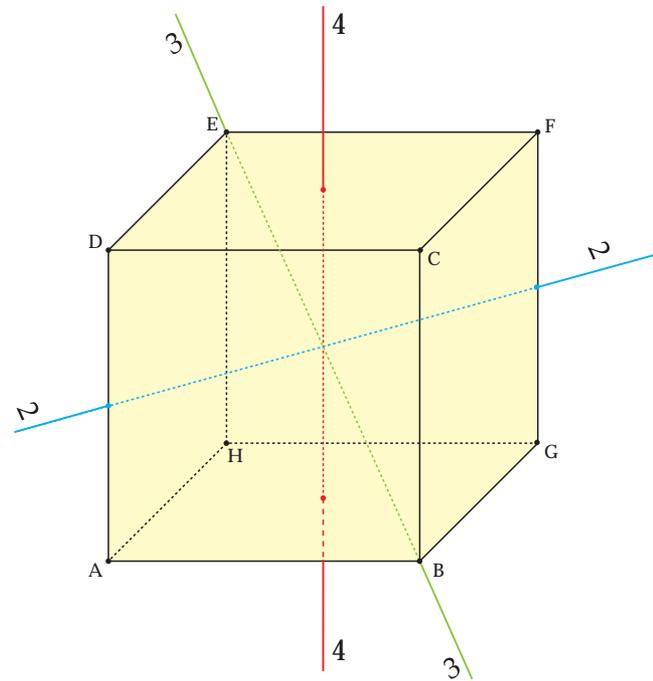


Ilustración de la celda unidad del cloruro de sodio

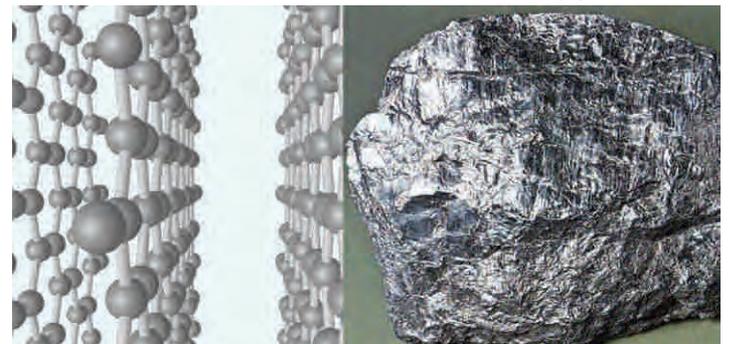
- Ión cloruro (Cl<sup>-</sup>)
- Ión sodio (Na<sup>+</sup>)



Cristal de Sal



Estructura molecular y cristal del cuarzo



Estructura molecular y cristal del grafito

En las décadas de los 80 y de los 90, se produjeron tres descubrimientos importantes en el campo de la química y de la física, uno de los cuales hizo cambiar la concepción tradicional de lo que es un cristal. Estos tres descubrimientos, en orden cronológico, fueron: los cuasicristales (1984), los fulerenos (1985) y los nanotubos (1991), que han encontrado gran variedad de aplicaciones en el mundo industrial y los mismos están vinculados a los polígonos y poliedros debido a sus configuraciones geométricas.

## Los cuasicristales

En 1984, el químico Daniel Shechtman y sus colaboradores Ilan Blech, John W. Cahn y Denis Gratias, descubrieron una forma de hacer una aleación de Aluminio (Al) con Manganese (Mn), la  $Al_6Mn$ , con el fin de lograr una aleación bastante fuerte. Cuando examinaron este “cristal” con rayos X, en el diagrama de difracción el material tenía una ordenación como la de un cristal pero no encontraron simetrías rotacionales de órdenes 3, 4 ó 6 que son propias de los cristales. En cambio encontraron una simetría rotacional pentagonal (de orden 5), lo que no es posible en los cristales, pues éstos únicamente pueden tener simetrías rotacionales de órdenes 2, 3, 4 ó 6 (teorema de restricción cristalográfica).

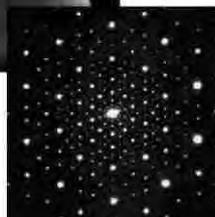
¿Cómo era posible esto? ¿Había algún error? ¿Cuál era la naturaleza de este “cristal imposible”?

En el ínterin, 1984, los físicos Paul J. Steinhardt y Don Levine, mediante simulación en computador modelaron ese “cristal” Al-Mn y le dieron el nombre de cuasicristal (cristal cuasiperiódico) y la aleación respectiva se conoce como Shechtmanite. Hoy hay cerca de cien de tales aleaciones. Algunas tienen simetrías rotacionales de orden 8, 10 ó 12. Se tienen aleaciones como la del V-Ni-Si (vanadio-níquel-silicio) o la del Cr-Ni-Si (cromo-níquel-silicio).

La estructura molecular interna de ese tipo de cuasicristal produce una teselación del plano (un embaldosado) que tiene simetría pentagonal. Estas teselaciones (embaldosados) del plano con simetría pentagonales habían sido descubiertas en 1973 por el matemático británico Roger Penrose. Son teselaciones no periódicas (son cuasiperiódicas) como lo indicamos en la sección de teselaciones. Al nivel bidimensional, tal cuasicristal luce como el embaldosado de Penrose presentado a la derecha.



2 μm



Patrón de difracción para un icosaedro cuasicristal (se muestran en blanco aquellos puntos de mayor intensidad). Hemos marcado en rojo algunos pentágonos de este patrón.

Fuente: Levine, D. & Steinhardt, P.J. (1984). Cuasicristales: una nueva clase de estructuras ordenadas en Physical Review Letters, Vol 53, N° 26.

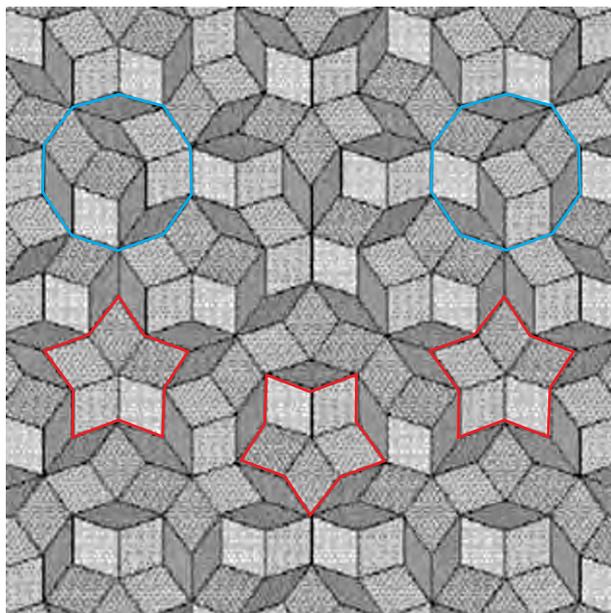
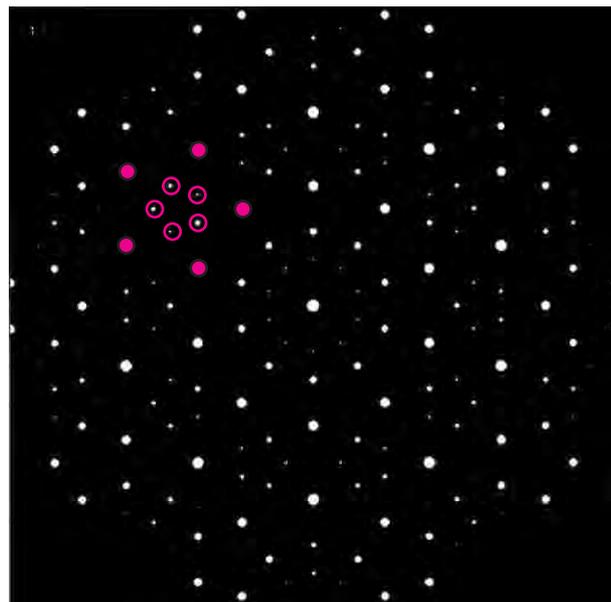


Imagen de microscopio de un cuasicristal donde se puede observar su forma pentagonal de ordenación.

## Los fulerenos

El carbono C se encuentra en la naturaleza en dos formas distintas: diamante y grafito. El diamante es el material más duro conocido, es transparente y aislante. El grafito es opaco, conductor y se rompe fácilmente o se desmenuza. Lo utilizamos con frecuencia en la minas de los lápices. Su estructura geométrica es mediante capas o planos paralelos de átomos de carbono y en cada plano los átomos se ligan entre ellos por enlaces químicos formando una red con hexágonos regulares (imagen superior). El diamante presenta un entretrejado más complejo que le da la dureza característica de ese material (imagen inferior).

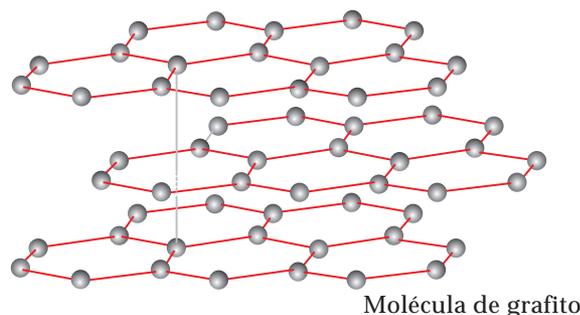
En 1985, los químicos R. F. Curl y R. E. Smalley (Universidad de Rice) y Harry Kroto (Universidad de Sussex), vaporizaron el grafito y obtuvieron una forma estable de la molécula de carbono conformada por 60 átomos de carbono localizados en los vértices de un icosaedro truncado (poliedro arquimediano con 12 caras pentagonales y 20 caras hexagonales), el  $C_{60}$  (carbono sesenta).

Por esta razón se le dio el nombre de buckminsterfulereno (la buckyball), en honor de Buckminster Fuller, debido a su semejanza con los domos o cúpulas geodésicas creados por Fuller.

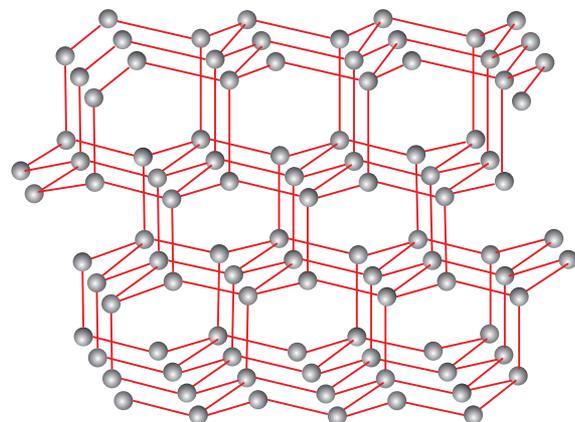
Posteriormente se ha encontrado toda una familia de moléculas, con átomos exclusivamente de carbono, que los químicos denominan los fulerenos pues su disposición espacial es parecida a las construcciones de Fuller: un fullereno es una molécula en forma de jaula convexa con caras únicamente hexagonales y pentagonales.

Se cree que el  $C_{60}$  puede ser un elemento común en el polvo interestelar. La buckyball se sintetiza en forma sólida y tiene usos en lubricantes y procesos catalíticos, entre otros. Los investigadores han modificado la estructura arquitectónica del  $C_{60}$  para producir nuevas moléculas más estables y fuertes, como el  $C_{70}$  y la del carbono 168 denominada la *buckygim*. Los fulerenos también han encontrado uso en la superconductividad y en la medicina.

El descubrimiento del carbono sesenta recompensó a los tres científicos con el premio Nobel de química en 1996.



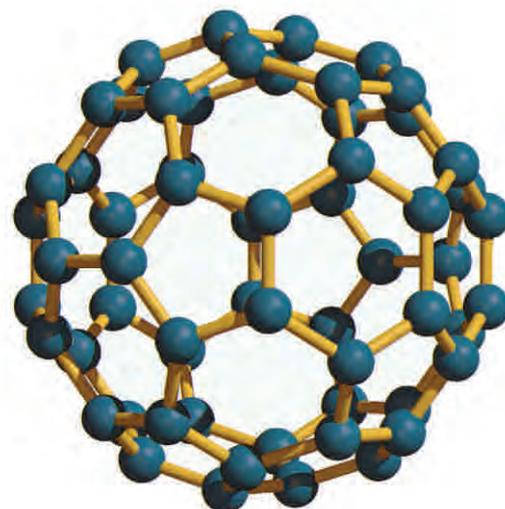
Molécula de grafito



Molécula de diamante



El 13 y el 14 de octubre de 2003, en Manchester (Inglaterra), se celebró el bicentenario de la publicación de la Teoría Atómica de John Dalton. A este evento acudieron diversas celebridades entre quienes destacaron Sir Harry Kroto (Premio Nobel) y Diego Forlán (equipo de fútbol Manchester United), los cuales presentaron la similitud de un balón de fútbol y una molécula de  $C_{60}$ .



## Los nanotubos

El prefijo *nano* indica  $10^{-9}$  y hoy en día es muy común en las denominadas nanotecnologías. Los nanotubos fueron descubiertos en 1991 por Sumio Iijima de la NEC Corporation (Japón). Los nanotubos son “gigantescos” fulerenos rectilíneos (la dimensión rectilínea es muy grande en comparación con su diámetro). Los fulerenos son el ladrillo elemental de la construcción de los nanotubos. En sus paredes, el nanotubo hereda de uno de sus ancestros, el grafito, una característica: el motivo hexagonal.

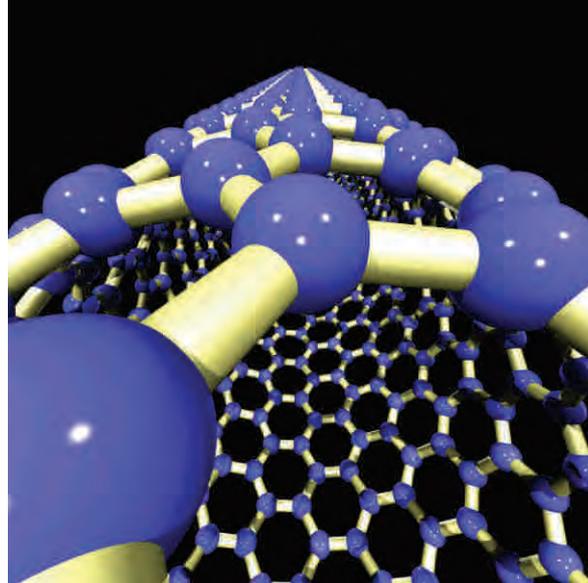
Para el químico, el nanotubo es un polímero compuesto únicamente de átomos de carbono que puede tener hasta un millón de átomos.

Desde el punto de vista físico, es un cristal unidireccional donde se reproduce periódicamente una misma célula de base. Es como un tubo cerrado en sus dos extremos, de diámetro nanométrico.

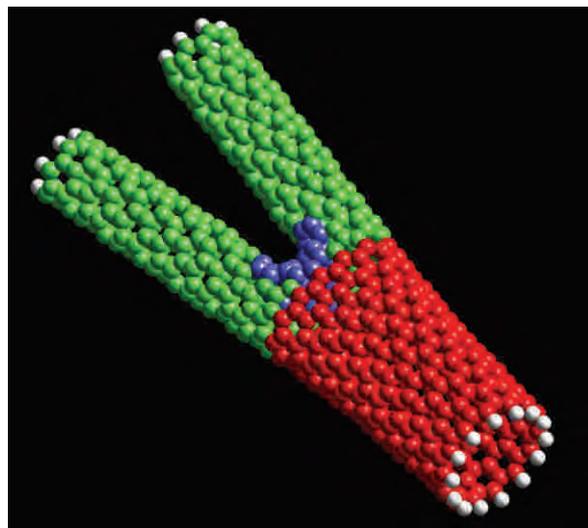
Los nanotubos son materiales ligeros y sólidos y han encontrado utilidad en electrónica.

Hoy en día estudiamos el mundo tridimensional que nos rodea y percibimos con nuestros sentidos. Además, el macro-mundo, esto es el Universo: los planetas, las estrellas, las galaxias, con distancias dadas en años luz. Y también tenemos el micromundo o nanomundo y en éste hablamos de nanotecnologías y conceptos con el prefijo nano: los nanotubos, las nanobacterias, los nanocircuitos, las nanomáquinas, son parte de esta terminología.

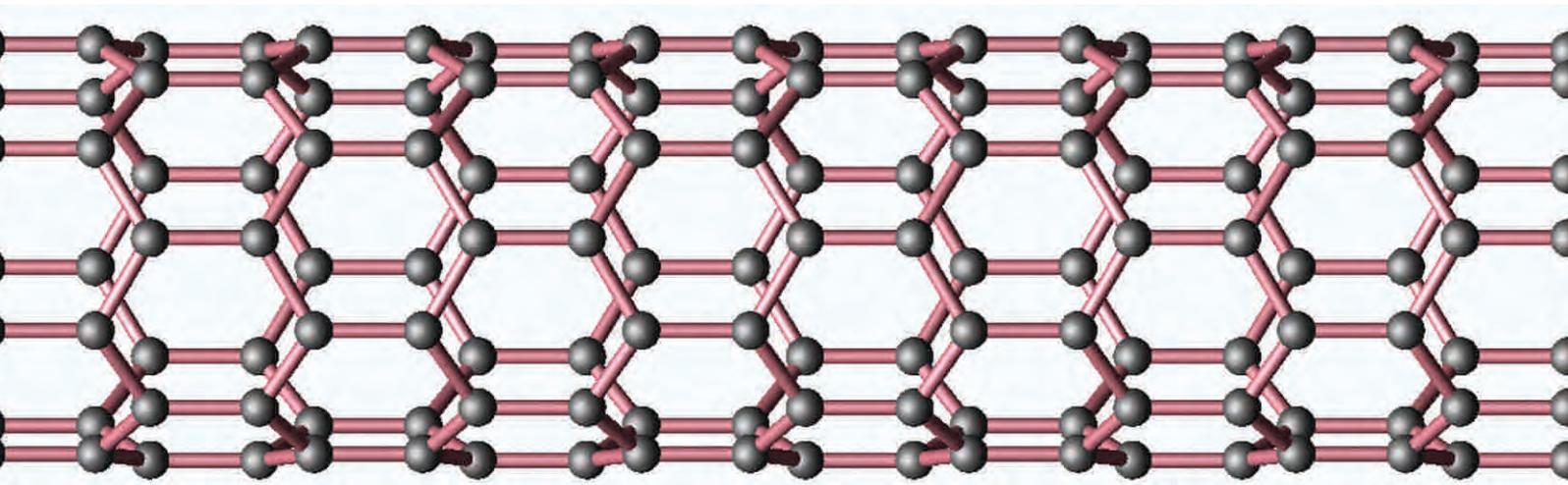
En el Universo las medidas se hacen con millones de kilómetros y con años luz. En las nanotecnologías las medidas se hacen en nanosegundos ( $10^{-9}$ s), nanómetros ( $10^{-9}$ m), etc.



Fuente: [www.nanotech-now.com](http://www.nanotech-now.com)



Fuente: [www.csc.com/features/2003/images/nanotube.jpg](http://www.csc.com/features/2003/images/nanotube.jpg)



# Los poliedros en las artes, la arquitectura y la ingeniería

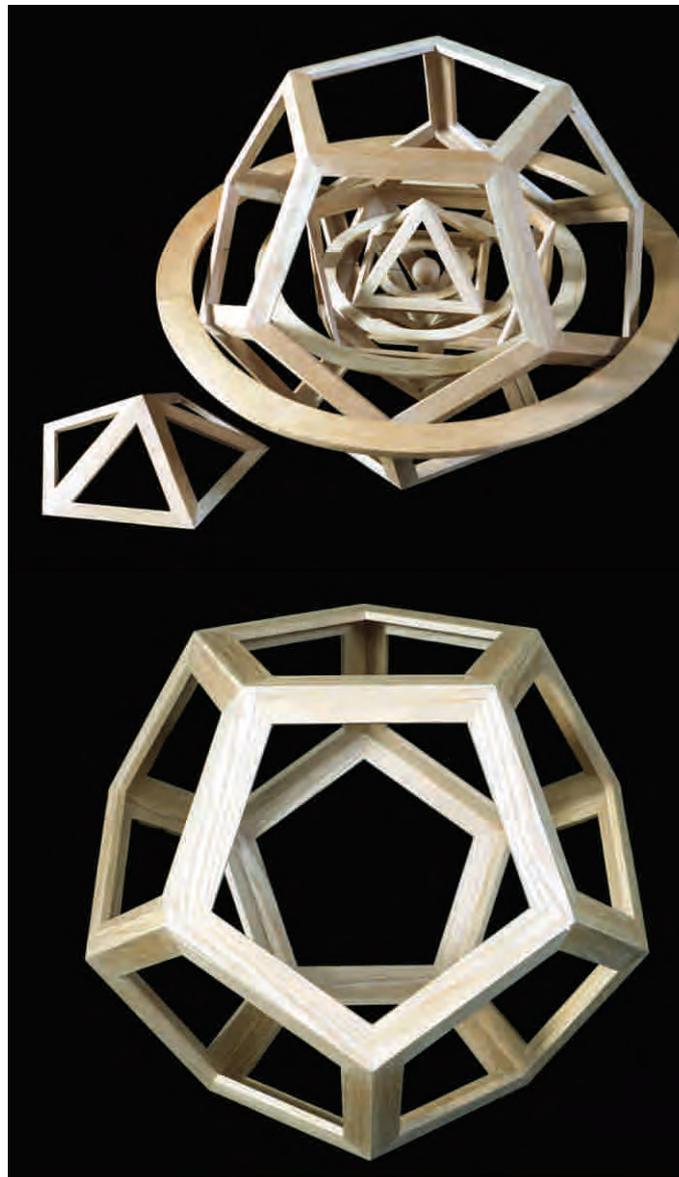
Al igual que los polígonos, los poliedros se han utilizado en las artes y en la arquitectura desde siglos anteriores. Además han sido objeto de interpretaciones místico-religiosas, como lo atestigua la representación del fuego, de la tierra, del aire, del agua y del universo, mediante los cinco sólidos platónicos, símbolos de perfección y armonía, y la representación de estos poliedros, inscritos y circunscritos a esferas, realizada por Kepler en su búsqueda de por qué sólo existían seis planetas (los únicos conocidos en su época).

Ya el eminente artista, diseñador, arquitecto e ingeniero del Renacimiento italiano, Leonardo Da Vinci, utilizó los poliedros para la decoración del libro “La Divina Proporción” (1509) del fraile franciscano Luca Pacioli (1445-1514), quien fue su maestro en matemática. Leonardo dibujó los poliedros (lentos y vacíos), de los que presentamos el dodecaedro vacío.

Antes de esta forma de representar los poliedros, los mismos se ilustraban como sólidos opacos que ocultaban la parte trasera o con segmentos transparentes en el cual el efecto producido no necesariamente permite distinguir si una línea es del frente o del trasero de la superficie. En la representación de Leonardo, con los poliedros huecos o vacíos, se observan las dos partes (frontal y trasera).

Asimismo, en el primer retrato que se conoce de un matemático, el de Luca Pacioli, podemos observar en la mesa un dodecaedro y en la parte superior izquierda un poliedro semirregular (arquimediano) transparente.

Este retrato fue realizado por el pintor veneciano Jacopo de Barbari, en el que Pacioli está haciendo una demostración geométrica al joven Duque de Urbino. En el cuadro, el pintor coloca una serie de valores asociados al estudio de las formas geométricas: orden, armonía, pureza, rigor.



Fuente: Instituto y Museo de Historia de la Ciencia. Italia.  
<http://www.imss.fi.it>



Fuente: Instituto y Museo de Historia de la Ciencia. Italia.  
<http://www.imss.fi.it>

Igualmente, el pintor y grabador holandés Maurits Escher (1898-1972), a quien se considera uno de los artistas del s. XX más vinculados a la matemática por el uso que hizo de ésta mediante polígonos y teselaciones, espirales, geometría no euclidiana, el infinito, mundos imposibles, entre otros, también utilizó los poliedros en su arte.

En el siguiente grabado en madera (1948) observamos una de sus obras titulada *Estrellas*: hay en el medio tres octaedros regulares huecos, representados por sus aristas, en donde viven dos camaleones que se fijan a las aristas mediante sus patas y cola. En el espacio podemos admirar otros poliedros, entre los que señalamos: 1) En la parte superior un cubo y emergiendo de éste un octaedro, un icosaedro, dos tetraedros que se cruzan, un rombododecaedro; 2) En la parte inferior, dos tetraedros que se cruzan, dos cubos penetrándose, tres octaedros que se cruzan y un dodecaedro.

