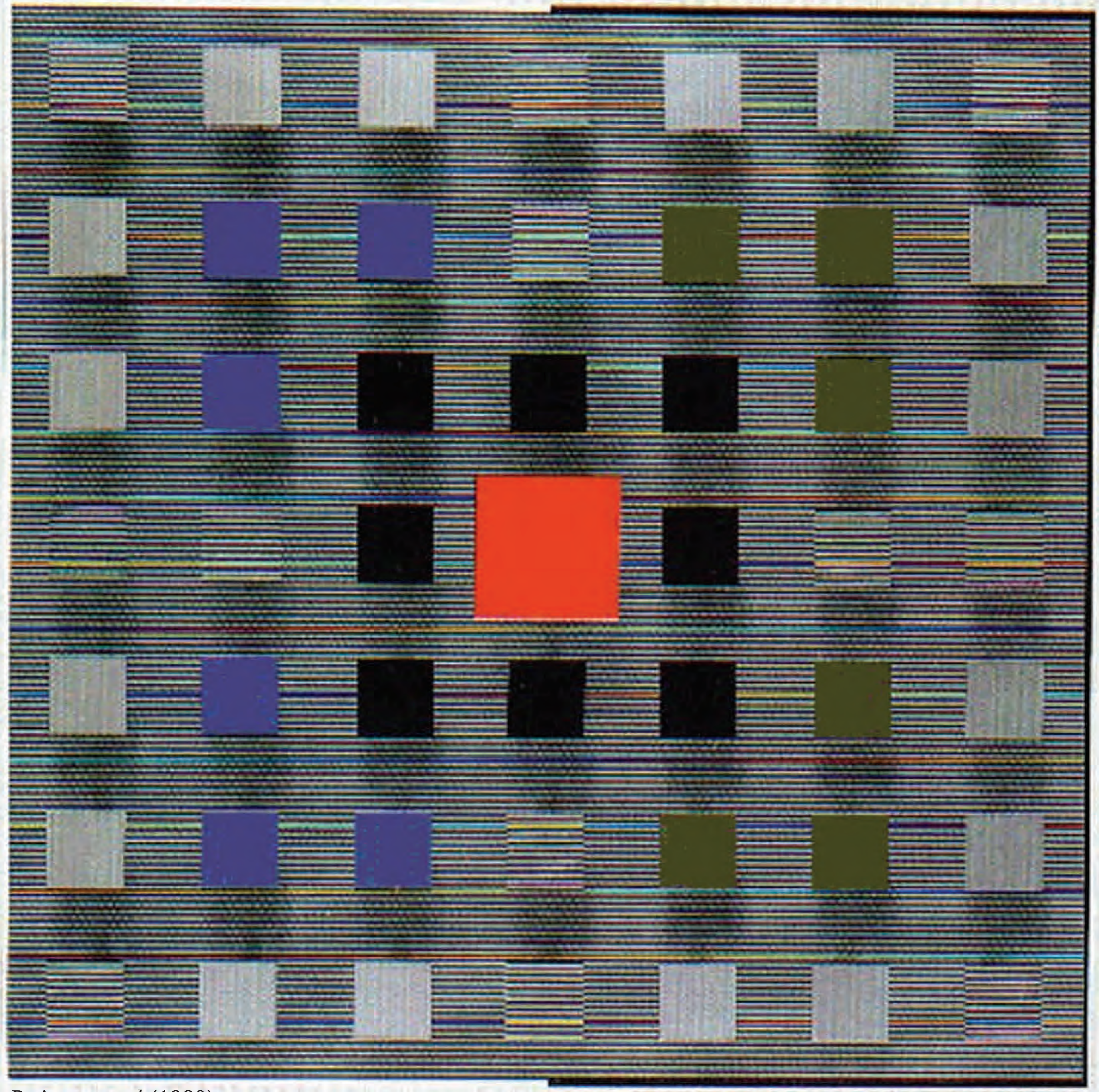
Fundación POLAR

# Matemática Maravillosa

# Polígonos y poliedros



*Rojo central* (1980).

El científico se ocupa de demostrar hechos, para comprobarlos, las mentes más estrictas utilizan ecuaciones matemáticas, luego vienen otros hombres, que aplican estos conocimientos y los traducen en objetos concretos con aplicabilidad práctica. El artista por su parte demuestra la otra realidad del universo, aquella que no es tangible, aquella que no se puede demostrar a través de esas fórmulas matemáticas: es la realidad sensible, son dos formas de explorar, descubrir y explicar el universo, los cuales normalmente marchan paralelas"

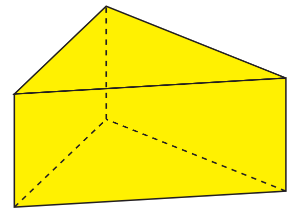
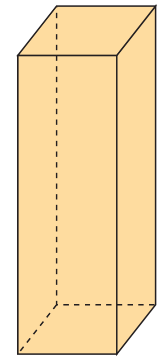
Jesús Rafael Soto (Venezuela, 1923 -2005).

MM

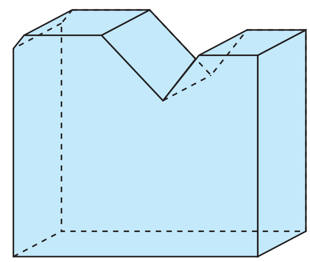
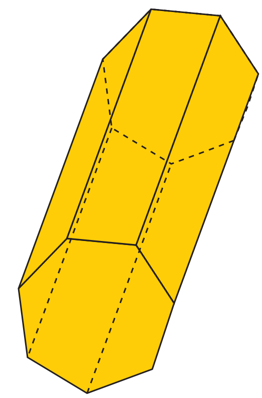
Fascículo 3

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela
ÚltimasNoticias

# El mundo de los poliedros

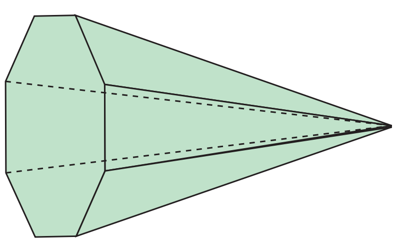
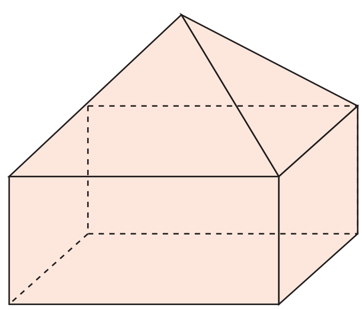
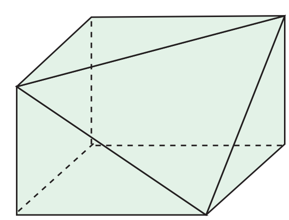



Pasamos del mundo de los polígonos (figuras planas o bidimensionales) al mundo de los poliedros (cuerpos en el espacio tridimensional). En el proceso de fabricación de piezas y en la construcción de edificios tiene especial importancia la interpretación del plano de la pieza o del edificio, para luego construir el modelo, réplica de la pieza que se producirá posteriormente.

Así también construimos cuerpos a partir de sus respectivas redes o planos, lo que nos permite proyectar edificios y estructuras de uso en la construcción y el diseño.

Las figuras representadas son cuerpos geométricos en el espacio, limitados por un número finito de superficies planas. Estos cuerpos reciben el nombre de poliedros. Las superficies planas en cuestión son polígonos y se denominan caras del poliedro.

Observa cualquiera de los poliedros que están dibujados y algunos de sus elementos característicos:

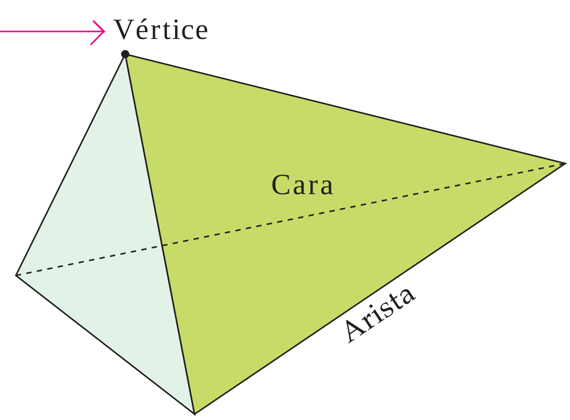
a) ¿Cómo definirías cada uno de sus elementos?

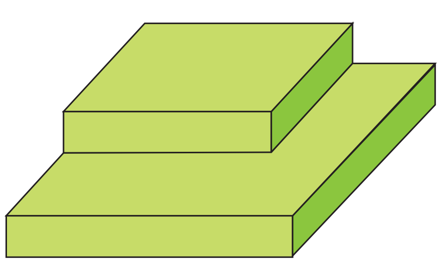
b) ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene?

c) ¿Cuántas caras, como mínimo, habrá que juntar en un vértice?

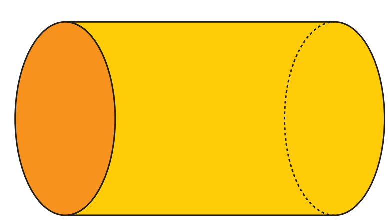
d) ¿Cuánto pueden sumar, como máximo, los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice?

Se denomina orden del vértice al número de caras que concurren a un mismo vértice. Este poliedro tiene orden del vértice 3.



Este es un poliedro que tiene 14 vértices, 21 aristas y nueve caras.



Este cuerpo geométrico no es un poliedro.

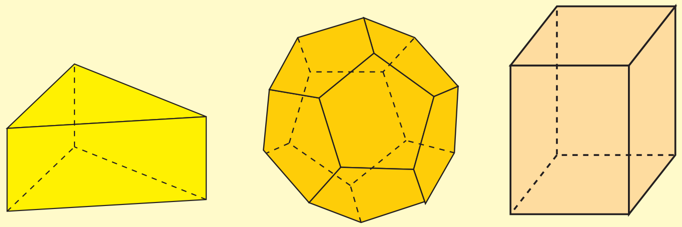
¿Por qué el cuerpo de la derecha no es un poliedro?

# Clasificación de poliedros

Una clasificación de los poliedros es la siguiente:

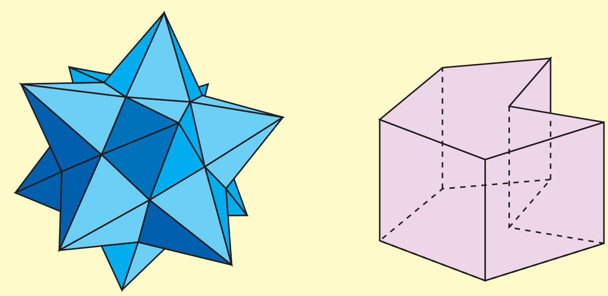
**Poliedros**

## Convexos



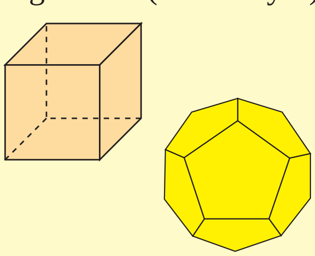
Se caracterizan porque cada uno de ellos se puede apoyar en una superficie plana sobre cada una de sus caras.

## No convexos (cóncavos)



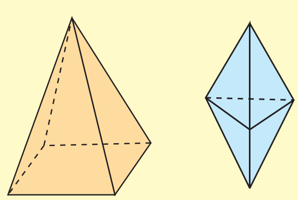
Se caracterizan porque cada uno de ellos no se puede apoyar en una superficie plana sobre alguna de sus caras.

### Regulares (sólo hay 5)



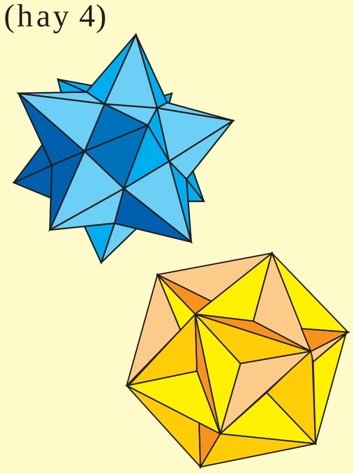
Se caracterizan porque todas sus caras son polígonos regulares congruentes y en cada vértice concurre el mismo número de caras.

### No regulares

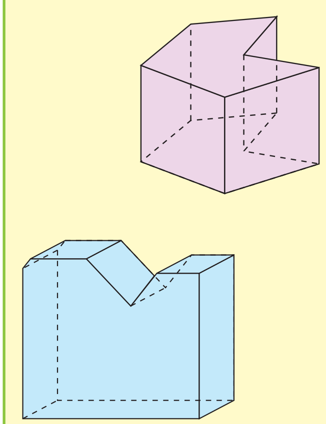


Se caracterizan porque son poliedros con caras no congruentes y en el caso de la segunda figura, aunque sus caras son congruentes no tienen el mismo número de caras en cada vértice.

### Regulares estrellados (hay 4)



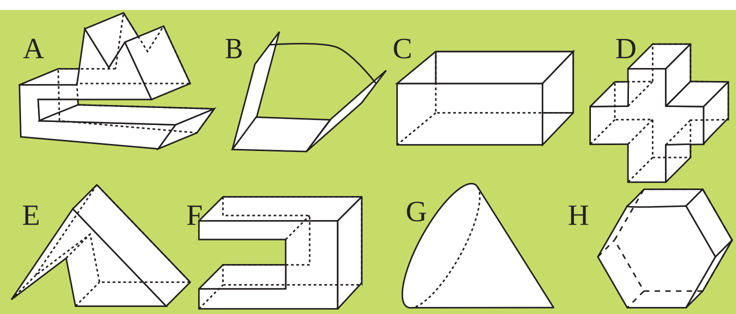
### No regulares



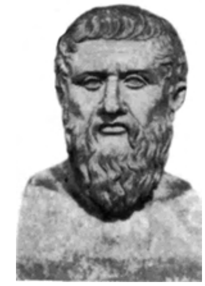
**RETO**

Decide: ¿cuáles de los siguientes cuerpos son poliedros? ¿Cuáles son convexos? ¿Cuáles son cóncavos? ¿Cuáles son regulares? y ¿cuáles son irregulares?

Explica en cada caso el porqué de tu decisión.

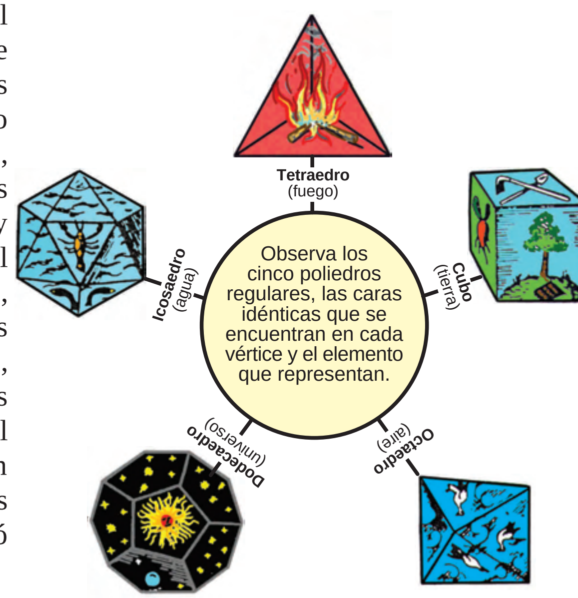


# El mundo de los poliedros regulares



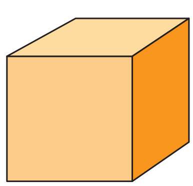
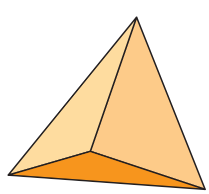
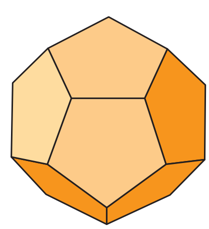
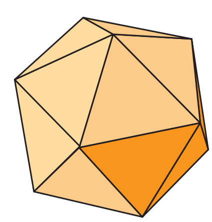
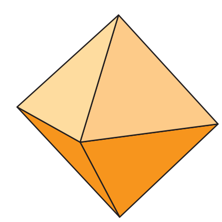
*Platón* (Grecia 428-347 a.C.)

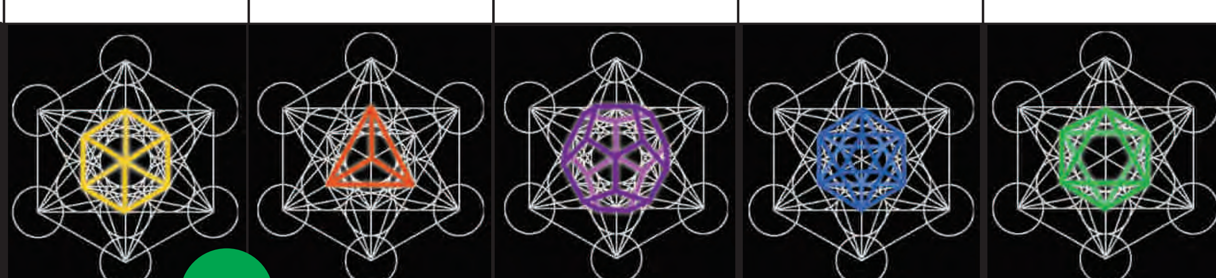
Los poliedros regulares convexos son conocidos con el nombre de sólidos platónicos en honor al filosofo griego Platón (428-347 a.C.) que los cita en el Timeo, pero lo cierto es que no se sabe en que época llegaron a conocerse. Algunos investigadores asignan el cubo, el tetraedro y el dodecaedro a Pitágoras (siglo IV a.C.) y el octaedro e icosaedro a Teeteto (415-369 a.C.). Para Platón los elementos últimos de la materia son los poliedros regulares, asignando el fuego al tetraedro (el fuego tiene la forma del tetraedro, pues es el elemento mas pequeño, ligero, móvil y agudo), la tierra al cubo (el poliedro mas sólido de los cinco), el aire al octaedro (para los griegos el aire, de tamaño, peso y fluidez, en cierto modo intermedios, se compone de octaedros) y el agua al icosaedro (el agua, el más móvil y fluido de los elementos, debe tener como forma propia o "semilla , el icosaedro, el sólido más cercano a la esfera y, por tanto, el que con mayor facilidad puede rodar), mientras que al dodecaedro le asignó el Universo. Como los griegos ya tenían asignados los cuatro elementos dejaban sin pareja al dodecaedro, por lo que lo relacionaron con el Universo como conjunción de los otros cuatro. La forma del dodecaedro es la que los dioses emplean para disponer las constelaciones en los cielos. Dios lo utilizó para todo cuando dibujó el orden final.

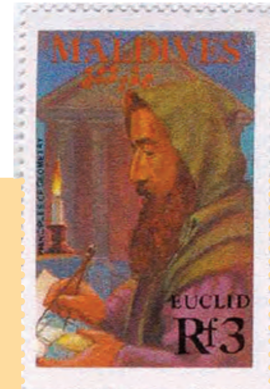



En cada uno de los poliedros abajo representados cuenta el número de vértices V, el número de aristas A y el número de caras C.

Calcula V-A+C. ¿Qué número se obtiene? La relación resultante fue demostrada por Euler.

| Poliedro regular | Hexaedro regular o cubo | Tetraedro regular | Dodecaedro regular | Icosaedro regular | Octaedro regular |
|---|---|---|---|---|---|
| Modelo |  |  |  |  |  |
| Caras | 6 cuadrados | 4 triángulos equiláteros | 12 pentágonos regulares | 20 triángulos equiláteros | 8 triángulos equiláteros |
| Vértices | 8 | 4 | 20 | 12 | 6 |
| Aristas | 12 | 6 | 30 | 30 | 12 |
| Aristas por vértice | 3 | 3 | 3 | 5 | 4 |






## SABÍAS QUE...

Euclides (Grecia, s. III a.C.) demostró, de forma algebraica, porqué sólo existen cinco tipos de poliedros regulares convexos.

Supongamos que se pueda construir un poliedro regular convexo cuyas caras sean polígonos regulares de *n* lados. Luego, el ángulo de cada vértice del polígono mide $\frac{(n-2)}{n}$ x 180°.

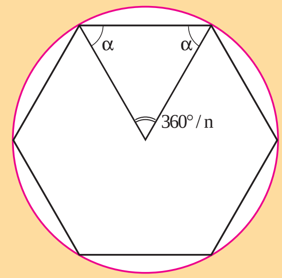
Si el orden del vértice de un poliedro regular es *p*, entonces la suma de los ángulos de un vértice del poliedro es:

$p\,[\frac{(n-2)}{n} \times 180°]$. Pero esta suma tiene que ser menor que 360°, porque si fuera igual a 360° las caras estarían en un plano y no se tendría una figura sólida.

Luego:

$$p[\frac{(n-2)}{n} \times 180°] < 360° \Longleftrightarrow$$
$$p[\frac{(n-2)}{n}] < 2 \Longleftrightarrow p(n-2) < 2n \Longleftrightarrow$$
$$pn - 2p - 2n < 0 \Longleftrightarrow pn - 2p - 2n + 4 < 4$$
$$p(n-2) - 2(n-2) < 4 \Longleftrightarrow (p-2)(n-2) < 4$$

Como cada cara de un poliedro regular debe tener más de dos lados y más de dos caras deben concurrir en cada vértice, vemos que *p* y *n* deben ser mayores que 2. Las únicas soluciones (n,p) a esta desigualdad son (3,3), (3,4), (3,5) (4,3) y (5,3). La tabla a la derecha justifica lo anterior.




$$2\alpha = 180° - \frac{360°}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

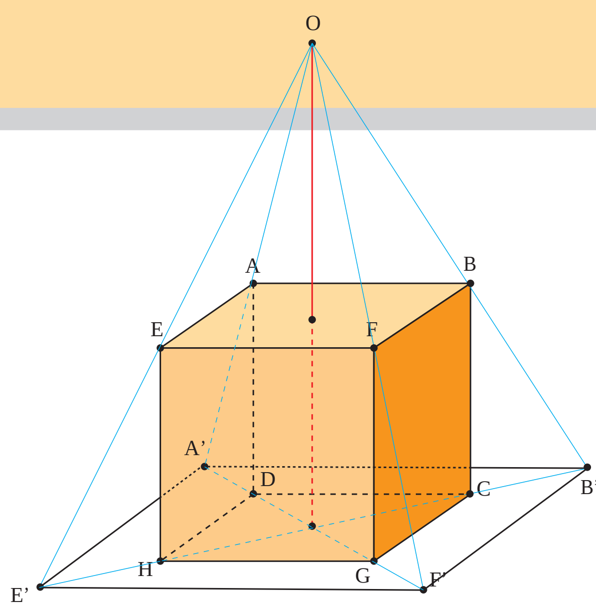
| n | p | n-2 | p-2 | (n-2)(p-2) | Figura |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | Tetraedro |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 2 | Octaedro |
| 3 | 5 | 1 | 3 | 3 | Icosaedro |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | Cubo |
| 5 | 3 | 3 | 1 | 3 | Dodecaedro |

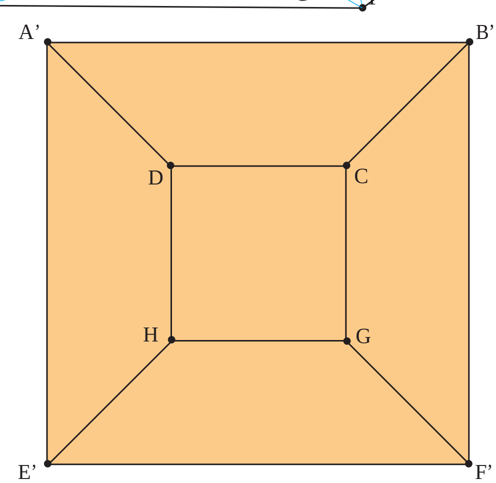
# Proyección de Schlegel

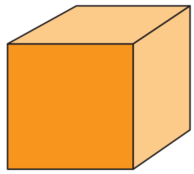
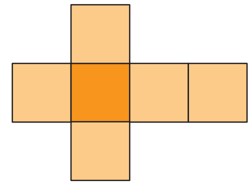
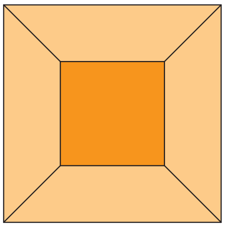
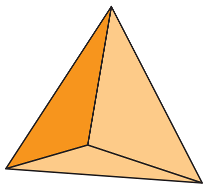
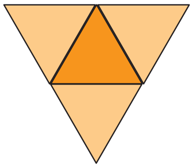
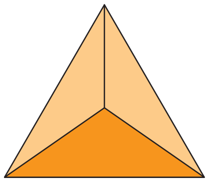
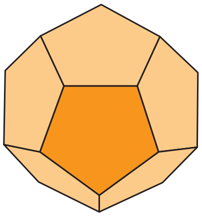
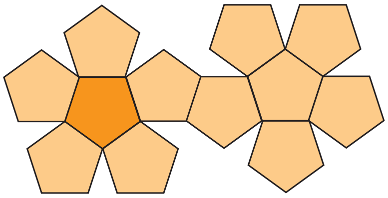
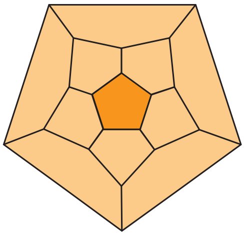
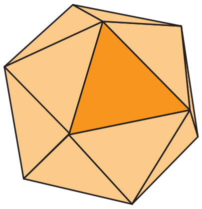
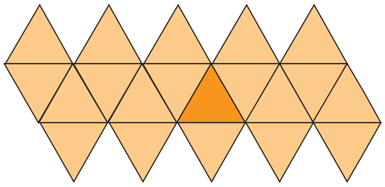
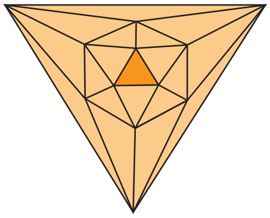
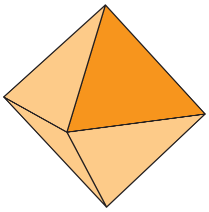
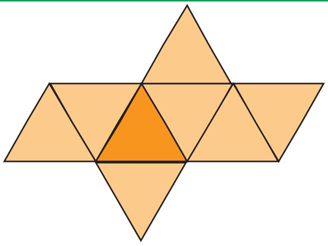
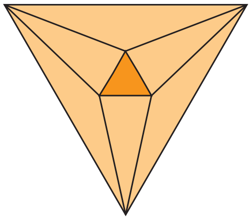
Los sólidos platónicos pueden además ser proyectados sobre un plano. Esta proyección se obtiene eligiendo una cara y proyectando los lados del poliedro platónico desde un punto O por encima del centro de esta cara. La figura que se obtiene se llama diagrama de Schlegel. También se pueden obtener si rompemos una cara y estiramos las restantes caras sobre la pared, sin romper las aristas. Observa el diagrama de Schlegel del cubo.

Parte de las características del poliedro (como la conexión entre vértices y lados) se preserva en su correspondiente diagrama de Schlegel. Esto facilita el estudio de determinados problemas, tales como recorrido y coloración. En el caso de los sólidos platónicos estos diagramas son únicos (no depende de la cara desde la que se proyecte).

También se pueden hacer los desarrollos planos tal como se enseñan en Educación Básica (1ª y 2ª etapas) además de los diagramas de Schlegel de los poliedros platónicos. Estos desarrollos los presentamos en la página siguiente.

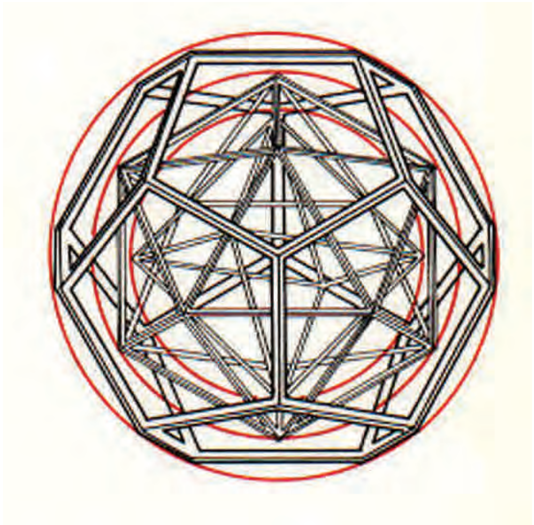


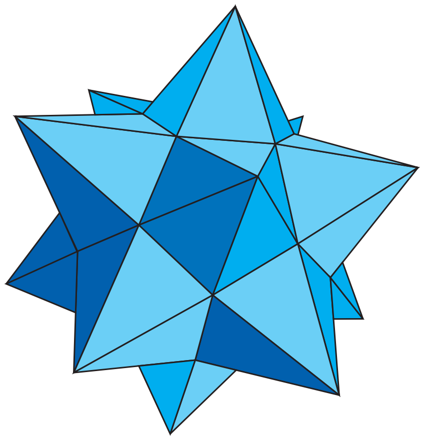



| | Vista | Desarrollo plano | Diagrama de Schlegel |
|---|---|---|---|
| Hexaedro regular o cubo |  |  |  |
| Tetraedro |  |  |  |
| Dodecaedro |  |  |  |
| Icosaedro |  |  |  |
| Octaedro |  |  |  |

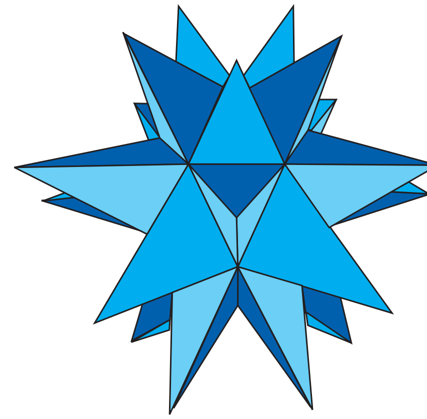
Como hemos visto sólo existen cinco poliedros regulares convexos. Si eliminamos la condición de ser convexo tenemos cuatro más. Éstos son conocidos como los poliedros de Kepler-Poinsot o poliedros regulares estrellados.

Johannes Kepler (Holanda, 1571-1630), en 1619, se dio cuenta que existían dos maneras diferentes de pegar 12 pentagramas (pentágonos estrellados) a lo largo de sus aristas para obtener un sólido regular. Si 5 de ellos se unen en un sólo vértice, obtendremos el pequeño dodecaedro estrellado que tiene doce vértices. Si son 3 pentagramas los que se encuentran en cada vértice, obtenemos el gran dodecaedro estrellado que tiene 20 vértices.



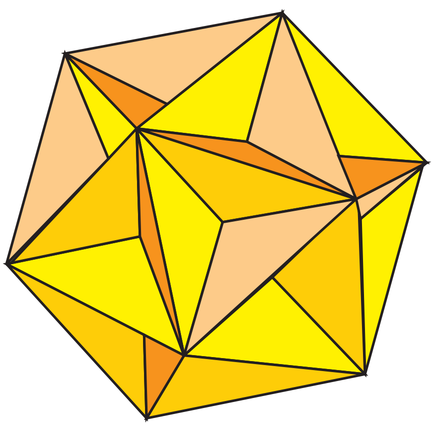


Pequeño dodecaedro estrellado



Gran dodecaedro estrellado

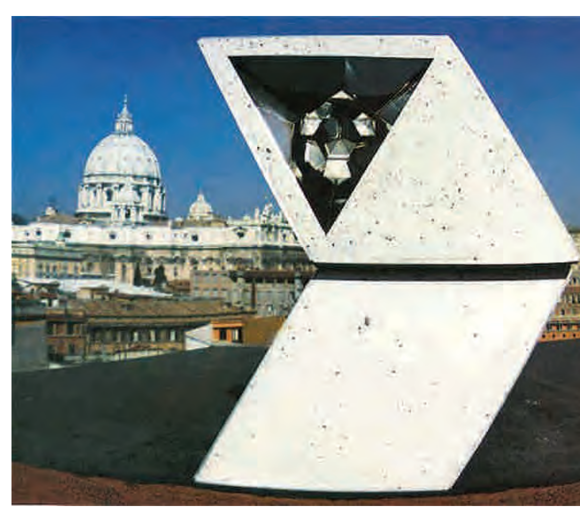
Posteriormente, en 1809, Louis Poinsot (Francia, 1777-1859) descubrió los otros dos poliedros no convexos regulares, el gran icosaedro y el pequeño dodecaedro.



Pequeño dodecaedro

Gran icosaedro

*Universo Icosaedro 2*, 1980.
Material: acero inoxidable.

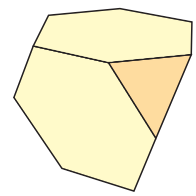


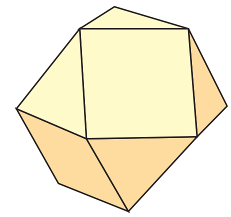
*Icosaedro stellato*, 1981.
Materiales: acero inoxidable y cemento.

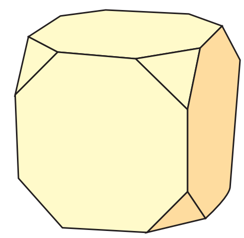
El escultor Attilio Pierelli (Italia, 1924- ) utilizó, en la década de los 80, figuras como el dodecaedro, el icosaedro, el hipercubo y otras para realizar sus obras.
Fuente: http://www.pierelli.it

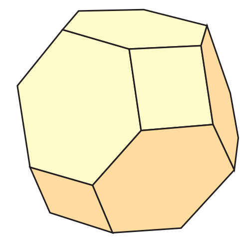
# Pero, ¿existen otros tipos de poliedros?

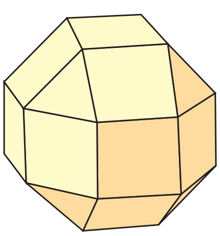
Sí, entre estos se encuentran los poliedros semirregulares que son 17. Un poliedro convexo es semirregular si sus caras son polígonos regulares de dos o tres tipos. Entre estos sólidos están los arquimedianos, ya que se creen fueron descubiertos por Arquímedes, aunque no se tiene ninguna prueba documental que lo acredite. Existen 13 sólidos arquimedianos. Siete de ellos se obtienen por truncamiento de los sólidos platónicos, es decir, por cortes de esquinas, acción que se puede ejecutar de varias maneras. Así, los denominados con el nombre del sólido platónico de origen más el término “truncado”, se obtienen al dividir cada arista en tres partes y cortar por estas divisiones. Si dividimos la arista a la mitad y truncamos, sólo obtenemos dos nuevos poliedros: el cuboctaedro y el icosidodecaedro. Sus nombres se deben al hecho de que al realizar el proceso de truncamiento que acabamos de describir, en el caso de un cubo y un octaedro (respectivamente, icosaedro y dodecaedro) obtenemos el mismo poliedro. El cubo chato y el dodecaedro chato se obtienen con otro procedimiento.

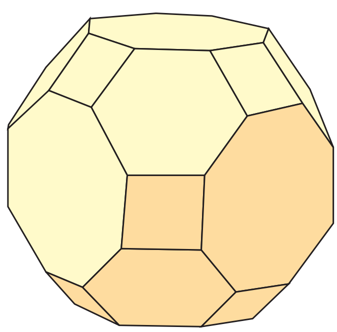

Tetraedro truncado

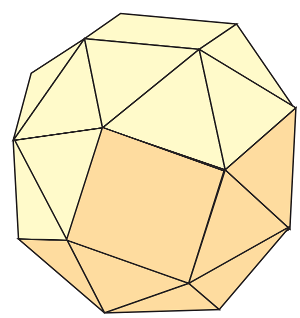

Cuboctaedro

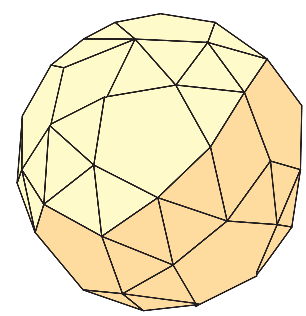

Cubo truncado

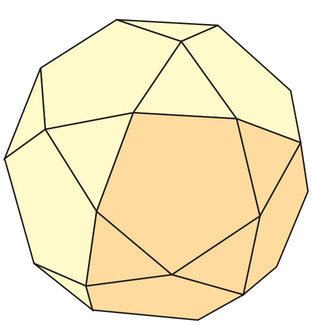

Octaedro truncado

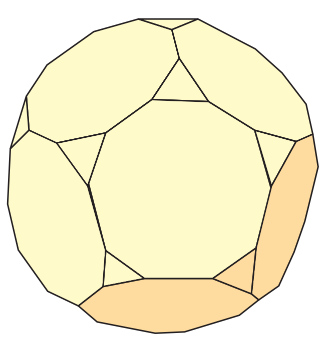

Rombocuboctaedro

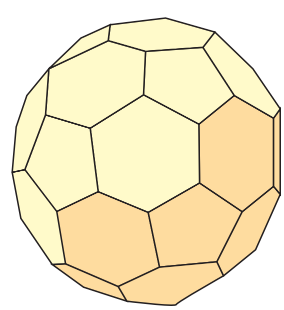

Cuboctaedro truncado

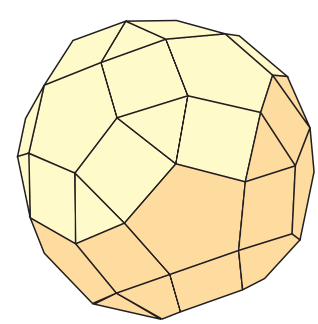

Cubo chato

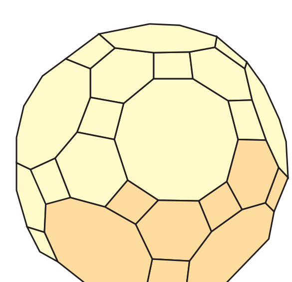

Dodecaedro chato


Icosidodecaedro


Dodecaedro truncado


Icosaedro truncado


Romboicosidodecaedro


Icosidodecaedro truncado



Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
**http://www.fpolar.org.ve/matematica3**