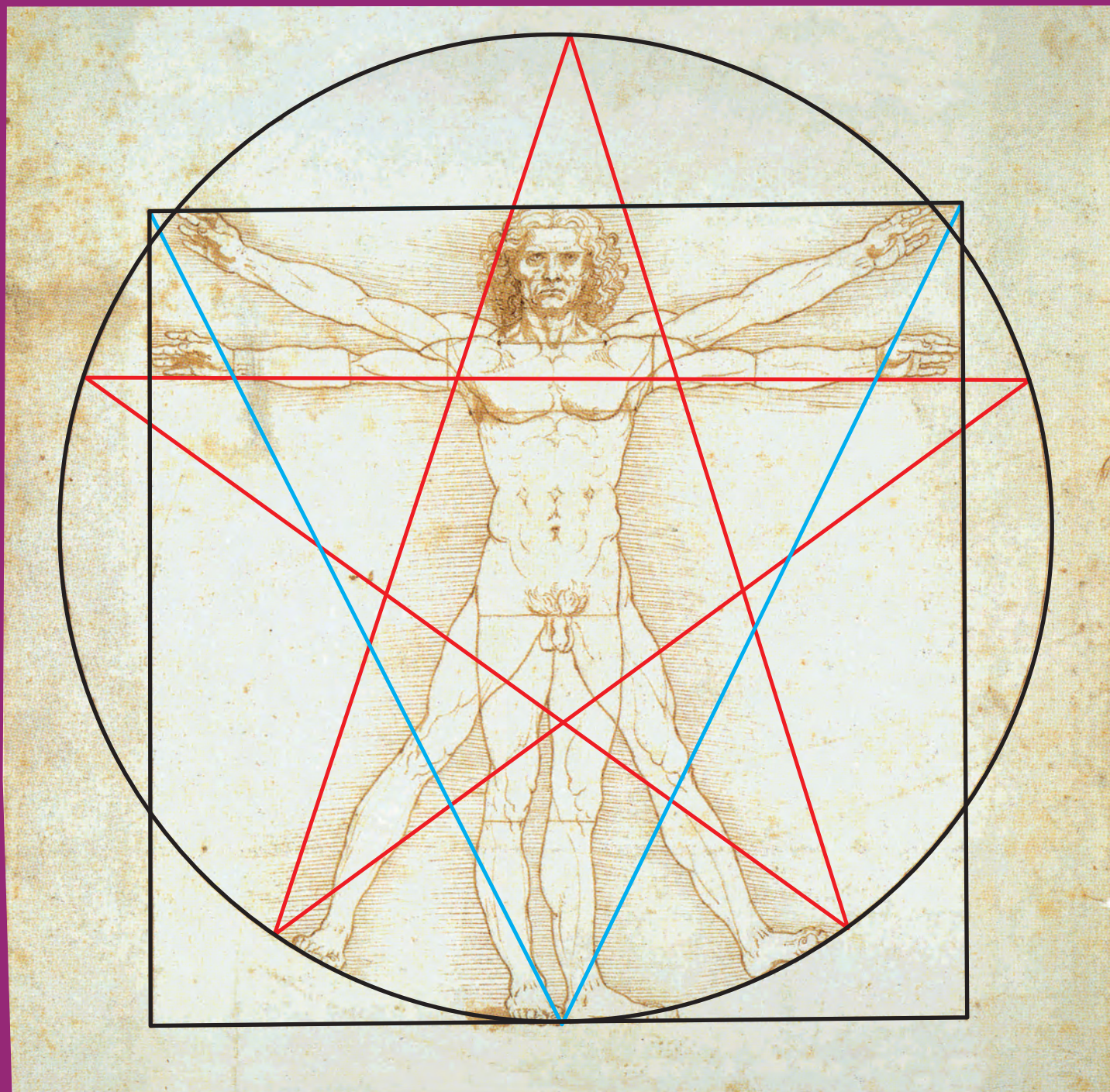




Matemática Maravillosa

Arte y arquitectura



El *Hombre de Vitruvio* es un famoso dibujo acompañado de notas anatómicas de Leonardo da Vinci (Italia, 1452-1519) realizado en uno de sus diarios (c. 1490). Representa una figura masculina desnuda en dos posiciones sobreimpresas de brazos y piernas e inscrita en un círculo y un cuadrado. También se conoce como el canon de las proporciones humanas. El redescubrimiento de las proporciones matemáticas del cuerpo humano en el siglo XV por Leonardo y otros autores, está considerado uno de los grandes logros del Renacimiento. El dibujo también es a menudo considerado como un símbolo de la simetría básica del cuerpo humano y, por extensión, del universo en su conjunto.

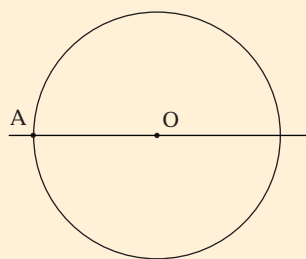
28



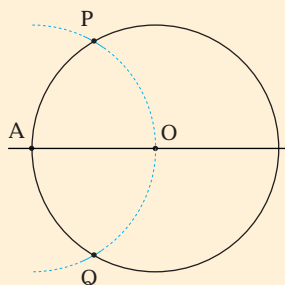
Construcción de polígonos regulares

Caso n=5 (pentágono regular)

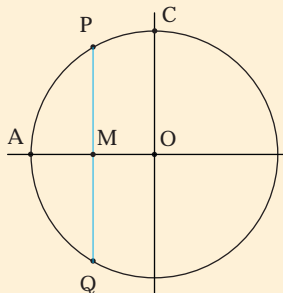
1 Dibujar un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio OA.



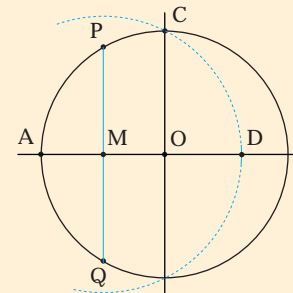
2 Con radio AO y centro A se traza un arco que corte a la circunferencia inicial en P y Q.



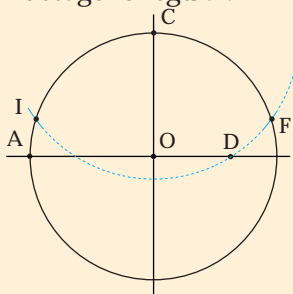
3 El segmento PQ corta a AO en su punto medio M. Se traza la perpendicular a OA que pasa por O y se determina C.



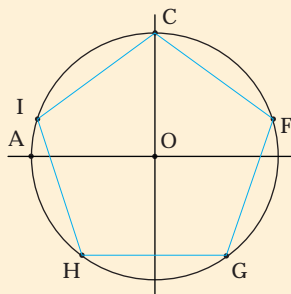
4 Con longitud MC y centro en M se traza un arco que corta a OA en D.



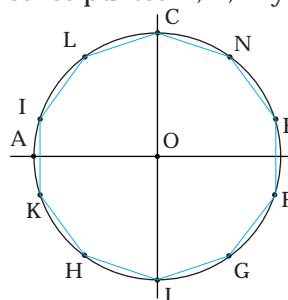
5 Con longitud CD y centro en C se corta la circunferencia inicial en F e I. Los segmentos CD y OD son, respectivamente, los lados del pentágono y del decágono regular.



6 Con distancia CF se trazan los puntos G y H que son los dos vértices faltantes del pentágono regular CFGHI.

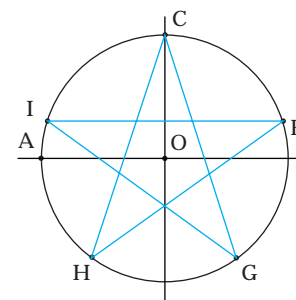


7 Para dibujar un decágono (n=10) se toma el punto J del diámetro opuesto a C y con abertura CF hallamos los puntos K, L, N y R.



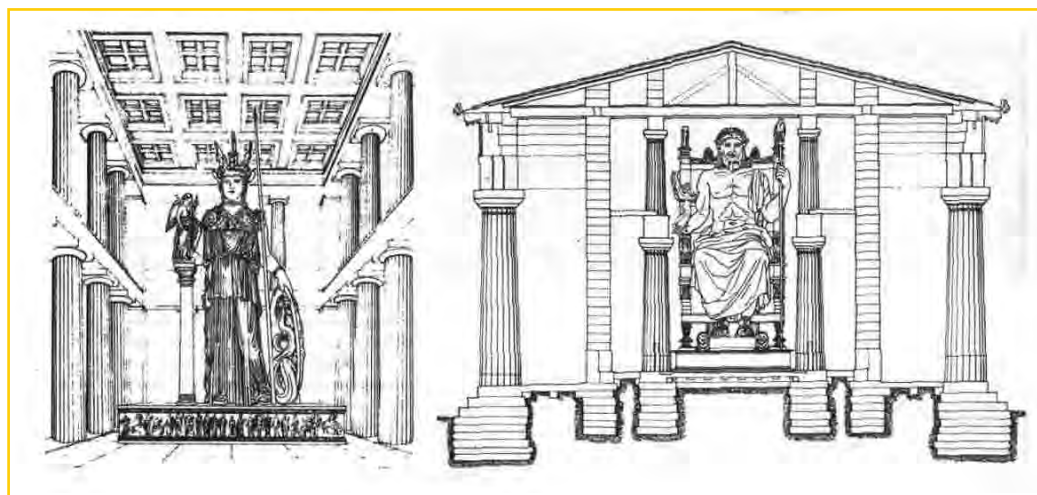
El pentágono estrellado fue utilizado por los pitagóricos. En el pentágono regular la relación de la diagonal HF al lado HG es el número de oro.

La relación $\frac{HF}{HG} = \phi \approx 1,61803$



El número 1,61803..., llamado número de oro, es designado usualmente con la letra griega ϕ (Fi), letra inicial del nombre del escultor griego Fidias quien lo tuvo presente en muchas de sus obras.

Reconstrucción de los templos de Atenea y Zeus cuyo diseño es atribuido a Fidias.



En varios de los ejemplos anteriores hay otros procedimientos para ejecutar las construcciones geométricas realizadas. Por otra parte, es necesario señalar que también existen otros instrumentos de dibujo, además de la regla y el compás, como las escuadras, el transportador, etc.

Hoy en día estos instrumentos tienen un carácter didáctico, puesto que los profesionales, en general, los han substituido por el uso de las computadoras.

¿ Se puede construir cualquier polígono regular de n lados con el sólo uso de la regla y el compás? ¿Qué significa construir en matemática utilizando únicamente la regla y el compás?

Se supone que la regla no graduada (sin escala) sólo se usa para dibujar rectas y segmentos pero no para medir ni transportar distancias ni subdividir segmentos, y que el compás se utiliza para trazar circunferencias de centro en un punto dado que pasa por otros puntos prefijados, pero no para transportar distancias. El título de construcciones geométricas con regla y compás en matemática no alude al problema de dibujar figuras con cierto grado de exactitud, sino demostrar que se puede hallar la solución teórica sobre la base de que los dos instrumentos tienen una precisión exacta.

Desde un punto de vista práctico, para el dibujo de figuras se emplean las reglas graduadas y el transportador, el cual es un excelente instrumento para medir y dibujar ángulos. Existen métodos de aproximación para dibujar de manera aceptable polígonos regulares e inscribirlos en circunferencias. Además, el uso de programas informáticos permite hacer múltiples construcciones con gran precisión

No entender la diferencia entre lo que es la “concepción y demostración teórica” versus “el dibujo práctico” permite la presencia, en todos los tiempos y lugares, de “los cuadradores del círculo”, “los trisectores de ángulos” y los “duplicadores del cubo”.



Estatuas de Carl F. Gauss y Wilhelm Weber en la ciudad de Gotinga, Alemania.

INTERESANTE

La respuesta a la pregunta antes formulada es: NO. Por ejemplo, los polígonos regulares de tantos lados como los números primos 7, 11 y 13 no se pueden construir con el sólo uso de la regla y el compás, por lo tanto, estos polígonos no se pueden inscribir en una circunferencia con el solo uso de estos instrumentos. En cambio, el polígono regular de 17 lados (eptadecágono) si es factible hacerlo.

Este resultado lo demostró (1796) el gran matemático, astrónomo y físico alemán Karl F. Gauss cuando tenía diecinueve años de edad, lo cual lo entusiasmó tanto que renunció a su intención de hacerse filósofo y resolvió dedicarse a la matemática y sus aplicaciones. Luego de su muerte se erigió en Gotinga, ciudad donde trabajó y falleció, una estatua de bronce en la que el pedestal tiene la forma de un eptadecágono.

El teorema demostrado por Gauss es el siguiente: Un polígono regular de n lados es posible construirlo con regla y compás, si y sólo si n es de una de las formas siguientes:

a) $n = 2^m$, donde m es un entero ≥ 2 , condición que cumplen los cuadrados ($m=2$), octógonos ($m=3$), 16-ágonos ($m=4$), etc.

b) $n = 2^m p_j$; donde m es un entero ≥ 0 y $j \geq 1$, los números p_j son números primos de Fermat, que son números de la forma $F_i = 2^{2^i} + 1$ donde i es un entero ≥ 0 .

Como el primer número de Fermat es $F_0 = 3$ entonces de (b) se deduce que triángulos equiláteros, hexágonos, dodecágonos, en general los polígonos regulares de $3 \cdot 2^m$ lados, se pueden construir con regla y compás; El segundo número de Fermat es $F_1 = 5$ por lo que los polígonos regulares de $5 \cdot 2^m$ lados también se pueden construir con regla y compás (los pentágonos, decágonos, ..., en general cumplen con esta condición). Consecuentemente se aplica esta misma regla al resto de los números de Fermat.

En cambio, como los números primos 7, 11, 13 no son números de Fermat, al no cumplir con la condición señalada, los polígonos regulares con esos números de lados no se pueden construir sólo con el empleo de regla y compás.

Dibujando matemáticamente

El dibujo es la representación gráfica por medio de líneas o sombras sobre una superficie generalmente plana, de objetos reales o imaginarios o de formas puramente abstractas.


El delineado de la forma representa la base de todas las artes visuales (incluso la escultura), de allí que el dibujo constituye una rama de estudio importante en las escuelas de arte y arquitectura, así como en las de ingeniería.


Para el dibujo de objetos que tengan una relación exacta con la realidad, se han desarrollado varias técnicas y establecido reglas de uso necesario cuando se quiera representar sobre papel una idea, diseño o proyecto que luego será construido de acuerdo con las indicaciones allí señaladas.

El concepto de escala es fundamental para realizar la representación gráfica de cualquier elemento, pues su uso permite mostrar fielmente en una hoja de papel de un tamaño determinado, un microchip, un tornillo, una casa o una ciudad.

Escala es la relación numérica o gráfica que existe entre la realidad y el dibujo.

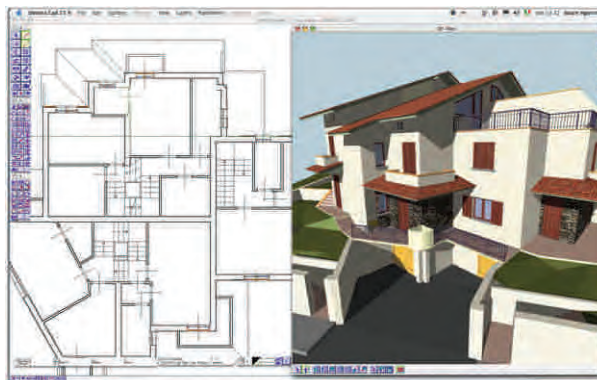
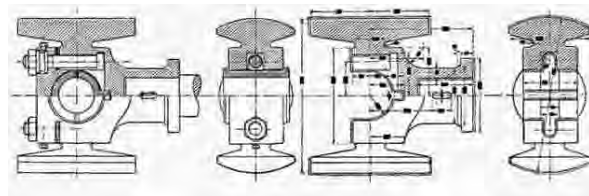
La escala numérica se representa como D:R, donde D es el tamaño en el dibujo y R su tamaño en la realidad. Por ejemplo: 1:100.000 significa que 1 cm en el dibujo representa aproximadamente 100 000 cm (1 000 m ó 1 km) en la realidad.

1 cm  en escala 1:100 equivale a un cuadrado de 1 m de lado.
1 cm equivale a 100 cm (1 m).

1 cm  en escala 1:25 000 equivale a un cuadrado de 250 m de lado.
1 cm equivale a 25 000 cm (250 m).

La escala gráfica es frecuentemente utilizada en mapas, planos y gráficos, por lo que al seleccionar una distancia cualquiera en el dibujo es posible determinar con bastante exactitud su valor en la realidad.

En el diseño asistido por computadora, más conocido por las siglas inglesas CAD (Computer Aided Design), se utiliza básicamente una base de datos de entidades geométricas (puntos, líneas, arcos, etc) con la que se puede operar a través de una interfaz gráfica. Dicha técnica permite, con la aplicación de la denominada geometría alámbrica, esto es, con el uso de puntos, líneas, arcos, splines, superficies y sólidos, obtener un modelo numérico en dos o tres dimensiones de un objeto o conjunto de ellos. En la actualidad existen diversos programas de CAD que le suministran herramientas poderosas al usuario, entre las que destaca la posibilidad de variar la escala del dibujo en el momento que se estime necesario.



Dibujando técnicamente

El dibujo técnico es la representación gráfica de un objeto o una idea práctica utilizando reglas fijas y preestablecidas, para poder describir, de forma exacta y clara, dimensiones, formas, características y el modo de construcción de lo que se quiere reproducir.

Para realizar el dibujo técnico se requiere de instrumentos de precisión. En caso contrario se denomina dibujo a mano alzada o croquis.

Tipos de dibujo técnico

Con el desarrollo industrial y los avances tecnológicos el dibujo técnico ha extendido su campo de acción. Los principales son:

Dibujo arquitectónico: abarca una gama de representaciones gráficas con las cuales se elaboran los planos para la construcción de edificios, casas, quintas, autopistas, iglesias, fábricas y puentes. Incluye los planos de planta, fachadas, secciones, perspectivas, fundaciones, columnas, detalles, entre otros.

Dibujo mecánico: se emplea en la representación de piezas o partes de maquinarias, vehículos, como grúas y motos, aviones, helicópteros y máquinas industriales. Los planos que representan un mecanismo simple o una máquina formada por un conjunto de piezas son conocidos como planos de conjunto, y planos de pieza los que representan un solo elemento. Los que se refieren a un conjunto de piezas con las indicaciones gráficas para su ensamblaje en un todo son llamados planos de montaje.

Dibujo eléctrico: se refiere a la representación gráfica de instalaciones eléctricas en una industria, oficina o vivienda o en cualquier estructura arquitectónica que requiera de dicho servicio. Mediante la simbología correspondiente se representan acometidas, caja de contador, tablero principal, línea de circuitos, interruptores, toma corrientes, salidas de lámparas, entre otros.

Dibujo electrónico: representa los circuitos que dan funcionamiento preciso a diversos aparatos que en la actualidad constituyen un adelanto tecnológico como las computadoras, amplificadores, transmisores, relojes, televisores, radios, etc.

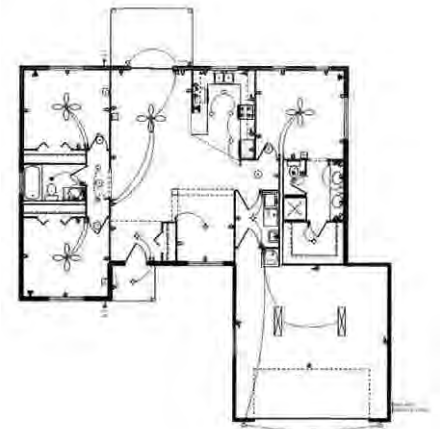
Dibujo geológico: se emplea en geografía y en geología. En él se representan las diversas capas geológicas y los minerales contenidos en cada una. Se usa en minería y en exploraciones de yacimientos petrolíferos.

Dibujo topográfico: representa gráficamente las características de una determinada extensión de terreno mediante signos convencionalmente establecidos. Muestra los accidentes naturales y artificiales, cotas o medidas, curvas horizontales y curvas de nivel.

Dibujo urbanístico: se emplea en la organización de ciudades: ubicación de centros urbanos, zonas industriales, bulevares, calles, avenidas, jardines, autopistas, zonas recreativas, entre otros. Allí se dibujan anteproyectos, proyectos, planos de conjunto, planos de detalle.



Dibujo arquitectónico



Dibujo eléctrico



Dibujo geológico



Dibujo topográfico

Geometría descriptiva

La geometría descriptiva es la rama de la geometría dedicada a la representación gráfica. En otras palabras, dibujar sobre papel el espacio tridimensional, resolver en dos dimensiones los problemas espaciales garantizando la reversibilidad del proceso.

Todos los sistemas de representación tienen como objetivo plasmar sobre una superficie bidimensional, como es una hoja de papel, los objetos que en el espacio son tridimensionales.

Con este propósito se han ideado a lo largo de la historia diferentes sistemas de representación, pero todos ellos cumplen una condición fundamental, la reversibilidad, es decir, que si bien a partir de un objeto tridimensional cada sistema permite una representación bidimensional de dicho objeto, de igual forma, dada la representación bidimensional, el sistema debe permitir que se obtenga la posición en el espacio de cada uno de los elementos de dicho objeto.

Todos los sistemas se basan en la proyección de los objetos sobre un plano denominado plano del cuadro o de proyección mediante los denominados rayos proyectantes.

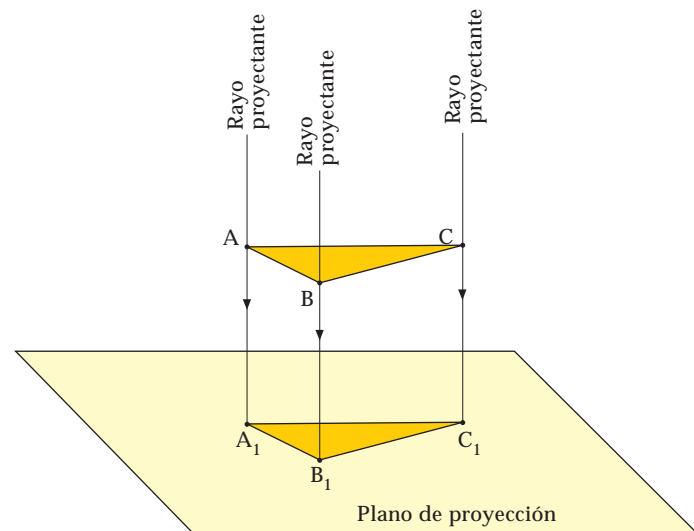
El número de planos de proyección utilizados, la situación relativa de estos respecto al objeto, así como la dirección de los rayos proyectantes, constituyen las características que diferencian a los distintos sistemas de representación.

Sistemas de proyección

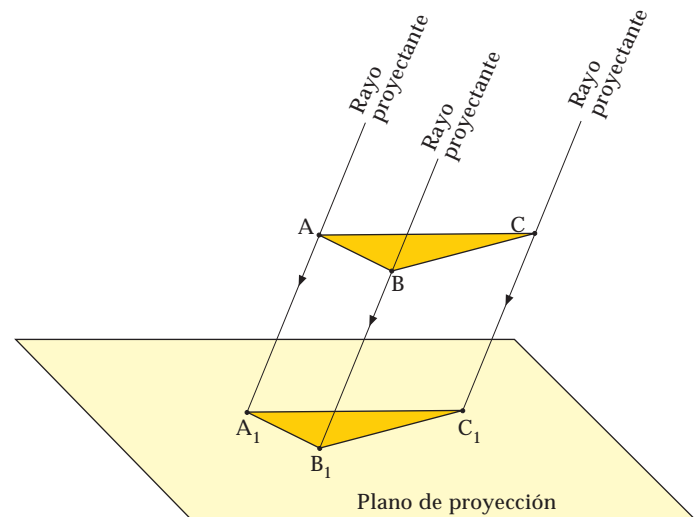
Tal como afirmamos anteriormente, en todos los sistemas de representación la proyección de los objetos sobre el plano del cuadro o de proyección se realiza mediante los rayos proyectantes, líneas imaginarias que al pasar por los vértices o puntos del objeto proporcionan en su intersección con el plano del cuadro la proyección de dicho vértice o punto.

Si todos los rayos proyectantes son paralelos entre sí, se dice que su origen es un "punto del infinito" también denominado "punto impropio", en tal caso se tiene la proyección cilíndrica. Si dichos rayos resultan perpendiculares al plano de proyección estaremos ante la proyección cilíndrica ortogonal; en el caso de resultar oblicuos respecto a dicho plano, estaremos ante la proyección cilíndrica oblicua.

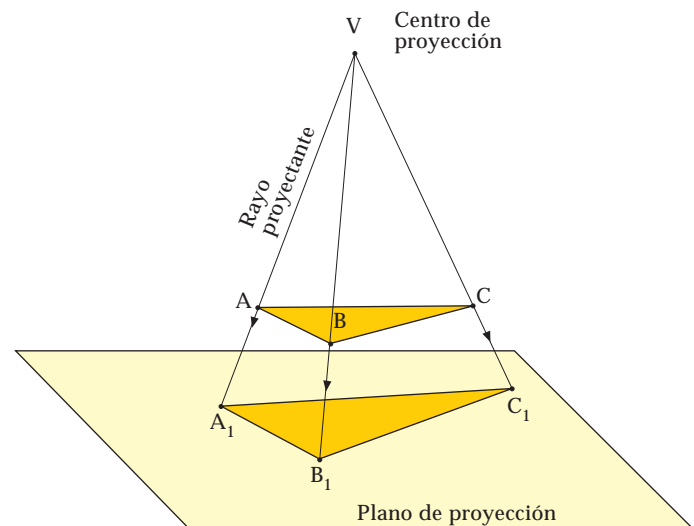
Si todos los rayos proyectantes se cortan en un punto ("punto propio") que es el centro de la proyección, estamos ante la proyección central o cónica también denominada perspectiva.



Proyección cilíndrica ortogonal



Proyección cilíndrica oblicua



Proyección central o cónica

Tipos y características

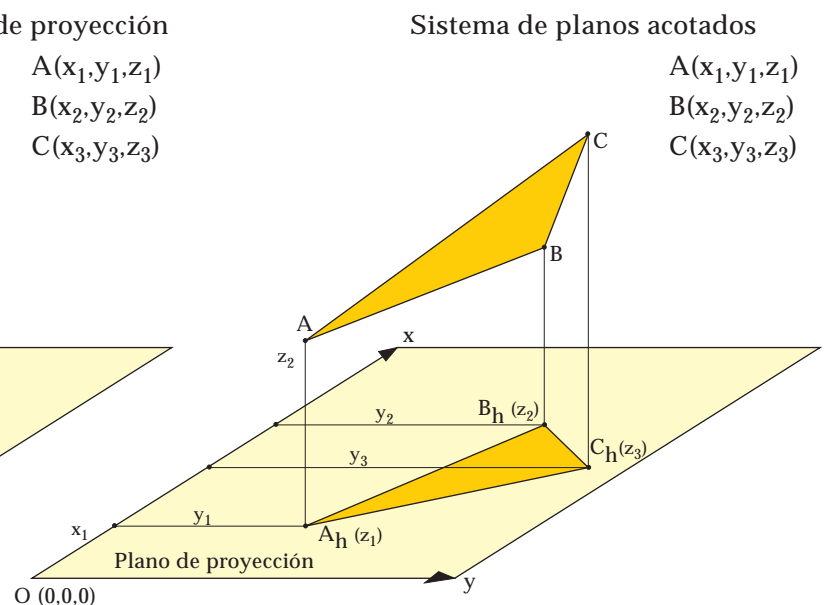
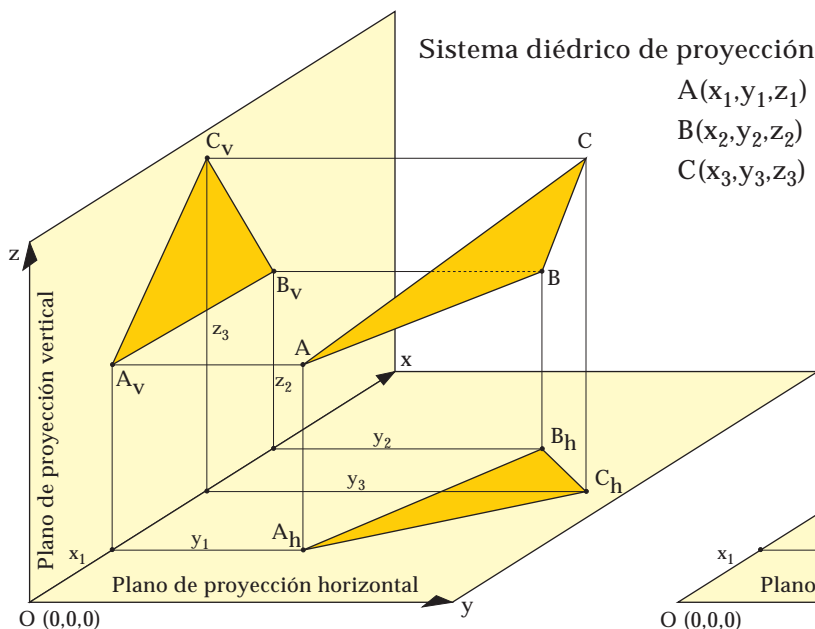
Los diferentes sistemas de representación podemos dividirlos en dos grandes grupos: los sistemas de medida y los sistemas representativos.

Los sistemas de medida son el diédrico y el de planos acotados. Se caracterizan por la posibilidad de realizar mediciones directamente sobre el dibujo, para obtener, de forma sencilla y rápida, las dimensiones y posición de los objetos del dibujo. El inconveniente de estos sistemas es que no se puede apreciar, de un solo golpe de vista, la forma y las proporciones de los objetos representados.

Los sistemas representativos son el de perspectiva axonométrica, el de perspectiva caballera, el de perspectiva militar y de rana, variantes de la perspectiva caballera, y el de perspectiva cónica o central. Se caracterizan por representar los objetos mediante una única proyección, pudiéndose apreciar, de un solo golpe de vista, su forma y proporciones. Tienen el inconveniente de ser más difíciles de realizar que los sistemas de medida, sobre todo si comportan el trazado de gran cantidad de curvas, además de que en ocasiones es imposible tomar medidas directas sobre el dibujo. Aunque el propósito de estos sistemas es el de representar los objetos como los vería un observador situado en una posición particular respecto al objeto, esto no se consigue en su totalidad dado que la visión humana es binocular, por lo que a lo máximo que se ha llegado concretamente, mediante la perspectiva cónica, es a representar los objetos como los vería un observador con un solo ojo.

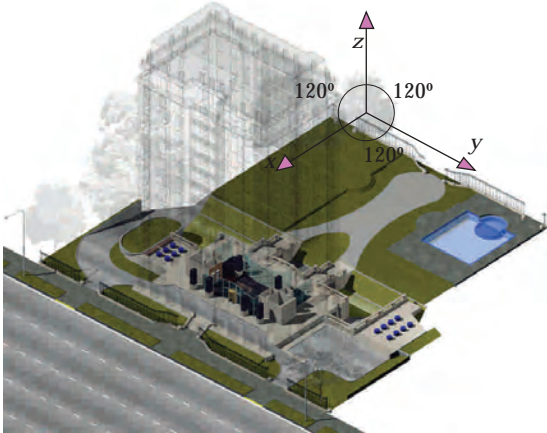
En el siguiente cuadro pueden apreciarse la características fundamentales de cada unos de los sistemas de representación.

Sistema	Tipo	Planos de proyección	Sistema de proyección
Diédrico	De medida	Dos	Cilíndrica ortogonal
Planos acotados	De medida	Uno	Cilíndrica ortogonal
Perspectiva axonométrica	Representativo	Uno	Cilíndrica ortogonal
Perspectiva caballera	Representativo	Uno	Cilíndrica oblicua
Perspectiva militar	Representativo	Uno	Cilíndrica oblicua
Perspectiva cónica	Representativo	Uno	Central o cónica



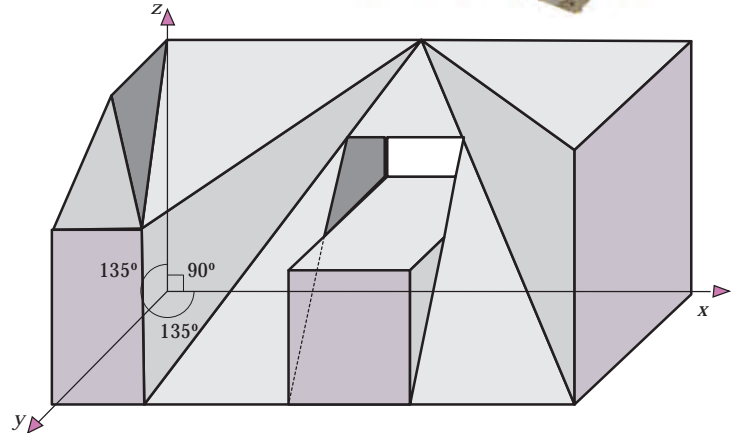


Las perspectivas



Perspectiva axonométrica

Sobre los ejes x , y y z (que forman ángulos de 120° entre ellos) se trasladan los valores espaciales de cada elemento, por ejemplo: la planta de un edificio, y se unen obteniéndose ilustraciones como la arriba mostrada. Esta perspectiva es la imagen clásica generada por los programas CAD, por lo que muchos proyectos de arquitectura se presentan con estas características.



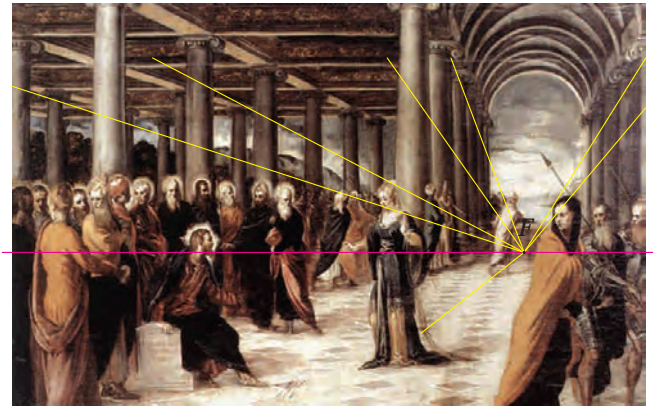
Perspectiva caballera

Los ejes x y z forman un ángulo de 90° ; los ejes x y y y los ejes y y z forman un ángulo de 135° . Se trasladan los valores espaciales de cada elemento y se unen obteniéndose lo que se denomina perspectiva caballera. Todos los valores se pueden tomar directamente del dibujo ya que son transferidos sin ningún tipo de deformación.



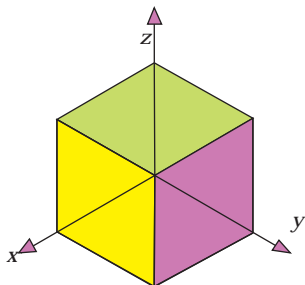
Perspectiva militar

Los ejes x y z forman un ángulo de 90° ; los ejes x e y y los ejes y y z forman ángulos variados sujetos al dibujante. La imagen superior, realizada con esta técnica por Jan Cornelius Vermeyen (Holanda, c. 1500-1559), constituye la representación gráfica más antigua de una villa de la ciudad de Madrid, España.

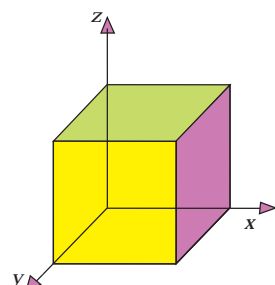


Perspectiva cónica

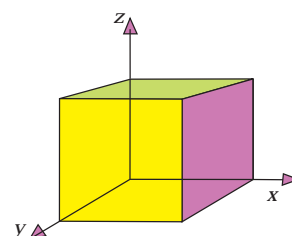
Al contrario de las anteriores descritas, es un sistema de representación realista ya que refleja la distorsión que sufren los objetos con respecto a la distancia y la posición del espectador. Para conseguir este efecto el ilustrador se vale de la línea del horizonte (color magenta) y los puntos de fuga F . Es la utilizada desde el Renacimiento y la que le da profundidad a pinturas como la de Tintoretto arriba mostrada.



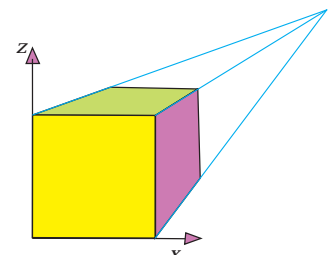
Perspectiva axonométrica



Perspectiva caballera



Perspectiva militar



Perspectiva cónica