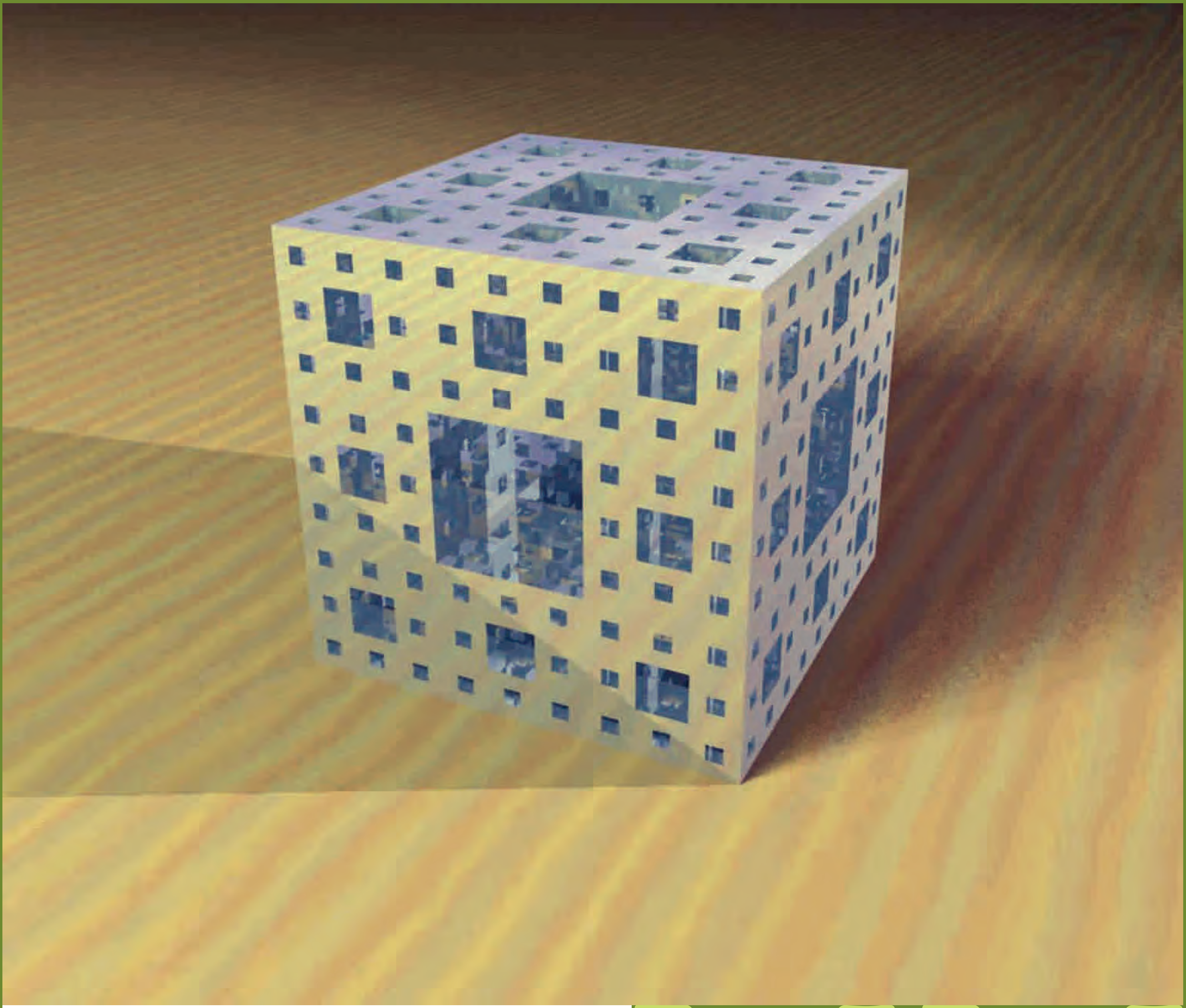
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa
Fractales



Esponja de Menger. Imagen realizada en 2004 por Remy Oudompheng, estudiante de la Escuela Normal Superior (Francia), utilizando un computador. Para realizar esta imagen, el programa utilizado y el super computador tardaron 3 horas.

Fuente: http://www.eleves.ens.fr/home/oudomphe/divers/images/cantor-rnd.jpg

MM

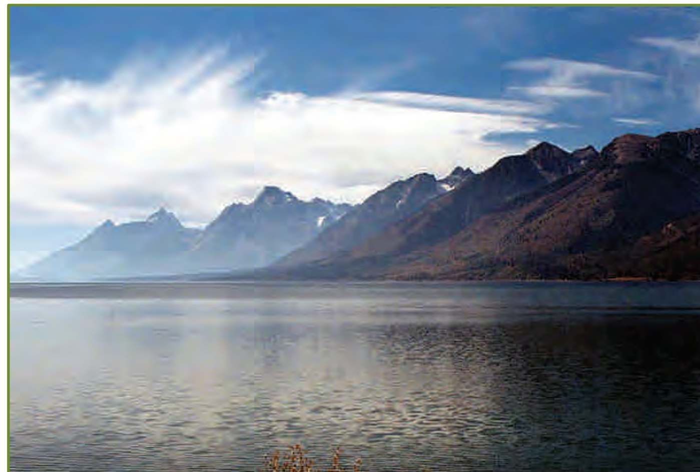
Fascículo 26

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela
ÚltimasNoticias

Fractales en la vida diaria

Gran parte de los fractales en la naturaleza están en tres dimensiones, como los colocados a continuación:

En esta fotografía ampliada de un coliflor se puede reconocer la autosimilitud, pues una sola rama tiene la forma de toda la verdura.



Las montañas también tienen estructura de fractales. Su dimensión fractal es mayor que 2.

Tanto los pulmones como el corazón tienen estructura fractal. En la fotografía se encuentra el de un manatí que, al igual que en la mayoría de los animales pulmonados, presenta una estructura fractal.

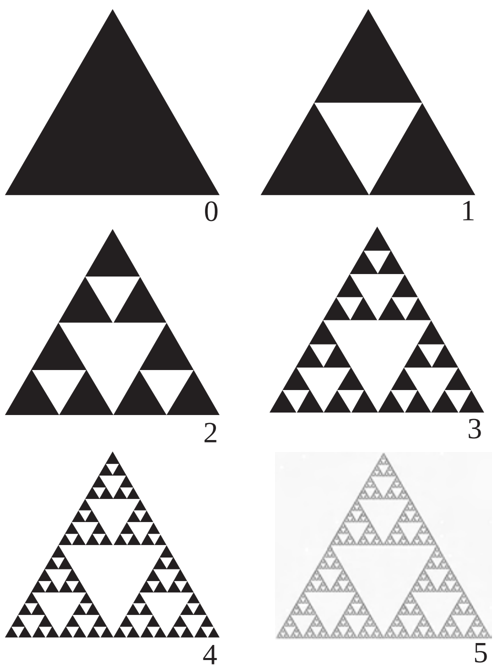
La sangre bombeada por las arterias, comienza su largo viaje por todo el cuerpo y por las venas regresa otra vez al corazón. El sistema venoso-arterial presenta también una espectacular estructura fractal.

También tenemos fractales en el espacio construidos matemáticamente de manera análoga a como lo hicimos en un plano. Mostraremos dos de ellos: a) El tetraedro de Sierpinski, lo análogo del triángulo de Sierpinski; b) La esponja de Menger, lo análogo de la carpeta de Sierpinski.

El tetraedro de Sierpinski

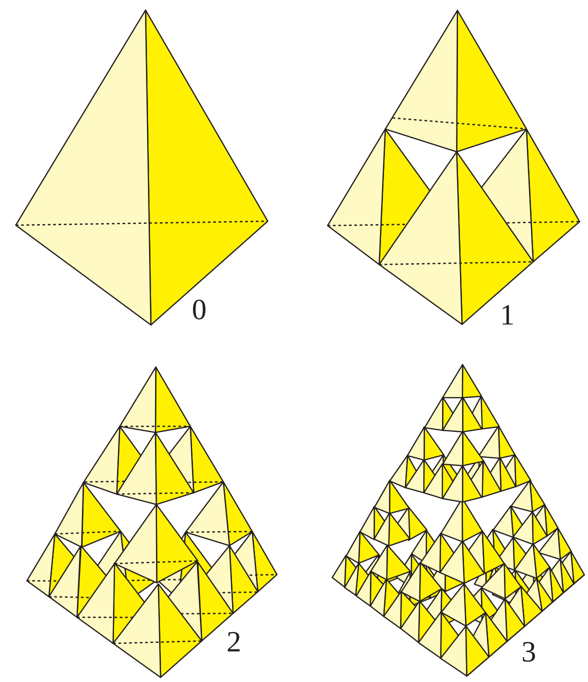
Se parte de un tetraedro regular (estado inicial) y se trazan cuatro tetraedros regulares en cada vértice, luego se itera el procedimiento con esos cuatro tetraedros y así sucesivamente. Observa la analogía de construcción entre el triángulo y el tetraedro de Sierpinski:

Triángulo de Sierpinski (fractal en el plano)



La figura "límite" que resulta al repetir el proceso indefinidamente, es el triángulo de Sierpinski.

Tetraedro de Sierpinski (fractal en el espacio)



La figura "límite" que resulta al repetir el proceso indefinidamente, es el tetraedro de Sierpinski.

INTERESANTE

Así como el triángulo de Sierpinski tiene perímetro infinito y contiene un área finita nula, en el tetraedro de Sierpinski se tiene una superficie infinita que contiene un volumen finito nulo. Esto se debe a que:

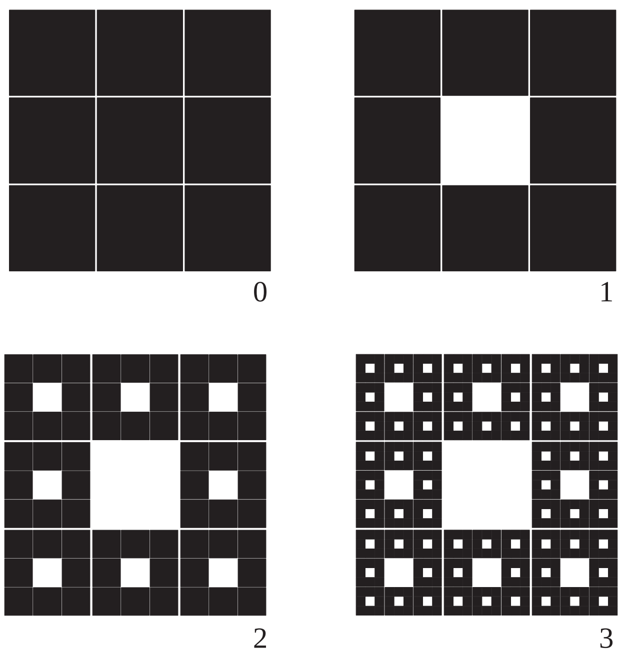
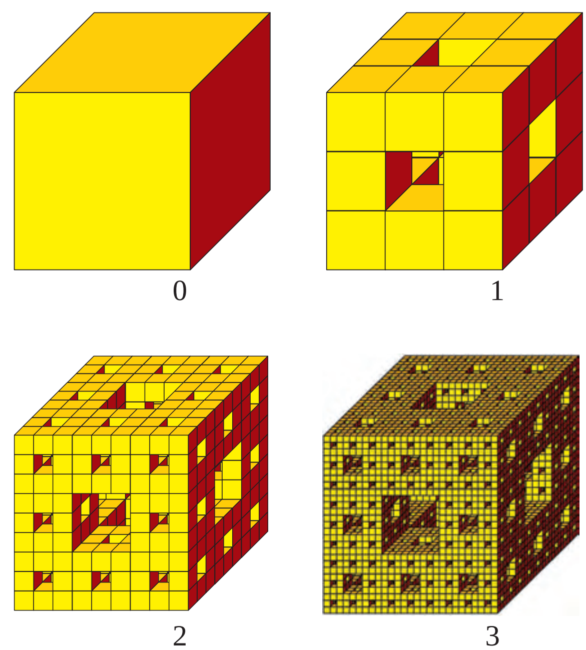
En el triángulo de Sierpinski: si el triángulo inicial tiene lado a y área A, entonces el perímetro total de los triángulos no eliminados en el n-ésimo paso es $3(3/2)^n a$, lo cual "tiende a infinito" (el perímetro va creciendo infinitamente) a medida que n aumenta; y el área total de los triángulos no eliminados en el n-ésimo paso es $(3/4)^n$A, lo cual "tiende a cero" a medida que n aumenta. Intuitivamente observamos esta propiedad: a medida que n aumenta, el triángulo original se subdivide en 3^n triángulos cada vez más pequeños que dejan una multitud de huecos vacíos del original y por esto cada vez tienen menos área y en el límite su área es 0.

En el tetraedro de Sierpinski: si el tetraedro inicial tiene arista a, su volumen es $V= (\sqrt{2}/12)a^3$ y su superficie es $S= \sqrt{3}a^2$. Entonces, la superficie total de los tetraedros del fractal en el n-ésimo paso es $4^n\sqrt{3}(a/2)^n = 2^n\sqrt{3}a^n$, lo cual "tiende a infinito" a medida que n aumenta; y el volumen total de los tetraedros del fractal en el n-ésimo paso es $4^n(\sqrt{2}/12)[(a/2)^3]^n = (\sqrt{2}/12)(a^3/2)^n$, lo cual "tiende a cero" a medida que n aumenta. Intuitivamente observamos esta propiedad: a medida que n aumenta, el tetraedro original se subdivide en 4^n tetraedros cada vez más pequeños que dejan una multitud de huecos vacíos del original y por esto cada vez tienen menos volumen y en el límite su volumen es 0.

Estos son resultados sorprendentes en los fractales a lo que no estamos acostumbrados con las figuras geométricas utilizadas en la geometría euclidiana.

La esponja de Menger

La esponja de Menger (1926, también denominada esponja de Sierpinski), llamada así en honor del matemático austríaco Karl Menger (Polonia, 1902-1985), se construye bajo el mismo principio que el tetraedro de Sierpinski pero con un cubo en lugar de un tetraedro. Lo análogo en el plano es la carpeta de Sierpinski, construida a partir de un cuadrado en lugar de un triángulo equilátero.

La carpeta de Sierpinski (fractal en el plano)	La esponja de Menger (fractal en el espacio)
	

También para estos fractales en el espacio, obtenidos mediante remoción de piezas, se calcula su dimensión fractal o de auto-semejanza. Por ejemplo, en la esponja de Menger, al partir de un cubo y obtener 20 cubos idénticos (pues se eliminan 7 cubos), entonces N=20 y el factor de disminución es c= 1/3 (cambio de escala), por lo tanto k=3 (factor de aumento), de donde resulta $20 = 3^D$, siendo D la dimensión fractal. De esa igualdad se tiene, con logaritmos decimales:

$$D = \log 20 / \log 3 \approx 1{,}301029996 / 0{,}477121255 \approx 2{,}727$$

esto es, la esponja de Menger no es bidimensional ni tridimensional (es más que una superficie pero menos que un cuerpo sólido) pues su dimensión D es tal que $2 < D < 3$ (es una “superficie fractal”).

RETO

a) Calcula la dimensión fractal de la carpeta de Sierpinski y del tetraedro de Sierpinski.

b) Calcula el área de la superficie total de la esponja de Menger y el volumen de la misma en el n-ésimo paso. ¿A qué tienden esa superficie y ese volumen a medida que n aumenta ?

Fractales en el tiempo

A lo largo del desarrollo de la matemática son muchas las personas que aportaron, previo a Mandelbrot, conceptos y ejemplos que luego se enmarcaron dentro de la teoría actual de fractales.

Los fractales son los ornamentos más complejos que jamás han existido en todas las formas del arte, como el libro de Kells y La Alhambra. Ellos suministran exactamente lo que yo busco descubrir en mi propia música: una especie de desarrollo orgánico.

Fuente: B. Mandelbrot en el prólogo de "Les formes fractales" por Etienne Guyon & H. Eugene Stanley (1991).
György Ligeti (1923-) compositor austríaco de origen húngaro.

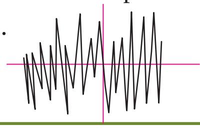
El libro de Kells (800 d.C.) es el más espléndido de los evangelarios y posiblemente el manuscrito más bello de la Alta Edad Media Occidental. Se encuentra en el Trinity College de Dublín (Irlanda).

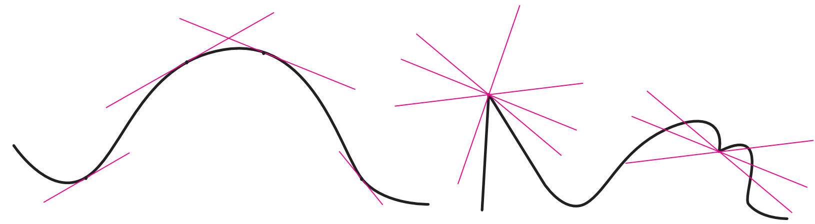
La cubierta del libro de Kells "Cristo con los Cuatro Ángeles", pintura creada por monjes irlandeses, contiene los cuatro evangelios en latín.

Fractales en el tiempo

Karl Weierstrass (1815-1897).

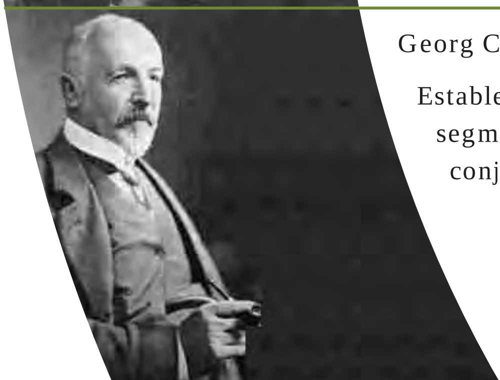
Definió por primera vez una curva continua no diferenciable en cualquiera de sus puntos; esto es, una curva consistente únicamente de "picos" ("esquinas").





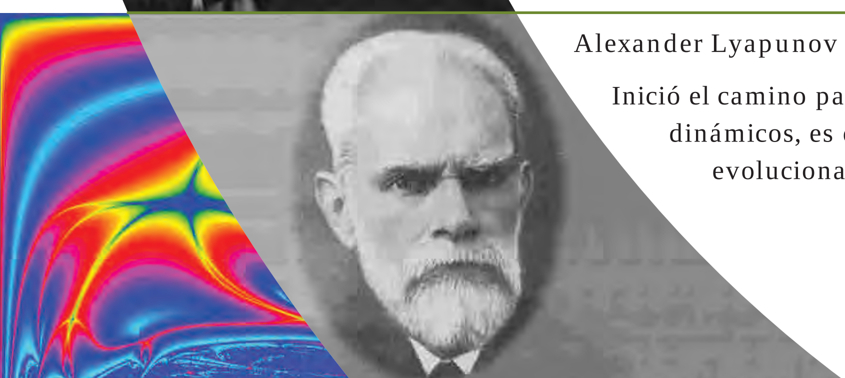
Una curva continua no tiene saltos y es diferenciable, si en cada uno de sus puntos se puede dibujar una única recta tangente.

Esta curva es continua pero no es diferenciable (tiene "picos" en algunos puntos).



Georg Cantor (1845-1918).

Estableció una sucesión de segmentos conocida como el conjunto o polvo de Cantor.

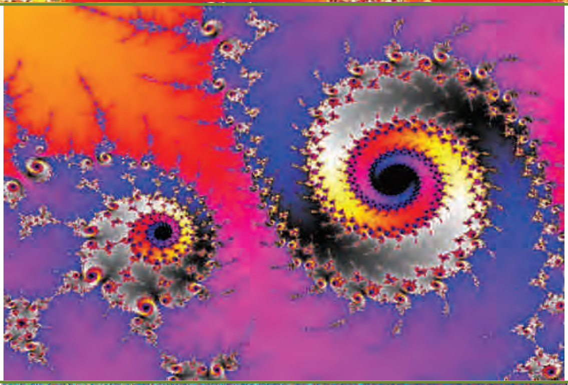


Alexander Lyapunov (1857-1918).

Inició el camino para el estudio de sistemas dinámicos, es decir, los sistemas que evolucionan con el tiempo.

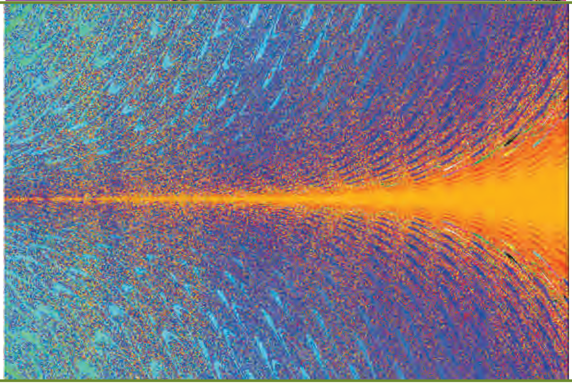
Giuseppe Peano (1858-1932).

Definió una curva que pasa por todos los puntos del plano.



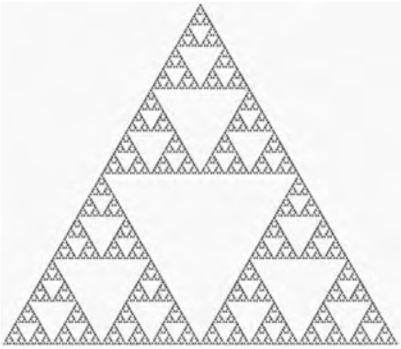
Benoît Mandelbrot (1924-).

Se le considera el iniciador o padre de la teoría de fractales con dos de sus obras: 1) “Les objets fractals, forme, hassard et dimension” (1975, Flamarion, París); 2) “The fractal geometry of Nature (1977, W.H. Freeman and Co., New York) que es su libro más famoso.



G. Julia (1893-1978).

Estudió por primera vez la iteración de funciones racionales.

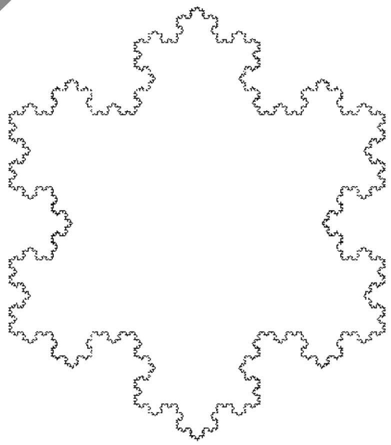


Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Su triángulo es, probablemente, el fractal más conocido.

Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924).

Su aportación más famosa se conoce como la curva de Koch. También se tiene el fractal copo de nieve.



SABÍAS QUE...

En 1913, el científico francés Jean Perrin (Francia, 1870-1942, ganador del premio Nobel de física en 1926) al observar la costa del litoral de la Bretaña, escribió lo siguiente en la revista Atomes: “Es un carácter esencial (...) del litoral (de la Bretaña) que, a cualquier escala, se sospechan, sin verlos totalmente bien, los detalles que impiden absolutamente fijar una tangente.” (citado en “Les formes fractales”, Etienne Guyon & H. Eugene Stanley, Elsevier / North Holland & Palais de la Découverte, 1991) y de esta forma introdujo el primer objeto de la naturaleza que posteriormente serían los fractales.

En su libro “The Fractal Geometry of Nature”, Mandelbrot se refiere a una experiencia que había realizado el metereólogo inglés Lewis Fry Richardson (1881-1953), quien trató de medir la longitud de la costa occidental de Gran Bretaña y la de la frontera entre España y Portugal. Richardson notó que el resultado dependía fuertemente de la escala del mapa utilizado: un mapa con una escala 1:10 000 000 (1cm es 100 km) muestra menos detalles que un mapa con una escala 1:100 000 (1 cm es 1 km), y como en éste podemos observar más detalles al hacer la medición la costa será más larga. Si esto lo repetimos, podría llevar a la conclusión que dicha costa es infinitamente larga.

Mandelbrot se preguntó (1967): ¿Cuál es la longitud de la costa británica? Él cuenta que la longitud de la costa entre España y Portugal tenía dos medidas distintas: en una enciclopedia en España se escribía 616 millas y una enciclopedia en Portugal anotaba 758 millas. ¿Cuál era la correcta?

Hoy se sabe que las líneas costeras tienen estructura fractal, para lo cual se han realizado modelos matemáticos sobre los efectos de la erosión y se obtienen por simulación en computadoras costas fractales con características próximas a las costas verdaderas y con dimensiones fractales D≈ 4 / 3 ≈ 1,33. El mar ataca la costa y la deforma. Transcurrido un tiempo bastante grande, la costa adopta la forma que optimiza la resistencia a la erosión y dicha forma es fractal.

Jean Perrin

Bretaña francesa

Cada incremento en la escala permite observar detalles mayores de la costa.

Silueta de la Gran Bretaña

Bibliografía

BARBOSA, Ruy Madsen (2002): Descobrindo a Geometría Fractal para a sala de aula. Coleção Tendencias en Educação Matemática, Autêntica Editora, Belo Horizonte, Brasil.

LAUWERIER, Hans (1991): Fractals. Endlessly Repeated Geometrical Figures. Princeton University Press, New Jersey.

LESMOIR-GORDON, Nigel (2001) & ROOD, Will & EDNEY, Ralph: Introducing Fractal Geometry. Icon Books UK & TotemBooks, USA. Reino Unido

PEITGEN, Heinz-Otto & JÜRGENS, Hartmut & SAUPE, Dietmar (1992): Fractal for the classroom. Springer-Verlag.

SPINADEL, Vera W. de (2003): Del número de oro al caos. NobuKo, S. A., Buenos Aires.

http: / / www. fractales.org / index.php

http: / / www. interactiva.matem.unam.mx

http: / / news.bbc.co.uk / low / Spanish / science / newsid_4164000 / 4164603.stm

http: / / www.editorialmarfil.com / mat_i_tica / Geom / Fractals / fractals.htm#natu