



Mary Carmen García, banco de imágenes, Conabio

En los helechos se puede apreciar la autosimilitud. Una hojita que sale del tallo tiene la forma de una hoja adulta, sólo que su tamaño es menor.

Fuente: <http://conabioweb.conabio.gob.mx/bancoimagenes/doctos1/fhechos.html>

¿Cuáles son las características más resaltantes de los fractales?

La respuesta es dos:

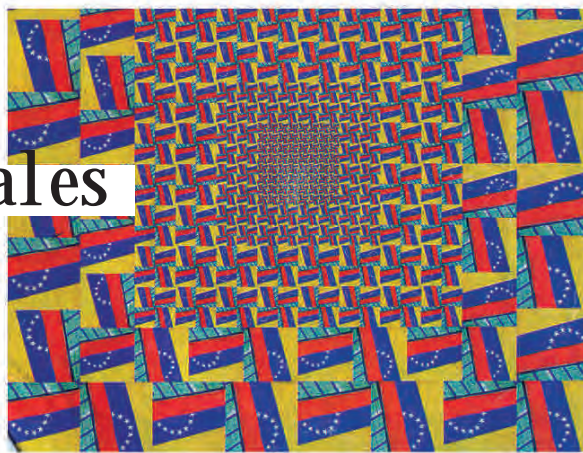
- la auto-semejanza y
- la dimensión fractal.





# Auto-semejanza en los fractales

Cuando decimos que un fractal es “un objeto idéntico a sus partes constituyentes (teniendo en consideración la talla o tamaño de cada parte)”, es necesario expresar esta afirmación mediante una formulación matemática, lo cual se traduce en la propiedad de auto-semejanza de los fractales establecida a partir de las transformaciones geométricas denominadas semejanzas: composición de movimientos rígidos (rotaciones, reflexiones respecto de rectas, traslaciones) con homotecias.



Tierra de magia y color (2004). Anrika Rupp.

Explicemos esta propiedad utilizando el conjunto de Cantor (también denominado “polvo de Cantor”, 1883), el “primer fractal” conocido aun cuando en su época no existía una teoría sobre los fractales.

La construcción del conjunto de Cantor, fractal realizado mediante remoción de partes de una figura geométrica, se hace utilizando el siguiente algoritmo:

Estado inicial: Un segmento OU.

Eta 1: Se divide el segmento en tres partes iguales y se elimina la parte central.

Eta 2: Iteramos la eta 1 con cada uno de los segmentos obtenidos

La reunión de los “infinitos” segmentos que no han sido eliminados es el conjunto de Cantor, formado por una sucesión de segmentos cuyas longitudes “tienden” a cero. Hemos separado los segmentos para mejor visualización de este conjunto cuyos elementos se “desvanecen progresivamente” hasta hacerse “invisibles”.

Para simplificar la explicación de la propiedad de auto-semejanza, supongamos que el segmento de partida OU tiene longitud 1, siendo O(0) y U(1) las abscisas de esos puntos. Consideremos las dos siguientes homotecias:

$$H_{O,1/3}(x) = x/3 \quad \text{homotecia de centro O y razón } 1/3$$

$$H_{U,1/3}(x) = x/3 + 2/3 \quad \text{homotecia de centro U y razón } 1/3,$$

denotadas, respectivamente, H y H', para simplificar la escritura.

Observemos ahora lo que ocurre en el conjunto de Cantor al aplicar esas dos homotecias:

H transforma el intervalo [0, 1] en el intervalo [0, 1/3], lo indicamos mediante H: [0, 1] → [0, 1/3].

H' transforma el intervalo [0, 1] en el intervalo [2/3, 1], lo indicamos mediante H': [0, 1] → [2/3, 1].

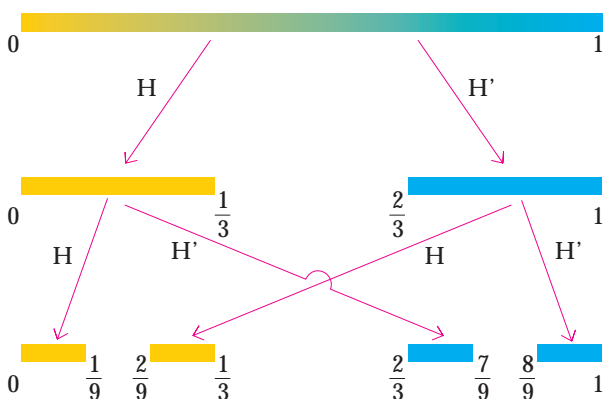
Si ahora aplicamos esas homotecias a los intervalos transformados, resulta:

$$H: [0, 1/3] \rightarrow [0, 1/9]$$

$$H': [0, 1/3] \rightarrow [2/3, 7/9]$$

$$H: [2/3, 1] \rightarrow [2/9, 1/3]$$

$$H': [2/3, 1] \rightarrow [8/9, 1]$$



y así sucesivamente. Esto es, cada vez que aplicamos las homotecias H, H' a un punto del conjunto de Cantor resulta otro punto del mismo conjunto. Ésta es la propiedad de que dicho conjunto es auto semejante o invariante por cambios de escala (en este caso el factor de escala es  $c=1/3$ ). De manera general se trata de semejanzas y no solamente de homotecias.

No todos los fractales tienen una auto-semejanza exacta sino que poseen la llamada auto-semejanza estadística, cuya auto-semejanza se determina mediante la estadística.

# La auto- semejanza y la espiral logarítmica

Desde los tiempos más remotos las espirales han fascinado al ser humano. Estas curvas, que parecen enrollarse sin fin sobre sí mismas hasta acabar precipitándose en un punto, o al revés, que surgiendo desde un punto se enrollan alejándose sus surcos hacia el infinito, han ejercido un influjo cautivador tanto a los matemáticos como a los artistas y artesanos de todas las épocas y casi todas las culturas.

Así como encontramos espirales por doquier en creaciones artísticas y ornamentales, también en la naturaleza son frecuentes y muestran todo su esplendor y variedad: conchas de caracoles, cuernos de rumiantes, la cola de una cascabel, en los girasoles, las margaritas; en las escamas de las piñas del pino hay un auténtico desfile de espirales entrelazadas.

Existen varios tipos de espirales, de las que mencionaremos dos: la espiral uniforme o de Arquímedes y la espiral logarítmica o espiral de Bernoulli.



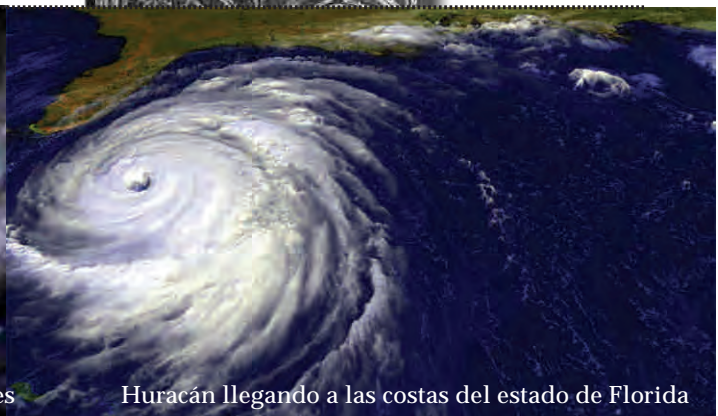
Piedra de Gotland  
(Isla de Suecia),  
400 a.C.



Planta de sábila (Aloe vera)

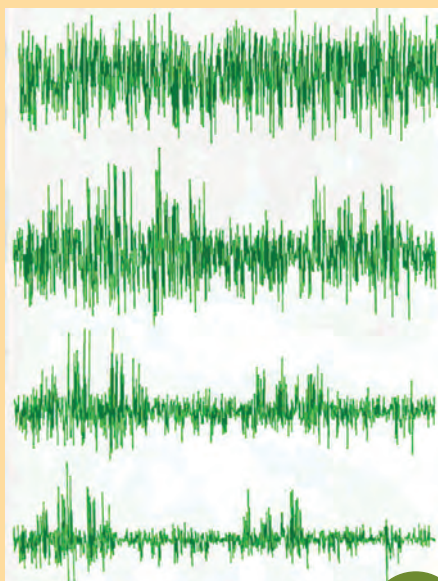


Galaxia M51 en la constelación Canes



Huracán llegando a las costas del estado de Florida

## SABÍAS QUE... ?



En el año 1958 Mandelbrot ingresa a trabajar en los laboratorios IBM para hacer un análisis del ruido y de las perturbaciones que tenía la red. Se perdía data o se alteraba cuando pasaba entre computadores. Mientras realizaba dichos estudios encontró un patrón en su comportamiento y comenzó a descifrar su estructura escondida que era la de jerarquías de fluctuaciones en diversas escalas, que no podían ser descritas por la matemática y la estadística que se aplicaba usualmente. Él notó que había una conexión entre objetos matemáticos “misteriosos” y ese tipo de fenómeno, y así encontró que la distribución de errores en la red se parecía fuertemente al conjunto de Cantor puesto que los errores ocurrían en lotes con regiones libres de errores. En su libro “The Fractal Geometry of Nature” escribió: “Construimos el conjunto de errores comenzando con una línea recta, digamos el eje del tiempo, luego cortándola y haciéndola más corta y más corta en las regiones libre de errores. Este procedimiento no era familiar en las ciencias naturales pero la matemática pura lo había utilizado desde Cantor. Como el análisis fue hecho tres veces de manera más precisa, esto reveló que el estallido original es intermitente.”

Se reconstruyó el sistema en la IBM a los fines de hacer frente a los errores y disminuir las interferencias.



# La espiral de Arquímedes

Arquímedes (287-212 a.C.) escribió un tratado sobre espirales. La denominada espiral de Arquímedes, la más sencilla de todas, es tal que la distancia entre sus surcos o vueltas es constante y tiene por ecuación, en coordenadas polares:

$$r = a\theta \quad a > 0 \text{ es constante.}$$

Es decir, el radio varía de forma proporcional al ángulo.

Partiendo de un punto  $P_1(r_1, \theta_1)$  e incrementando el ángulo en  $\alpha$ , se obtienen los puntos:

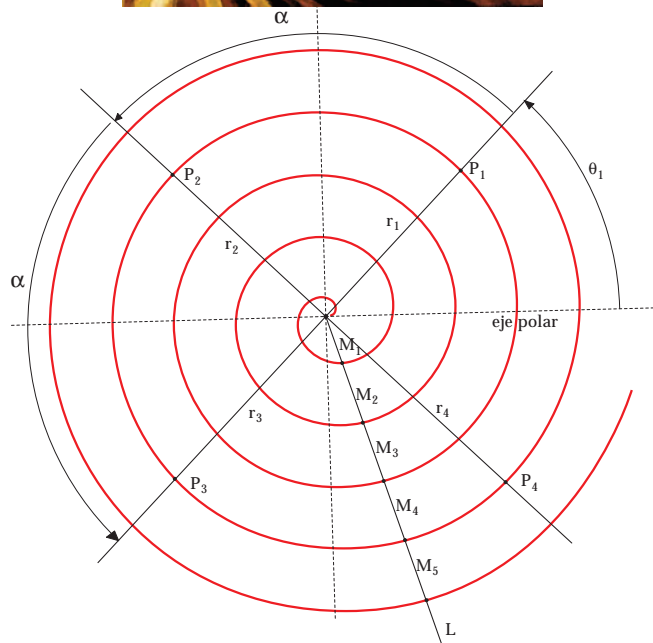
$P_2(r_2, \theta_1 + \alpha)$ ,  $P_3(r_3, \theta_1 + 2\alpha)$ ..., verificándose que  $r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \dots = a\alpha$ .

Luego, caminando a lo largo de la espiral con pasos de ángulo constante  $\alpha$ , se obtiene una progresión aritmética de radios  $r_1, r_2, \dots$ , de razón  $a\alpha$ .

Esta espiral es un buen modelo para los surcos (ranuras) de un disco; también para las vueltas de una alfombra enrollada.

$\theta \geq 0$  toma cualquier valor real no negativo:

$\theta = 2\pi$  es una vuelta,  $\theta = 4\pi$  la segunda vuelta, etc. En particular, los puntos de intersección  $M_1, M_2, M_3, \dots$  con un mismo radio vector  $L$ , forman una progresión aritmética de razón  $2\pi a$  (en este caso  $\alpha = 2\pi$ ).



# La espiral de Bernoulli

La espiral logarítmica o espiral de Bernoulli tiene por ecuación, en coordenadas polares,

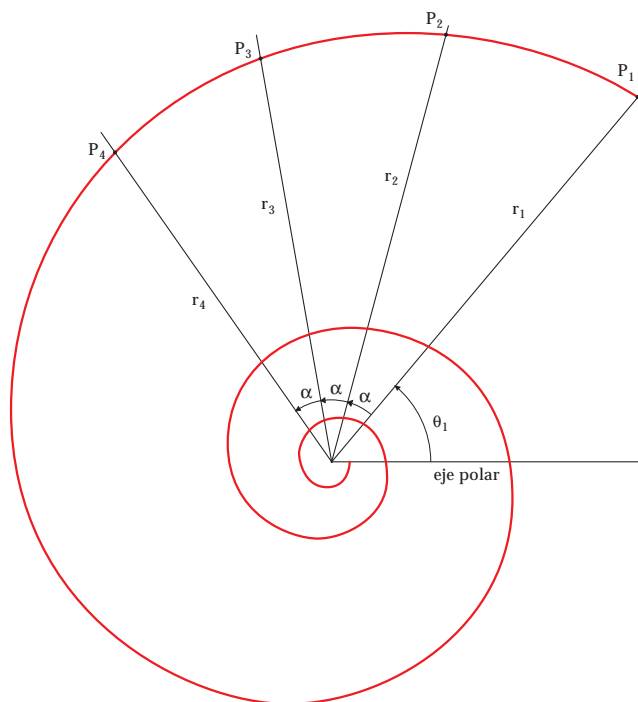
$$r = ae^{b\theta} \quad \text{donde } a > 0, b > 0, \text{ son constantes} \\ \text{y } e \text{ es el número real } e = 2,71828182\dots$$

En esta espiral, el radio  $r$  de cada punto  $P(r, \theta)$  no varía uniformemente con  $\theta$  sino exponencialmente. Según vayamos girando alrededor del origen la curva se va alejando de éste de forma cada vez más rápida ( $b > 0$ ).

Partiendo de un punto  $P_1(r_1, \theta_1)$  e incrementando el ángulo en  $\alpha$ , se obtienen los puntos  $P_2(r_2, \theta_1 + \alpha)$ ,  $P_3(r_3, \theta_1 + 2\alpha)$ , ..., verificándose que  $\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \dots = e^{b\alpha}$ . Luego, caminando a lo largo de la espiral con pasos de ángulo constante  $\alpha$ , se obtiene una progresión geométrica de radios  $r_1, r_2, \dots$ , de razón  $e^{b\alpha}$ .

$\theta \geq 0$  toma cualquier valor real no negativo:  $\theta = 2\pi$  es una vuelta,  $\theta = 4\pi$  la segunda vuelta, etc.

En particular, los puntos de intersección  $M_1, M_2, M_3, \dots$  con un mismo radio vector  $L$ , forman una progresión geométrica de razón  $e^{2\pi b}$  (en este caso  $\alpha = 2\pi$ ).



La espiral de Bernoulli es un buen modelo para el crecimiento de diversos seres vivos, como es el caso de la *amonita* y de caracoles, entre otros.

Jacobo Bernoulli (Suiza, 1654-1705) le dedicó un tratado a esta espiral y la bautizó con el nombre de *Spira Mirabilis* (Espiral Maravillosa). Quedó tan impresionado por su propiedad de auto-semejanza que hizo grabar en su tumba, en la Catedral de Basel, “Eadem Mutata Resurgo” (aunque me cambien, volveré a aparecer de la misma forma).



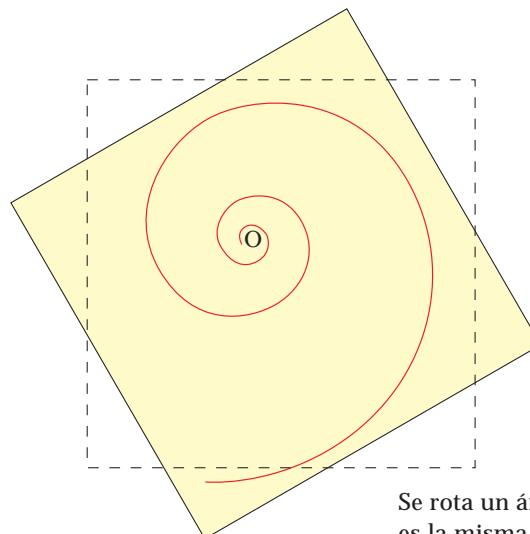
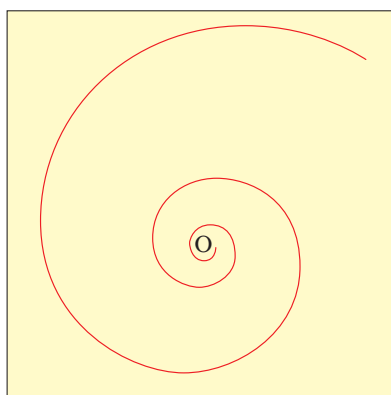
Chimeneas de la orgánica Casa Milá y un caracol. Inspiración en la naturaleza del arquitecto catalán Antonio Gaudí.

¿ A qué se debe esa expresión, esto es, cuál es esa propiedad de auto-semejanza de dicha espiral ?

La respuesta es que una propiedad de expansión (homotecia) de la espiral es equivalente a una rotación de la misma por algún ángulo: si rotamos con ángulo  $\phi$  alrededor de O la espiral logarítmica en sentido horario, lo cual se obtiene de la ecuación  $r=ae^{b\theta}$  sustituyendo  $\theta$  por  $\theta+\phi$ , resulta:

$$r = ae^{b(\theta+\phi)} = c(ae^{b\theta})$$

es decir, el nuevo radio  $r$  es igual al anterior multiplicado por un factor  $c = e^{b\phi}$  homotecia de centro O y razón  $c > 0$ .



Se rota un ángulo  $\phi = 210^\circ$  y la espiral es la misma “aumentada”.

# La dimensión fractal o dimensión de auto-semejanza

Además de la auto-semejanza que tienen los fractales, otra característica es su dimensión que usualmente no es un número entero. Es un nuevo tipo de dimensión denominada dimensión fractal o dimensión de auto-semejanza (dimensión de Hausdorff-Besicovitch), la cual está asociada a la aspereza, al espesor y a la textura del objeto fractal.

En la geometría euclidiana el mundo en que vivimos tiene tres dimensiones y en éste hay figuras planas, son de dimensión dos, y las rectas y sus segmentos que son unidimensionales. Los puntos tienen dimensión cero.

Los fractales, por su parte, tienen dimensiones fraccionarias, cuyos valores generalmente se expresan mediante números no enteros pues es un cociente de logaritmos.

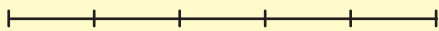
¿Cómo es esto posible? ¿Qué es la dimensión fractal?

Definiremos esta dimensión, en el caso de fractales construidos, a partir de la división de una figura geométrica, esto es, los fractales obtenidos por remoción de partes de una figura geométrica. Hay otro tipo de fractales (como los multifractales) que requieren un cambio en la definición de dicha dimensión.

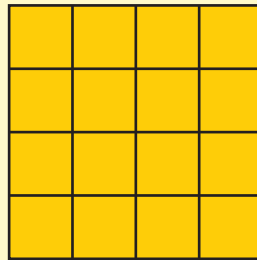


La arquitectura plasmada en los templos y monumentos de la India exhiben una estructura fractal: una torre a la cual se superponen otras torres más pequeñas, y a éstas a su vez otras más pequeñas, y así sucesivamente hasta ocho o más niveles.

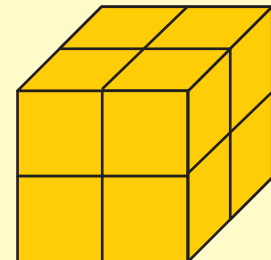
Fuente: [www.templenet.com](http://www.templenet.com)



Segmento dividido en 5 partes iguales (5 segmentos congruentes).



Cuadrado dividido en 16 partes iguales (16 cuadrados congruentes) para lo cual se dividió cada lado en 4 segmentos iguales.



Cubo dividido en 8 partes iguales (8 piezas cúbicas congruentes) para lo cual se dividió cada arista en 2 segmentos iguales.

Cada pequeña pieza o parte es auto-semejante a la totalidad. Se pasa de la totalidad a cada pieza mediante un cambio de escala con factor de disminución  $c < 1$  y, al contrario, se pasa de cada pequeña pieza a la totalidad mediante un cambio de escala con un factor de aumento  $k = 1/c > 1$ . En los tres casos anteriores se verifica, respectivamente,  $c = 1/5$  ( $k = 5$ ),  $c = 1/4$  ( $k = 4$ ),  $c = 1/2$  ( $k = 2$ ).





El número de partes o piezas en cada uno de los tres casos presentados en la página anterior es:

En el segmento  $5 = 5^1$  ← Dimensión del segmento (de la recta)  
 ↓ ↑  
 Número de partes o piezas Factor de aumento

En el cuadrado  $16 = 4^2$  ← Dimensión del cuadrado (del plano)  
 ↓ ↑  
 Número de partes o piezas Factor de aumento

En el cubo  $8 = 2^3$  ← Dimensión del cubo (del espacio)  
 ↓ ↑  
 Número de partes o piezas Factor de aumento

Si examinamos el valor del exponente en cada una de esas igualdades, encontramos que éste es la dimensión de cada objeto (1, 2 y 3) y así podemos formular la siguiente ecuación:

$$N = k^D$$

↑  
 k=1/c el factor de aumento  
 (c<1 es el cambio de escala)

De esa ecuación resulta, al tomar logaritmos decimales y despejar D:

$$D = \frac{\log N}{\log k} = \frac{\text{logaritmo (número de piezas)}}{\text{logaritmo (factor de aumento)}}$$

Ahora seguimos ese procedimiento con un objeto fractal, por ejemplo, con el conjunto de Cantor anteriormente definido: partiendo de un segmento OU se divide en tres segmentos de igual longitud y se suprime el segmento o parte central; se obtienen dos segmentos congruentes y se itera con éstos el procedimiento anterior. Como cada segmento se divide en tres piezas idénticas y se suprime una pieza, entonces  $N=2$  y el factor de disminución es  $c=1/3$ , por lo tanto  $k=3$  es el factor de aumento, resultando  $2=3^D$  de donde:

$D = \log 2 / \log 3 \approx 0,301029996 / 0,477121255 \approx 0,6309$ . Como  $0 < D < 1$ , el conjunto o fractal de Cantor es más que un punto (dimensión 0) y menos que una línea (dimensión 1).

Un segundo ejemplo de cálculo de dimensión fractal lo hacemos con el conocido triángulo de Sierpinski: partiendo de un triángulo equilátero se divide cada lado por su mitad y se obtienen tres triángulos equiláteros (recordemos que la sección central, el triángulo invertido en blanco no pertenece al fractal):

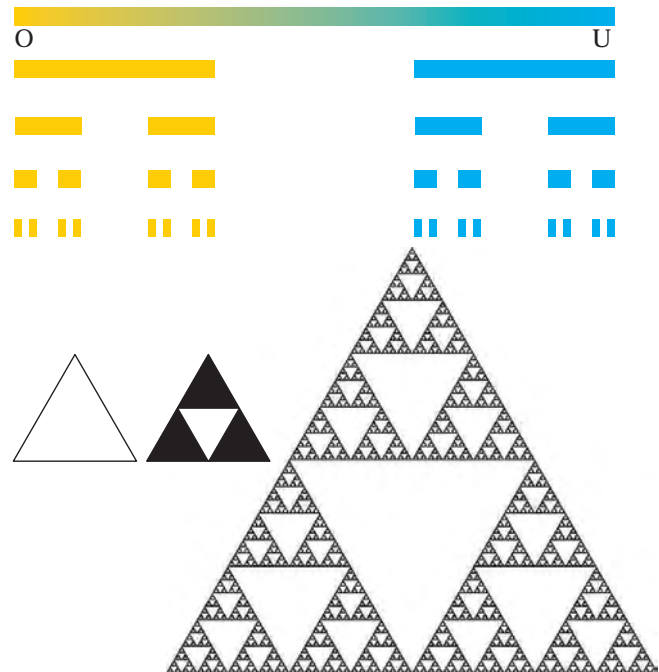
Cada triángulo en cada paso se divide en 3 piezas idénticas, pues el triángulo central se suprime. Luego  $N=3$  y el factor de disminución es  $c=1/2$ , por lo tanto  $k=2$  es el factor de aumento.

Así resulta,  $3 = 2^D$ , siendo D la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski. De esa igualdad se obtiene, con logaritmos decimales,

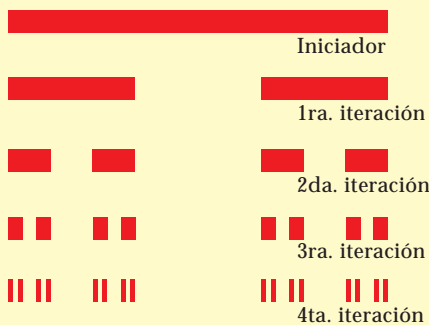
$$D = \log 3 / \log 2 \approx 0,477121255 / 0,301029996 \approx 1,585$$

Esto es, el triángulo de Sierpinski no es unidimensional ni bidimensional, su dimensión D es tal que  $1 < D < 2$ .

Mandelbrot (M) y Max Seitz (M.S.):  
 M.S.: La obra del arquitecto catalán Antoni Gaudí también podría considerarse un ejemplo de lo que usted dice. ¿No?  
 M.: ¡Claro! He ido a Barcelona a ver las obras de Gaudí y debo decir que él entendía este punto muy bien. Él llamaba orgánica a esta arquitectura; él trataba de imitar muchas de las formas de la naturaleza, como los árboles, que tienen naturaleza fractal. Orgánico y fractal son términos muy cercanos.  
 "Mandelbrot y la belleza del caos". Entrevista Max Seitz. BBC Mundo, 2005.



### Conjunto de Cantor



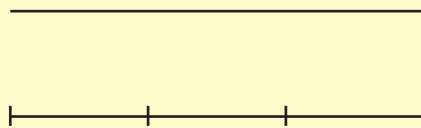
Dos copias de cada segmento y cada una de 1/3 de tamaño.

$$2 = 3^D$$

$$0 < D < 1$$

Más que 0 dimensional (punto) y menos que 1 dimensional (segmento).

### Segmento

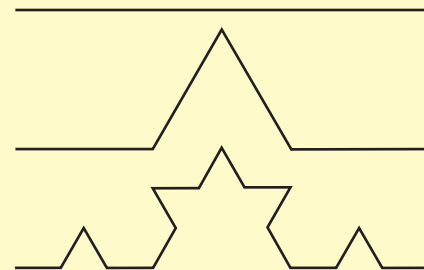


Tres copias del segmento y cada una de 1/3 de tamaño.

$$3 = 3^D$$

$$D = 1$$

### Curva de Koch



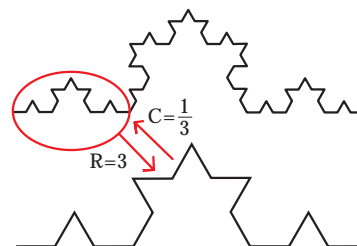
Cuatro copias de cada segmento y cada una de 1/3 de tamaño.

$$4 = 3^D$$

$$1 < D < 2$$

Más que 1 dimensional (segmento) y menos que 2 dimensional (plano).

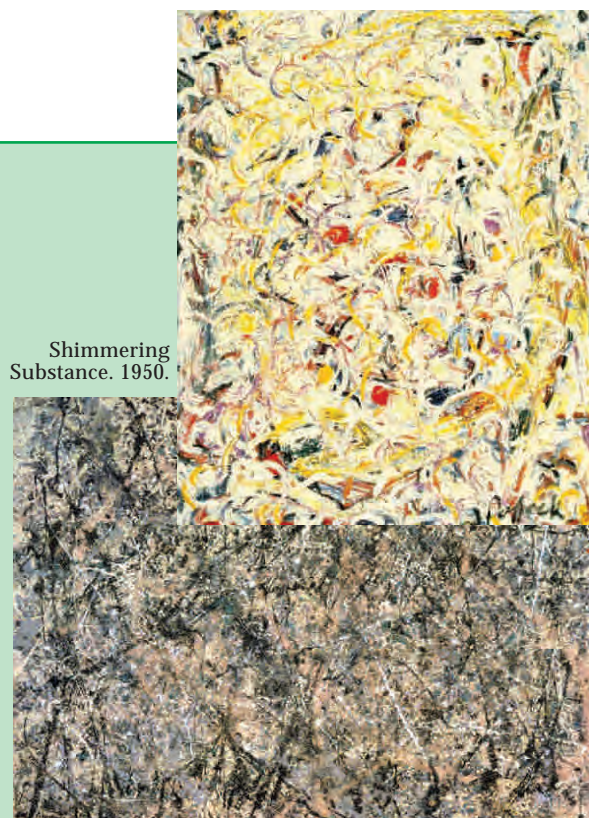
La dimensión fractal describe la complejidad fractal de un objeto. Así, la costa de la Gran Bretaña tiene una dimensión fractal  $D \approx 1,26$ , que es aproximadamente igual a la de la curva de Koch pero es algo menor que la de una nube típica ( $D \approx 1,35$ ). Para las curvas fractales, se tiene que  $D = 1$  significa que la curva es “suave” y a medida que  $D$  se aproxima a 2 entonces se incrementa la complejidad del fractal.



## INTERESANTE

El pintor estadounidense Jackson Pollock (1912-1956), representante del expresionismo abstracto, mediante la técnica del dripping (drip= gotear): goteo de color líquido sobre la tela colocada en el piso en lugar de estar verticalmente en un caballete, imitaba a los pintores indígenas de arena, lo que había aprendido durante su infancia en Wyoming.

Recientemente tres investigadores (Taylor, Micolich y Jonas) aplicaron el denominado método de conteo de cajas para determinar la dimensión fractal  $D$  de sus pinturas y para ello digitalizaron las pinturas estudiadas. Así mostraron que las pinturas más tempranas (hacia 1943) tienen una dimensión fractal  $D$  próxima a 1 y, hacia 1952,  $D$  se había incrementado estando próximo a 1,7. Este incremento se relaciona bien con la evolución de la técnica utilizada por Pollock, pues se aumenta la complejidad fractal.



Shimmering Substance. 1950.

Composición 1 (1950).