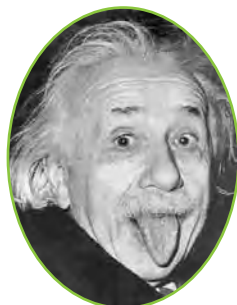




*Sagrado Corazón* (1990). Imagen de animación realizada por Pedro Morales, utilizando programas de computadoras y la técnica de fractales. Morales recibió en el año el premio Fondo de Aportes Mixtos a las Artes -FAMA- que otorga Fundación Polar y la Fundación Gran Mariscal de Ayacucho.

Fuente: <http://pedromorales.com>



*“Una vez alcanzado un cierto grado de tecnicidad, la ciencia y el arte tienden a fundirse en la estética, la plasticidad y la forma.”*

Albert Einstein,  
(Alemania, 1897-1955).

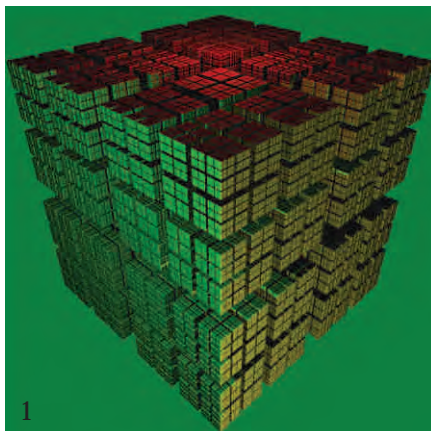
Fascículo

24

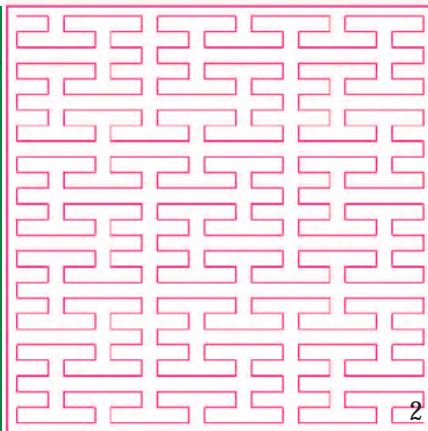
# El mundo de los fractales

La geometría euclidiana trata con rectas, círculos, polígonos, poliedros, entre otros, lo cual nos permite estudiar muchas formas de la naturaleza y las construidas por los humanos.

Pero con la sola ayuda de la geometría euclidiana, no se pueden explicar algunas formas de la naturaleza tales como: líneas costeras, ramificaciones arbóreas o bronquiales, rocas, montañas, nubes, sistema neuronal, brócolis, coliflor, corales, sistemas montañosos, cortezas de árboles, y ciertos objetos matemáticos: el conjunto de Cantor (1), la curva de Peano (2), el triángulo de Sierpinski (3) y la curva de Koch (4), entre otros muchos, cuyo comportamiento rebasa el marco de la matemática tradicional.



1

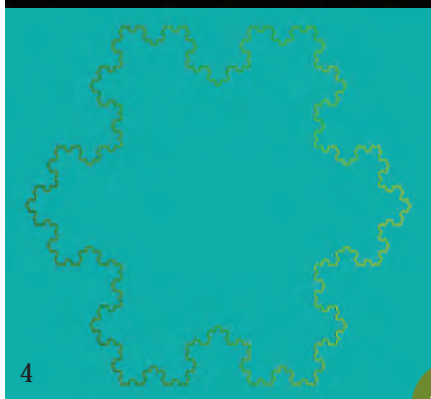


2

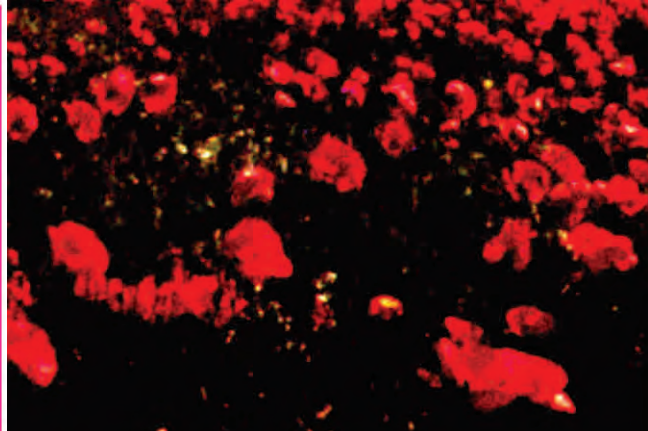
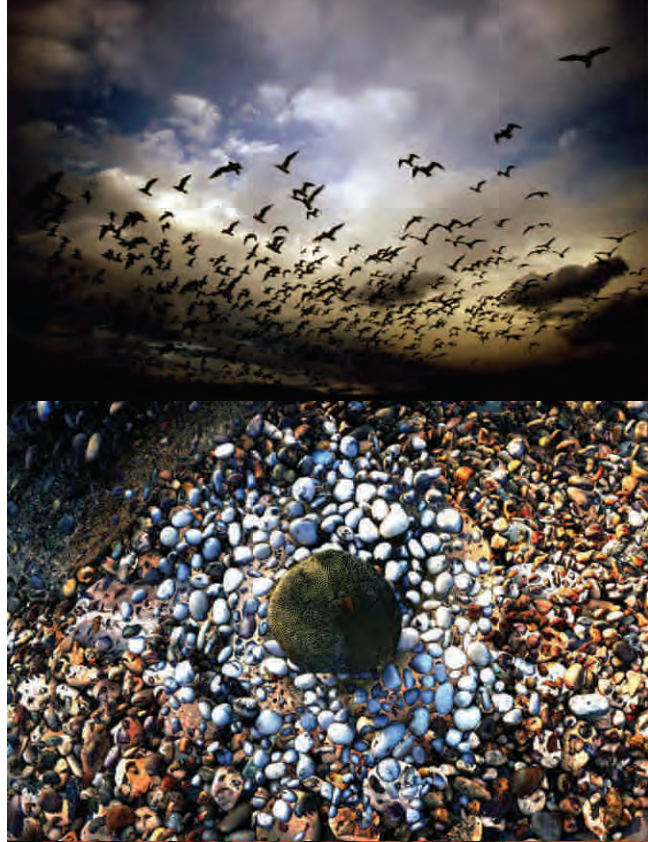
Fuente: fractals.nsu.ru



3



4

Fuente:  
<http://klauslucka.com>

# Los fractales

El término fractal fue acuñado por Benoît Mandelbrot, en 1975, para describir las formas complejas anteriormente mencionadas.

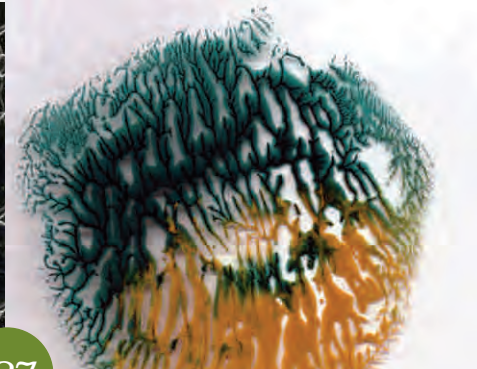
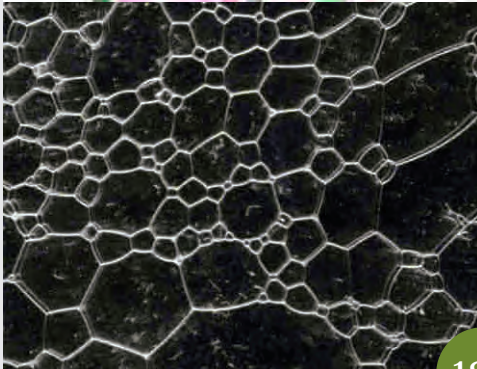
La palabra fractal procede del adjetivo latino fractus que significa “interrumpido”, “irregular” o “fraccionario”. Y, en cierta forma, algunos objetos de la naturaleza son fragmentados, irregulares, rugosos. Por esto se creó una nueva geometría para estudiar dichos objetos. Así surgió la geometría fractal como la geometría de la naturaleza.

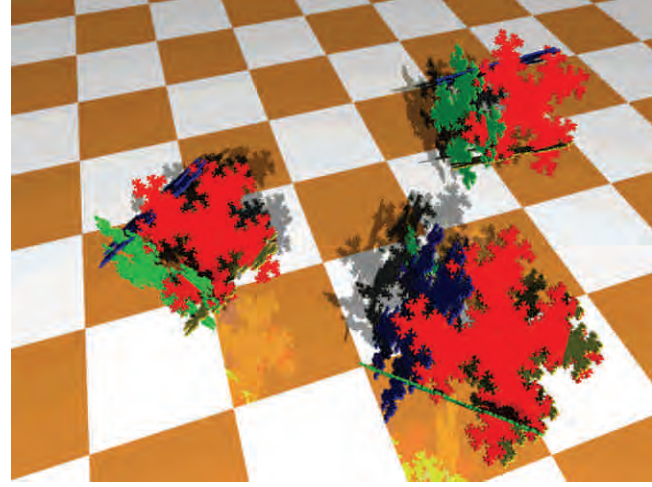
Un *fractal* es una figura geométrica en la que un motivo se repite pero siempre disminuyendo su escala en el mismo porcentaje. De esta forma, las partes de un fractal son semejantes, lo que se conoce con el nombre de *auto-semejanza*. A *grosso modo*, un fractal es un objeto idéntico a sus partes constituyentes (teniendo en consideración la talla o tamaño de cada parte).



Acuñé la palabra fractal del adjetivo del latín fractus. El verbo correspondiente en latín, frangere, significa “quebrar”: para crear fragmentos irregulares ... cuán apropiado para nuestras necesidades! Así, en adición a “fragmentado” (como en fracción o refracción), fractus debería también significar “irregular”, ambos significados mantenidos en fragmentos.

Benoit Mandelbrot  
(Polonia, 1924- )





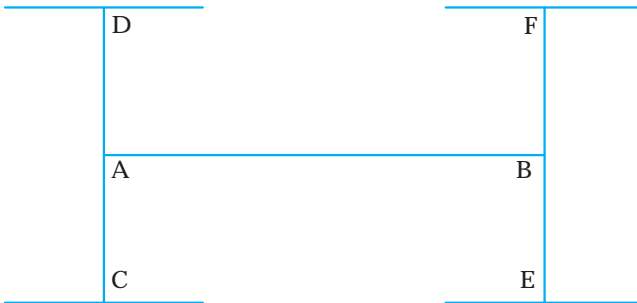
Observa la diferencia de un fractal con las teselaciones y los mosaicos, ya que en éstos se repite un motivo conservando el tamaño.

Una característica de los fractales es la auto semejanza: partes del objeto son pequeñas réplicas del total, es decir, cualquier parte arbitraria contiene una réplica exacta del objeto total. Otra característica que se observa en los fractales creados por el ser humano es la iteración: el proceso de construcción de un fractal es repetitivo. La geometría fractal utiliza como herramienta básica los algoritmos.

Veamos las características mencionadas mediante la construcción de un fractal. Para dibujar un fractal partimos de una figura geométrica básica (estado inicial) y aplicamos repetidamente las instrucciones en el algoritmo utilizado. Este proceso es infinito y la figura límite resultante es un fractal.

Para entender el significado de lo expresado anteriormente, debemos repetir un motivo y disminuir la escala en el mismo porcentaje, la auto semejanza y los algoritmos. Construyamos un fractal bastante sencillo. Se trata del fractal H o árbol bifurcado con ramificaciones opuestas, también denominado “dendrita”.

Partimos de un segmento AB y consideramos como factor de cambio de escala  $c = \frac{2}{3} \approx 0,67$ . En los extremos A y B levantamos perpendiculares de longitudes  $CD = EF = 0,67 \times AB$  (A punto medio del segmento CD y B punto medio del segmento EF). Luego repetimos ese procedimiento con los extremos C, D, E, F y con el factor de escala  $c = \frac{2}{3} \approx 0,67$ . Resulta la siguiente figura:



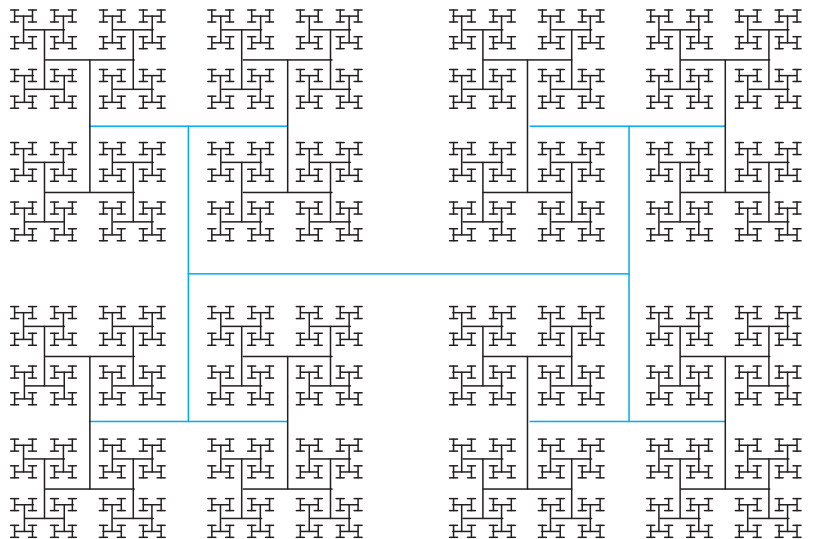
Si iteramos el procedimiento descrito se obtiene el fractal H.

El algoritmo seguido se describe en tres etapas:

Estado inicial: Se da un segmento AB.

Etapa 1: En los extremos A y B se dibujan segmentos perpendiculares CD y EF, con A y B sus puntos medios, respectivamente, y tales que  $CD = EF = \frac{2}{3} AB$ .

Etapa 2: Iteramos (repetimos sucesivamente) la etapa 1 para cada segmento así construido, utilizando el factor de escala  $c = \frac{2}{3}$ .



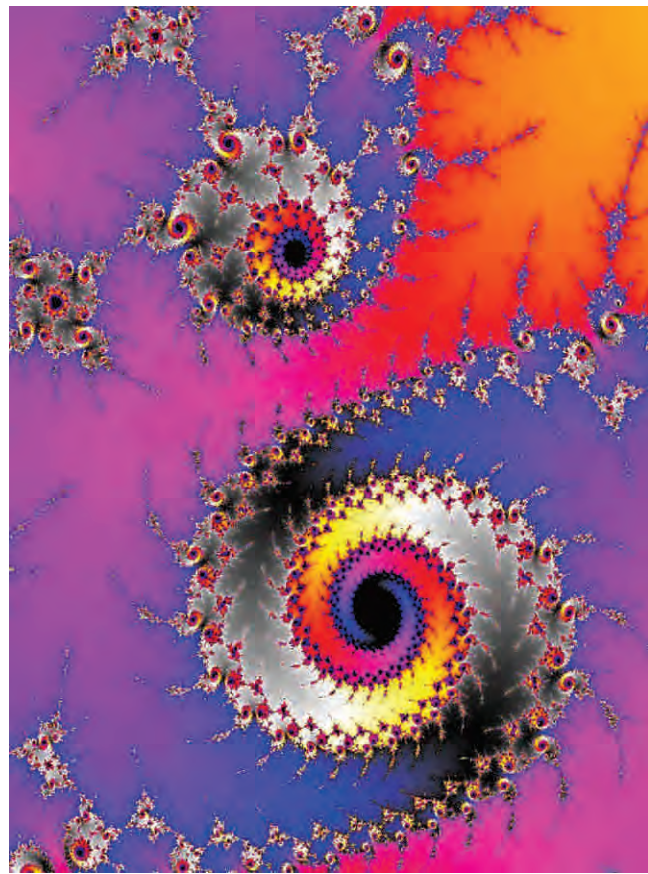
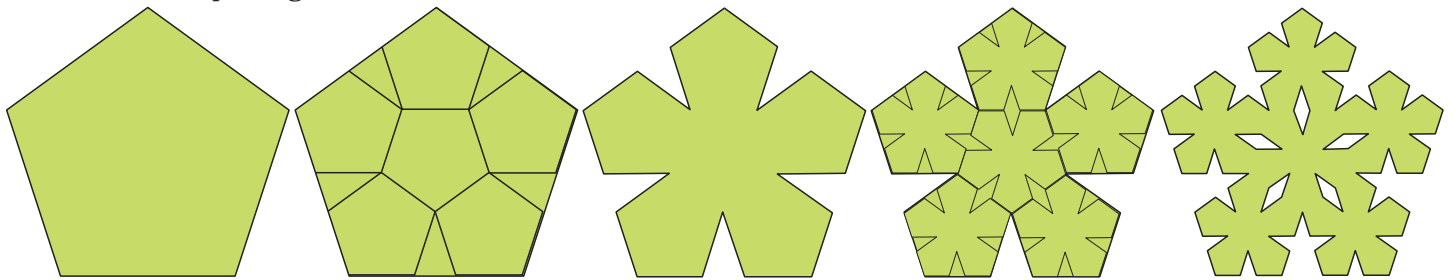
Existen varios procedimientos para construir fractales a partir de una figura geométrica, entre los que mencionamos: a) fractales por remoción o eliminación de partes o piezas de la figura (el conjunto de Cantor, el fractal de Sierpinski); b) los árboles (el fractal H que es un árbol bifurcado); c) fractales tipo Durero en honor del grabador y artista alemán A. Durero; d) fractales construidos a partir de otros fractales. Hay los fractales deterministas (generados por leyes deterministas) y los fractales estocásticos (generados por leyes no deterministas).

### Fractal determinista

Entre éstos tenemos los definidos a partir de expresiones matemáticas, como el fractal de Mandelbrot construido mediante iteración  $z_n \rightarrow z_{n+1} = z_n^2 + c$ ,  $n \geq 0$ , (fórmula de recurrencia), con  $z_n$  y  $c$  números complejos ( $z_n$  variable y  $c$  es dado, una constante), comenzando con  $z_0 = 0$ .

### El fractal “pentágono de Durero”

A partir de un pentágono regular se obtienen 6 pentágonos y 5 triángulos isósceles que se eliminan. Se itera el procedimiento con los pentágonos,



### INTERESANTE



La construcción de fractales matemáticos y la belleza de imágenes que se forman, revolucionó la manera de generar y reproducir imágenes (motivos) y ha tenido repercusión en el diseño y en las artes.

Las computadoras se utilizan para crear los fractales, entre éstos, escenas o paisajes fractales como en la películas “Star Trek II” (Viaje a las Estrellas: *La furia de Khan*, 1982) en el nacimiento de un nuevo planeta (superficie del planeta *Génesis*), y en el planeta flotando en el espacio en el “Regreso del Jedi” (superficie de la *Estrella de la Muerte* y de la *luna de Endor* -en la imagen-) y en el “Imperio contraataca” de la saga “La guerra de las galaxias”. Más recientemente se han utilizado fractales y multifractales para generar escenas en *Apolo 13*, *Dante’s Peak* y *Titanic*. Esto constituye una alternativa para los sets costosos y produce paisajes fabulosos.

Actualmente se utilizan los fractales para diseñar árboles, nubes, células cancerígenas, moléculas de proteínas, la expansión de enfermedades contagiosas, el agrietamiento de los materiales de construcción, propiedades fractales en la formación de tejidos de los pulmones y de los huesos, etc., lo cual facilita su estudio para intentar acercarnos a su comportamiento y evolución en su estado natural. Asimismo, se emplean en el examen del movimiento browniano (movimiento caótico de las moléculas en los fluidos) y en el análisis de la dinámica económica (para describir los altos y bajos de la economía). Los fractales se han utilizado en crear arte, diseñar paisajes para películas y para componer música.

## Fractal “árboles”

Entre los árboles tenemos una clase de fractales fáciles de construir como son los árboles pitagóricos. Uno de éstos, el árbol pitagórico isorrecángulo, se construye mediante el siguiente algoritmo:

Estado inicial: Dibujar un cuadrado.

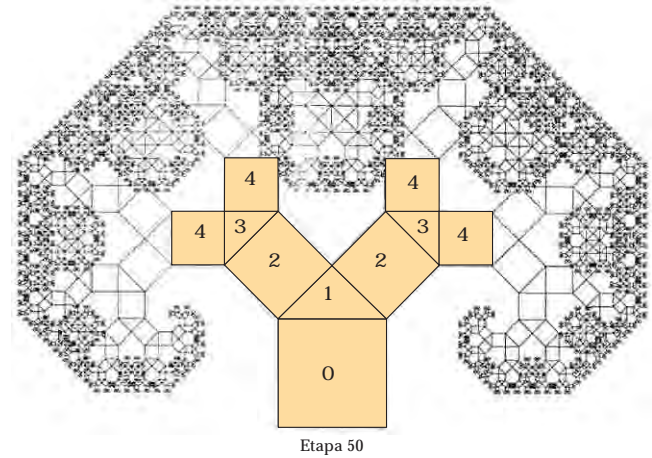
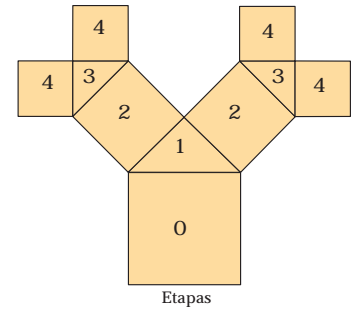
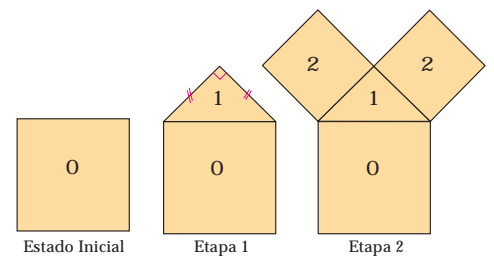
Etapa 1: Dibujar un triángulo rectángulo e isósceles (isorrecángulo) con hipotenusa uno de los lados del cuadrado.

Etapa 2: Sobre cada cateto del triángulo de la etapa 1 se dibuja un cuadrado.

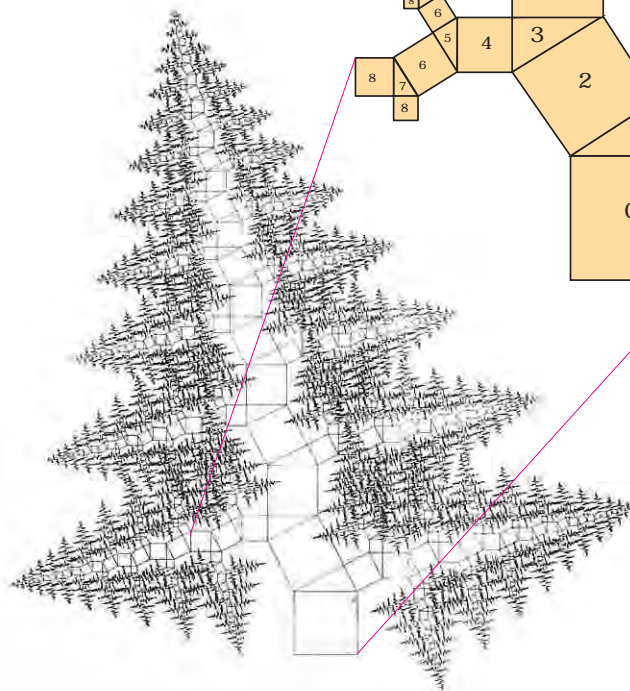
Etapa 3: Repite la etapa 1 para cada cuadrado dibujado en la etapa 2, empleando como hipotenusa el lado opuesto al antes usado.

Etapa 4: Itera el procedimiento a partir de la etapa 2.

A continuación mostramos la construcción hasta el paso 4, y luego con 50 iteraciones.



Una variante de ese árbol pitagórico lo tenemos en el siguiente fractal, en donde, de manera análoga, se parte de un cuadrado pero se utiliza un triángulo rectángulo escaleno (sus tres lados son desiguales), como se muestra a continuación. Observa lo parecido de ese fractal a una rama de helecho cuando ésta se despliega sobre un plano.



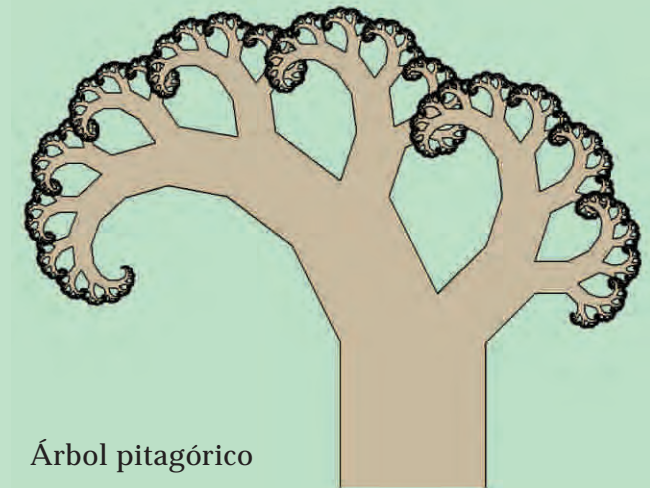
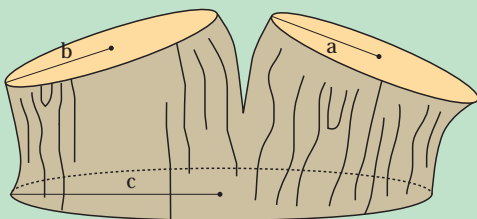
Las estructuras fractales aparecen en la naturaleza en diversas escalas. Estos fractales difieren de los que son construidos matemáticamente, en que su auto semejanza no es exacta sino aproximada, como es el caso de las líneas de las costas marítimas, la estructura de las montañas, ríos, nubes y grietas, entre otros. Diversas plantas presentan estructuras fractales, como el coliflor y el brócoli. Igualmente tienen características fractales los esquemas de circulación de la sangre en el cuerpo humano, de los pulmones y los riñones.

## INTERESANTE

En 1957 se publicó en Holanda un libro titulado “Geometría en el plano: un campo milagroso de investigación” cuyo autor fue A.E. Bosman (1891-1961). Bosman intentaba mostrar a los jóvenes las maravillosas y milagrosas formas geométricas de la naturaleza. Una de las más sorprendentes figuras realizadas por el autor fue el árbol pitagórico y la hizo en el mismo pizarrón en donde diseñaba submarinos durante la Segunda Guerra Mundial.

No es casual que el segundo árbol pitagórico antes dibujado tenga el aspecto de un helecho. El biólogo A. Lindenmayer introdujo el concepto de L-sistema (1968) en botánica, en forma parecida a lo realizado con los árboles pitagóricos: cuando el tronco de un árbol se divide, digamos en dos ramas, entonces el área de la sección transversal de cada rama es tal que su suma conserva el área del tronco principal. Si este tronco es “cilíndrico” con radio  $c$ , su área es  $\pi c^2$ , y si cada una de las dos ramas en que se divide ese tronco tienen radios  $a$  y  $b$ , se verifica que:  $\pi c^2 = \pi a^2 + \pi b^2$ , luego  $c^2 = a^2 + b^2$ , como en el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo de hipotenusa  $c$  y catetos  $a$  y  $b$ .

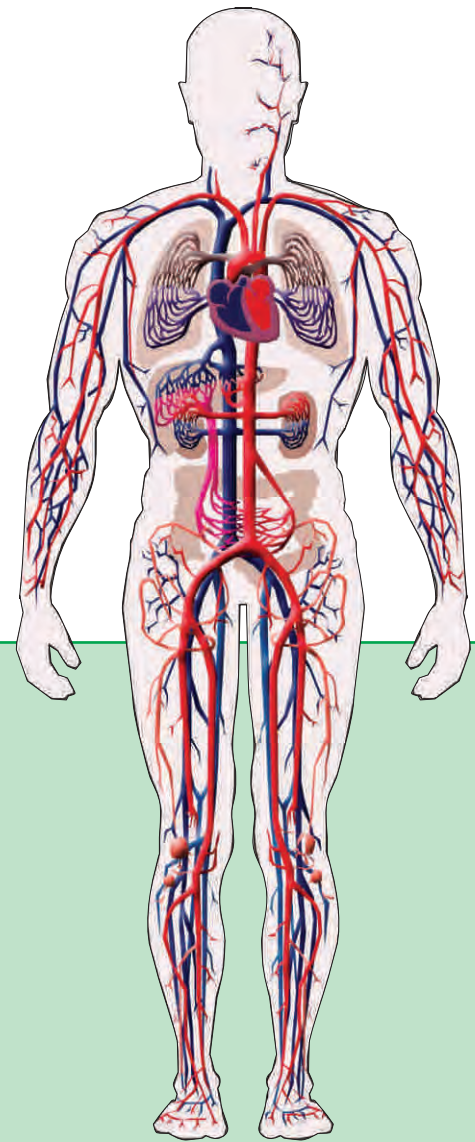
Los L-sistemas dan una formalización que describe el crecimiento de las plantas y son adecuados para su implementación en computador.



Árbol pitagórico



Aristid Lindenmayer,  
(Hungría, 1925-1989).





*El trabajo de Georg Cantor es el más fino producto de la genialidad matemática y uno de los supremos logros de la más pura actividad intelectual humana.*

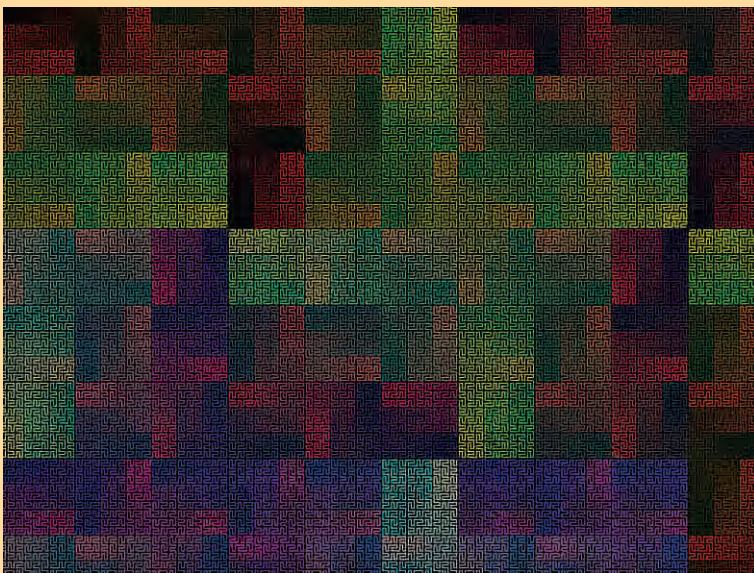
David Hilbert,  
(Rusia, 1862-1943).

## SABÍAS QUE... ?

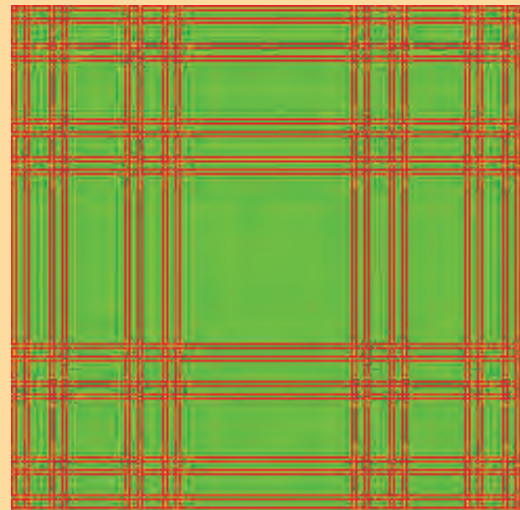
George Cantor nació en Rusia y se nacionalizó alemán (1845-1918); es considerado el fundador de la “teoría de conjuntos” hacia fines del s. XIX. Algunos conjuntos descritos en su época, como el de Karl Weierstrass (Alemania, 1815-1897) que era una curva plana continua sin recta tangente en ningún punto (consiste únicamente de “picos” o “esquinas”), el hoy denominado conjunto de Cantor, y la curva de Giuseppe Peano (Italia, 1858-1932), eran para esa época conjuntos “excepcionales” y por eso se denominaban “monstruos matemáticos” o “anomalías matemáticas”: Figuras geométricas que “chocaban” contra lo intuitivo.



Peano y una obra de arte basada en su curva realizada por Darío Albertochi.  
Fuente: <http://www.watermark.com.ar>



Cantor y uno de sus conjuntos.



Karl Weierstrass.