Fundación POLAR

# Matemática Maravillosa

## Matrices y transformaciones

El teleférico de Caracas, situado en el Parque Nacional El Ávila, es un buen ejemplo de traslación.

Fuente: http://gallery.tyka.org/avila/IMG_1389

Fascículo 22

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela

Últimas Noticias

# Matrices y transformaciones en el espacio

Así como se estudian transformaciones geométricas en el plano, tales como traslaciones, rotaciones y simetrías axiales, que representan movimientos donde las figuras se reflejan, giran o se deslizan sin cambiar de forma ni de tamaño, o como las homotecias que ajustan el tamaño de las figuras sin cambiar su forma, se pueden estudiar las transformaciones del espacio tridimensional en sí mismo.


Traslación


Rotación

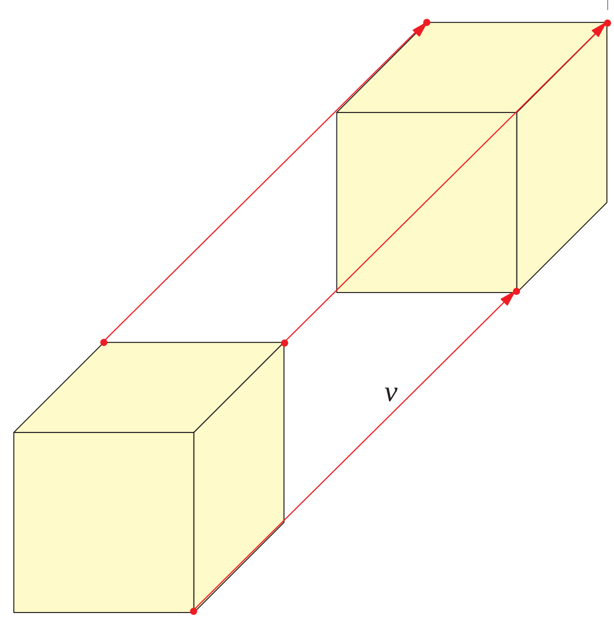

Simetría

## Traslación

Una traslación en el espacio es un tipo de transformación que conserva las distancias.

Dado un punto o un conjunto de puntos en el espacio, podemos trasladarlos según un vector v del mismo espacio.

A estas transformaciones se asocian matrices cuadradas de orden 3, análogas a las de las transformaciones geométricas en el plano.

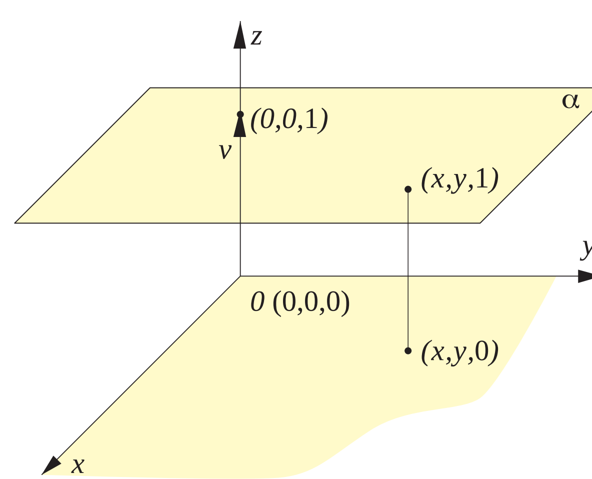


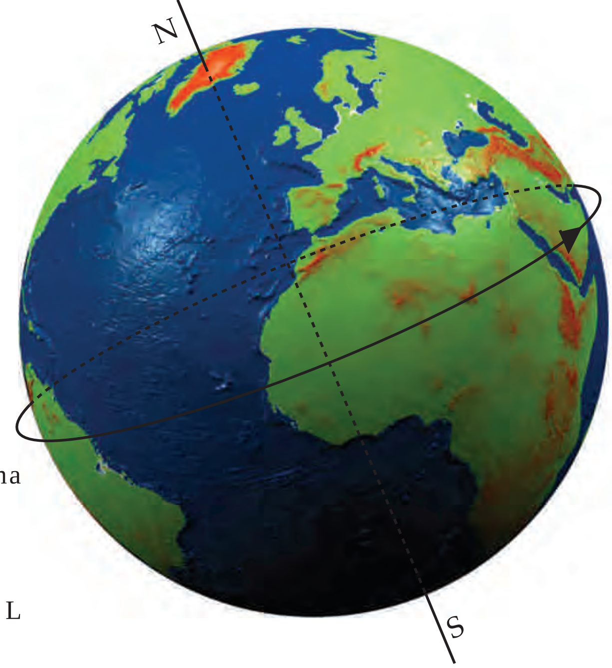

En un sistema de coordenadas cartesianas, a cada punto (x, y, z) asociado con la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, se le traslada con un vector fijo no nulo v = ($x_0$, $y_0$, $z_0$), haciendo la suma matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{Así: } \begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \\ z' = z + z_0 \end{cases}$$

Por ejemplo, en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, si consideramos los puntos (x, y, 0) del plano xy, al trasladarlos con el vector v = (0, 0, 1), se tiene el plano α cuyos puntos son de coordenadas (x, y, 1).

Observa que la traslación no deja puntos fijos ($v \neq \vec{0}$).





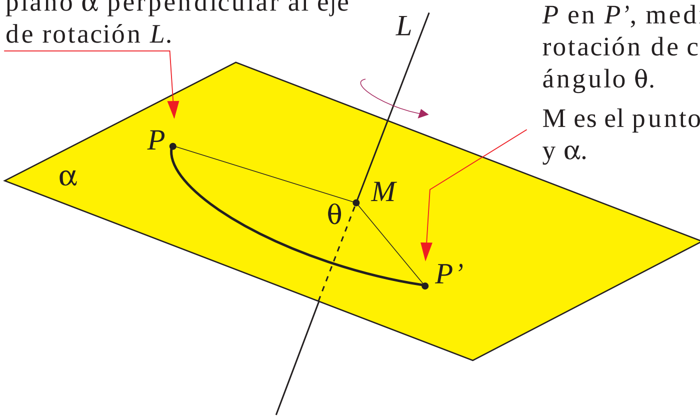

## Rotación

Una rotación en el espacio hace corresponder a un punto $P$ del mismo otro punto $P'$, al describir un ángulo θ alrededor de un eje de rotación $L$.

Por el punto $P$, se traza el plano α perpendicular al eje de rotación $L$.

En el plano α se transforma $P$ en $P'$, mediante la rotación de centro $M$ y ángulo θ.

M es el punto de corte de L y α.



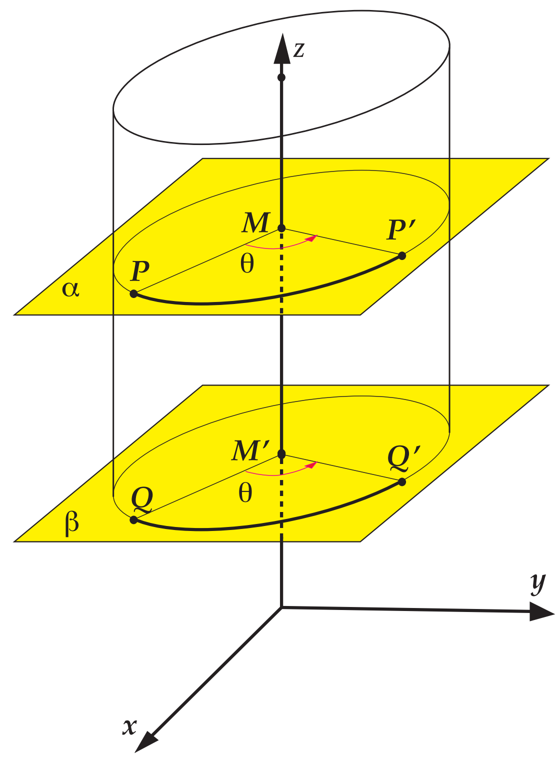

La Tierra rota alrededor de un eje perpendicular al plano del ecuador que pasa por el centro de la Tierra. Completa una vuelta en 23 horas y 56 minutos ≈ 24 h. Debido a este movimiento se suceden los días y las noches en el planeta.

Observa que los puntos del eje L quedan fijos en la rotación. Consideramos ahora un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Una rotación de ángulo θ alrededor del eje z, en sentido positivo, transforma cada punto de coordenadas (x,y, z), asociado con la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en el punto (x', y', z'), asociado con la matriz $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, definida por

las ecuaciones $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta \\ y' = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$

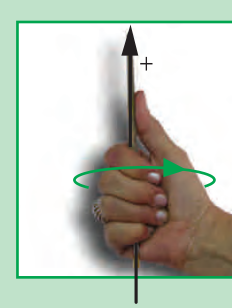
de modo que su matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En el caso que se presenta a la derecha, los puntos del eje z quedan fijos en la rotación, es decir, los puntos de coordenadas (0, 0, z).

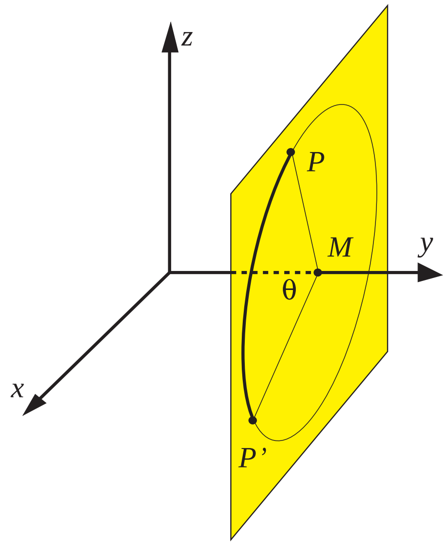



**INTERESANTE**

El sentido de la rotación se puede determinar aplicando la “regla de la mano derecha”. Si “se toma el eje” con la mano derecha, colocando el pulgar en el sentido positivo del eje, entonces los demás dedos indican cuál es el sentido positivo de la rotación.



Análogamente, una rotación de ángulo θ alrededor del eje y,




en sentido positivo, queda descrita por las

ecuaciones $\begin{cases} x' = x\cos\theta + z\,\mathrm{sen}\theta \\ y' = y \\ z' = -x\,\mathrm{sen}\theta + z\cos\theta \end{cases}$

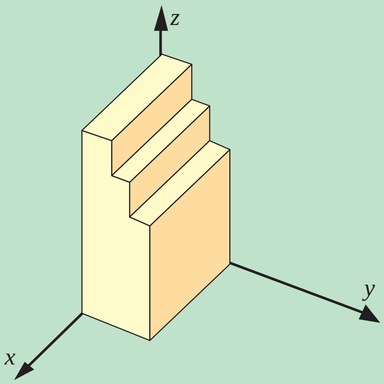
de modo que su matriz asociada es: $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \mathrm{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

Ahora quedan fijos en la rotación los puntos del eje y, es decir, los puntos de coordenadas (0, y, 0).

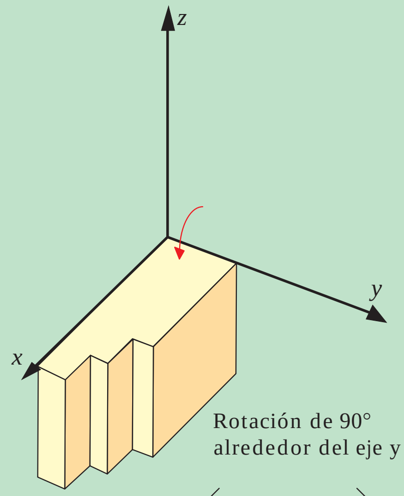
**RETO** ¿Cuáles son las ecuaciones y la matriz asociada a una rotación alrededor del eje x en sentido positivo? ¿Cuáles son los puntos que deja fijos esta rotación?

Los helicópteros usan aspas giratorias para propulsarse, sustentarse y gobernarse.

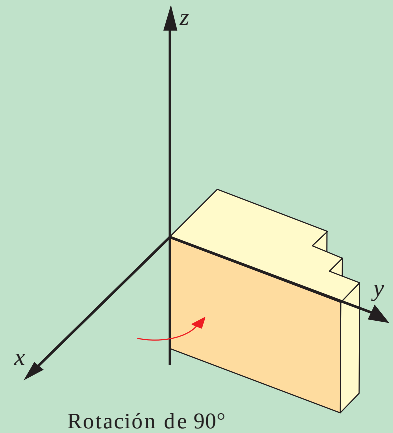
La multiplicación de matrices corresponde a la composición de transformaciones. Si A y B son las matrices asociadas a las transformaciones $T_1$ y $T_2$, entonces la matriz BA está asociada a la transformación $T_2 \circ T_1$. En el plano la composición de rotaciones es conmutativa, mas en el espacio no lo es como se muestra en el ejemplo siguiente. Por ende, la multiplicación de matrices no es conmutativa.




Posición original del objeto




Rotación de 90° alrededor del eje y

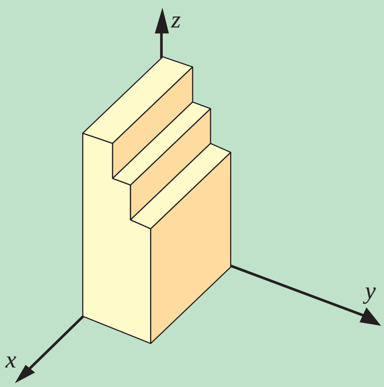



Rotación de 90° alrededor del eje z

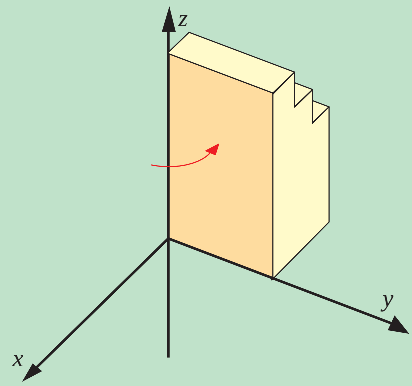
Matriz asociada A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz asociada B= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

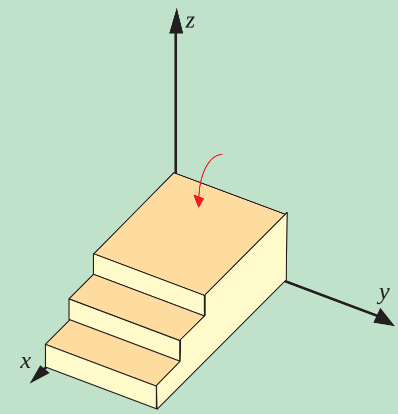
La matriz asociada a la rotación compuesta es BA= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$




Posición original del objeto




Rotación de 90° alrededor del eje z




Rotación de 90° alrededor del eje y

Matriz asociada B= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz asociada A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz asociada a la rotación compuesta es AB= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

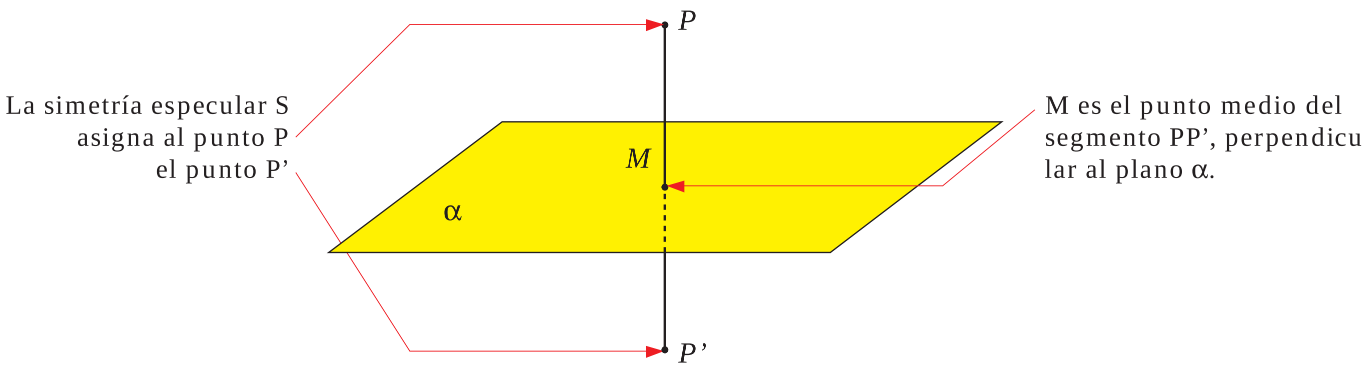
Observa que las posiciones finales del objeto son diferentes y también lo son los productos AB y BA.

## Simetría

La simetría se encuentra en múltiples manifestaciones de la naturaleza, el arte, la ciencia y la arquitectura.

## Simetrías especulares

Una simetría especular respecto a un plano α, es una transformación del espacio tridimensional en sí mismo que refleja cada punto P respecto al plano α, llamado plano de simetría.

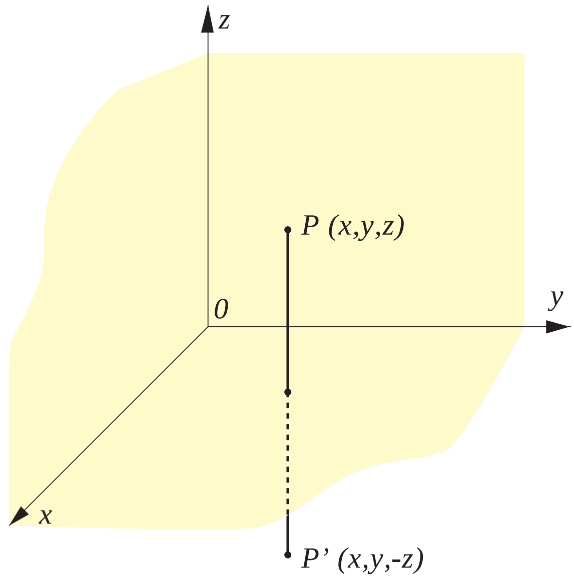



En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, una simetría especular respecto al plano xy transforma cada punto P, de coordenadas (x, y, z), al cual se le asocia la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en el punto P', de coordenadas (x', y', z'), asociado a la matriz $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, definida por las ecuaciones: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$

La matriz asociada a la transformación es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Observa que los puntos del plano xy, o sea, los puntos de coordenadas (x, y, 0), quedan fijos en la simetría, puesto que:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

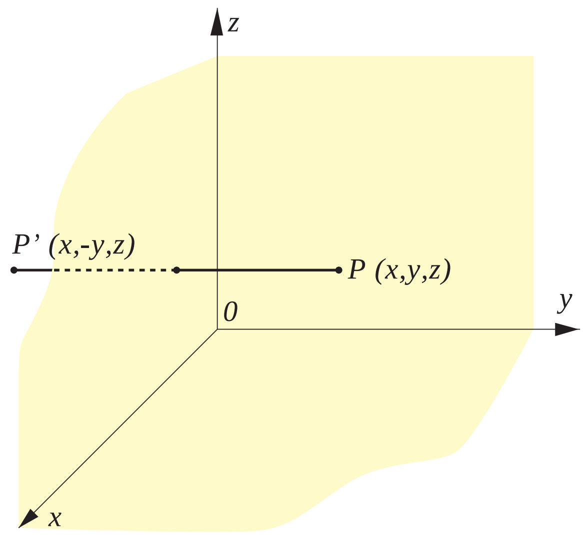



Análogamente, en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, una simetría especular respecto al plano xz transforma cada punto de coordenadas (x, y, z), con matriz asociada $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, en el punto de coordenadas (x', y', z'), asociado a la matriz $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, definida por las ecuaciones $\begin{cases}x'=x\\y'=-y\\z'=z\end{cases}$

y la matriz asociada a la transformación es:

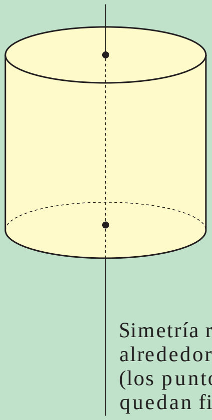
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

En este caso, los puntos que la simetría deja fijos son los del plano xz, o sea, los puntos de coordenadas (x, 0, z).

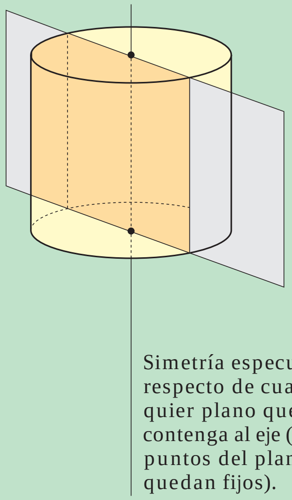



## INTERESANTE

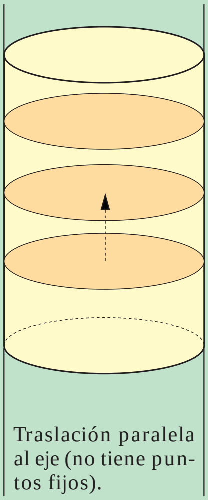
Si consideramos un cilindro, sus simetrías (dejan invariante el cilindro) son de cuatro tipos:



Simetría rotacional alrededor de su eje (los puntos del eje quedan fijos).

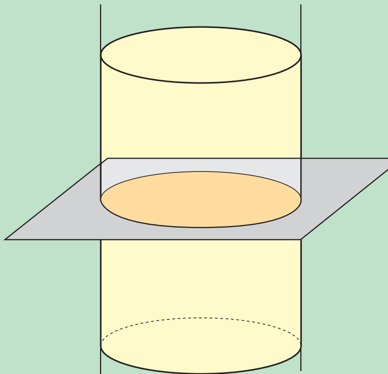


Simetría especular respecto de cualquier plano que contenga al eje ( los puntos del plano quedan fijos).



Traslación paralela al eje (no tiene puntos fijos).

Cilindro infinito.

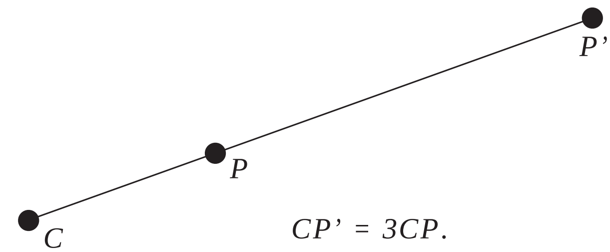


Simetría especular respecto de cualquier plano perpendicular al eje. Si el cilindro es finito sólo hay una de éstas, con el plano perpendicular al eje que pasa por su "punto medio".

*Cámara mamut* (1900). Creada por George Lawrence para la toma de fotografías gigantes.

## Homotecia

Las homotecias son un tipo de transformaciones que alteran el tamaño de las figuras, pero conducen a otras "semejantes" (con la misma "forma" original). Dado un punto fijo $C$ y un número real $k > 0$, $k \neq 1$, se llama homotecia de centro $C$ y razón $k$, a la transformación que a todo punto P le hace corresponder el punto $P'$, situado sobre la recta $CP$, tal que $CP' = k\, CP$.

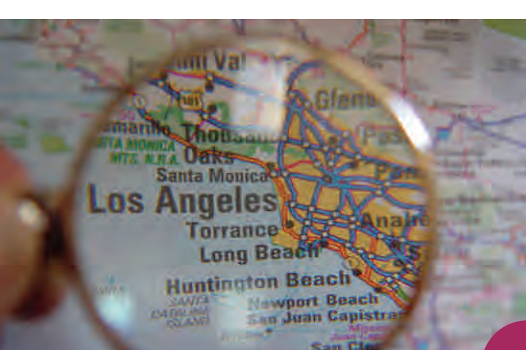


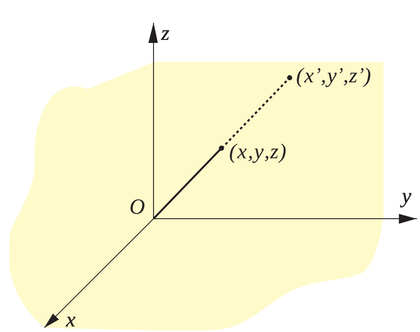

$CP' = 3CP$.

El zoom es uno de los instrumentos más poderosos para crear efectos en una imagen, gracias a un objetivo especial que permite aumentar o disminuir la imagen y modificar el ángulo de visión.

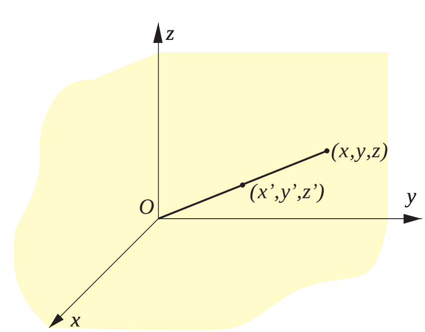
En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, una homotecia de centro $O$ y razón $k \neq 1$, transforma cada punto de coordenadas $(x, y, z)$, al cual se le asocia la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en el punto de coordenadas $(x', y', z')$, al cual se le asocia la matriz $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, definida por las ecuaciones $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \\ z' = kz \end{cases}$ y la matriz asociada a la transformación es $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, puesto que $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$

Si $0 < k < 1$, entonces la transformación produce una contracción (las distancias se comprimen por un factor k); y si $k > 1$, entonces se produce una dilatación (las distancias se estiran por un factor k).




Homotecia de razón k>1




Homotecia de razón 0<k<1