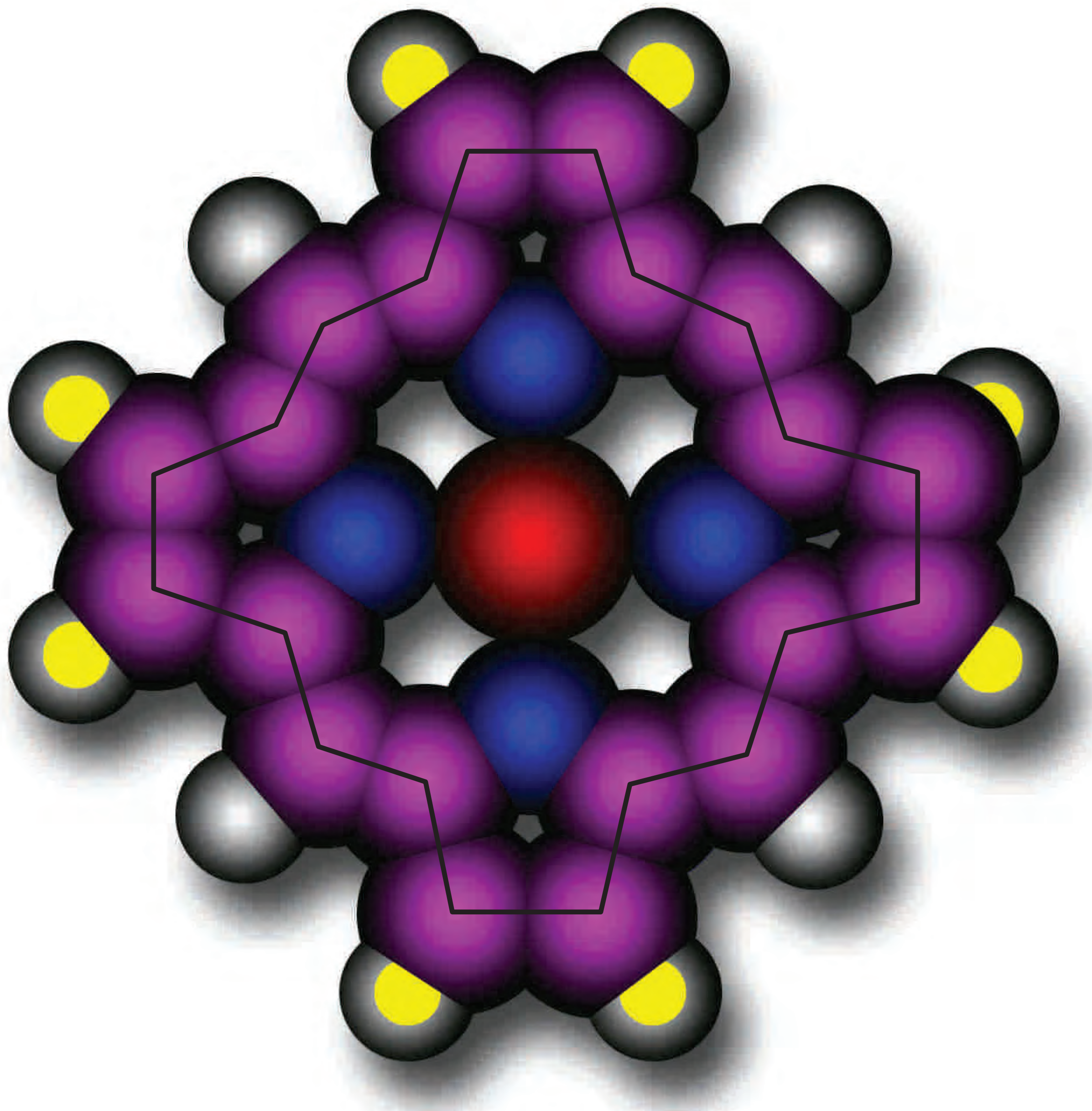
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa

Matrices y transformaciones



La simetría "corre" por nuestras venas. Esta imagen representa el núcleo central del grupo hemo, el centro activo de la hemoglobina que oxigena nuestras células.
Fuente: http://www.cienciateca.com/simetria.html

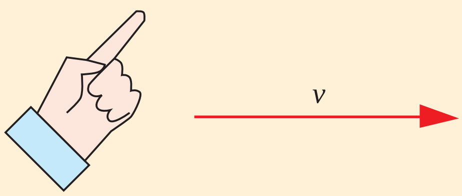
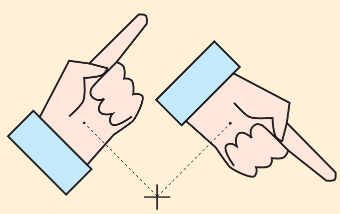
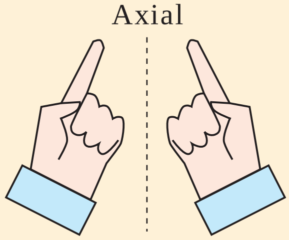
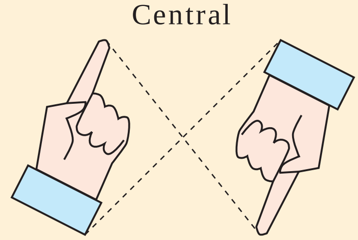
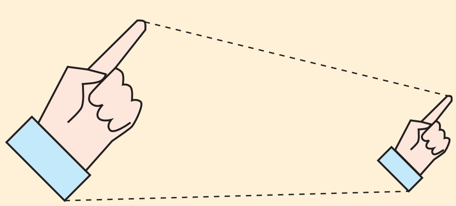
Fascículo 21

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela
ÚltimasNoticias

Matrices y transformaciones geométricas en el plano

Una transformación en un plano, es una aplicación que hace corresponder a cada punto P de coordenadas (x,y) del plano, otro punto P’ de coordenadas (x’, y’) del mismo plano. En consecuencia, cualquier conjunto de puntos F se puede transformar en otro conjunto de puntos F’.

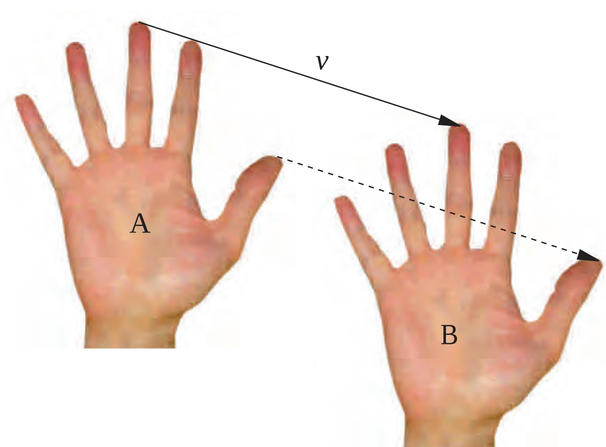
Transformaciones usuales

Traslación		Mantienen la forma y el tamaño de la figura (son isometrías o movimientos rígidos).
Rotación		
Simetría	Axial  Central 	
Homotecia		Varía el tamaño de la figura pero no la forma.

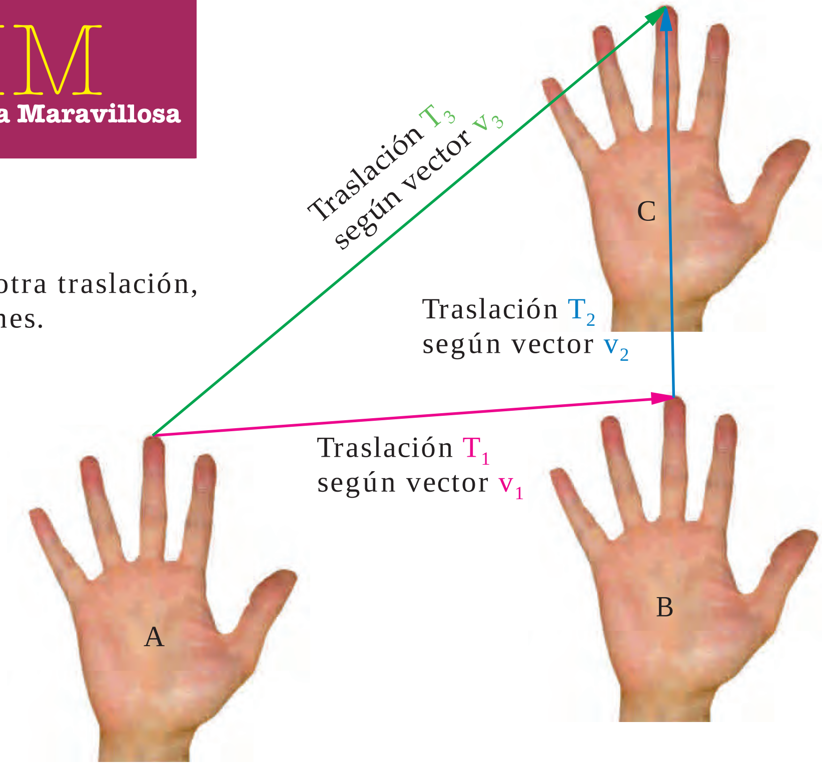
Traslación

Geométricamente la traslación *T* representa el desplazamiento de un punto o conjunto de puntos según un vector fijo *v*, no nulo.

La figura de la mano fue trasladada desde la posición A hasta la posición B. Observa que ningún punto de la figura inicial permanece fijo.



Composición de traslaciones

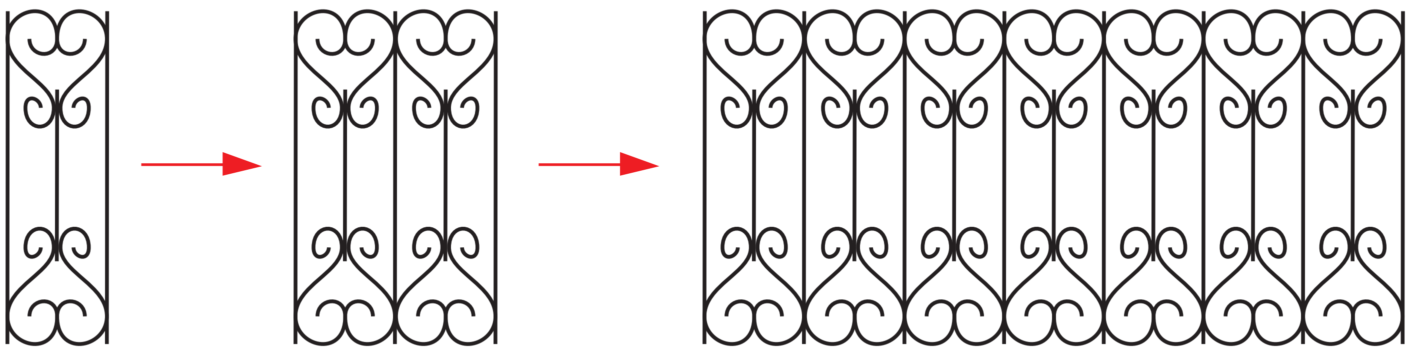


Si al resultado de una traslación se le aplica otra traslación, se dice que hay una composición de traslaciones.

Traslación compuesta
$T_3 = T_2 \circ T_1$ ($\circ$ compuesto con)
según vector
$v_3 = v_1 + v_2$

Composición de varias traslaciones

Reja de balcón

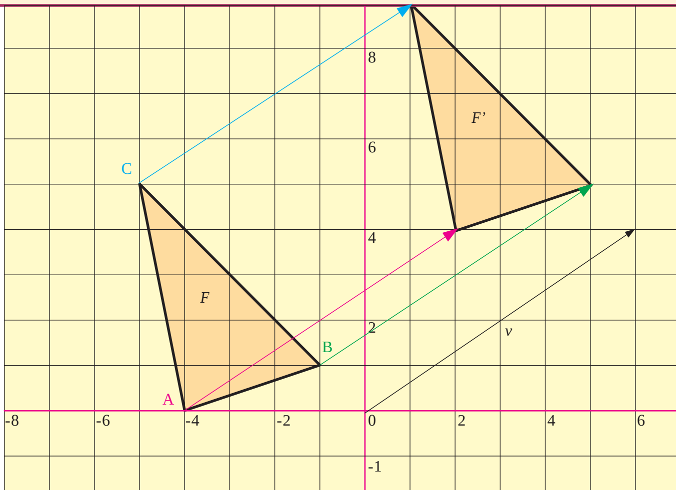


A todo punto *P* de coordenadas (x,y) del plano, se le asocia el vector $r=(x,y)$ y la matriz columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, de manera que una traslación *T* según el vector $v = (v_1,v_2)$ se puede identificar con una adición de matrices columnas.

Traslación según el vector representado por	Transforma el vector representado por	En el vector representado	De coordenadas	Operaciones con matrices
$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = x+v_1 \\ y' = y+v_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+v_1 \\ y+v_2 \end{pmatrix}$

Al trasladar el triángulo *F* según el vector $v=(6, 4)$, resulta el triángulo *F'*.
Realizemos la suma de matrices columnas asociada a cada vértice, con la matriz asociada al vector de traslación.

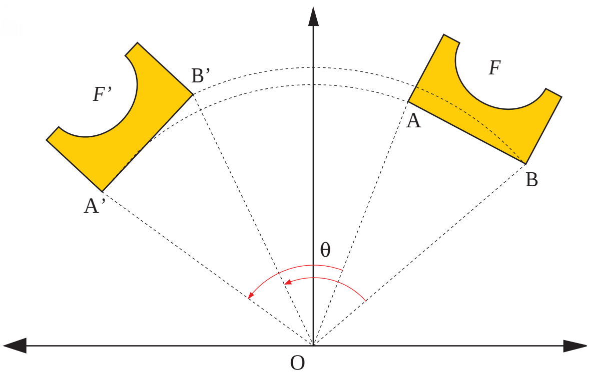
$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Rotación

En la vida cotidiana se presentan situaciones como las siguientes:

El abanico abre girando alrededor del punto O. Las aspas del ventilador y cada aguja del reloj gira alrededor de un punto único.



Geométricamente una rotación en el plano representa una transformación o giro de una figura en torno a un punto fijo, llamado centro de rotación, que puede estar o no dentro de la figura.

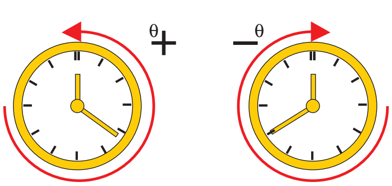
Al rotar la figura F un ángulo θ en sentido antihorario alrededor del origen de coordenadas O, se obtiene la figura F'.

Observa que hay un único punto fijo O que es el centro de rotación.

Rotación y tecnología

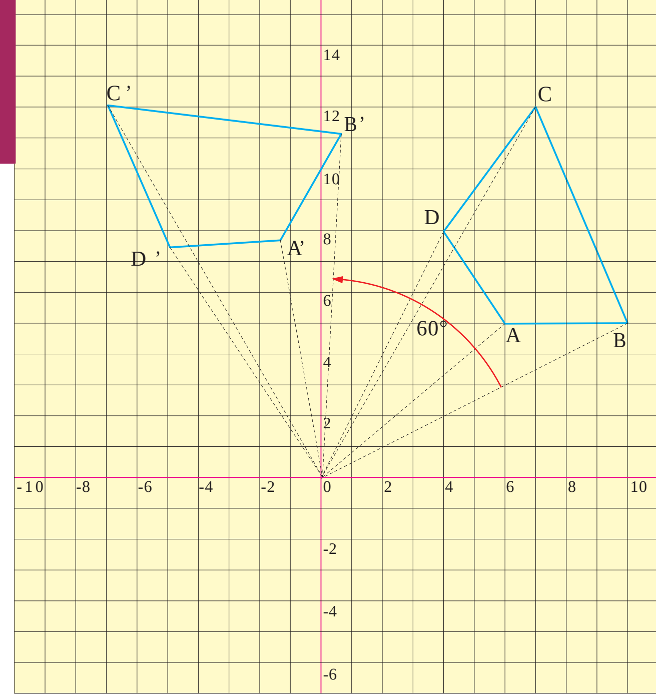
Una forma de producir electricidad es a partir de la energía proporcionada por el viento o *energía eólica*. El dispositivo capaz de realizar esta conversión se denomina *aerogenerador* o *generador eólico*, y consiste en un sistema mecánico de *rotación*, provisto de aspas a modo de los antiguos molinos de viento, y de un generador eléctrico con el eje conectado al sistema motriz. De esta forma el viento, al hacer girar las aspas, hace también girar al generador eléctrico, que puede ser un alternador. Igual que en el caso de la energía solar, es necesario disponer de acumuladores para almacenar la energía eléctrica con la finalidad de ser utilizada en los períodos sin viento.

Rotación	Transforma el vector representado por	En el vector representado por	De coordenadas	Matriz asociada a la rotación
De ángulo θ	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



Sentidos de los ángulos

Para hallar el transformado de un punto según una rotación de ángulo θ, basta multiplicar la matriz de rotación por la matriz columna asociada a ese punto.



$$R_{\theta} \cdot V = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Rotemos el cuadrilátero ABCD un ángulo $\theta=60°$ en torno al origen.

A cada vértice le asociamos su matriz columna:

$$A=\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Al efectuar la multiplicación de la matriz de rotación por cada una de las matrices anteriores, obtenemos las coordenadas de los vértices transformados (rotados 60°).

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Para el punto A, $R \cdot A = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\operatorname{sen} 60° \\ \operatorname{sen} 60° & \cos 60° \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}_{2x1} = \begin{pmatrix} 6\cdot\cos 60° - 5\cdot\operatorname{sen} 60 \\ 6\cdot\operatorname{sen} 60° + 5\cdot\cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}35 \\ 7{,}72 \end{pmatrix}$

RETO

¿Cuáles son la coordenadas de las transformadas de los vértices B, C y D?

Al aplicar dos o más rotaciones seguidas al mismo objeto, por ejemplo una mariposa, estamos realizando una composición de rotaciones.

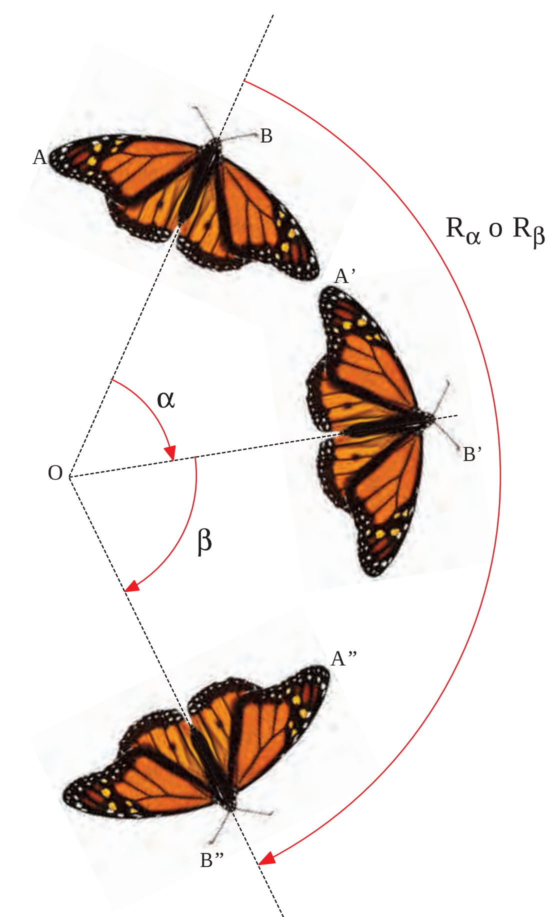
Primero aplicamos la rotación R_{α} de ángulo α a la mariposa y luego la rotación R_{β} de ángulo β. La transformación resultante es la composición

$$R = R_{\beta} \circ R_{\alpha}$$

La compuesta de dos rotaciones de ángulos α y β respectivamente es igual a una rotación de ángulo $\alpha + \beta$:

$$R_{\beta} \circ R_{\alpha} = R_{\alpha+\beta} = R_{\beta+\alpha} = R_{\alpha} \circ R_{\beta}$$

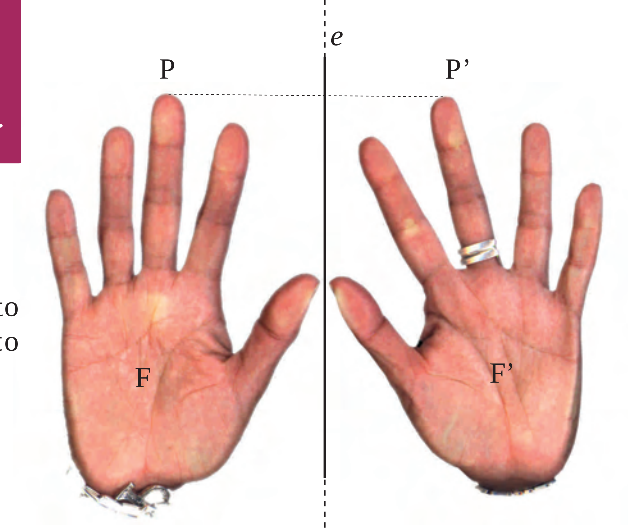
Es decir, el orden en que se realicen las rotaciones de ángulos α y β no altera la posición final del objeto.



RETO

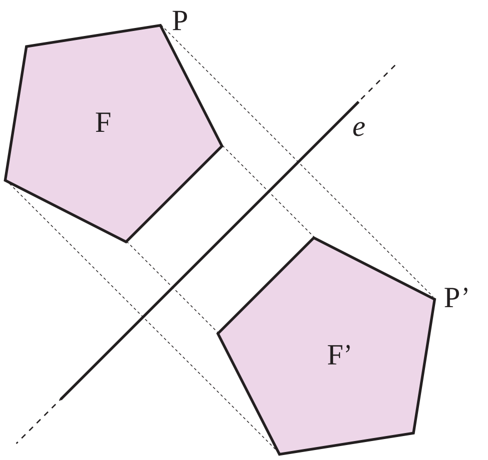
Determina la matriz de la rotación de ángulo $\alpha + \beta$, a partir de la multiplicación de las matrices de rotación de ángulos α y β, respectivamente.

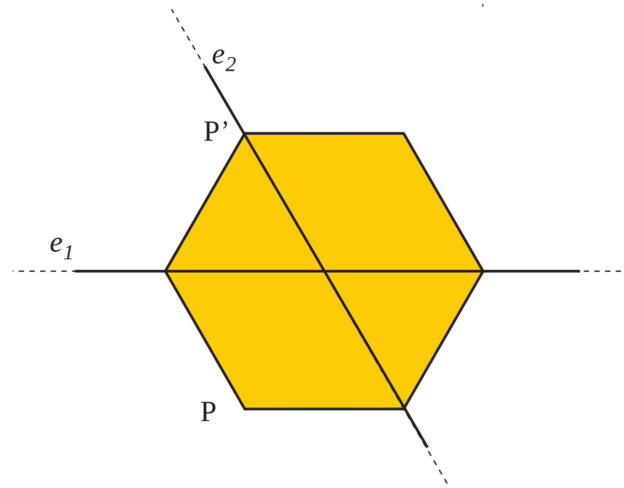
¿Se cumple en este caso la propiedad conmutativa de la multiplicación de matrices?



Simetría respecto a una recta

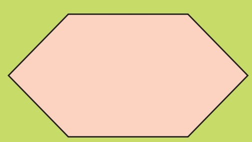
Geométricamente la reflexión de una figura en el plano respecto de una recta dada *e*, representa su imagen simétrica respecto a ella. La recta *e* se denomina eje de simetría.



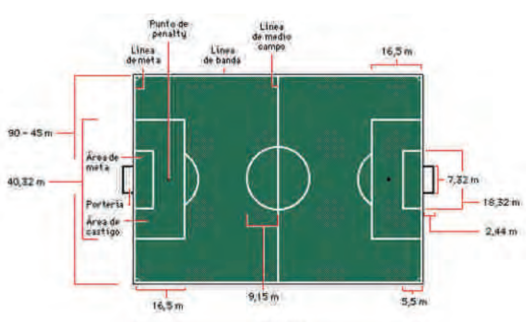


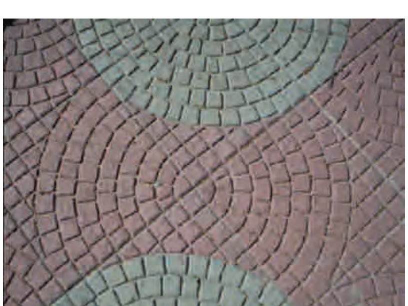
RETO

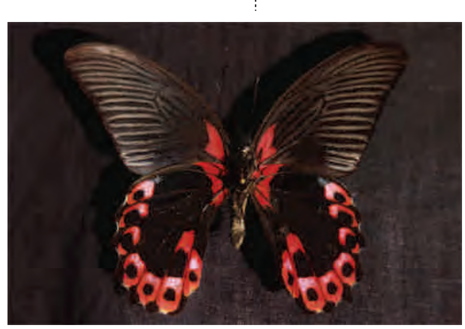
¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?

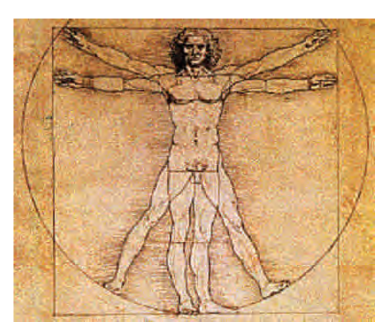


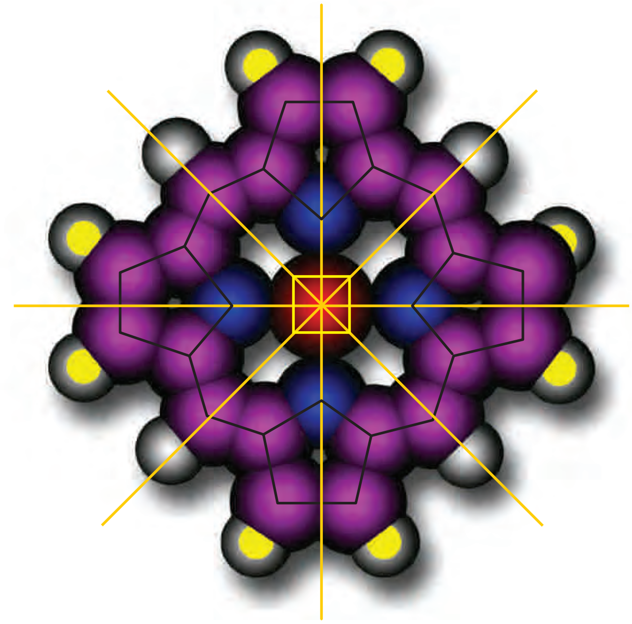
La reflexión se puede observar en diversas manifestaciones de la vida cotidiana.











El centro activo de la hemoglobina es un anillo de porfirina con un átomo de hierro (en rojo) en el centro. El "esqueleto" de este macrociclo de porfirina (marcado con líneas negras) está compuesto por átomos de carbono (morados) y nitrógeno (azules). Las esferas blancas representan átomos de hidrógeno, mientras que las marcadas de amarillo pueden ser diversos grupos orgánicos. Las líneas anaranjadas representan planos de simetría perpendiculares a la figura, mientras que el cuadrado amarillo del centro indica un eje de simetría cuaternario que coincide con la recta de intersección de los planos de simetría. Además de los elementos de simetría indicados, esta molécula (que es plana y cuyo anverso y reverso son equivalentes) posee ejes binarios, un plano de simetría que coincide con el plano del papel, y un centro de simetría que coincide con el punto donde se intersecan todos los otros elementos de simetría.

Simetría axial

En el plano es posible aplicarle una simetría axial o reflexión a una figura respecto al eje x, al eje y o respecto a una recta cualquiera. Para ello basta aplicar la matriz de transformación adecuada como muestra la tabla:

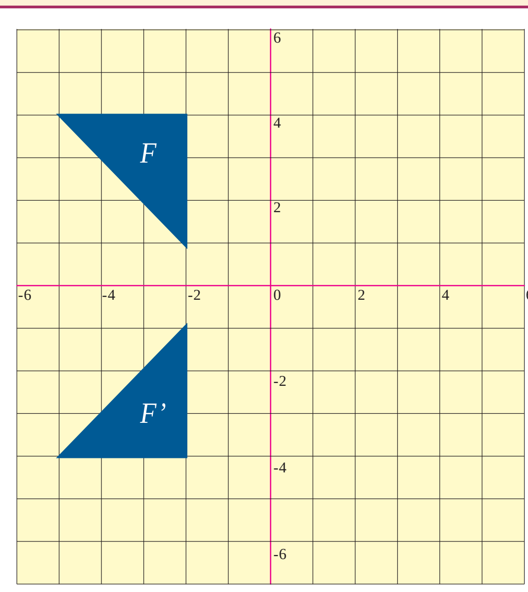
Simetría	Transforma el vector representado por	En el vector	De coordenadas	Matriz asociada
Respecto al eje x	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Respecto al eje y	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Respecto a la recta y=x	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Al aplicar una simetría al triángulo F respecto al eje x, resulta el triángulo F'.

Multiplicamos la matriz de la simetría axial respecto al eje, por la matriz columna de cada punto, haciendo ésto con los vértices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

De manera similar, se procede para aplicar la simetría respecto al eje y o respecto a la recta $y=x$, obteniéndose otros triángulos.



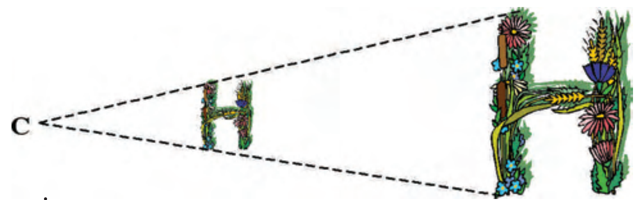
Homotecia

Geométricamente la homotecia es una transformación que cambia el tamaño de un objeto sin variar su forma. Dos figuras son homotéticas si al unir mediante rectas los puntos correspondientes de ellas, estas rectas concurren en un único punto *C* llamado centro de la homotecia.

C

Contracción

0 < k < 1
k≠1



Dilatación

k > 1

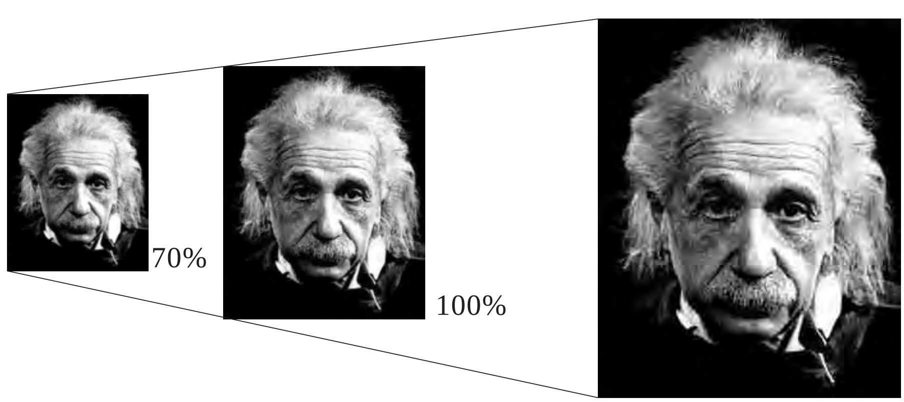
Para definir una homotecia se debe dar el centro de homotecia *C* y un número real *k*, no nulo, denominado razón de homotecia.

Si B' es el transformado de B según una homotecia de centro C, se cumple que los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{CB}$' son alineados y proporcionales, es decir: $\dfrac{\overline{CB'}}{\overline{CB}} = k$

Homotecia	Transforma el vector representado por	En el vector representado por	De coordenadas	Matriz asociada
De razón k y de centro (0,0)	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Homotecia y tecnología

Al fotocopiar un documento con la finalidad de ampliarlo o reducirlo, la máquina realiza el proceso de transformación del documento original mediante una homotecia de la razón necesaria para obtener un "zoom", que para nuestro caso va desde 70% hasta 150%".



70%

100%

150%