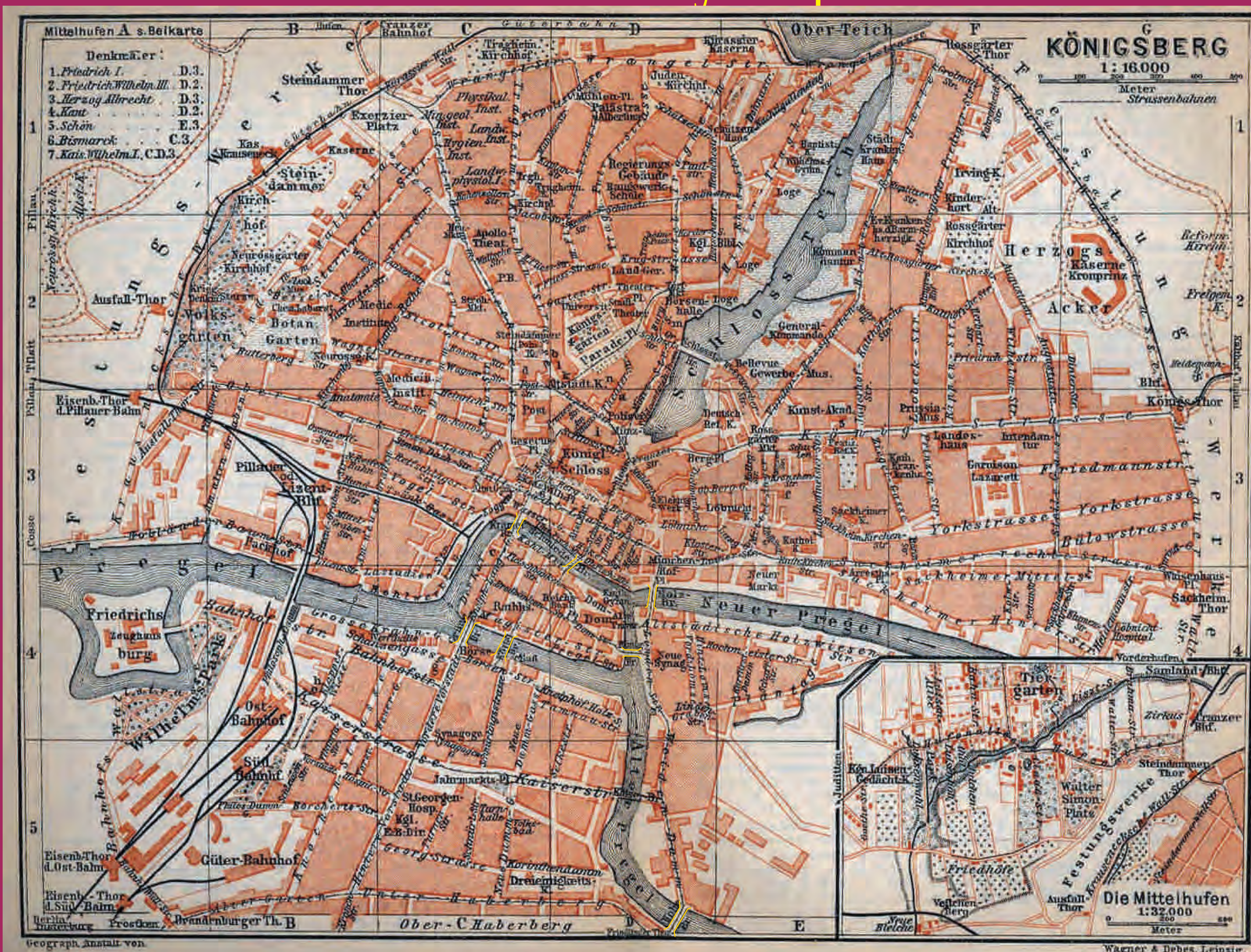
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa

Matrices y aplicaciones

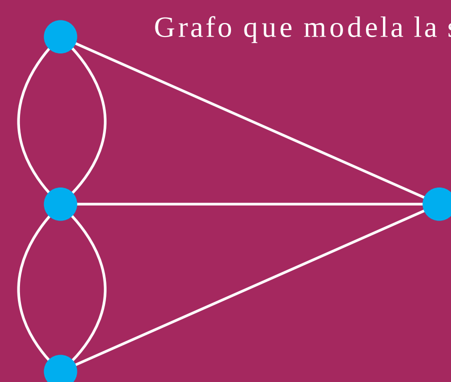


La antigua ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) ubicada en lo que era Prusia Oriental, se encuentra atravesada por el río Pregel (cuyo nombre actual es Pregolya). La ciudad es famosa por sus puentes, ya que cuenta con 7 que unen ambas márgenes del río Pregel con dos de sus islas, tal como se puede ver en el plano de arriba.

Se dice que los habitantes de la ciudad se entretenían tratando de encontrar una ruta para pasear con la condición de cruzar cada uno de los siete puentes y hacerlo sólo una vez. Como habían intentado hacerlo infructuosamente la mayoría pensaba que tal paseo era imposible.

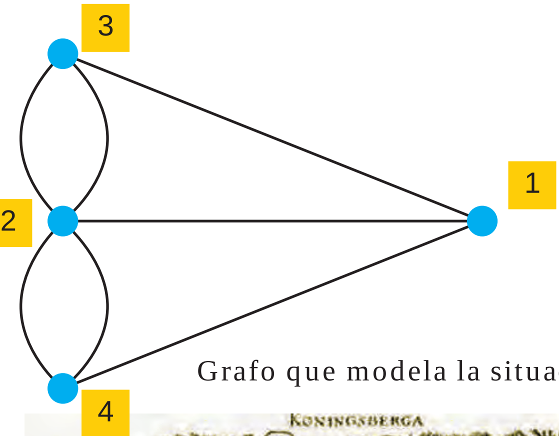
Euler resolvió el problema representando la situación mediante un modelo gráfico. La solución dada en 1736, mostraba la imposibilidad de cruzar los siete puentes sin pasar dos veces por el mismo puente.

Grafo que modela la situación



Fascículo 20

Matrices y grafos



Grafo que modela la situación

Este tipo de objeto matemático se conoce con el nombre de *grafo*: a los puntos se les llama *vértices* y *aristas* a las líneas que los unen.

Los puntos azules en el grafo (vértices) representan las dos islas y las dos orillas del río; mientras que las líneas que enlazan a los puntos (aristas) representan los puentes: siete en total.

El grafo a su vez puede ser representado mediante una matriz conocida como matriz de adyacencia, la cual denotaremos por A. Cada elemento a_{ij} de la matriz indica el número de aristas que enlazan al vértice i con el vértice j.

Cuando dos vértices están unidos por lo menos con una arista se dice que ellos son adyacentes.

Hemos etiquetado los vértices con los números del 1 al 4, como se muestra en la figura.

La matriz de adyacencia del grafo de la figura es:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada fila de la matriz está asociada con un vértice del grafo. Lo mismo ocurre con las columnas. Así, por ejemplo, la fila 2 está asociada con el vértice que lleva la etiqueta 2; y la columna cuatro con el vértice 4. En el cruce de la fila 2 con la columna 4 se encuentra justamente el elemento $a_{24}=2$. El valor de a_{24} indica que existen dos conexiones (puentes) que unen a dichos vértices. En consecuencia, el elemento simétrico a_{42} también debe ser 2, ya que si hay dos puentes que enlazan a 2 con 4, esos mismos puentes comunican a 4 con 2. Si miramos la matriz A, efectivamente ocurre esto (A es una matriz simétrica).

La matriz A puede multiplicarse por sí misma, obteniéndose la matriz AA la cual se denota A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Cómo interpretamos ahora las entradas de la matriz?

Por ejemplo, ¿qué significa que a_{11} valga 3 ó que a_{34} tome el valor 5?

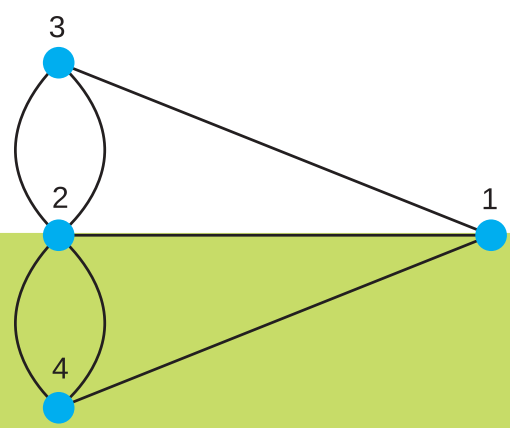
a_{11}=3 significa que hay tres caminos de longitud 2 del vértice 1 a él mismo. Estos caminos son: 1-4-1; 1-2-1 y 1-3-1. Así, el camino 1-4-1 indica que salimos de 1, cruzamos el puente que lleva a 4 y nos devolvemos a 1 por ese mismo puente; es decir, hemos hecho un recorrido de longitud 2. Similar interpretación le otorgamos a los otros dos caminos.

Si queremos ir del punto 3 al 4, tenemos a disposición 5 caminos de longitud 2. Una escogencia es pasar por el vértice 2, pero tenemos dos puentes, cada uno corresponde a una opción. Una vez llegados al vértice 2, nuevamente tenemos dos puentes, es decir, dos alternativas. En consecuencia, si decidimos ir desde 3 a 4 pasando por 2, tenemos 2 x 2 = 4 caminos posibles. El quinto camino corresponde a salir de 3, pasar por 1 y arribar a 4.

En general, cada entrada a_{ij} de la matriz A^2 representa el número de rutas o caminos de longitud 2 que existen entre los vértices i y j.

Uno de los puentes de Köningsberg (hoy Kaliningrado) que todavía se encuentra en la actualidad.

Fuente: www.matheory.info/ konigsberg



RETO

¿Podrías encontrar las 9 rutas posibles (de longitud 2) para, saliendo de 2, regresar al lugar de partida cruzando dos puentes diferentes o dos veces el mismo puente?

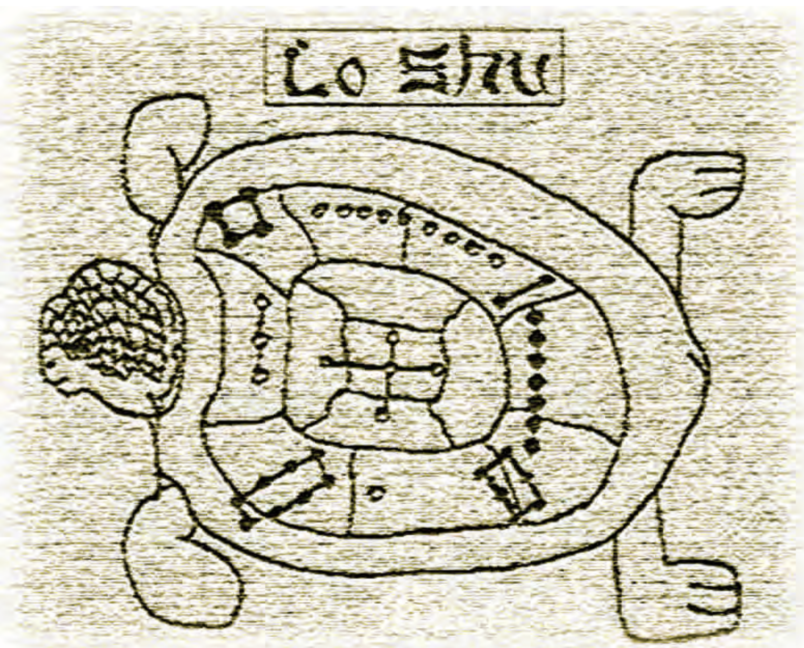
En forma análoga podemos estudiar el significado de las entradas de las matrices AAA=A^3 y AAAA=A^4.

SABÍAS QUE...

Leonhard Euler (Suiza,1707-1783), matemático y físico, realizó numerosas contribuciones en las áreas de matemática y física donde destacan la teoría utilizada en Mecánica de Fluídos (usada luego para la explicación del vuelo de los aviones) y la teoría sobre la rotación de cuerpos rígidos usada en la trayectoria de satélites. El sistema postal de su país natal elaboró una estampilla de 10F en su honor.

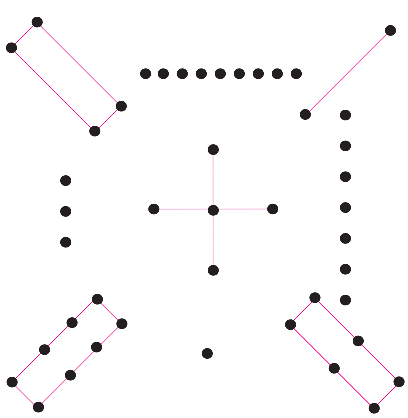
Matrices y cuadrados mágicos

En el cuadrado de la derecha que está subdividido en 9 casillas, debes colocar los números del 1 al 9 sin repetir ninguno, con la condición de que al sumar los números por filas, columnas o diagonales siempre resulte 15. ¿Podrás hacerlo?



Cuenta la leyenda que el emperador Yu el Grande [de la dinastía Xia] vio emerger una tortuga de las aguas del río Lo, en cuyo caparazón aparecía un grabado con símbolos numéricos. A este grabado se le denominó Lo shu, que significa "Escrito del Río Lo".

El Lo Shu puede representarse gráficamente así:



A esta disposición de los números del 1 al 9 se le llama un cuadrado mágico.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Representación numérica actual

Un cuadrado mágico es una disposición numérica de forma cuadrada, tal que al sumar los números de una misma fila, columna o diagonal se produce siempre el mismo resultado. A este resultado se le denomina constante mágica.

La matriz M es un cuadrado mágico. Para comprobarlo basta sumar los elementos de cada fila, de cada columna y de las diagonales, y verificar que la suma siempre es la misma: la constante mágica es k=15.

$$M=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Las anteriores son diferentes formas de representar un cuadrado mágico.

SABÍAS QUE...

Los antecedentes más lejanos que se tienen de los cuadrados mágicos se remontan a la milenaria China, hacia el 2200 a.C. El Lo Shu es el cuadrado mágico más antiguo que se conoce.

Otro cuadrado mágico famoso es el que aparece en el lado superior derecho de la obra "Melancolía" del famoso artista del Renacimiento Alberto Durero (Alemania, 1471-1528).

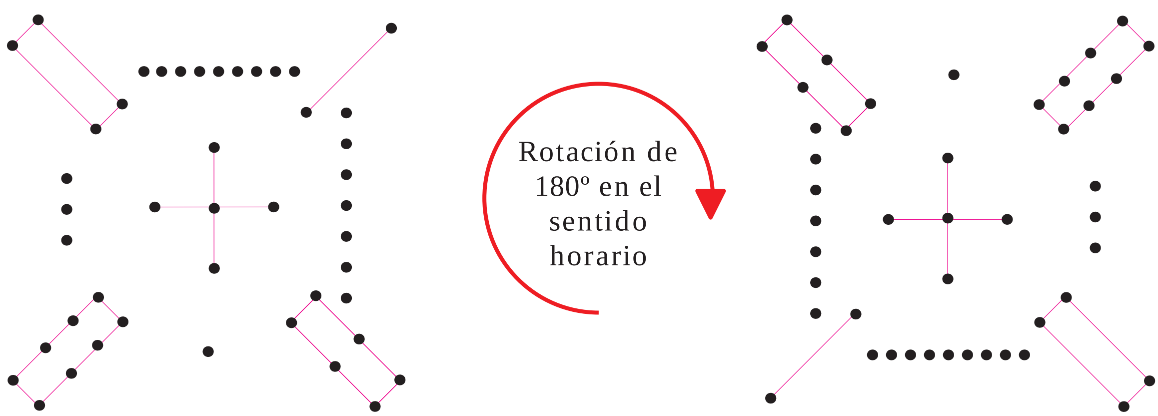
Como dato curioso, la obra fue creada en 1514.

Se llama orden de un cuadrado mágico al número de filas (o de columnas) que tiene la matriz que lo representa. Así, el Lo Shu es de orden 3, mientras que el cuadrado mágico que aparece en la "Melancolía" de Durero es de orden 4.

¿Qué ocurre si rotamos la figura del Lo Shu alrededor del centro de la cruz (la cual representa al número 5) que está en el centro?

¡Obtenemos como resultado un cuadrado mágico!

¿Qué ocurre si rotamos el Lo Shu (alrededor de la cruz central) 180º en sentido horario?



¡Nuevamente obtenemos un cuadrado mágico!

¿Cómo quedan plasmadas estas rotaciones en la matriz?

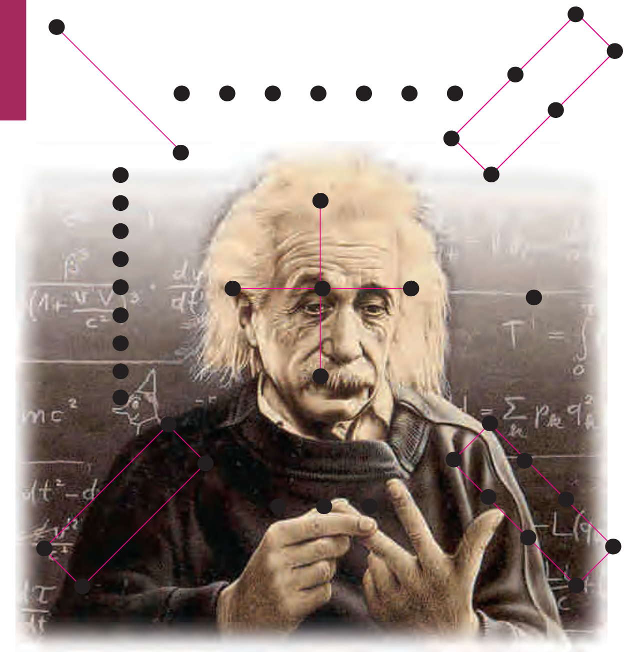
$$M=\begin{pmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{90^\circ} M_1=\begin{pmatrix}2 & 7 & 6\\ 9 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 8\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{180^\circ} M_2=\begin{pmatrix}6 & 1 & 8\\ 7 & 5 & 3\\ 2 & 9 & 4\end{pmatrix}$$

Observamos que una rotación de la figura equivale a realizar ciertas transformaciones de las filas y columnas de la matriz.

$$M=\begin{pmatrix}4 & 9 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 8 & 1 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{90^\circ} M_3=\begin{pmatrix}8 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 9\\ 6 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

Así, en el caso que mostramos, las filas primera, segunda y tercera de M se convierten, respectivamente, en las columnas tercera, segunda y primera de M_3.

Tengo que pensarlo

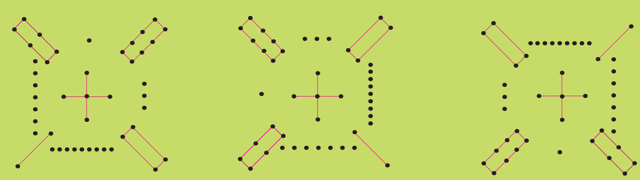


Verifique, usando las matrices, que se produce el mismo resultado si se rota el Lo Shu 180º en el sentido horario o en el sentido contrario.

Puede probarse matemáticamente, que dado un cuadrado mágico de cualquier orden, las rotaciones respecto a su centro producen nuevamente un cuadrado mágico.

RETO

¿Será la matriz transpuesta (M^t) un cuadrado mágico? ¿Habrá alguna combinación de rotaciones del Lo Shu que produzcan un cuadrado mágico cuya representación sea M^t?



INTERESANTE

Debido a la estructura particular de los cuadrados mágicos, si consideramos 9 números naturales y establecemos la condición de que ninguno se puede repetir, sólo existe un único cuadrado mágico de orden 3. Con 16 números naturales sin repetición existen 880 cuadrados mágicos de orden 4; y de orden 5, pueden formarse 275 305 224 empleando 25 números naturales distintos. Para los órdenes superiores al 5 se desconoce cuántos hay.

RETO

La estructura de un cuadrado mágico de orden 3 es la que aparece al lado.

¿Podrías deducirla a partir de la definición de cuadrado mágico?

$$M = \begin{pmatrix} a+c & a-b-c & a+b \\ a+b-c & a & a-b+c \\ a-b & a+b+c & a-c \end{pmatrix}$$

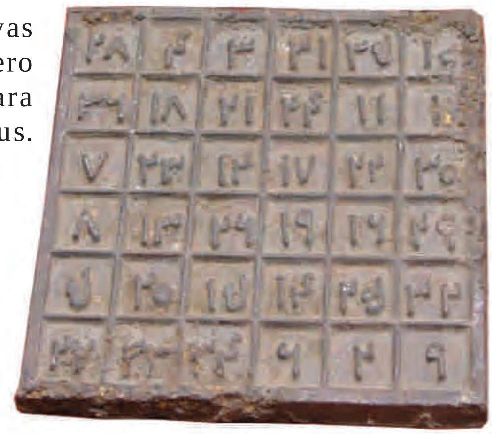
Al considerar cuadrados mágicos, podemos preguntarnos qué operaciones se pueden efectuar con ellos de manera que resulte nuevamente un cuadrado mágico.

Es posible probar matemáticamente que la adición y la sustracción de cuadrados mágicos produce cuadrados mágicos. Asimismo, un cuadrado mágico multiplicado por un número siempre produce un cuadrado mágico.

También se puede probar, matemáticamente, que cuando se multiplican entre sí *un número par de cuadrados mágicos, en general no se obtiene como resultado un cuadrado mágico*; mientras que si se efectúa la multiplicación de una *cantidad impar de ellos, el resultado siempre es un cuadrado mágico*.

Algunas curiosidades de los cuadrados mágicos

Cuadrado mágico de orden 6 cuyas filas y columnas suman 111, número que utiliza la creencia china para ahuyentar los malos espíritus.



16	115	43	4	11
44	1	12	39	93
35	17	94	41	2
91	42	25	13	18
$\boxed{3}$	14	15	92	65

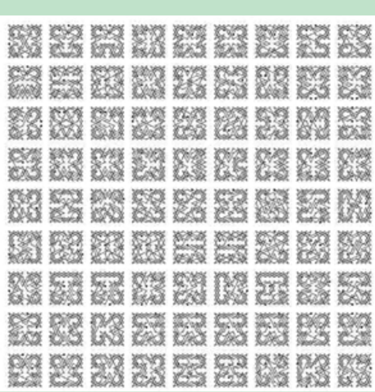
En éste cuadrado mágico de orden 5, en la última fila se leen los primeros decimales del número π.

Es posible generalizar la noción de cuadrado mágico: en lugar de sumar las entradas de filas, columnas y diagonales, se multiplican éstas para producir el mismo resultado. Se obtiene así un cuadrado mágico multiplicativo.

La constante mágica del que se muestra es 2^{12}.

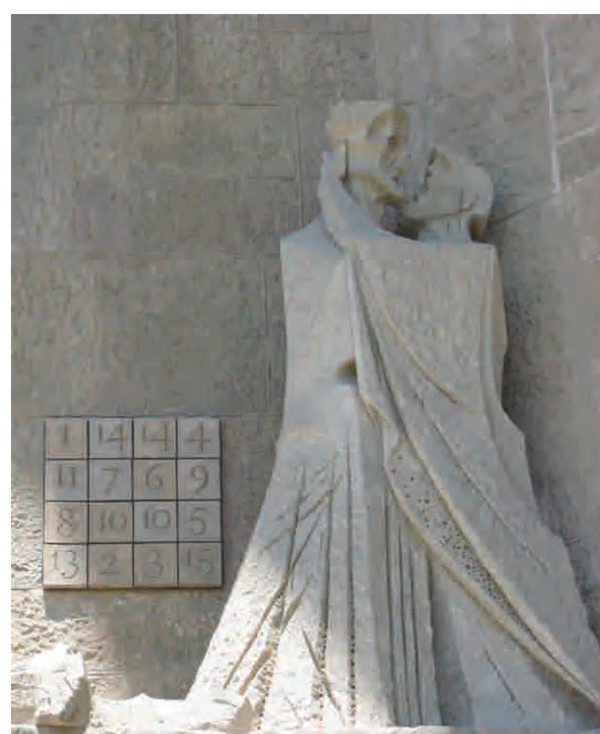
128	1	32
4	16	64
8	256	2

INTERESANTE



Históricamente los cuadrados mágicos han estado muy ligados al pensamiento místico.

El gran matemático Euler relacionó los cuadrados mágicos con los cuadrados latinos, y hoy en día se definen sobre ellos lo que se denomina líneas mágicas, las cuales producen bellos diseños geométricos empleados en el arte.



Cuadrado mágico de orden 4 que está en la catedral de la Sagrada Familia en Barcelona, España. Sus filas, columnas y diagonales suman 33 (edad de la muerte de Cristo).

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
http://www.fpolar.org.ve/matematica3