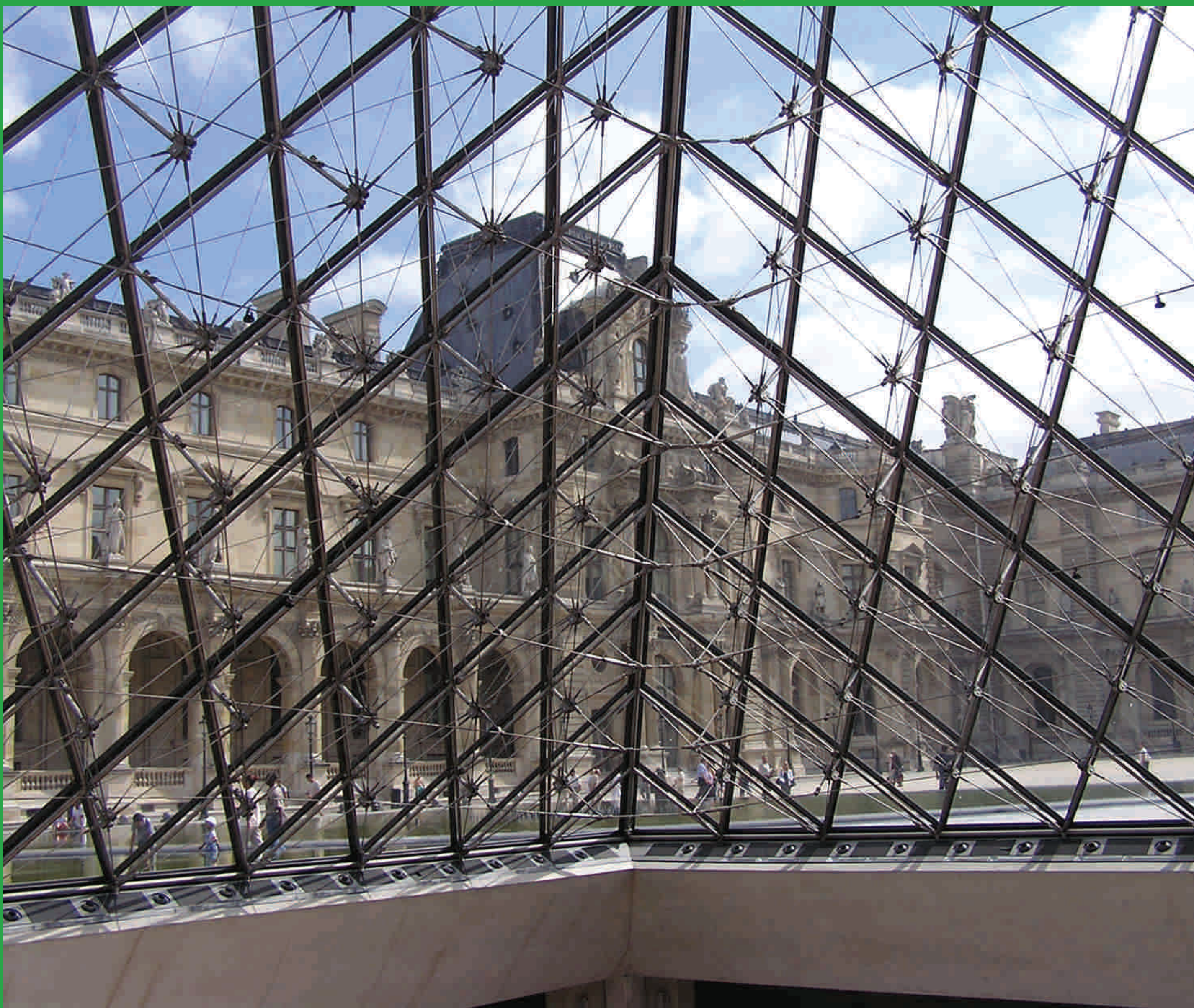
Fundación POLAR

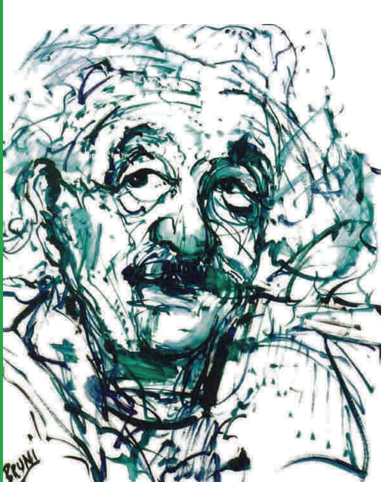
Matemática Maravillosa

Polígonos y poliedros



Fotografía del enrejado de la pirámide de Pei que es la cubierta de la entrada del Museo del Louvre en París, Francia.

MM



"Si no puedo dibujarlo es que no lo comprendo"
Albert Einstein
(Alemania, 1879-1955).

Tributo a Einstein
Bruni Sabian. Artista brasileña.

Fascículo 2

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela

Últimas **Noticias**

“Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar en forma errónea es mejor que no pensar”

Hipatia de Alejandría (Egipto, 370-415 d.C.)

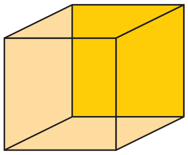
El mundo de las formas poligonales y poliédricas

La geometría euclidiana establece como elementos básicos puntos, rectas, planos y el espacio. Estudia las diferentes figuras que se pueden construir con esos elementos, con parte de ellos y con otras figuras como cónicas, cuádricas, etc. Así, con semirrectas y segmentos como partes de rectas se comienzan a construir ángulos, polígonos y poliedros.

Punto. Dimensión 0: no tiene largo, ancho ni altura

Recta. Dimensión 1: tiene largo, no tiene ancho ni altura

Plano. Dimensión 2: tiene largo y ancho, no tiene altura



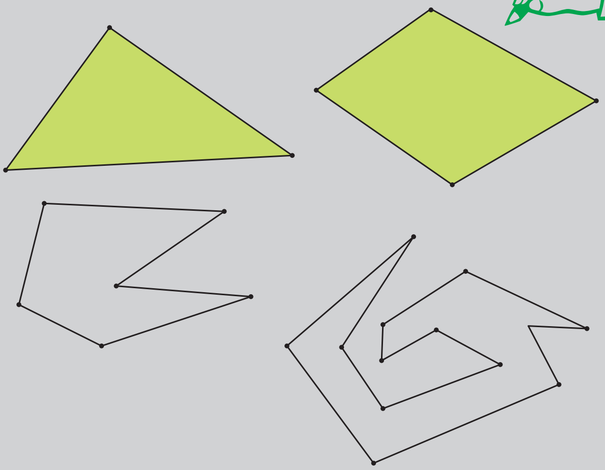
Espacio. Dimensión 3: tiene largo, ancho y altura

El mundo de los polígonos

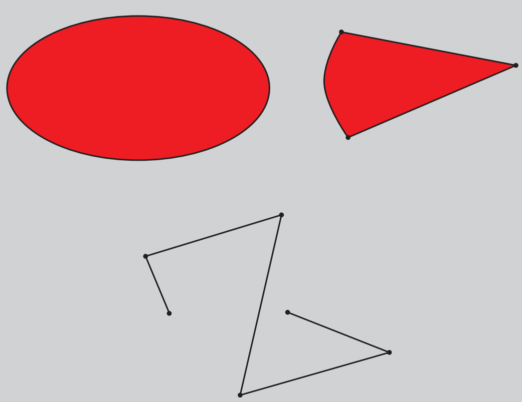
Lo anterior nos indica que los polígonos (*poli*=muchos y *gonos*=ángulo) son figuras de muchos ángulos, pero es necesario establecer que los polígonos se definen de tal forma que el número de ángulos, de lados y vértices son iguales.

Una definición de polígono es: una figura plana, cerrada, formada por segmentos que se unen sólo en sus extremos y en donde dos segmentos adyacentes no son colineales.

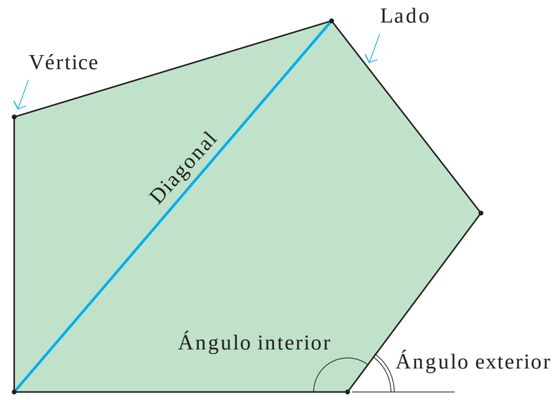
Estos son polígonos



Estos no son polígonos



Un segmento, diferente a los lados, que une a dos vértices, se denomina diagonal del polígono. La unión de dos lados consecutivos del polígono determina un ángulo del mismo llamado ángulo interior del polígono. Un lado y la prolongación del otro determinan un ángulo exterior.

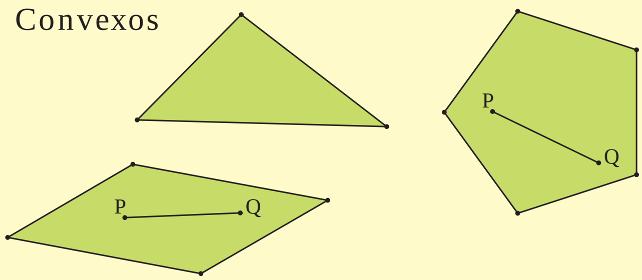


Clasificación de polígonos

Una clasificación de los polígonos es:

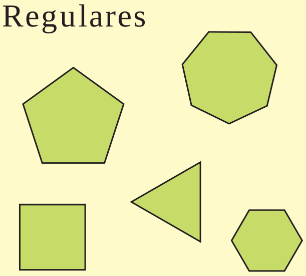
Polígonos

Convexos



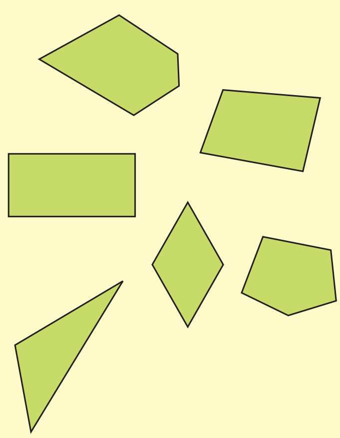
Se caracterizan porque si elegimos en el polígono dos puntos P y Q cualesquiera, el segmento PQ también está en el polígono. Otra caracterización de los polígonos convexos es que todos sus ángulos internos miden menos de 180°.

Regulares

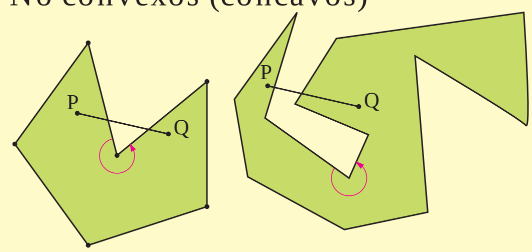


Se caracterizan porque son polígonos equiángulos (todos sus ángulos son iguales) y equiláteros (todos sus lados son iguales)

No regulares

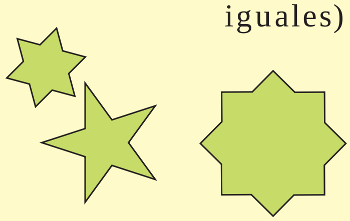


No convexos (cóncavos)



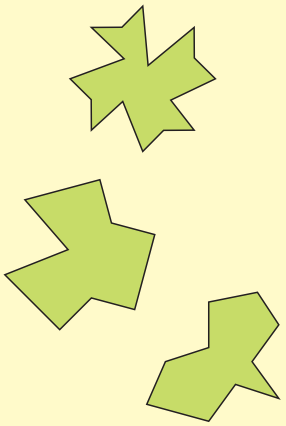
Se caracterizan porque se puede elegir dos puntos P y Q cualesquiera en el polígono, pero el segmento PQ no está completamente contenido en el polígono. Otra caracterización es que al menos uno de sus ángulos internos mide más de 180°.

Equiláteros (lados iguales)



Se obtienen al dividir una circunferencia en partes iguales y luego al unir los puntos de división de dos en dos, de tres en tres, puede resultar un polígono regular estrellado

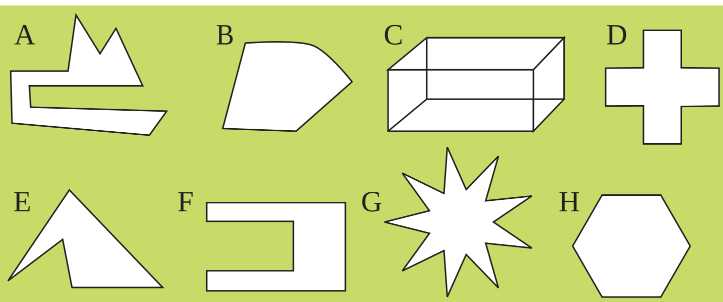
No equiláteros



RETO

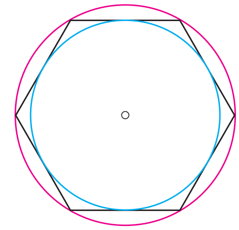
Decide: ¿cuáles de las siguientes figuras son polígonos? ¿Cuáles son convexos? ¿Cuáles son equiángulos? ¿Cuáles son equiláteros? ¿Cuáles son regulares? y ¿cuáles son no regulares?

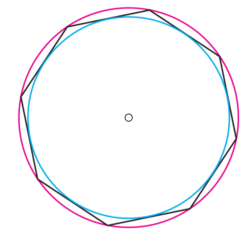
Explica en cada caso el porqué de tu decisión.



El mundo de los polígonos regulares

Los polígonos regulares son aquellos que tienen todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales. Por ello un polígono regular es inscrito en una circunferencia (todos sus vértices son puntos de la circunferencia) y es circunscrito en una circunferencia (todos sus lados son tangentes a una circunferencia).

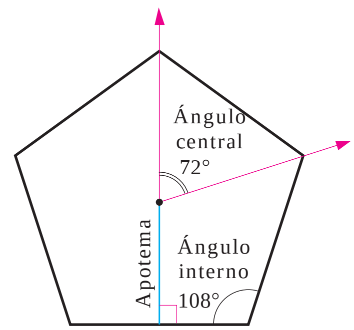

Hexágono regular


Octágono regular

Se denomina ángulo central de un polígono regular el ángulo que tiene de vértice el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos.

Cada ángulo central de un triángulo equilátero mide $\frac{360°}{3}=120°$.

Cada ángulo central del pentágono regular mide $\frac{360°}{5}=72°$.



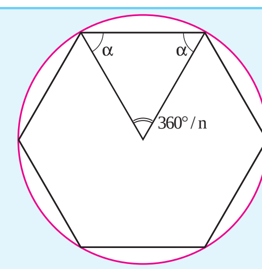
¿Cuánto mide cada ángulo central de un hexágono regular? ¿El de un octágono regular? En general, ¿cuánto mide cada ángulo central de un polígono regular de *n* lados?

Se denomina apotema de un polígono regular al segmento determinado por el centro del polígono y el punto medio de un lado del polígono.

La medida de un ángulo interior de un polígono regular es igual a 180° menos la medida del ángulo central. ¿Por qué?

El ángulo interior de un pentágono mide 108°. ¿Cuánto mide el ángulo interior de un hexágono regular y el de un octágono regular?

En general, ¿cuánto mide cada ángulo interior de un polígono regular de n lados?



$n = 6$

$2\alpha = 180° - \frac{360°}{6} = \frac{180\,(6-2)}{6} = \frac{2 \times 180}{3}$

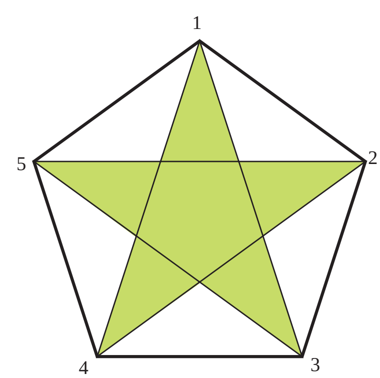
A partir de un polígono regular de n lados se pueden construir polígonos estrellados o formas estrelladas (que son no convexas) y se clasifican en dos categorías: polígonos estrellados y polígonos falsos estrellados.

Para construir una forma estrellada partimos de un polígono regular de n vértices. Enumeramos todos los vértices. Partimos de uno de éstos, por ejemplo del número 1, uniéndolos mediante segmentos de la siguiente manera:

El vértice 1 lo unimos con el 3, luego el 3 con el 5, el 5 con el 7 y así sucesivamente de dos en dos (p=2).

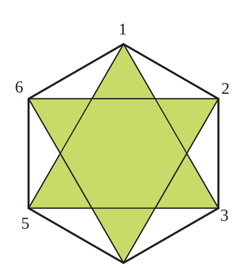
Podemos saltar de tres en tres, 1 - 4 - 7 .... (p=3), etc.

Si al final se han unido todos los vértices y se llega al vértice inicial se obtiene una figura estrellada (polígono estrellado).

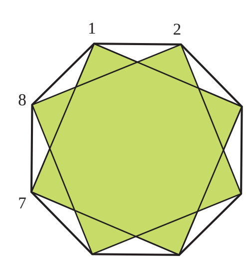


Pentagrama
1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 1 (p=2)

Cuando resulta más de un polígono éste se llama polígono compuesto o falso estrellado.



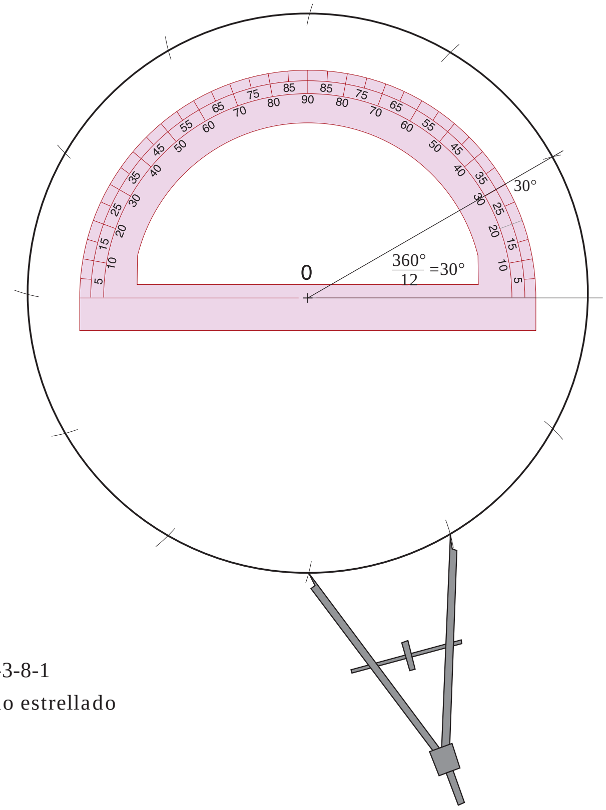
Hexagrama
Falso estrellado
1-3-5-1
2-4-6-2

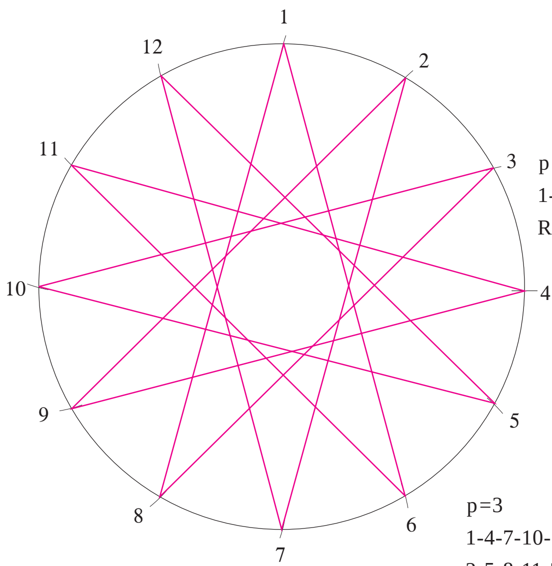


Falso estrellado
1-3-5-7-1
2-4-6-8-2

Otro ejemplo de polígonos estrellados

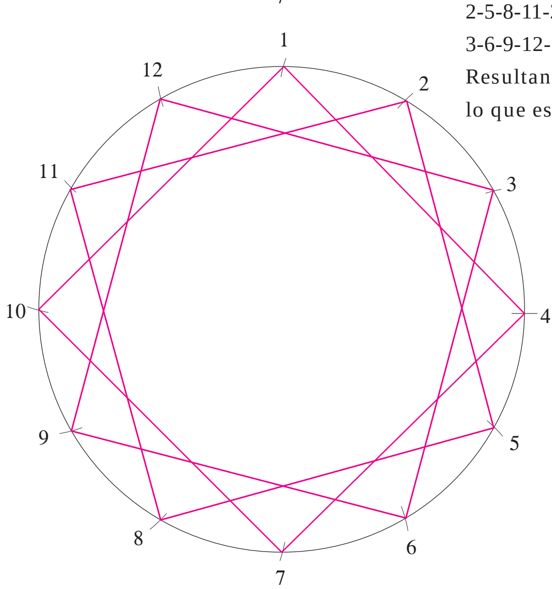
A partir de un dodecágono regular (n=12), el cual se puede construir por duplicación de un hexágono regular o, también, utilizando un transportador y marcando sobre la circunferencia un ángulo central de 360° / 12 = 30°. Tomar un compás y con esta abertura trazar los vértices del dodecágono. Numeramos las marcas del 1 al 12.



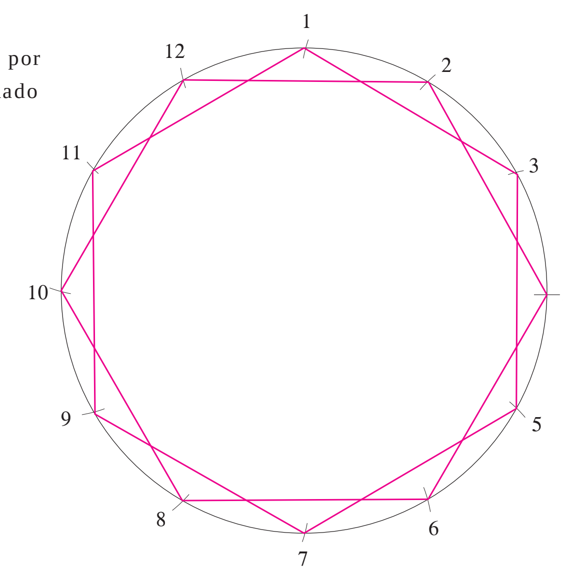


p=5
1-6-11-4-9-2-7-12-5-10-3-8-1
Resulta un dodecágono estrellado

p=3
1-4-7-10-1
2-5-8-11-2
3-6-9-12-3
Resultan tres cuadrados por lo que es un falso estrellado



p=2
1-3-5-7-9-11-1
2-4-6-8-10-12-2
Resultan dos hexágonos por lo que es un estrellado compuesto o falso estrellado

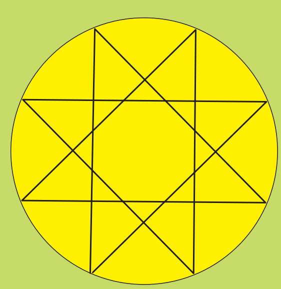


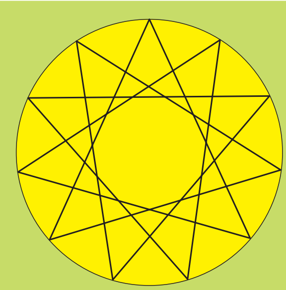
RETO

¿Cuántos octágonos estrellados hay?

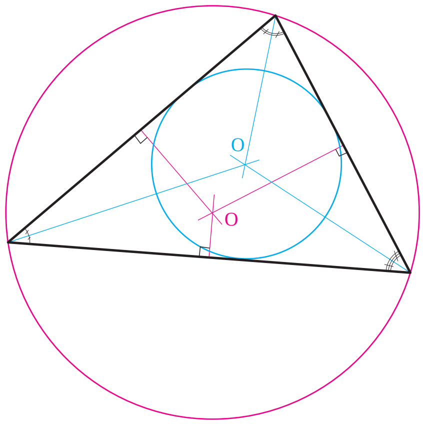
¿Cuantos undecágonos estrellados hay?

Sugerencia: Determina los números primos con 8 menores que 4 y aquellos primos con 11 y menores a 5.





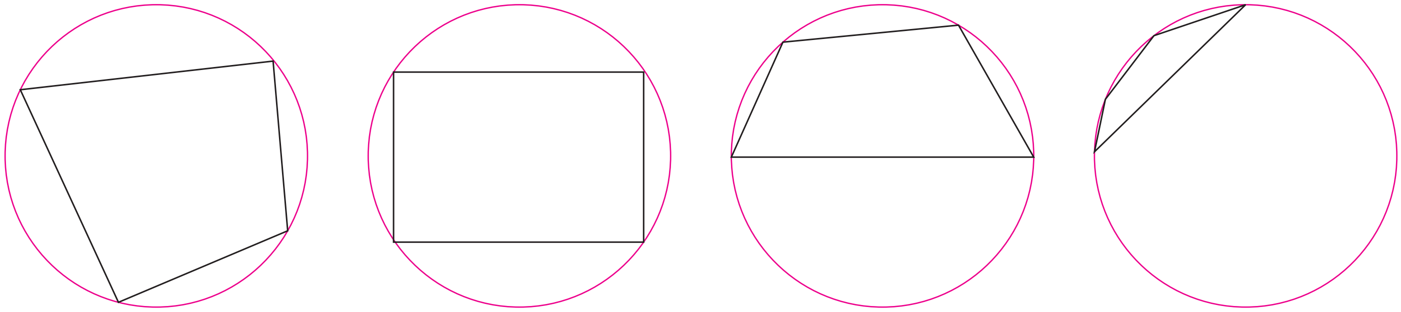
El mundo de los cuadriláteros concíclicos

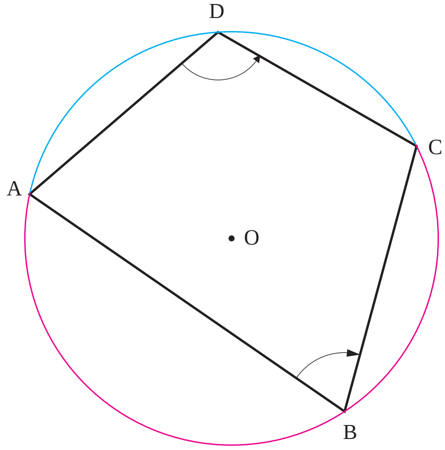


Todo triángulo es inscrito en una circunferencia de centro el punto de corte de las mediatrices de los lados del triángulo y es circunscrito en una circunferencia de centro el punto de corte de las bisectrices de los ángulos internos del triángulo. Además, todos los polígonos regulares satisfacen las mismas propiedades.

En el caso especial de los cuadriláteros, existen los que se pueden inscribir en una circunferencia denominados concíclicos o inscriptibles, como los cuadrados (polígonos regulares de 4 lados) y los rectángulos. Además de los rectángulos, hay otros cuadriláteros no regulares que son concíclicos.

Mostramos varios ejemplos de estos cuadriláteros.





Una caracterización de los cuadriláteros concíclicos es la siguiente:

"Un cuadrilátero es concíclico sí y solo sí tiene dos ángulos opuestos suplementarios".

Veamos porqué si un cuadrilátero es concíclico entonces tiene dos ángulos opuestos suplementarios.

El cuadrilátero ABCD es concíclico. Los ángulos ADC y ABC son ángulos inscritos en la circunferencia por ello m ($\measuredangle$ADC) es la mitad de la medida del arco ABC (en fucsia) y m ($\measuredangle$ABC) es la mitad del arco ADC (en azul). Pero la medida del arco ABC más la medida del arco ADC es 360º, luego m($\measuredangle$ADC) + m($\measuredangle$ABC) = 180°.

Por tanto, los ángulos ADC y ABC, opuestos en el cuadrilátero concíclico, son suplementarios. De igual forma se demuestra que los ángulos BAD y BCD son suplementarios.

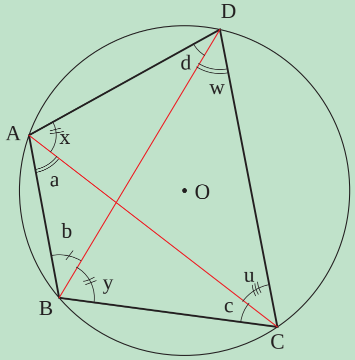
INTERESANTE

Observa en la figura los ángulos del cuadrilátero y los diferentes ángulos que se forman al trazar las diagonales del cuadrilátero. Se establece que si el cuadrilátero es concíclico entonces se cumple cada una de las siguientes relaciones:

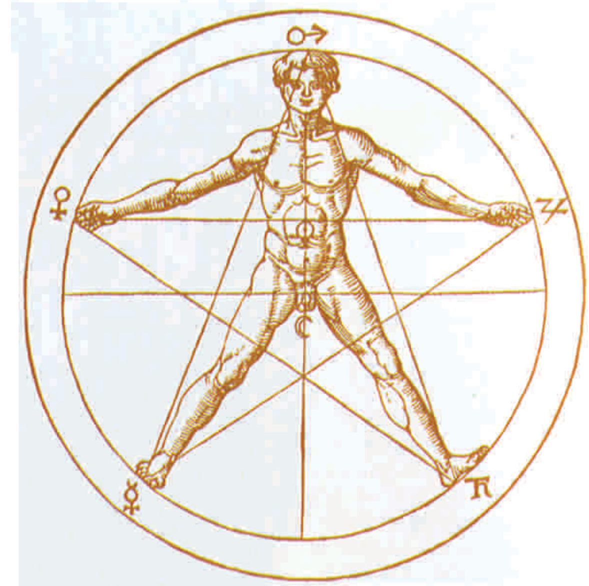
i) m ($\measuredangle$BAD) + m($\measuredangle$BCD)=180° ii) m($\measuredangle$ABC) + m($\measuredangle$ADC)=180°

iii) $a = w$ iv) $b = u$ v) $c = d$ vi) $x = y$

Y recíprocamente, si alguna de las relaciones es verdadera el cuadrilátero es concíclico.



Los polígonos en el diseño, las artes y la arquitectura

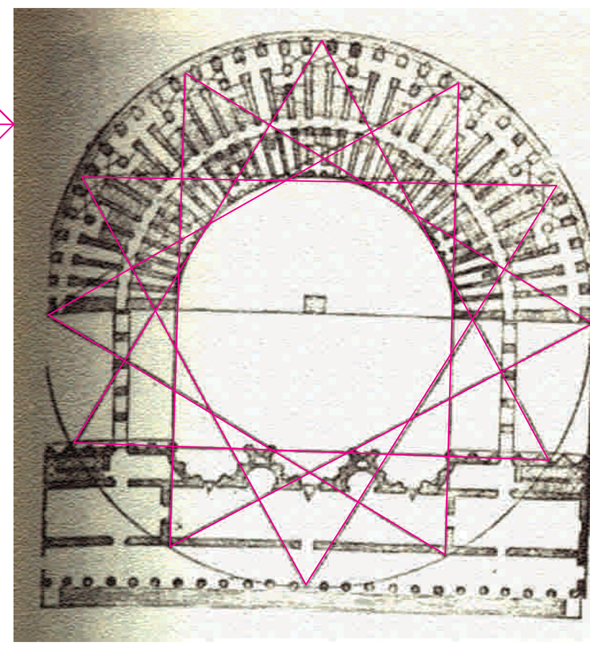


Desde tiempos remotos los polígonos se han utilizado en la pintura, en la arquitectura y en la decoración de monumentos, además de su sentido místico-religioso.

A los pitagóricos, conocedores del dodecaedro que representa El Universo, con sus doce caras pentagonales, les fascinaba este poliedro por su relación con el pentagrama o estrella de cinco puntas que era el símbolo místico y de identificación de esa hermandad, lo que a su vez está relacionado con el número de oro. Éste fue también el signo cabalístico con el que el Fausto del gran escritor alemán Göethe (1749-1832) atrapó a Mefistófeles.

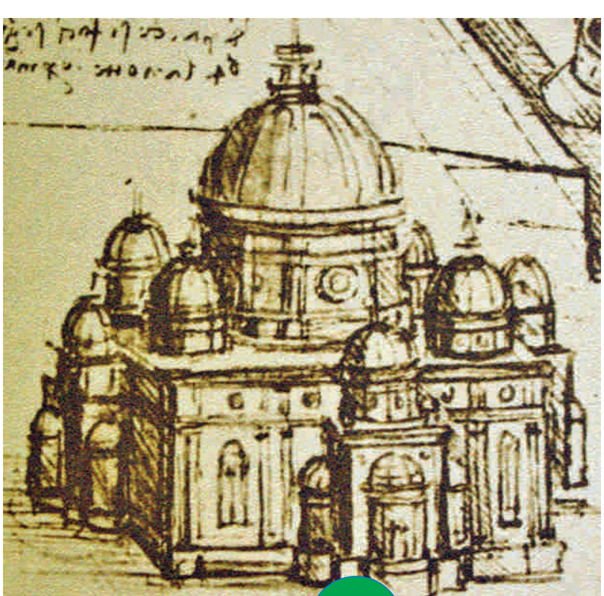
Diseño de un teatro romano realizado por Vitruvio. Se observa una circunferencia para representar el perímetro interior y las filas de asientos. Se inscriben cuatro triángulos equiláteros que reproducen el polígono estrellado compuesto de 12 lados (n=12 y p=4). Los astrólogos utilizan desde tiempos inmemoriales una figura semejante a ésta para representar los 12 signos del zodíaco.

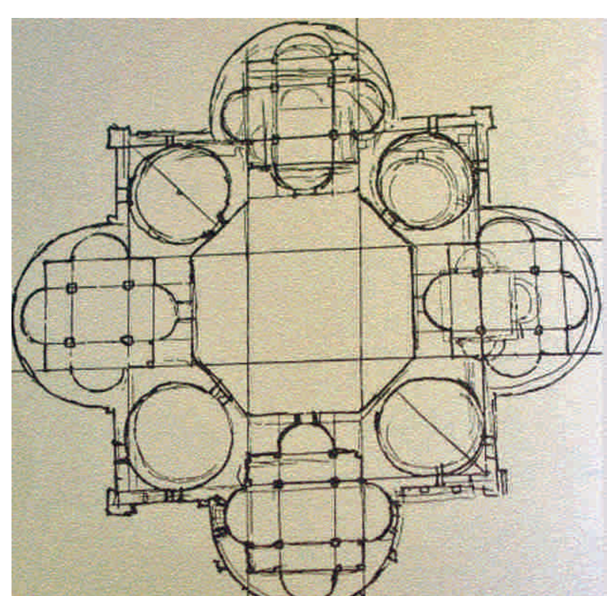
En el diseño de edificaciones como templos, monumentos, edificios, también es común encontrar polígonos.



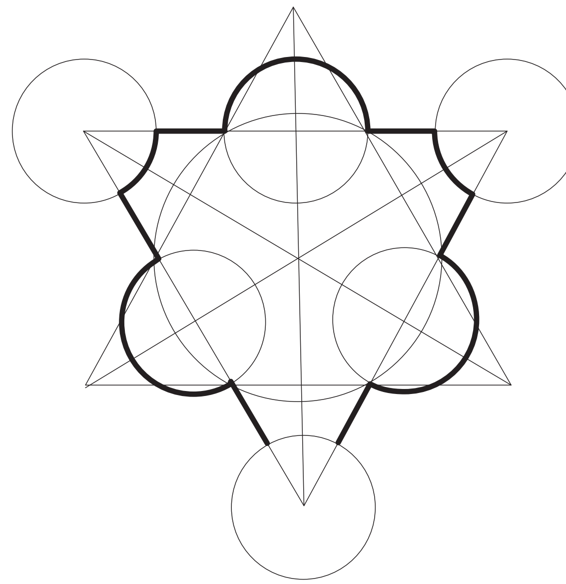
En la circunferencia externa del borde del teatro se situaron las columnas.

El gran genio del Renacimiento italiano, Leonardo Da Vinci (1452-1519), en sus planos para construir iglesias utilizaba los polígonos regulares como una parte esencial del diseño. Allí vemos una planta octogonal en la que se agregan capillas a la iglesia sin que se afecte la simetría del edificio principal.





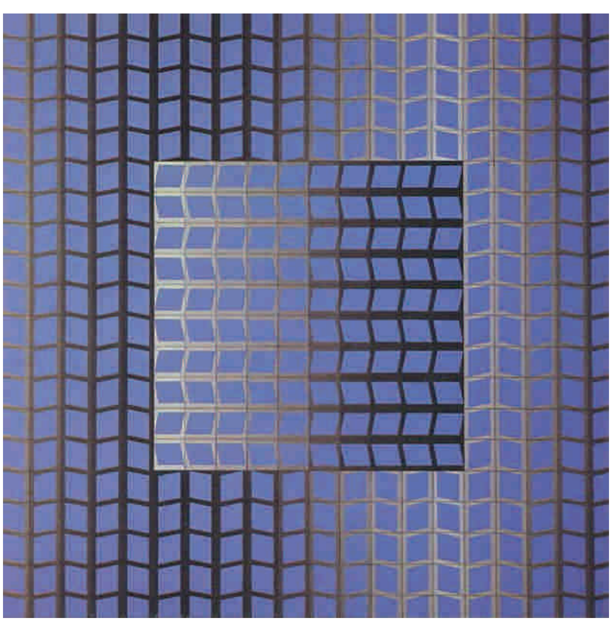
Muchos logotipos de fábricas o marcas comerciales se hacen sobre la base de polígonos, como mostramos a continuación con Mitsubishi Motors y Chrysler Corporation.



El eminente arquitecto italiano de origen suizo, Francesco Castelli, conocido como Borromini (1599-1667), uno de los maestros del barroco italiano, igualmente se valía de los polígonos.

Observemos, a la derecha, el esquema geométrico de la planta de San Ivo alla Sapienza, Roma (1650), que se refleja en su parte superior.

La decoración, el diseño artístico, las artes en general, tienen en los polígonos un gran aliado. Es innumerable la utilización de los polígonos en estos campos, de los que suministramos unas pocas muestras en estos fascículos.



Composición de Víctor Vasarely (Hungría, 1908-1997). Observa los cuadrados y los rombos, que al mantener fija la vista crean una sensación de movimiento. Vasarely es uno de los maestros del arte cinético virtual. Mediante “trucos perceptivos” se observa un movimiento debido a los ángulos de enfoque y al desplazamiento del observador.

En la fotografía observamos el famoso Pentágono sede del departamento de defensa de los Estados Unidos. Éste es el edificio más grande del mundo con forma de pentágono, consistente de cinco anillos consecutivos de cinco plantas cada uno.

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
http://www.fpolar.org.ve/matematica3