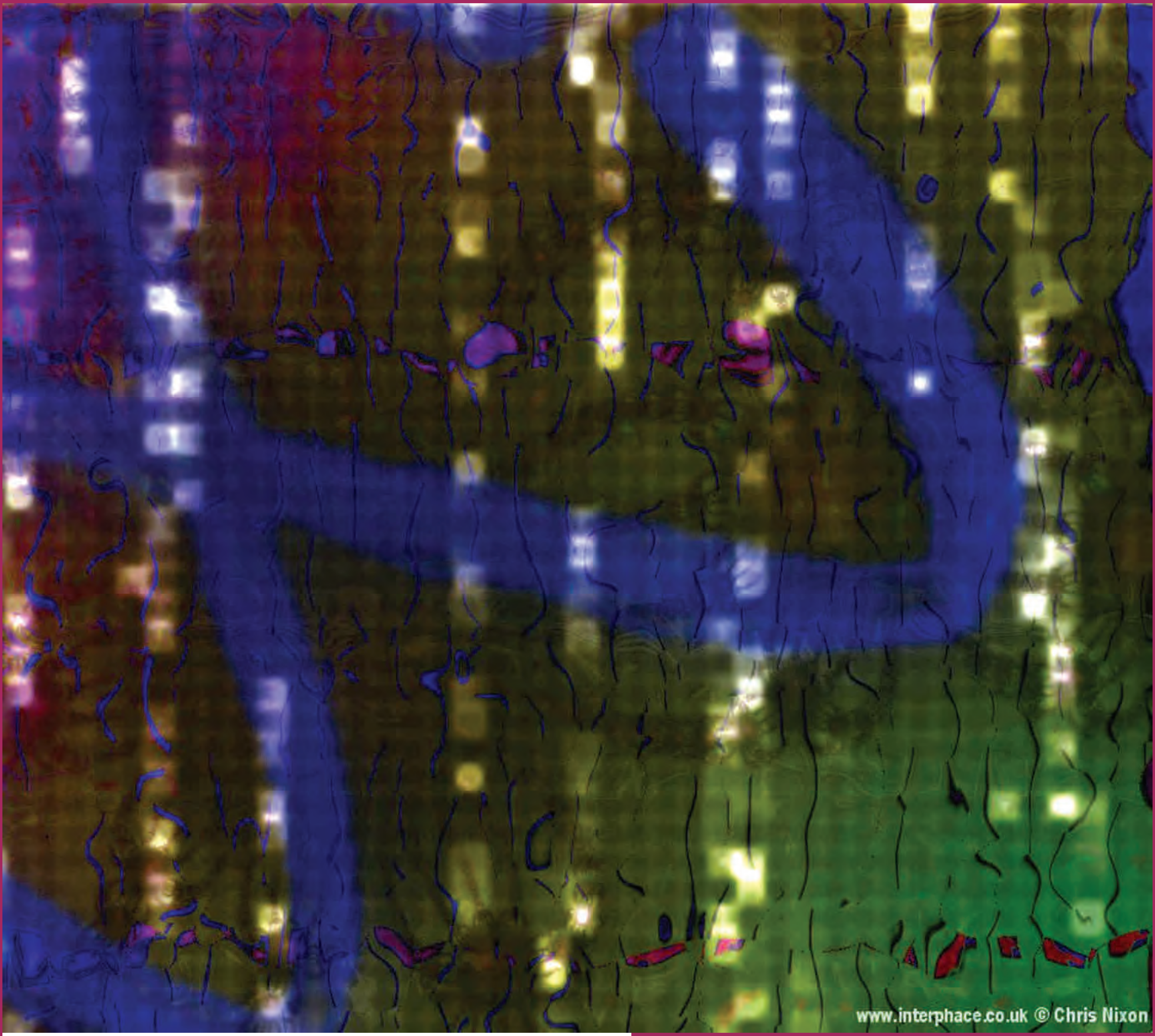
Fundación
POLAR

Matemática Maravillosa

Matrices y sus operaciones



Matrices 4 es una obra digital realizada por Chris Nixon, artista británico de 27 años de edad, el cual utiliza herramientas y programas de computación para realizar sus propuestas artísticas tanto visuales como en audio y video.

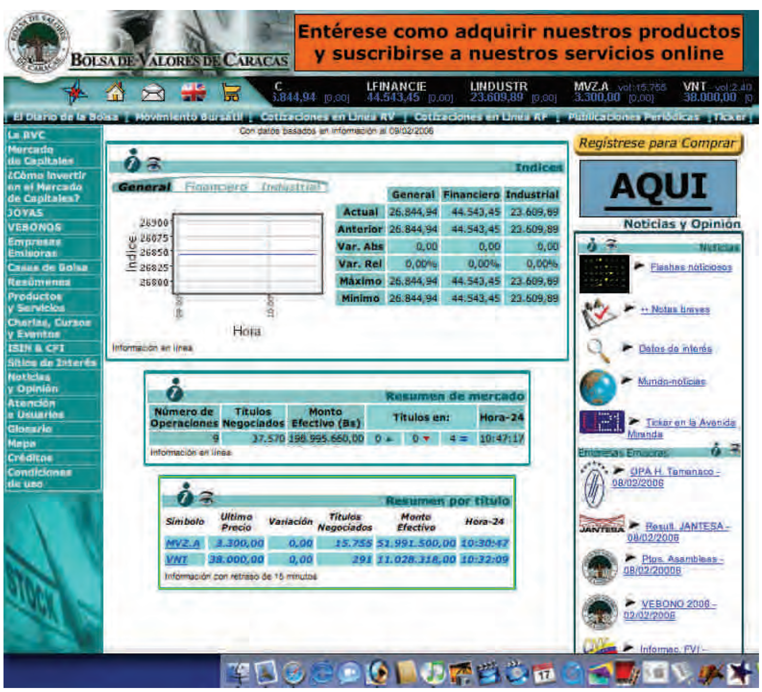
Fuente: http://www.spellsabre.co.uk

Fascículo 19

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela
ÚltimasNoticias

Matrices y vida cotidiana

En esta figura se indican las probables características del tiempo y las temperaturas máximas y mínimas previstas para la ciudad de Caracas, desde el día viernes 30 de diciembre hasta el lunes 2 de enero de 2006.



En la gráfica de la izquierda, la Bolsa de Valores de Caracas presenta los resultados de las transacciones ocurridas en un determinado período, en donde se pueden percibir los cambios y variaciones que se sucedieron así como realizar algunas comparaciones dentro del mismo cuadro.

Este cuadro presenta algunas estadísticas sobre el béisbol en Venezuela para la temporada 2005-2006.

Resumen por título (en Bs)

Símbolo	Último Precio	Variación	Monto Efectivo
MVZ.A	3.300,00	0,00	51.991.500,00
VNT	38.000,00	0,00	11.028.318,00

Todas estas situaciones se expresan mediante cuadros de números en filas y columnas denominados matrices.

TEMPORADA 2005/2006

DIVISIÓN ORIENTAL	JJ	JG	JP
MAGALLANES	62	39	23
LEONES	62	35	27
CARIBES	62	32	30
TIBURONES	62	31	31

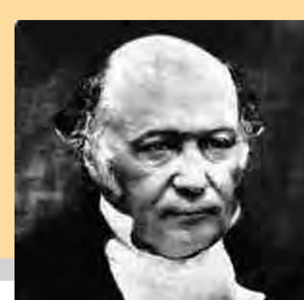
DIVISIÓN OCCIDENTAL	JJ	JG	JP
TIGRES	62	38	24
CARDENALES	62	27	35
PASTORA	62	23	39
AGUILAS	62	23	39

JJ = Juegos Jugados. JG = Juegos Ganados. JP = Juegos Perdidos

SABÍAS QUE...

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por J. J. Sylvester (Inglaterra,1814-1897). El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático W. R. Hamilton (Irlanda, 1805-1865) en 1853.


James Joseph Sylvester


William Rowan Hamilton

En otras palabras, una disposición rectangular de n filas y m columnas, con n x m elementos de un mismo conjunto, es lo que se denomina matriz de orden n por m. Cada elemento de la matriz se llama entrada y usualmente se denota con una letra y un par de subíndices que indican la fila y la columna donde está ubicado. Por ejemplo, a_{23} está en el cruce de la segunda fila con la tercera columna. Dos matrices del mismo orden son iguales si sus respectivas entradas son iguales.

Los elementos de una matriz pueden ser, en general, objetos matemáticos de muy variados tipos. Por ejemplo, números de un conjunto o determinado tipo de funciones. Nosotros trabajaremos exclusivamente con matrices cuyas entradas son números reales.

Leones del Caracas: Campeones de la Temporada de Beisbol Profesional de Venezuela 2005-2006 y campeones de la serie del Caribe 2006.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 0{,}2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz A de orden 2x3
Entrada $a_{23} = -1$

Denominación	Descripción	Ejemplo
Matriz fila	Matriz que tiene una sola fila, siendo su orden 1xm.	$A = (1 \;\; 5 \;\; -1)$
Matriz columna	Matriz que tiene una sola columna, siendo su orden nx1.	$B = \begin{pmatrix} -5 \\ 0{,}2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Matriz nula	Matriz con todas las entradas nulas.	$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz opuesta	La matriz opuesta de una matriz A, es la matriz que tiene por entradas las de la matriz A cambiadas de signo. Esta matriz se denota por -A.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
Matriz traspuesta	La matriz traspuesta de la matriz A es la matriz A^t que se obtiene de la matriz A intercambiando filas por columnas.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
Matriz cuadrada	La que tiene igual número de filas y columnas: n=m. Se dice de orden n. Diagonal Principal: entradas con subíndices iguales (a_{ii}). Traza de una matriz: suma de los elementos de la diagonal principal: $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$.	$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $Traza(H) = 1+3-6 = -2$
Matriz identidad	Es una matriz cuadrada donde todos sus elementos son nulos, salvo los de la diagonal principal que son iguales a 1. La matriz identidad de cualquier orden se denota por I.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es costumbre denotar los puntos del plano con letras mayúsculas, por ejemplo P, Q, etc., mientras que para indicar sus coordenadas escribimos (x, y). Con los vectores se usa la misma notación, para señalar las coordenadas y para indicar el vector se usan letras, por lo general, minúsculas con una flecha, o letras minúsculas en negrilla, *v*.

Aquí identificaremos los puntos del plano con los vectores del plano y con las matrices filas o columnas. Por ejemplo: el punto P de coordenadas (x,y) se identifica con el vector v de coordenadas (x,y), con la matriz fila (x y) y la matriz columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Esto mismo podemos realizarlo con los puntos del espacio, del espacio n-dimensional y con los vectores del espacio o del espacio n-dimensional y con las matrices filas o columnas con el correspondiente número de entradas.

Adición de matrices

Una industria del calzado tiene dos plantas P_1 y P_2. En P_1 se confeccionan zapatos para niños y en P_2 zapatos para adultos. Los costos de elaboración y venta de cada par de zapatos se muestran en el siguiente cuadro:

	Costos de producción de cada par de zapatos (Bs)			
	Niños	Niñas	Mujeres	Hombres
P1	45 000	46 000	0	0
P2	0	0	95 000	97 000

Mientras que las ganancias por la venta de cada par de zapatos es:

	Ganancias por la venta de cada par de zapatos (Bs)			
	Niños	Niñas	Mujeres	Hombres
P1	20 000	16 000	0	0
P2	0	0	40 000	43 000

Con esos datos podemos considerar dos matrices: C de costos y G de ganancias:

$$C=\begin{pmatrix} 45\,000 & 46\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95\,000 & 97\,000 \end{pmatrix} \qquad G=\begin{pmatrix} 20\,000 & 16\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40\,000 & 43\,000 \end{pmatrix}$$

Si deseamos determinar los precios de ventas (P) de cada par de zapatos, podríamos considerar una matriz M donde en cada una sus entradas se coloca la suma de los costos de producción y las ganancias. Así resulta que:

$$M=\begin{pmatrix} 45\,000+20\,000 & 46\,000+16\,000 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 95\,000+40\,000 & 97\,000+43\,000 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} 65\,000 & 62\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 135\,000 & 130\,000 \end{pmatrix}$$

De esta manera, la matriz M corresponde matemáticamente a la suma de las matrices C y G.

$$M=C+G$$

En general podemos sumar algebráicamente matrices del mismo orden.

Si A y B son matrices del mismo orden, se define la matriz suma A+B o A-B como una nueva matriz cuyo elemento c_{ij} es la suma o resta de los elementos $a_{ij} \pm b_{ij}$ de las matrices A y B, respectivamente.

Producto de un número por una matriz

Un establecimiento que vende productos de aseo personal, ha decidido hacer un descuento del 10% en los precios de tres marcas de jabones de tocador. Si los precios actuales están señalados en el siguiente cuadro, a partir de ellos podemos calcular el descuento de cada jabón, tal como se indica a continuación:

Marca de jabón	A	B	C
Precio por unidad (en Bs)	1 550	1 225	1 350

Marca de jabón	A	B	C
Descuento por unidad (en Bs)	0,1·1 550 = 155	0,1·1 225 = 122,5	0,1·1 350 = 135

Utilizando matrices también podemos obtener este resultado. En el caso planteado, podemos considerar la matriz fila $P = (1\,550 \quad 1\,225 \quad 1\,350)$ que representa los precios de los jabones de las tres marcas. Cuando se calculó el descuento por marca, multiplicamos el precio de cada una de ellas por 0,1. Así podemos definir el producto del número 0,1 por la matriz P, como:

$$0{,}1\,P = (0{,}1\cdot 1\,550 \quad 0{,}1\cdot 1\,225 \quad 0{,}1\cdot 1\,350\,) = (155 \quad 122{,}5 \quad 135\,).$$

En general, el producto de un número λ por una matriz A es una matriz denotada por λA, cuyas entradas son las de la matriz A multiplicadas por el número λ. Es decir, la entrada c_{ij} de la matriz λA es λa_{ij}, donde a_{ij} es el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz A.

Producto escalar de vectores

Siguiendo con el ejemplo de los jabones, al comprar 5 jabones de la marca A, 8 de la marca B y 6 de la marca C, se gastan (en bolívares)

$5\cdot 1\,550 + 8\cdot 1\,225 + 6\cdot 1\,350 = 25\,650$

Si representamos por $u = (5, 8\,, 6)$ el vector fila cuyos elementos son las cantidades requeridas de cada una de las marcas y por $v = (1\,550,\ 1\,225,\ 1\,350)$ el vector fila cuyos elementos son los precios en bolívares de cada uno de los jabones, entonces el producto que hemos realizado para obtener el monto total se conoce como el producto escalar de los vectores u y v, el cual se efectúa multiplicando cada una de los correspondientes elementos y luego sumando todos los resultados parciales obtenidos.

En general, si tenemos dos vectores del mismo orden:

$$u = (a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n) \text{ y } v = (b_1, b_2\,, \ldots, b_n)$$

se define el producto escalar de los vectores u y v como:

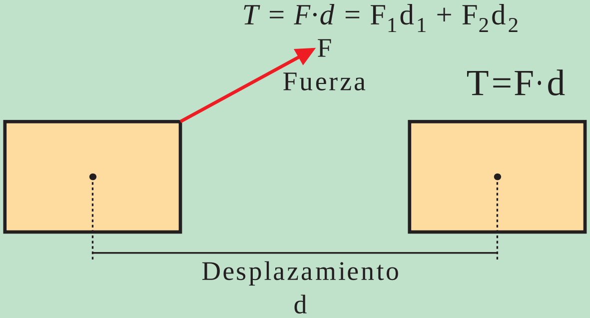
$$u\,.\,v = (a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n)\,.\,(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_n) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

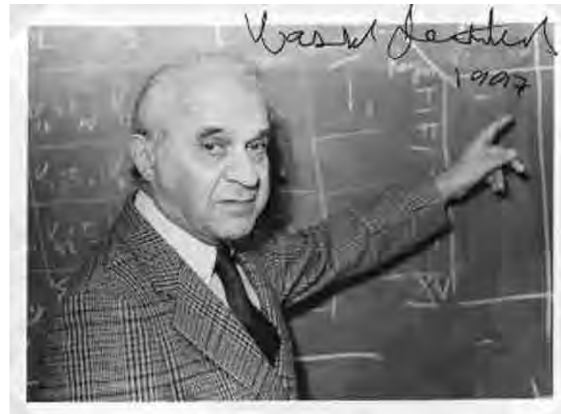
$$\begin{aligned} u.v &= (5,8,\ 6)\cdot(1\,550,\ 1\,225,\ 1\,350) \\ &= 5\cdot 1\,550 + 8\cdot 1\,225 + 6\cdot 1\,350 \\ &= 25\,650 \end{aligned}$$

INTERESANTE

Cuando un objeto se mueve como consecuencia de la aplicación de una fuerza, existe una relación entre el desplazamiento y la fuerza que los físicos denominan Trabajo. Si un objeto realiza un desplazamiento d al aplicársele un fuerza constante F, el trabajo es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. Por ejemplo, si aplicamos a un objeto una fuerza constante de dos componentes $F=(F_1, F_2)$ y se produce un desplazamiento en el plano $d=(d_1, d_2)$, el trabajo realizado es:

$$T = F \cdot d = F_1 d_1 + F_2 d_2$$



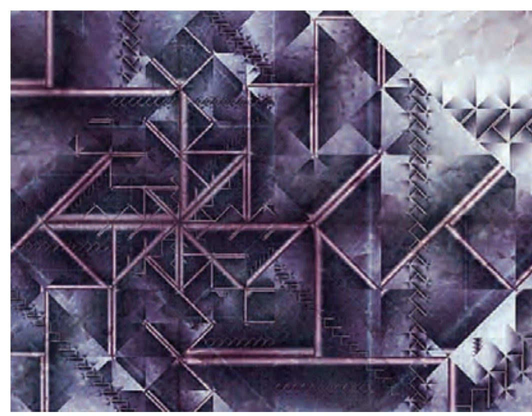


En la década de los años cuarenta del siglo pasado, Leontief (premio Nobel de economía en 1973) introduce un modelo, utilizando matrices, llamado insumo-producto (en inglés input-output), para realizar un estudio de la economía de Estados Unidos, en el que considera las interacciones entre 500 industrias. Con este modelo se pretende predecir los niveles de producción de cada industria, a fin de cubrir sus demandas.

Este gran economista visitó Caracas en 1989 y dictó una conferencia titulada “Análisis y modelos de los sistemas energéticos” en el “Congreso Internacional Energía, Ambiente e Innovación Tecnológica”, patrocinado por la Universidad Central de Venezuela y la Universidad de Roma “La Sapienza”.

Producto de matrices

Usando el producto escalar podemos multiplicar matrices. Para esto consideremos dos matrices A y B, tales que el número de columnas de la matriz A sea igual al numero de filas de la matriz B (esta condición es imprescindible para hacer el producto A·B, en ese orden). Por ejemplo, supongamos que A es una matriz de orden n x m y B es una matriz de orden mxp. Entonces la entrada c_{ij} de la matriz producto A · B es el producto escalar de la fila i de la matriz A, por la columna j de la matriz B.



Matrix Management (2000). Paul DeCelle.

Matriz A · Matriz B = Matriz producto A·B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{nxm} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}_{mxp} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}_{nxp}$$

Fila i

Columna j

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj} \\ &= (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}) . (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj}) \end{aligned}$$

Por ejemplo, consideremos la producción de arroz (en toneladas) en los llanos occidentales y centrales del país en los años 1997 y 1998.

Año	Llanos occidentales	Llanos centrales
1997	429 750	274 000
1998	423 675	221 851

Matriz asociada a la tabla $A = \begin{pmatrix} 429\,750 & 274\,000 \\ 423\,675 & 221\,851 \end{pmatrix}_{2x2}$

Si queremos calcular la producción total de arroz de los Llanos durante los años 1997 y 1998 basta multiplicar la matriz A por la matriz columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{2x1}$.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 429750 & 274000 \\ 423675 & 221851 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 429750 + 274000 \\ 423675 + 221851 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 703750 \\ 645526 \end{pmatrix}_{2x1}.$$

INTERESANTE

Con las operaciones de adición y multiplicación que se han definido, las matrices cuadradas de orden n, por ejemplo de orden 2, tienen propiedades similares a las operaciones de adición y multiplicación de los números enteros: asociatividad de la adición y de la multiplicación; conmutatividad de la adición; existencia de elemento neutro para ambas operaciones; existencia de opuesto y distributividad de la multiplicación respecto a la adición. La diferencia está en que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

La matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro para la adición.

La matriz opuesta -A de una matriz A es el elemento opuesto para la adición.

La matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro para la multiplicación.

INTERESANTE

Si consideramos, por ejemplo, la matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la multiplicamos por la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ y, además, } BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

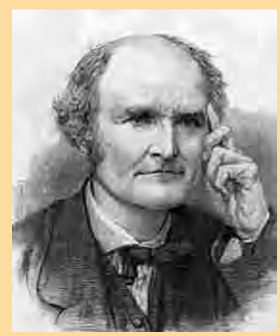
Es decir, el producto de estas matrices, en cada caso, es igual a la matriz identidad. Cuando esto ocurre con una matriz cuadrada A, se dice que la matriz tiene inversa y la matriz B se llama inversa de la matriz A, la cual se denota por A^{-1}.

Existen criterios para determinar si una matriz tiene inversa y métodos para hallarla cuando acontece tal situación.

En el caso de matrices cuadradas de orden 2 podemos afirmar lo siguiente:

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ es invertible si y sólo si $ab\text{-}cd \neq 0$ y, en este caso, la inversa es: $A^{-1} = \dfrac{1}{ab - cd}\begin{pmatrix} b & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$

SABÍAS QUE...



En 1858, Arthur Cayley (Inglaterra, 1821-1895) introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y define las operaciones con matrices.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones:

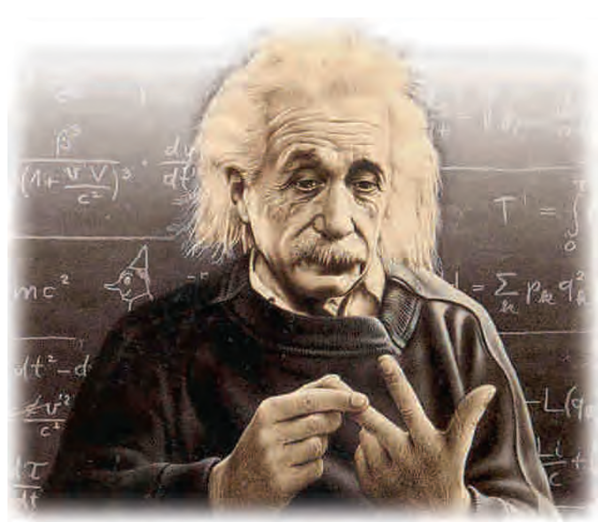
$\begin{cases} a_1x + b_1y = x' \\ a_2x + b_2y = y' \end{cases}$ se puede escribir en forma matricial $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Tengo que pensarlo

En el problema de la fabricación de zapatos, usa el producto de matrices para calcular la ganancia que se obtiene al vender 25 pares de zapatos para niños, 35 para niñas, 45 para hombres y 47 para mujeres.

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Comprueba si es invertible y de serlo halla su inversa.



La matriz es invertible y su inversa es: $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$(1\ \ 1)\begin{pmatrix} 20\,000 & 16\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40\,000 & 43\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 35 & 0 \\ 0 & 47 \\ 0 & 45 \end{pmatrix} = (3\,921\,000)$

Resultados

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web: **http://www.fpolar.org.ve/matematica3**