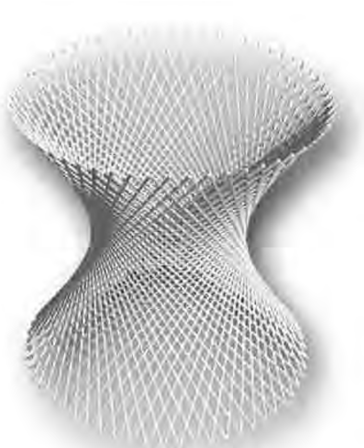
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa
Cónicas y cuádricas

El hiperboloide de una hoja es una superficie reglada ya que se pueden trazar segmentos de recta en su superficie. Muestra de ello lo tenemos en este puente peatonal que está en la calle Corporation de Manchester, Inglaterra.

Fuente: http://www.sondasespaciales.com

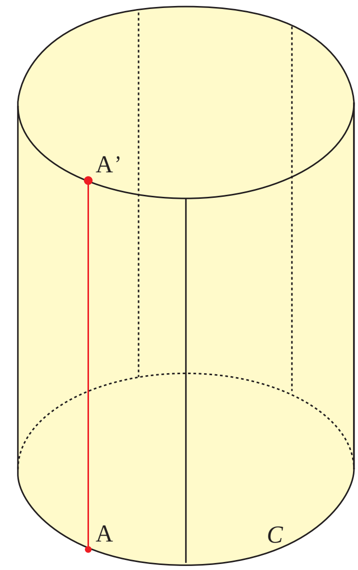
MM



Fascículo 18

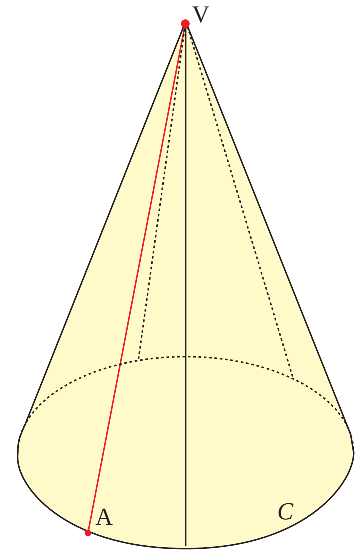
Cuando el segmento AA' se mueve paralelamente a sí mismo, a medida que el punto A recorre la circunferencia *C* se genera la superficie cilíndrica.

AA' se llama una generatriz de la superficie.

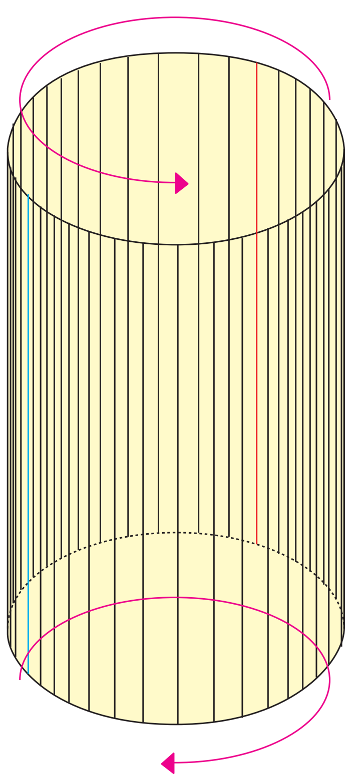


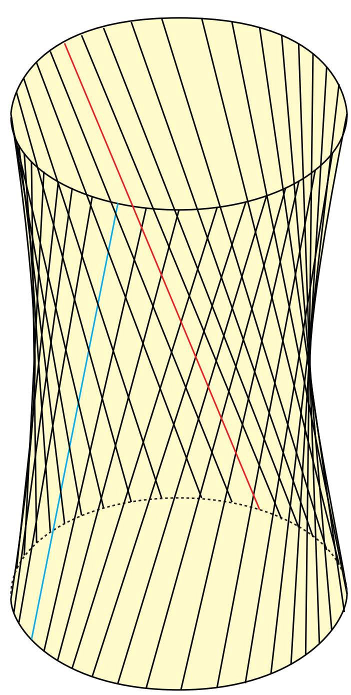
Cuando el segmento AV se mueve manteniendo fijo el vértice V, a medida que el punto A recorre la circunferencia *C* se genera la superficie cónica.

AV se llama una generatriz de la superficie.

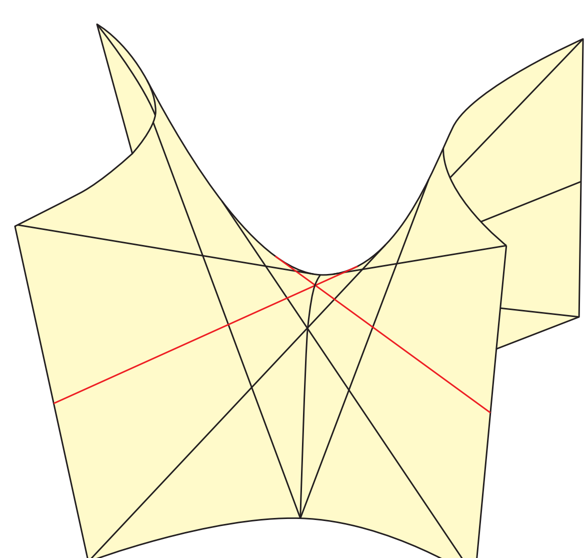


Esa propiedad de ser superficies generadas por rectas no la tienen la esfera, ni el elipsoide, ni el hiperboloide de dos hojas, ni muchas otras superficies. En cambio, un hiperboloide de una hoja es una superficie reglada lo cual es fácil constatarlo. Para ello basta con torcer un poco la superficie cilíndrica agarrándola por sus dos bases y suponiendo que es flexible (con hilos de alambre fino o cuerdas): tiene dos conjuntos de rectas que no son paralelas y situadas en la superficie.

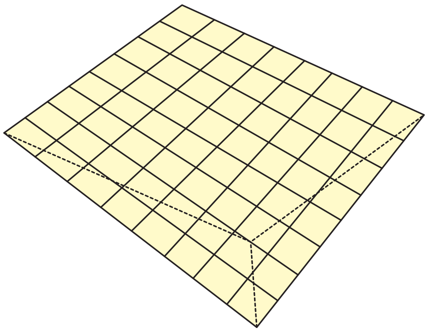




También el paraboloide hiperbólico es una superficie reglada. Tiene dos conjuntos de rectas que no son paralelas entre sí y situadas en la superficie.

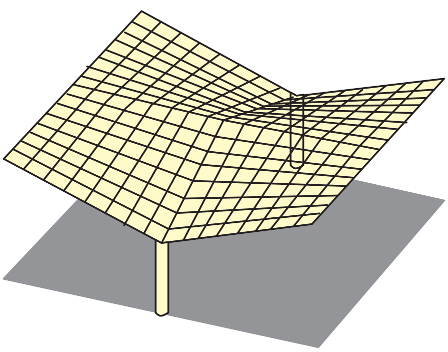


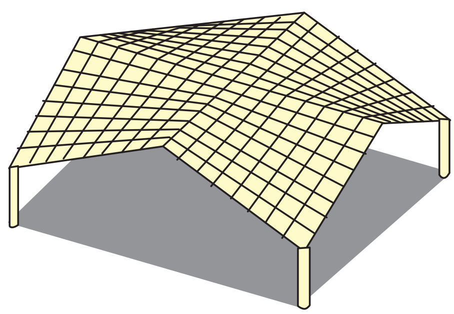
Modelo de paraboloide hiperbólico deformable realizado con filamentos

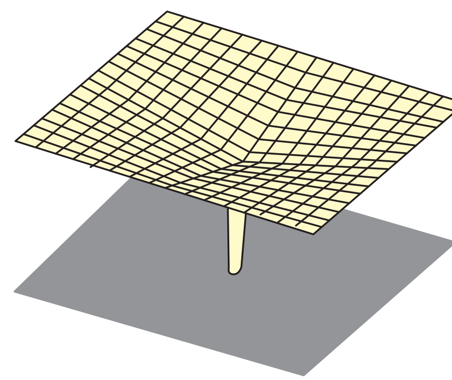


Un paraboloide hiperbólico se puede construir apretando hacia abajo un vértice de un rectángulo y manteniendo asidos los otros tres vértices.

Esa propiedad de dichas cuádricas hace que esas superficies regladas se puedan construir con varillas rectas, lo cual se aprovecha en la construcción de obras civiles de las que mostraremos varias de ellas.



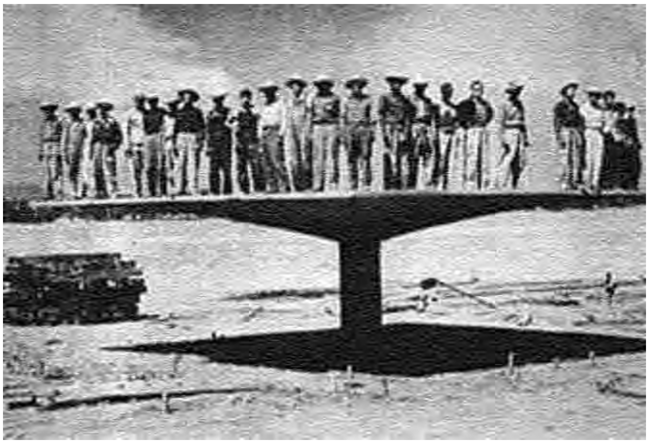




El paraboloide hiperbólico se utiliza en el diseño y construcción de techos que tienen una variedad de formas. Se colocan "rectángulos deformables".

A la derecha se muestra la Catedral de St. Mary (1970), en San Francisco (Estados Unidos), diseñada por Paul A. Ryan y John Lee, con los ingenieros consultores Pier Luigi Nervi (Roma) y Pietro Bellaschi (MIT, Estados Unidos). Su cima es una cúpula en forma de paraboloide hiperbólico de 60,46 m^3 (2 135 $pies^3$) sostenida por cuatro pilares.

La estructura mostrada a la derecha, Restaurant Los Manantiales en Xochimilco (México), diseñada por el hispano mexicano Félix Candela (1910-1997), está formada por ocho partes iguales de paraboloides hiperbólicos. Félix Candela, uno de los más grandes diseñadores de estructuras de concreto armado, probaba sus realizaciones haciendo subir sobre ellas a todo el personal de la construcción.



SABÍAS QUE...

Eduardo Torroja Miret (España, 1899-1961), hijo de un matemático del mismo nombre, sigue siendo medio siglo después de su muerte la personalidad más importante del mundo estructural español, como se demostró hace unos años en la celebración del centenario de su nacimiento. Su figura como ingeniero proyectista y calculista de estructuras, así como su categoría docente se sitúan por encima de la de técnicos de la calidad de Eugenio Ribera, Félix Candela o Carlos Fernández Casado, e incluso de otras de prestigio internacional como Pier Luigi Nervi. Don Eduardo fue profesor, durante más de veinte años, en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, así como profesor invitado en otras universidades fuera de España. Fue miembro fundador del Instituto Técnico de la Construcción y Edificación (1934) que más tarde (1941) dio lugar al Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento -hoy Instituto Eduardo Torroja- el cual estuvo bajo su dirección hasta su muerte.

El castillo de agua en Fedala (Marruecos), diseñado por Torroja, tiene la forma de un hiperboloide de una hoja, el cual puede ser precomprimido a lo largo de sus dos conjuntos de rectas generatrices. Esto asegura un concreto sin fisuras.

Otras curvas

A través de los distintos fascículos se han representado curvas en un plano, utilizadas tanto en matemática como en las artes, la ingeniería y varias ciencias: cónicas, curvas exponenciales y logarítmicas, curvas potenciales, curvas trígonométricas, entre otras. Hay muchas curvas planas y en el espacio que son ampliamente utilizadas. De éstas solamente estudiaremos dos curvas planas: la catenaria y la cicloide.

Curva catenaria

Es la curva que se forma cuando se tiene un cable homogéneo e inextensible que cuelga suspendido de sus dos extremos bajo su propio peso. Por ejemplo, los cables de conducción de electricidad suspendidos entre dos postes, un tendedero de ropa suspendido, o la forma adoptada por una cadena suspendida entre dos puntos y colgando libremente. El nombre catenaria viene del latín *catenarius* que significa perteneciente o relativo a la cadena (catena).

La catenaria es la gráfica de una función que se escribe en términos de dos funciones exponenciales e^x y e^{-x}. Así, la gráfica de la función:

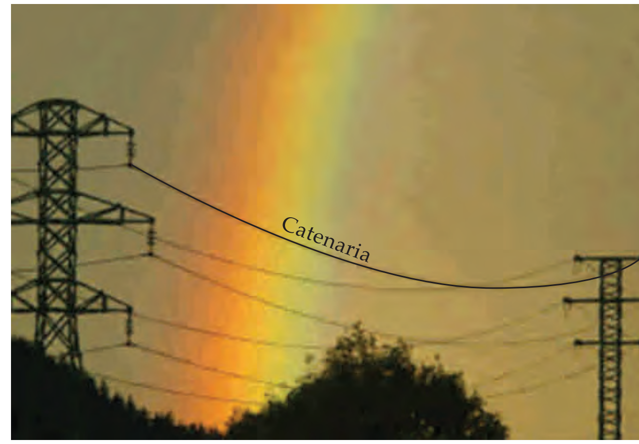
$$y = -1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

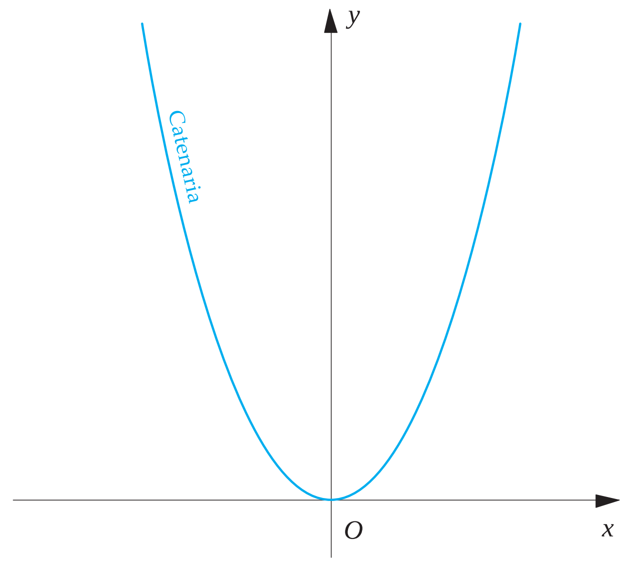
es una catenaria. Esta curva es simétrica respecto del eje Oy.

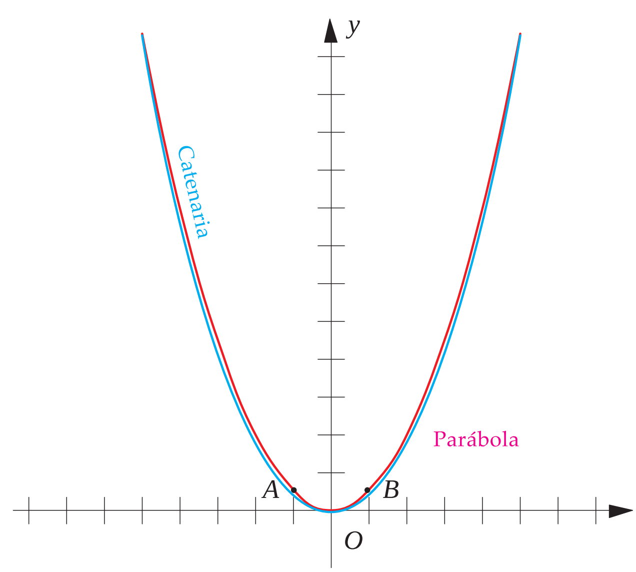
A simple vista no es fácil distinguir entre la forma de una catenaria y la de una parábola. Superponiendo la gráfica anterior (en azul) con la de la parábola de ecuación $y = 0{,}54038x^2$ (ambas curvas pasando por los puntos A y B de abscisas x= 1 y x=-l , respectivamente), observamos que la diferencia entre las dos curvas es muy pequeña pues tienden a confundirse. Cerca del origen la parábola está por debajo de la catenaria y después por encima. Esto se debe a que para valores de x próximos a cero se tiene que:

$$y=-1+\frac{e^x + e^{-x}}{2} = -1 + x^2/2 + x^4/24 + ... \approx x^2/2 = 0{,}5x^2$$

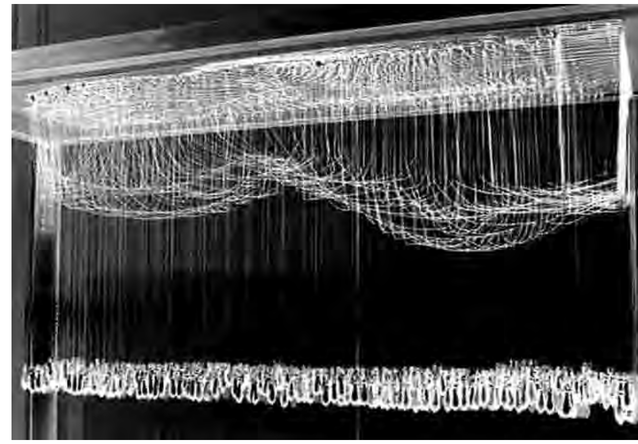
aproximación que es mejor mientras x sea más cercano de 0 (si x>0 es "pequeño", entonces x^4 y las potencias de x de exponente mayor que 4 son "bastante más pequeñas" y por eso las despreciamos).







Si a un tendedero de ropa (o un cable suspendido) le colgamos pesos uniformente distribuidos por unidad de longitud de curva, entonces la catena adopta la forma de "parábola". Esto es lo que sucede en los puentes colgantes.



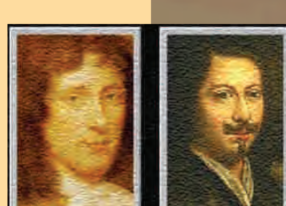
Utilización de catenarias en experimento complejo con pesos uniformes.

Una de las aplicaciones más emblemáticas de la catenaria es el arco Gateway en San Luis-Missouri (Estados Unidos), cuyas secciones son catenarias. Este arco mide 630 pies tanto de altura como de ancho (192,024 m por 192,024 m) en sus bordes externos.

También está el techo de piedra de la iglesia en la Misión Carmel de California con secciones en forma de catenaria.

SABÍAS QUE...

Jacobo Bernoulli (1654-1705) propuso el siguiente problema en la revista *Acta Eroditorum*: Hallar la curva formada por un hilo pesado, flexible, inextensible y de densidad constante en toda su longitud, fijo o suspendido en sus dos extremos. Este problema fue resuelto por él mismo conjuntamente con su hermano Juan Bernoulli (1667-1748) y Charles Huyghens (1629-1695) y publicado en esa revista el año 1691. La solución es una catenaria.



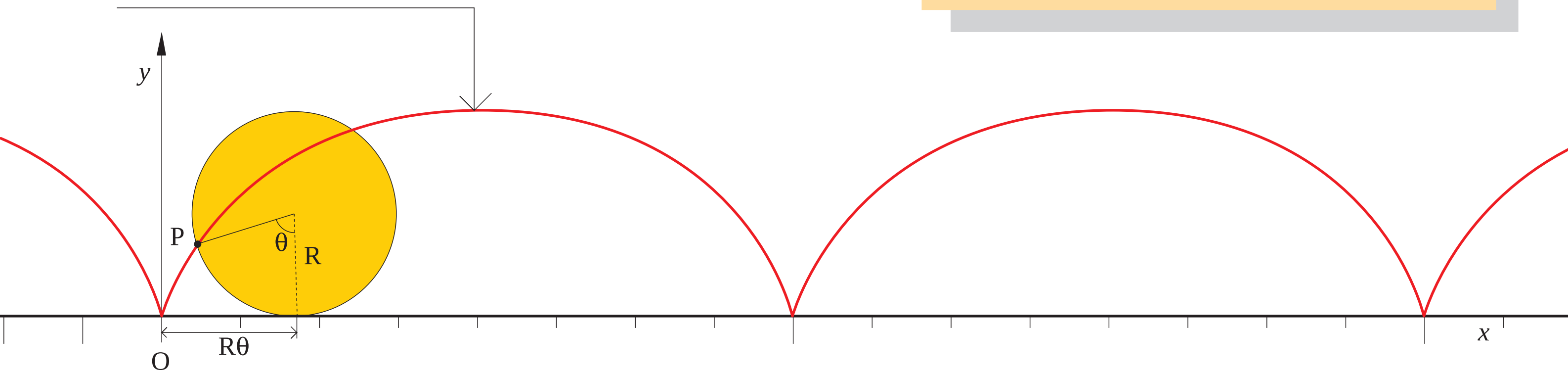
SABÍAS QUE...

Galileo Galilei (Italia, 1564-1642) descubrió la cicloide en 1590. Poco tiempo después el puente de Mezzo sobre el Arno, en Pisa, fue construido con un diseño basado en esta curva.

Curva cicloide

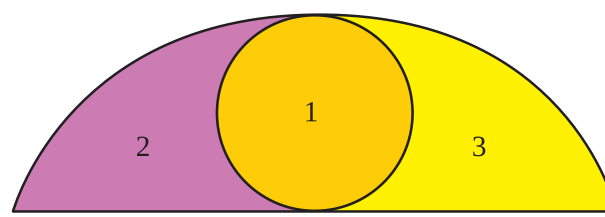
Fue llamada la *Helena* de la geometría, no sólo por sus múltiples propiedades sino también por haber sido objeto de disputa entre muchos matemáticos. El primero que la estudió en profundidad fue Evangelista Torricelli (1608-1647) quien en 1644 publicó un tratado sobre la misma.

La cicloide se produce cuando se hace rodar un disco, sin deslizar, sobre una superficie horizontal. Un punto del borde del disco describe una curva que se denomina cicloide (palabra griega que significa circular). A un giro del disco le corresponde un arco de la cicloide.



La condición de rodar, sin deslizar, implica que el aro gira un ángulo θ (en radianes), a la vez que su centro se traslada una distancia Rθ, tal como se muestra en la figura superior.

Pero, ¿cuáles son estas sorprendente propiedades de la cicloide que hicieron que grandes matemáticos se disputaran su estudio?



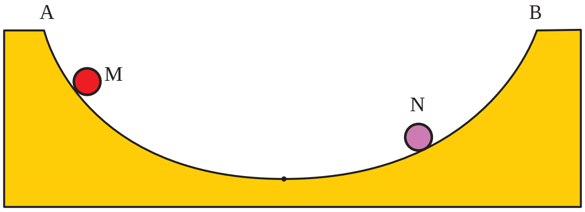
Veamos algunas de ellas:

- El área de la superficie encerrada por un arco de la cicloide y la recta donde rueda el circulo que la genera es tres veces el área del círculo.

  Galileo trató de demostrar esta propiedad con la ayuda de una balanza: dibujó un círculo y una cicloide generada por ese círculo, las pegó a una lámina de madera y luego las recortó. Pesó en una balanza los recortes y encontró que el área bajo la cicloide era como tres veces el área del círculo. Como no creía que pudiera ser un número entero de veces, conjeturó que sería π veces. Más tarde Giles Personne de Roberval (Francia, 1602-1675) y Evangelista Torricelli (Italia, 1608-1647), demostraron que el área bajo la cicloide es exactamente tres veces el área del círculo que da lugar a ella.

- La longitud de la cicloide es cuatro veces la longitud del diámetro del círculo que la genera.

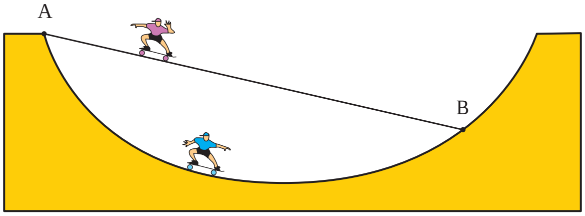
  Esto se puede visualizar dibujando la cicloide en un cartón, recortando el cartón según la cicloide y midiendo con una cinta métrica la longitud de la cicloide (el borde del cartón) y el diámetro del círculo que genera la cicloide.
- La cicloide es tautócrona. Esta curiosa propiedad, descubierta por Christian Huygens, consiste en lo siguiente: despreciando el rozamiento, si invertimos una cicloide y dejamos caer dos metras, una desde el punto M y otra desde el punto N, ¡las dos llegan al punto más bajo P al mismo tiempo!



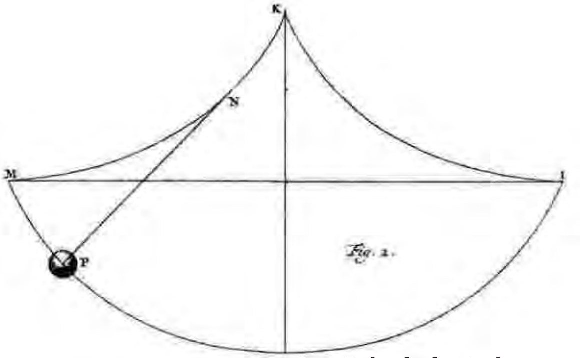
- Una cicloide es braquistócrona, esto significa que la cicloide invertida es la curva de descenso más rápido.

  Imagínate dos puntos A y B en un plano vertical a distinta altura. Supón que tienes un alambre y una cuenta de collar. Se trata de unir el punto A y el punto B con el alambre y una cuenta se coloca en el punto A y se dejar caer para llegar al punto B. A medida que se va cambiando la forma del alambre, la cuenta tarda un tiempo distinto en llegar al punto B. Lo interesante es que cuando el alambre tenga la forma de una cicloide, la cuenta tarda el menor tiempo de ir de A a B. En el dibujo se tiene un segmento de A a B y una cicloide que pasa por A y por B: ¡la cuenta tarda más tiempo en ir por el segmento de A a B que siguiendo la trayectoria de la cicloide!

  Esta propiedad es la base para la construcción de las pistas de patines y patinetas.



- Otra propiedad de la cicloide es la respuesta a esta pregunta: ¿con qué trayectoria debería oscilar un péndulo de tal manera que su período (tiempo que tarda en dar una oscilación) fuese siempre el mismo independientemente de la amplitud de la oscilación? Esta curva denominada isócrona fue descubierta por Christian Huygens (Holanda, l629-1685) en 1673 y resultó ser también una cicloide. Un péndulo que se mueva como el de la figura entre dos cicloides, es isócrono y describe a su vez una cicloide.



Péndulo isócrono

Bibliografía

- GARFUNKEL, Solomon (1994). “For all practical purposes - Introduction to contemporary mathematics. Freeman and Co. 3a. Edición, Capítulo 19. Nueva York.
- http://www.matematicas.net/paraiso/cabri.php?id=cic_alar
- http://personal.telefonica.terra.es/web/imarti22/actividades/actividades/cicloide/marco_cicloide2.htm