



Los más grandes dinosaurios, como el Estegosauro (foto) y el Brontosaurio, tienen una joroba producto de que su espina dorsal (esqueleto) posee forma aproximadamente parabólica que le permite soportar su gran peso.

Fuente: Museo Nacional de Historia. Washington, EEUU.

Fascículo

16

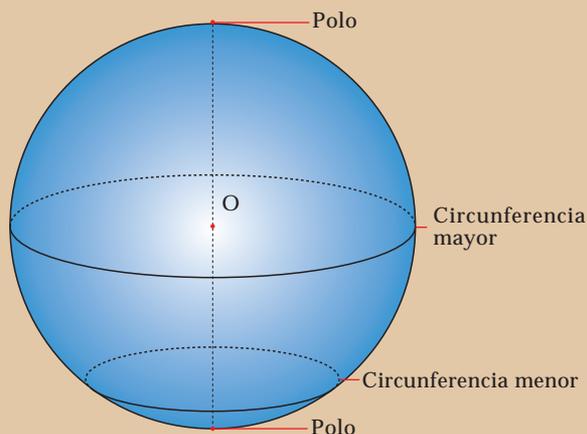
El mundo de las cuádricas

Del espacio al plano

Ahora queremos estudiar ciertas posiciones de planos en relación con algunas superficies, en específico, hacer la intersección (corte) con planos de una superficie del espacio con el fin de obtener curvas sobre esa superficie.

Cortes de una superficie esférica

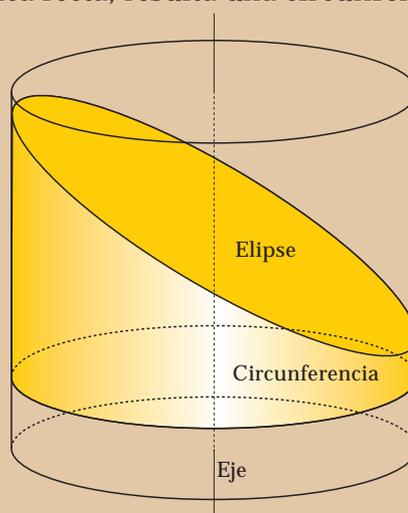
Al hacer un corte con un plano a una esfera (superficie esférica), resulta una circunferencia.



Cuando el plano pasa por el centro O de la esfera se obtiene una circunferencia máxima, cuyo radio es igual al radio de la esfera y la esfera es simétrica respecto de dicho plano. Cada parte de la esfera que está "a un lado" de ese plano es un hemisferio.

Cortes de una superficie cilíndrica

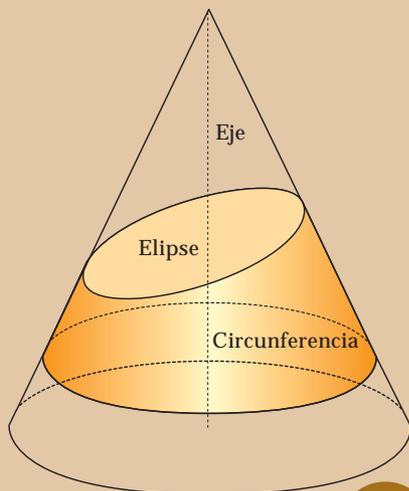
Al hacer un corte con un plano paralelo a la base (perpendicular al eje) a una superficie cilíndrica recta, resulta una circunferencia.



Si el corte se hace con un plano no paralelo a la base y cortando al eje, se obtiene una elipse.

Cortes de una superficie cónica

Al hacer un corte con un plano paralelo a la base (perpendicular al eje) a una superficie cónica recta, resulta una circunferencia.



Si el corte se hace con un plano no paralelo a la base del cono, entonces se obtiene una elipse, una parábola o una rama de hipérbola, dependiendo de la inclinación de ese plano.

En general, sabemos que el corte de una superficie cónica con un plano que no pasa por el vértice es una cónica.

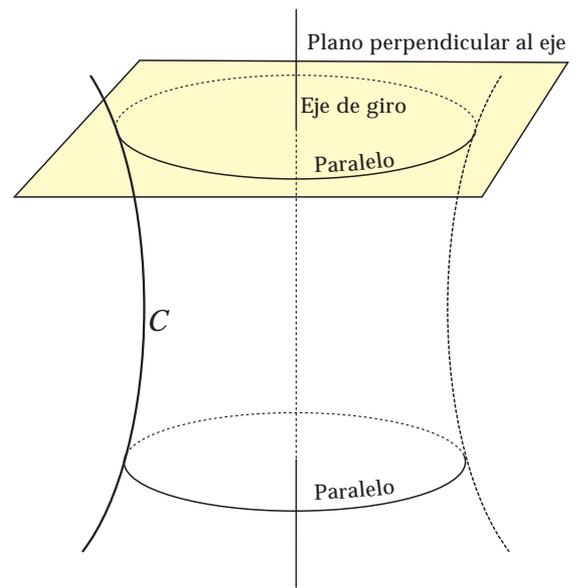


- 1) ¿Qué se obtiene al cortar una superficie cilíndrica recta con un plano que no corta el eje ("paralelo" al eje)?
- 2) ¿Qué se obtiene al cortar una superficie cónica recta con un plano que contiene al eje?
- 3) ¿Qué se obtiene al cortar un poliedro con un plano?

Del plano al espacio

Cuando se hace la rotación de una curva plana C respecto de una recta de dicho plano, se obtiene una superficie del espacio denominada superficie de rotación o de revolución. La recta se llama eje de revolución o eje de giro, y es un eje de simetría de la superficie.

Los cortes de esa superficie de revolución con planos perpendiculares al eje son circunferencias denominadas paralelos.

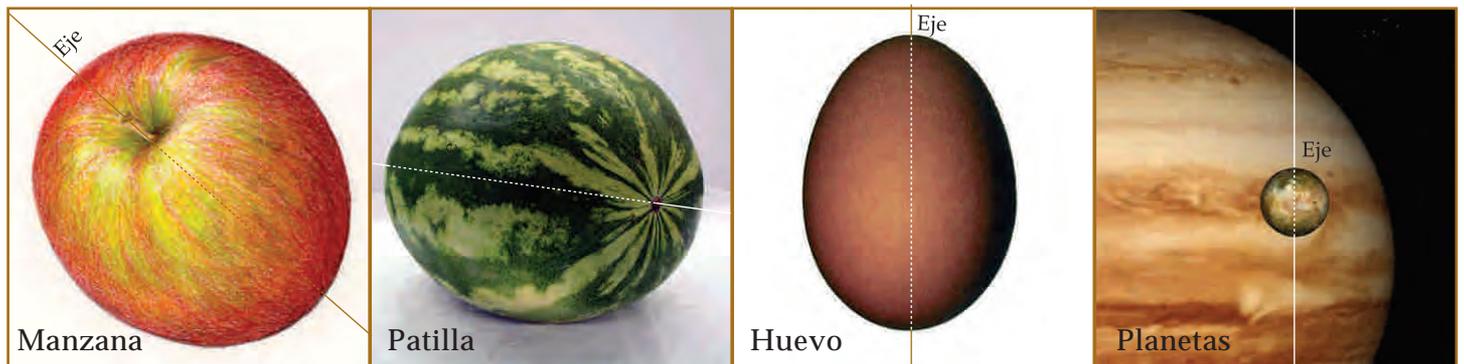


Los sólidos limitados por superficies de revolución se denominan sólidos de revolución y es frecuente encontrarlos en la vida cotidiana.

Los siguientes ejemplos son sólidos de revolución fabricados por seres humanos:

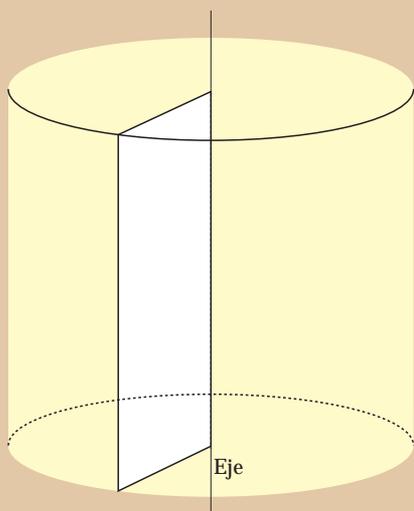


También hay gran variedad de sólidos que se encuentran en la naturaleza que tienen una forma aproximada a sólidos de revolución.

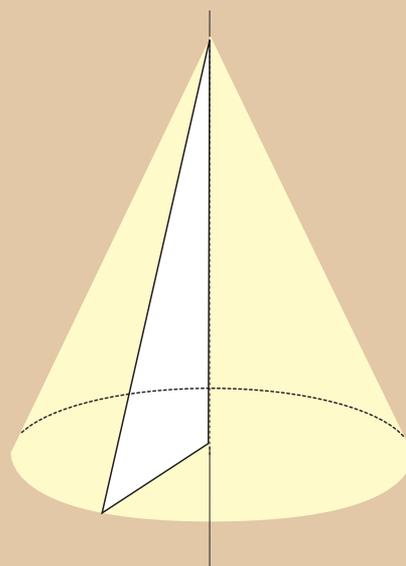


Las cuádricas de revolución

Rotando un rectángulo alrededor de uno de sus lados, resulta una superficie cilíndrica.

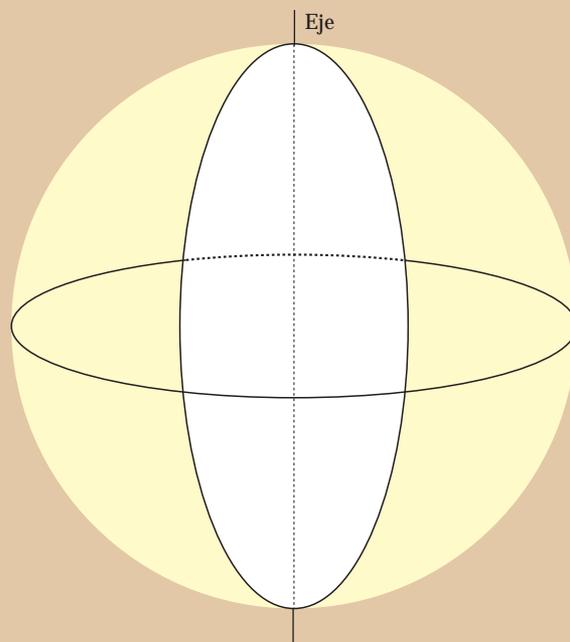
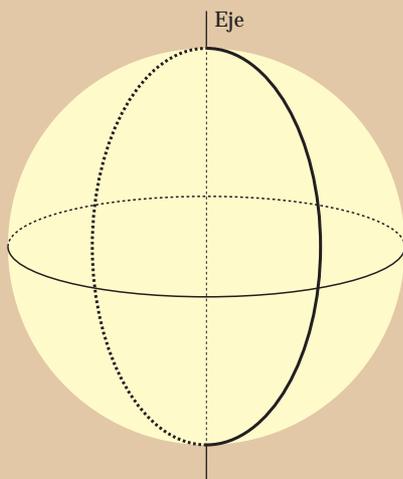


Rotando un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, resulta una superficie cónica.



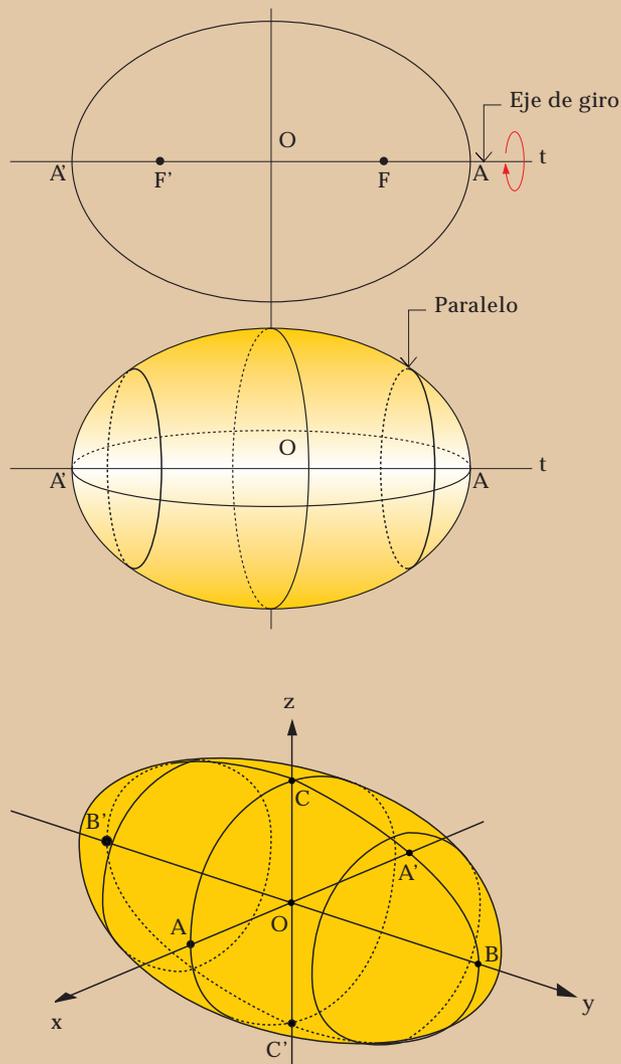
Las superficies cilíndricas, las esferas (superficies esféricas) y las superficies cónicas son tres ejemplos de cierto tipo de superficies denominadas superficies cuádricas o simplemente cuádricas. En este caso, como se obtienen mediante rotación, son cuádricas de revolución. Éstas no son las únicas cuádricas que hay.

Al rotar una circunferencia (o una semicircunferencia) en torno de uno cualquiera de sus diámetros (de su diámetro), se obtiene una esfera.



¿Cuáles superficies se obtienen al rotar otras cónicas: Elipse, parábola e hipérbola?

Si rotamos una elipse alrededor de uno cualquiera de sus dos ejes se obtiene un elipsoide de revolución.

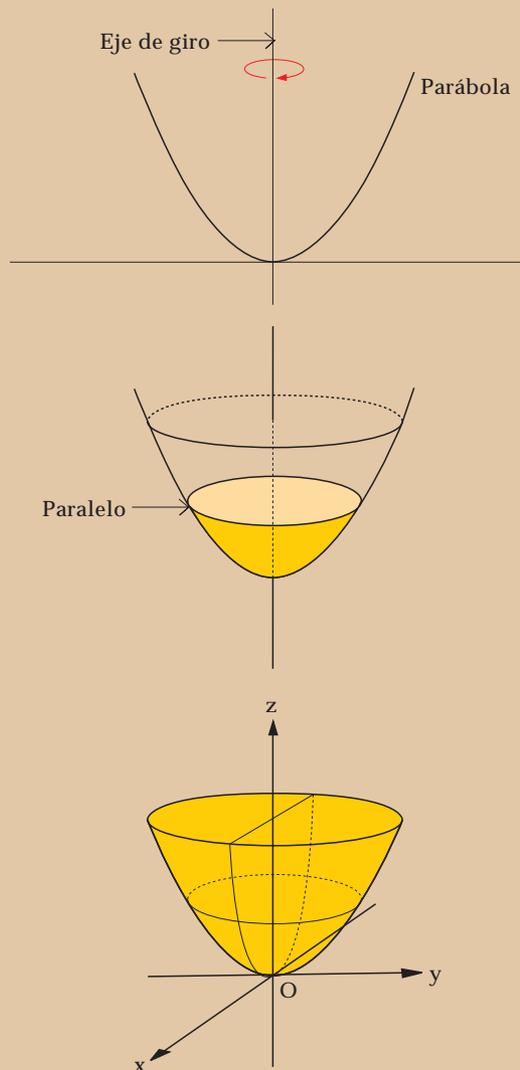


En general, los elipsoides tienen tres planos de simetría y tres ejes de simetría.

Los segmentos de estos ejes limitados por el elipsoide, se denominan longitudes de los ejes o simplemente ejes $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ y $CC' = 2c$. Si un elipsoide tiene sus tres ejes de igual longitud entonces es una esfera.

En un elipsoide de revolución dos de sus ejes son de igual longitud. Si contraemos o ampliamos uno de ellos resulta un elipsoide en general.

Si rotamos una parábola alrededor de su eje se obtiene un paraboloides de revolución.

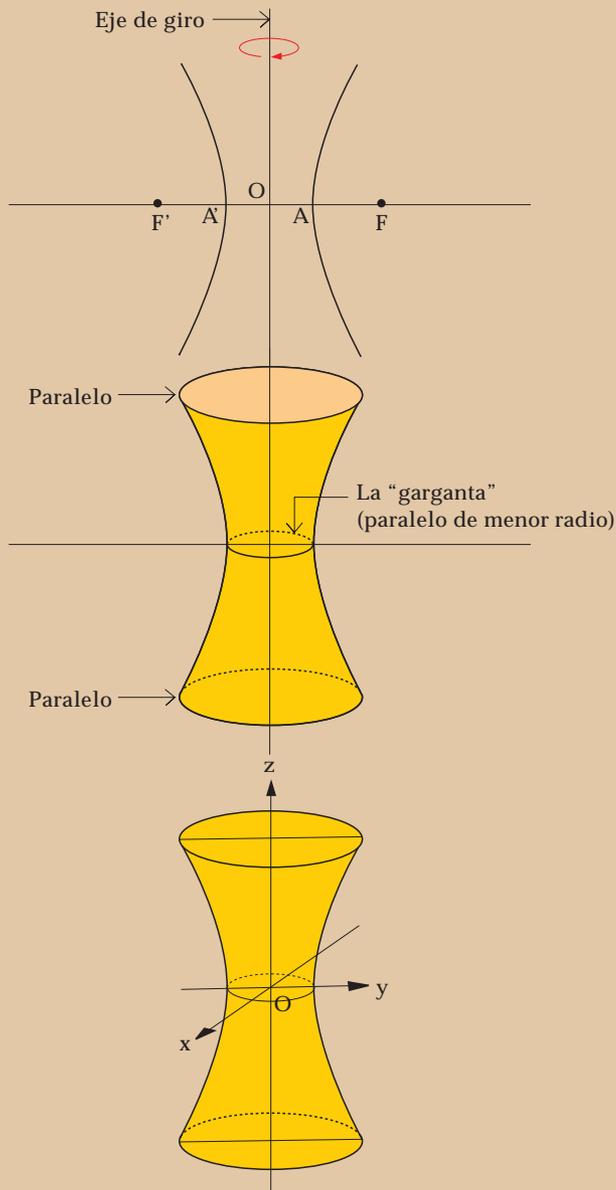


Otro paraboloides es el paraboloides elíptico que tiene un eje y las intersecciones con planos perpendiculares al eje son elipses.

En el caso de ser de revolución, estas intersecciones son circunferencias en vez de elipses.



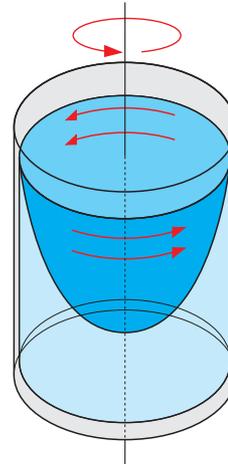
Si rotamos una hipérbola alrededor de su eje conjugado o eje no transversal (eje de simetría entre las dos ramas de la hipérbola) se obtiene un hiperboloide de revolución de una hoja.



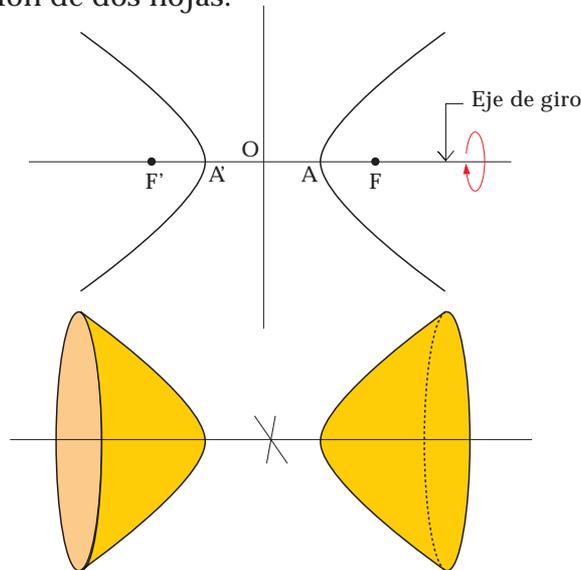
Hiperboloide de una hoja. En la figura, las intersecciones con planos perpendiculares al eje Oz son circunferencias.

Las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola) son las curvas más simples que hay, además de las rectas. Asimismo, en el espacio tridimensional las cuádricas son las superficies más simples que hay, además de los planos. Aún más, así como las cónicas tienen ejes de simetría las cuádricas también los presentan y, además, planos de simetría.

Si un cilindro contiene un líquido, digamos agua, y lo rotamos alrededor de su eje de simetría, entonces la superficie del fluido adopta la forma de un paraboloide de revolución.



Si rotamos una hipérbola alrededor de su eje transversal se obtiene un hiperboloide de revolución de dos hojas.



SABÍAS QUE...



Las cuádricas en el espacio son lo análogo de las cónicas de un plano. Su estudio es bastante antiguo; por ejemplo, Tabit Ibn Qurra (Arabia, 826-901) determinó el volumen de un sector del paraboloide. Ya conocemos que desde el tiempo de los griegos se estudiaban las esferas, los conos y los cilindros.

Esfera y esferoide

Para estudiar los planetas, entre ellos la Tierra, se parte de la premisa de que tienen forma esférica. Esto no es exacto pero es una manera adecuada de representar nuestro planeta a los fines de estudio. En la Tierra distinguimos el radio ecuatorial $a=6\,378,38$ km y el radio polar $b=6\,356,8$ km.

Cuando consideramos la Tierra en forma esférica, se toma como radio el promedio de los dos anteriores ($6\,367,59$ km).

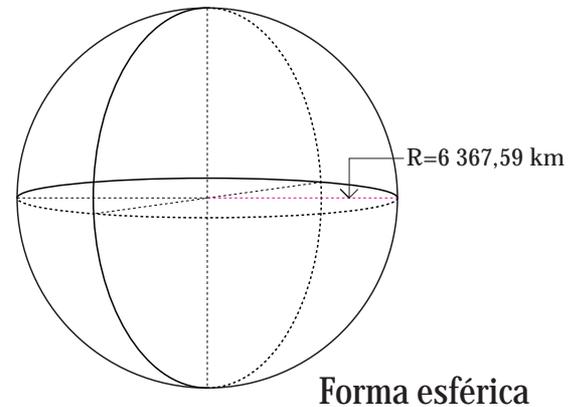
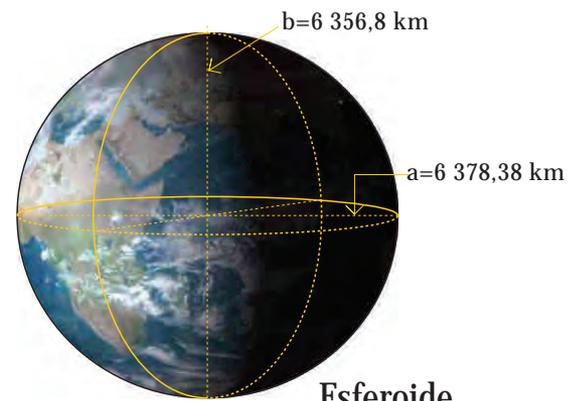
Una forma más exacta de la Tierra es considerarla como un elipsoide de revolución con un "aplastamiento" (aplanado), denominado un esferoide.

El aplastamiento es $(a-b)/a \approx 0,003383$

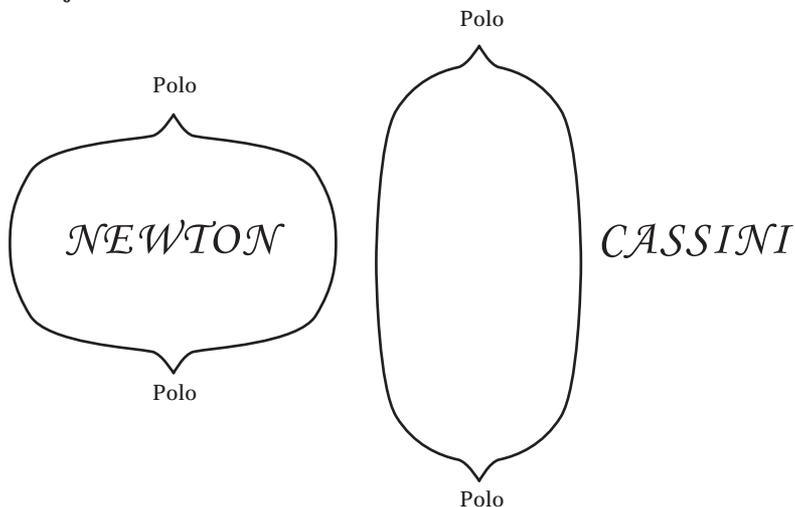
Los primeros satélites americanos, el Explorer 1 y el Vanguard 1, permitieron dar un valor más preciso del aplastamiento, a saber: $1/298,3 \approx 0,003352$, en el primer caso, y $1/297,3 \approx 0,003364$ en el segundo. Éste último es el valor habitual para los geodestas (Fuente: La Recherche, abril/2002).

Con el esferoide se trabaja cuando se requiere un gran nivel de precisión.

Tanto la esfera como el esferoide son aproximaciones a la forma de la Tierra (geoide), puesto que en ésta hay montañas, valles, depresiones, abismos, cordilleras, etc.



Determinar la forma de la Tierra ha sido objeto de muchas investigaciones desde tiempos antiguos. El físico y matemático británico Isaac Newton (1643-1727), en su famosa obra "Principia", mostró que una pequeña rotación debería hacer a la Tierra aplastada hacia los polos. Una concepción distinta la sostuvo Giovanni Cassini (matemático y astrónomo franco-italiano, 1625-1712) a partir de medidas geodésicas erradas y consideró un alargamiento hacia los polos. Las respectivas formas fueron objeto de caricaturas como se muestra en los dibujos.



Giovanni Cassini



Isaac Newton

Hacia 1735, mediante expediciones patrocinadas por la Academia de Ciencias de Francia realizadas en Perú: cerca del ecuador terrestre, y en Laponia: región septentrional de Europa entre Suecia y Finlandia, se pudo comprobar, a través de mediciones, la forma ligeramente aplanada en los polos.


 Destino: Saturno
Cassini-Huygens


25 agosto 2005 - La sonda Cassini lleva más de un año en torno a Saturno, el *Señor de los Anillos*. Sus descubrimientos ya nos hablan de un Saturno que era desconocido y que sigue sorprendiéndonos.

La misión Cassini a Saturno es una misión de ciencia, para que los expertos en este mundo puedan tener nuevos y precisos datos sobre muchas de las incógnitas que la observación del planeta, su sistema de anillos y sus lunas ha ido despertando en los últimos decenios. Y por ello, los responsables de la misión han dedicado un especial interés a la calidad de las imágenes que se obtienen con las cámaras de la sonda interplanetaria.