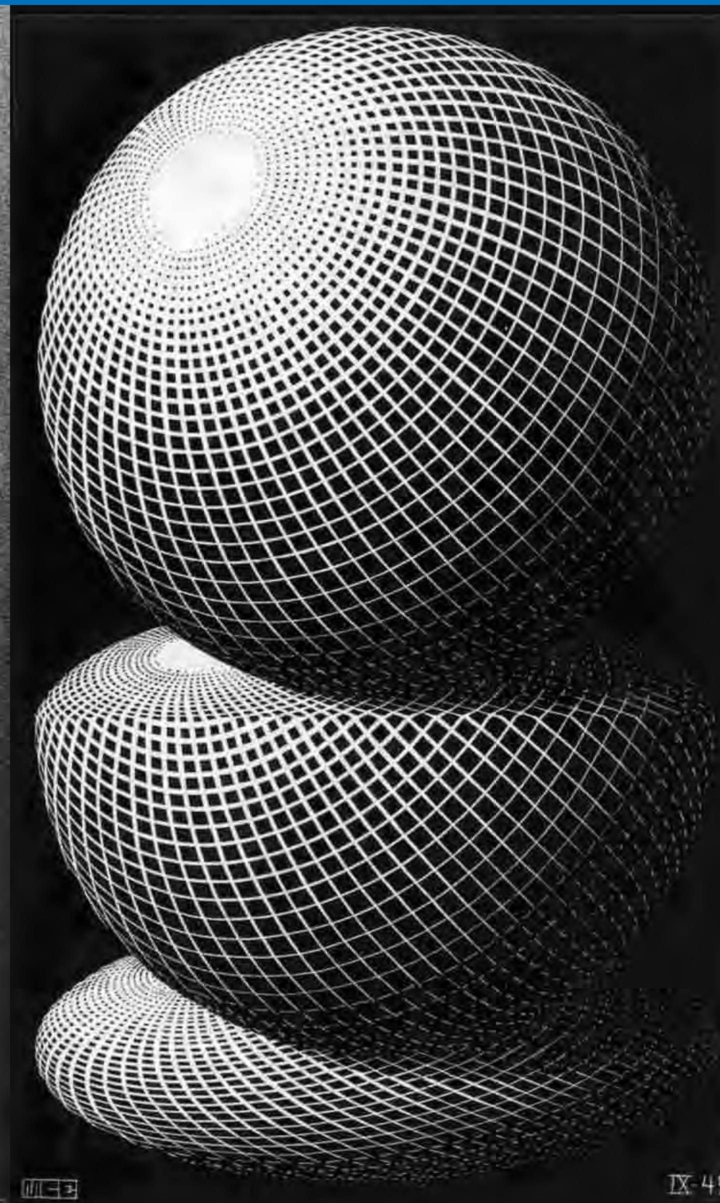
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa
Trigonometría



Izquierda. *Mano con esfera reflectante*. Litografía (1935) de Maurits Cornelis Escher (Países Bajos, 1898-1972). La mano del artista reposa sobre la esfera y se refleja sobre la misma en otra mano que la sostiene. El centro de la esfera es un ojo del artista.

Derecha. *Tres esferas*. Grabado sobre madera (1945) del mismo autor. La imagen superior está conformada de pequeños cuadrados a lo largo de elipses que dan la impresión de tener forma esférica. Realmente es la proyección de una esfera sobre una hoja de papel que se puede cortar con el fin de obtener un círculo. La imagen del medio es el mismo círculo plegado por la mitad y el de abajo es su dibujo en perspectiva.

Fascículo 14

EMPRESAS POLAR
65 años cumpliéndole a Venezuela
Últimas Noticias

El mundo de las funciones inversas

En un diccionario pueden encontrarse diferentes acepciones de la palabra inversa:

- *Contrario* (sentido inverso).
- *Opuesto* a la dirección actual o natural de las cosas.
- *Razón inversa*: relación en la cual un término crece cuando el otro disminuye.
- *Números inversos*: número de los cuales uno es el cociente de la unidad del otro.

La idea de funciones inversas está asociada a lo descrito anteriormente: la función inversa hace lo contrario de lo que hace la función directa. Si la imagen de x mediante la función f es y, que se obtiene por una secuencia de operaciones, la función inversa invierte la secuencia de las operaciones y llega a x a partir de y.

Consideremos el ejemplo de función que graficaremos a la derecha: sea la función f definida $y=f(x) = 5x + 4$. Para el valor $x=0$, su imagen mediante f es $5 \cdot 0 + 4 = 4$ (la función multiplica el valor de 0 por 5 y al producto le suma 4). Como la función inversa desanda el camino: toma la imagen 4, le resta 4 y la diferencia la divide entre 5 y así se obtiene 0.

En este caso la ecuación que define la función inversa se obtiene al despejar x en términos de y en:

$$y = f(x) = 5x + 4$$

resultando $x = \dfrac{y-4}{5}$.

Es costumbre renombrar las variables intercambiándolas

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{5}$$

Esto permite graficar las dos funciones con los mismos ejes de coordenadas. En el dibujo se observa que los gráficos de la función f y su inversa f^{-1} son imágenes reflejadas una de la otra con respecto de la recta $y=x$. Es decir, si colocamos un espejo en la línea de punteada ($y=x$), la imagen de uno de los gráficos es el gráfico de la otra.

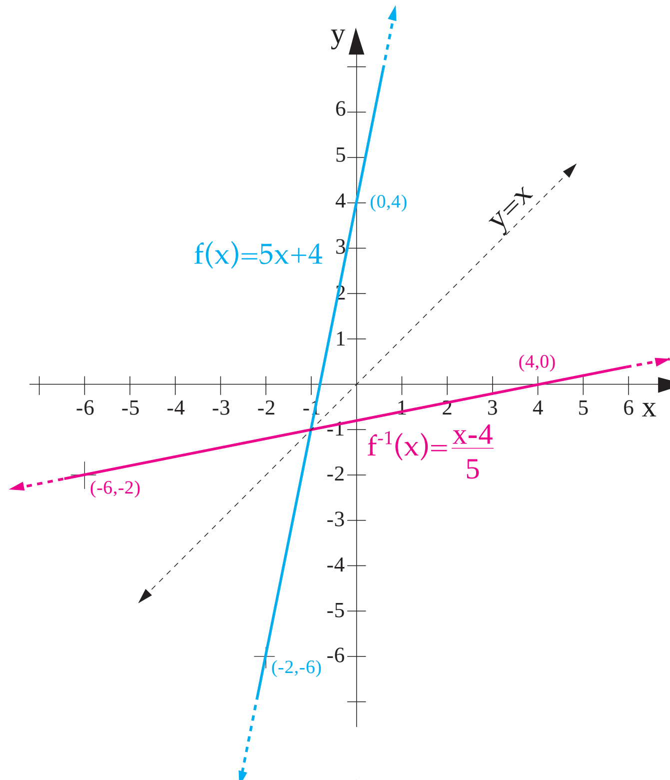
Sea la función cuadrática f definida por la ecuación $y = x^2$. Si despejamos x obtenemos que $x = \pm\sqrt{y}$, así para un valor de $x = 4$ se obtienen dos imágenes 2 y -2. Luego la relación inversa de la función cuadrática $y = x^2$ no es una función porque para cualquier valor de y tendrá dos valores diferentes de x.

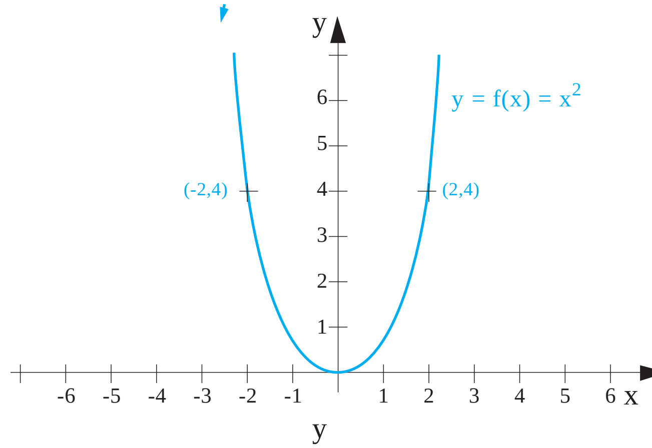
En general es deseable que cuando se trabaja con una función sea posible obtener su función inversa. En estos casos se restringe el conjunto de valores de la variable x de la función dada y así forzamos a que la inversa sea también una función.

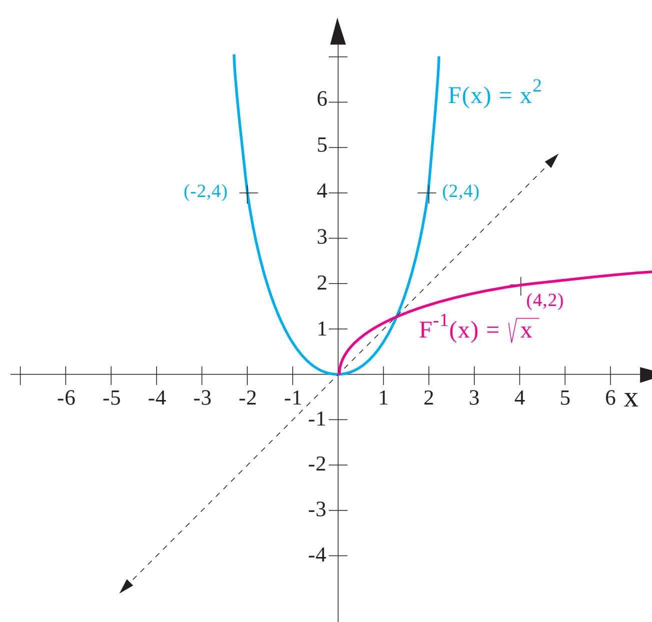
En el caso de la función cuadrática $f(x) = x^2$, consideramos la restricción del conjunto de valores de x al conjunto de los números reales no negativos, es decir $F(x) = x^2$, con $x \geq 0$.

Entonces su inversa F^{-1} es también una función, definida así:

$$F^{-1}(x) = \sqrt{x}$$







Funciones trigonométricas inversas

La función y = sen x, está definida para todo ángulo o para todo número real. Para cualquier ángulo x (medido en grados o radianes) siempre existe un sólo valor de y en el intervalo [-1,1].

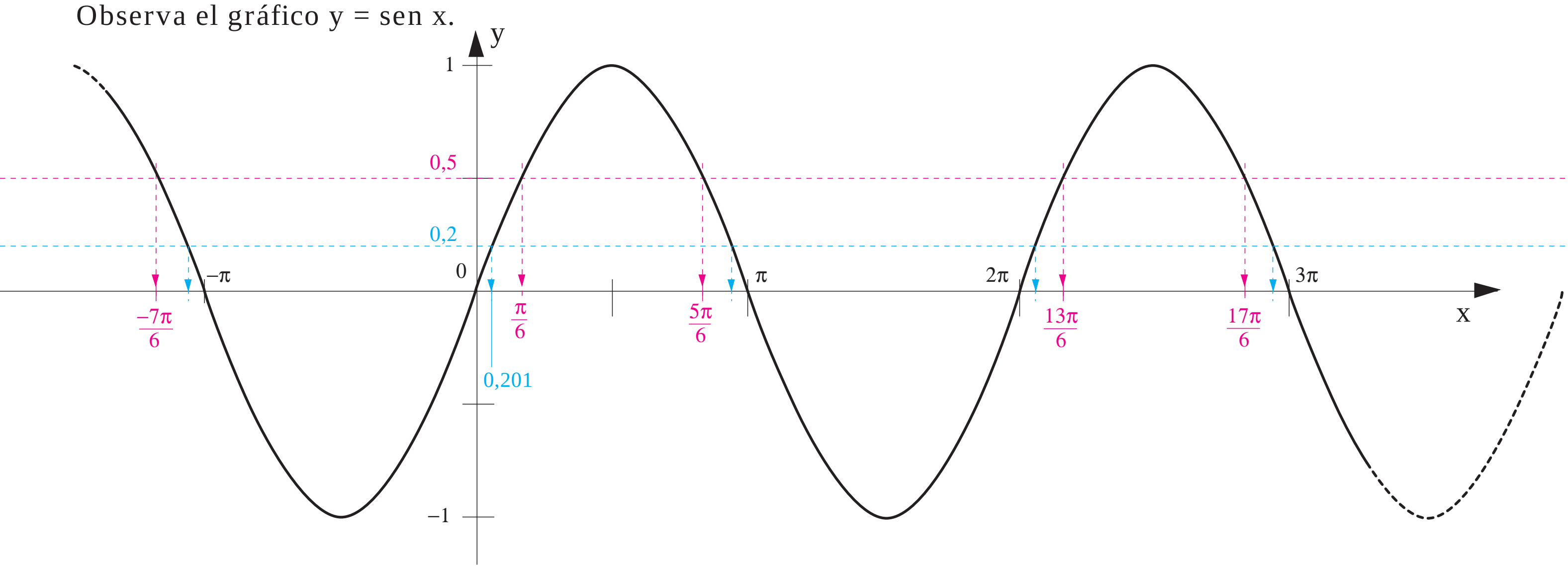
A veces se necesita determinar un número o un ángulo dado. Por ejemplo determinar el número cuyo seno es x tal que sen x = 0,5. Esta ecuación tiene infinitas soluciones tales como:

$$x = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}\ ;\dots$$

(si se trata de ángulos en grados sexagesimales, se tienen soluciones como: -210°, 30°, 150°, 390°,...).

Éste es un caso fácil de resolver. Sin embargo, si se trata de hallar x tal que sen x = 0,2, entonces se necesita de una calculadora para calcular x ≈ 0,201 (para ángulos α en grados sexagesimales, α ≈ 11,54°).

Observa el gráfico y = sen x.

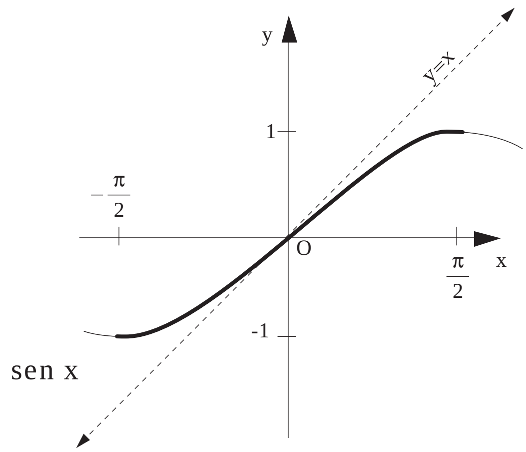


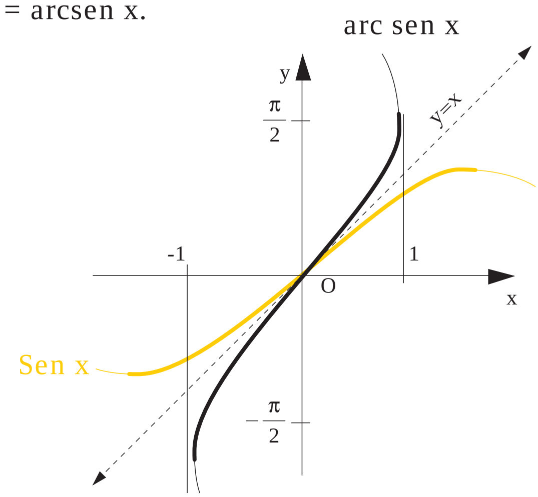
Para que la inversa de *y=sen x* sea también una función, restringimos el conjunto de valores de x. En esta forma definimos una nueva función *sen x* así:

$$y = \text{sen } x, \text{ con } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$$

Entonces la inversa $y = \text{sen}^{-1}x$ denotada por arcsen x para $-1 \leq x \leq 1$ es una función.

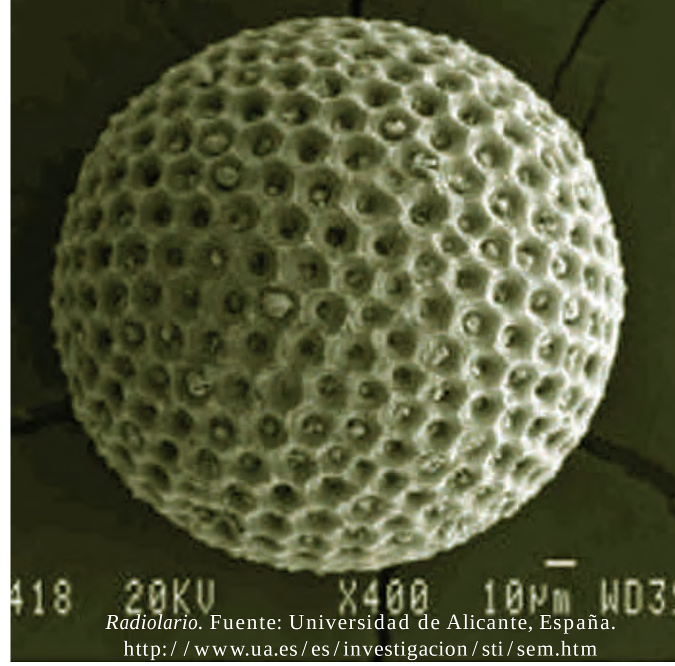
Observa los gráficos de la función sen x y de la función $y=\text{sen}^{-1}x$ = arcsen x.





Observa que la función y=arcsen x es el reflejo de la función y=sen x a partir de la línea punteada que representa la función y=x.

Geometría de la esfera



Radiolario. Fuente: Universidad de Alicante, España.
http://www.ua.es/es/investigacion/sti/sem.htm

En la naturaleza encontramos con frecuencia formas esféricas o casi esféricas como algunos tomates pequeños; ciertas naranjas; huevos de insectos, aves y peces; y pompas de jabón (con fuerzas en equilibrio). Otro ejemplo de formas esféricas está dado por los radiolarios, que son protozoos marinos con una membrana que divide el citoplasma en dos partes concéntricas y en la parte exterior emiten unos seudópodos finos que les sirven para moverse y capturar las partículas orgánicas con que se alimentan. Las armazones de estos radiolarios están formadas por un cuerpo esférico taladrado por muchos poros, de los que salen los seudópodos que le dan una forma estrellada.

El medio donde nos desenvolvemos es tridimensional; sin embargo, muchos elementos con los que convivimos son bidimensionales: pizarrones, periódicos, libros, películas, televisión y hasta los monitores de computadoras. Así aprendemos en un plano a trabajar en el espacio.

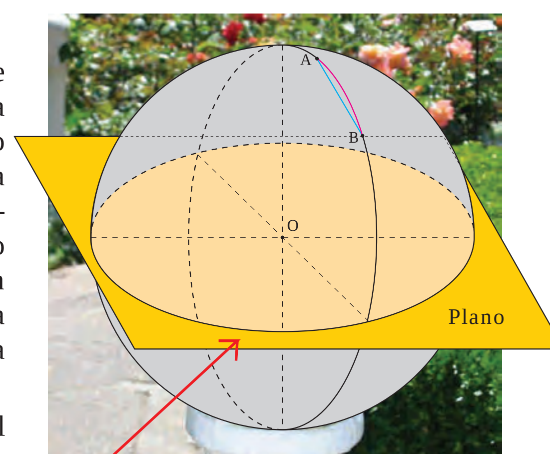
En el plano hemos desarrollado una buena visualización de los conceptos de punto, recta, semirrecta, ángulo y plano.

¿Qué significación tienen los conceptos de punto, recta, semirrecta, ángulo y triángulos, etc., en la esfera?

El punto en la esfera tiene el mismo significado que en el plano: marca una posición.

Si tenemos una esfera sólida (como la de la fotografía) y dos puntos A y B sobre su superficie, la menor distancia entre esos dos puntos se obtendría en línea recta (color azul) cavando un tunel a través de la misma. De esta forma salimos de la superficie y si queremos permanecer en ella debemos pensar qué significado tiene “la mínima distancia” sobre la esfera.

Con cualquier plano que pase por A y B se obtiene una circunferencia sobre la esfera. Entre todas estas circunferencias, la que tiene la menor longitud de arco AB es la que se selecciona como menor distancia entre A y B medida sobre la esfera (color fucsia).



¿Cual será esa circunferencia?

A mayor radio de una circunferencia es menor su “curvatura” ya que ésta es la inversa del radio y, por lo tanto, la circunferencia “se aplana más”. Para entender esto utilicemos nuestro planeta Tierra. Su radio es muy grande (R=6 367,59 km promedio) en comparación con la altura de una persona (1,73 m promedio), y por ello nos parece que estuviéramos en un mundo “plano”. Esta idea de “mundo plano” se mantuvo hasta el siglo XV. En cambio, si nos paramos sobre una esfera de un radio bastante menor, digamos 20 m (Ej.: tanque de gases en una refinería), notamos las “curvaturas” de las circunferencias sobre dicha esfera.

Las circunferencias producto del corte de un plano que pasa por el centro de la esfera, son las *circunferencias máximas*, es decir, las que tiene el mayor radio.

Tales circunferencias son las que se toman como “rectas” en la esfera. Un segmento es un arco de una circunferencia máxima. Con estas y otras nociones se estudia la “geometría de la esfera”. Por ejemplo: por dos puntos distintos A y B que no sean extremos de un diámetro pasa una única recta. Si los dos puntos son extremos de un diámetro determinan “infinitas rectas”. Con estas “rectas” se pueden definir los ángulos, los triángulos, las funciones trigonométricas y establecer relaciones entre las mismas. Todo esto es parte de la trigonometría esférica.

Apliquemos algunos de estos conceptos para determinar puntos sobre el planeta Tierra y "curvas de rumbo" para la navegación.

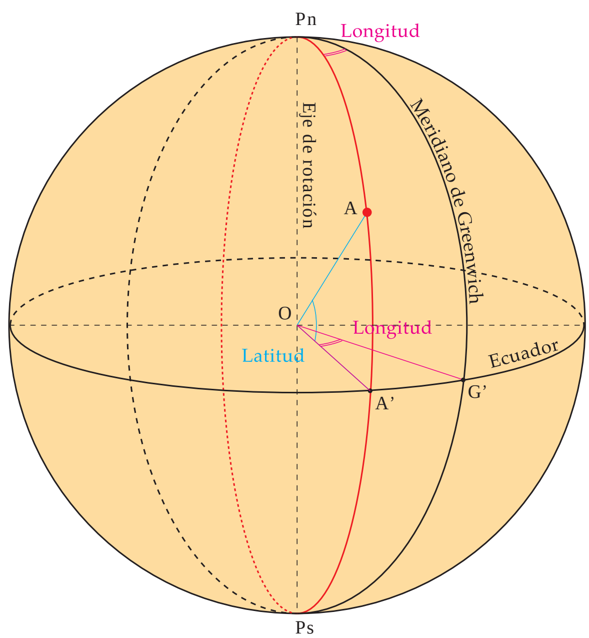
Consideremos nuestro planeta como una esfera y así su eje de rotación determina en su superficie dos Polos: Norte (P_n) y Sur (P_s). Las circunferencias en la Tierra formadas por los planos que la intersecan perpendiculares al eje de rotación son llamadas paralelos de latitud o simplemente paralelos. Llamaremos Ecuador a la circunferencia máxima de estos paralelos. Las circunferencias máximas que contienen a los polos se denominan meridianos de longitud o simplemente meridianos.

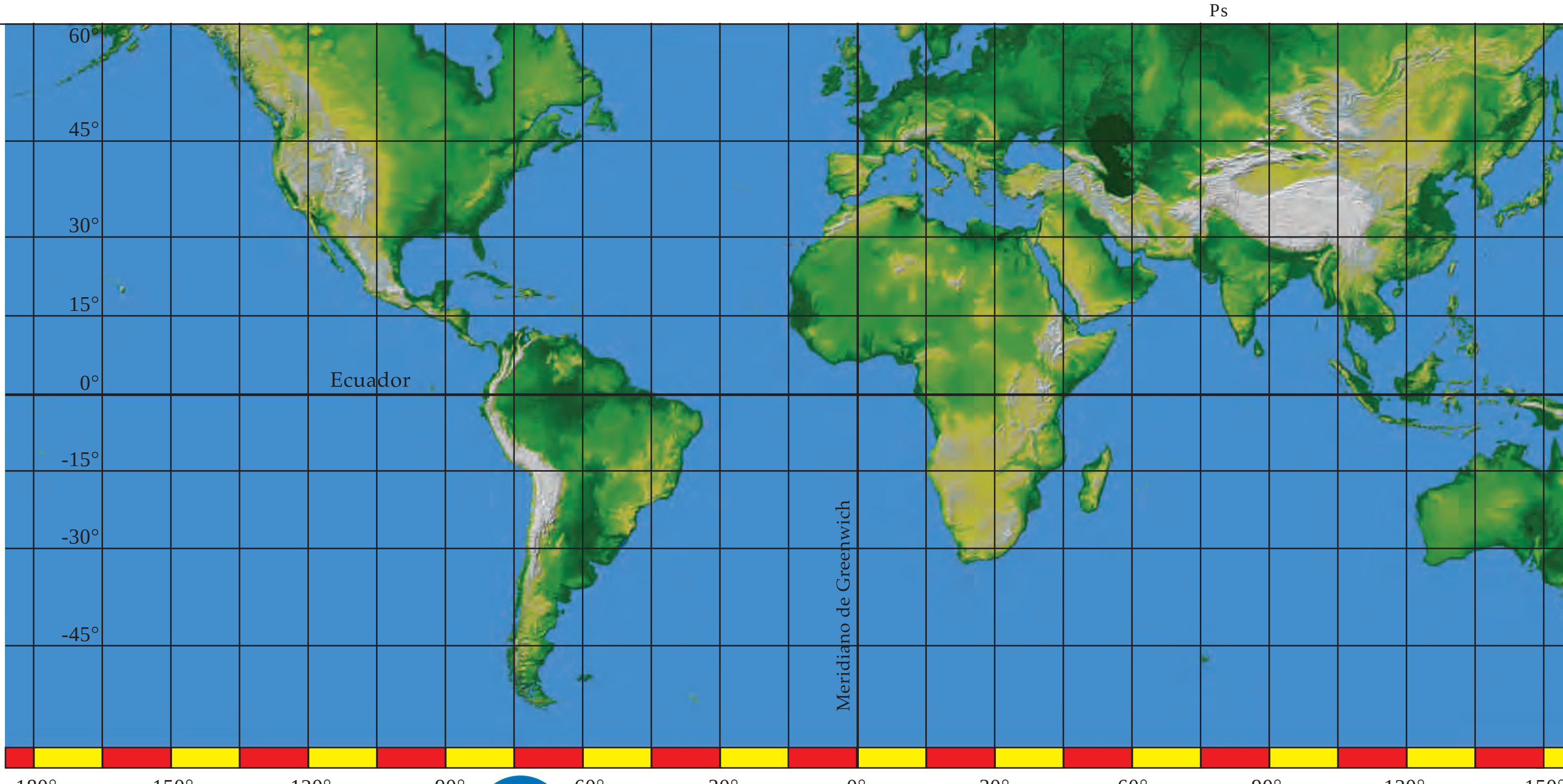
Para cualquier punto A de la superficie terrestre, diferente a los polos, la circunferencia máxima P_nAP_s es llamada meridano de A. Para localizarlo se toma como referencia al meridiano de Greenwich (Inglaterra). Este meridiano pasa por el observatorio del suburbio del mismo nombre de la ciudad de Londres y sirve como origen. Se mide el meridiano del punto A con el ángulo que forma (en grados) con el de Greenwich o meridiano 0.

La *latitud* del punto A es la distancia angular de A al ecuador. Esta es medida por el ángulo A'OA o por el arco AA' del meridiano de A.

La *longitud* de A es el ángulo determinado por el meridiano que pasa por A y el meridiano de Greenwich. Su medida es dada por el arco G'A' interceptado en el ecuador por dos meridianos o por el ángulo esférico G'P_nA'.

Cualquier punto sobre la Tierra queda determinado al conocer su latitud y su longitud.





Las curvas de "rumbo" (loxodromas) en la esfera y la navegación

Cuando Cristóbal Colón salió de las Islas Canarias rumbo hacia lo que sería el Nuevo Mundo, lo hizo navegando según un paralelo y en ciertos períodos hacía algunas correcciones de tal forma que el Sol siempre tuviese el ángulo correcto encima del horizonte a la hora del mediodía de cada día. Ésta no era la ruta más corta pero tenía la ventaja de navegabilidad con un rumbo y era una práctica común para atravesar el Atlántico en esos tiempos.

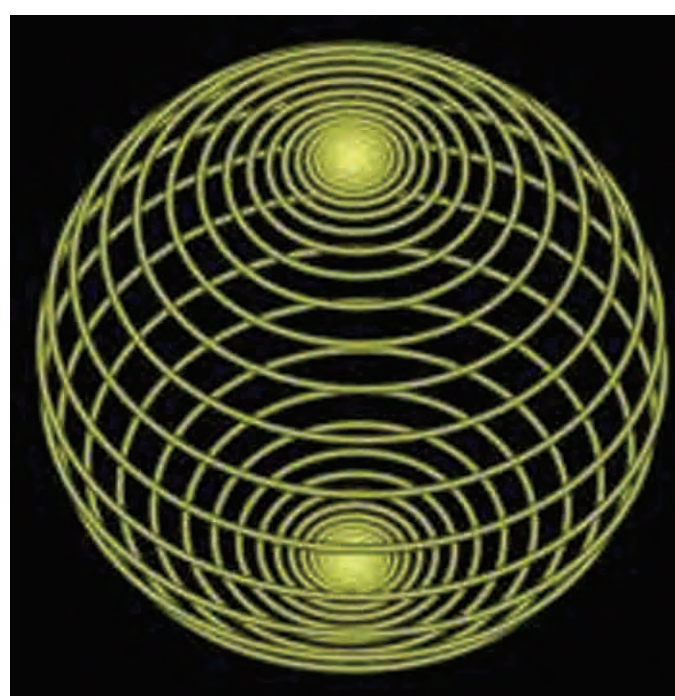
Navegar según un paralelo en el globo terrestre (suponiéndolo de forma esférica) es seguir un rumbo fijo, con igual orientación, puesto que el ángulo formado por ese paralelo y cada meridiano que lo atraviesa es constante.

Cuando se quiere navegar de un punto a otro de la superficie de la Tierra manteniendo una orientación fija (un rumbo constante), esto es, la trayectoria seguida debe ser tal que su intersección con los meridianos forme un ángulo constante, se obtienen sobre la esfera unas curvas denominadas rumbos o loxodromas (del latín *loxos*=oblicuo, sesgo, y *dromos*= ruta, carrera; término introducido en 1642 por el científico alemán Willebrord Snell, 1581-1626, conocido por su ley de refracción en óptica).

Durante muchos años se pensó que una curva sobre la esfera de rumbo constante era un arco de circunferencia máxima. Fue el matemático y cosmógrafo portugués Pedro Nunes (conocido como *Nonius* por su nombre en latín, o Núñez en español), 1502-1578, quien probó que las curvas de rumbo (loxodromas) son curvas en espiral que se aproximan indefinidamente a los polos sin alcanzarlos. A Nunes se le conoce más por la creación de un instrumento "nonio" para la lectura de pequeños ángulos, predecesor de los vernier o caliper actuales.

Sphere. Butchart Gardens,Victoria Islands, Canadá.

Mapa de Caverio (1504). Navegante Genovés.
Fuente: expositions.bnf.fr / lamer / grand / 016.htm



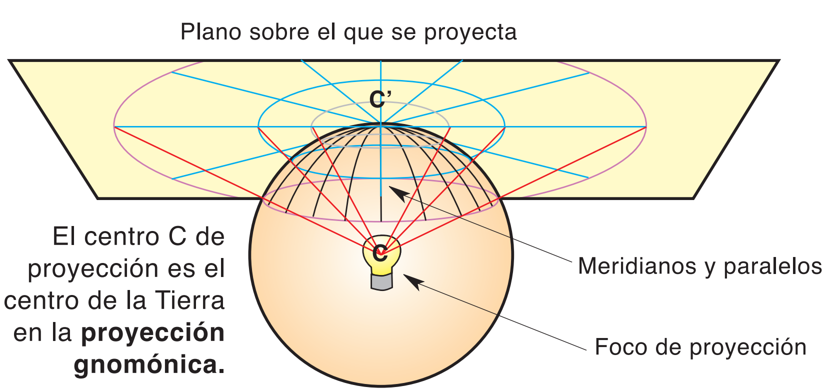
Espiral loxodrómica. Fuente: Fractales de Jos Leys.
www.josleys.com / animationsindex6.htm

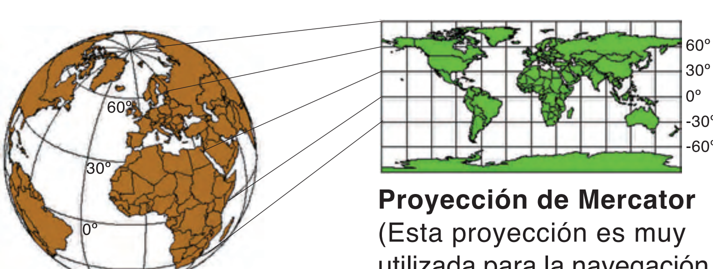
En el siglo XVI (el de las grandes travesías marítimas) los cartógrafos tenían el reto de diseñar un mapa terrestre que mostrara curvas de rumbo como líneas rectas, lo que hizo Mercator en 1569.

Hay una gran variedad de mapas de la Tierra construidos con diversas técnicas: proyección gnómica, proyección estereográfica, proyección cilíndrica, mapa de Mercator, proyección Lambert, proyección transversal de Mercator, entre otros. Sin embargo, "es imposible hacer una mapa de una esfera (la superficie de la Tierra) sobre una hoja de papel sin alguna distorsión"; esto es, no se puede hacer un mapa de la Tierra (de una superficie esférica) que reproduzca todas sus características. Esto fue demostrado en el s. XVIII por el matemático suizo L. Euler.

Algunos mapas preservan las distancias, otros preservan los ángulos, otros preservan las formas, pero ninguno puede preservar todas esas características.

La proyección gnomónica conserva las distancias y la proyección de Mercator conserva los ángulos (se dice que es una *transformación conforme*). Disponiendo de ambos mapas, con la combinación de los dos se puede obtener "un rumbo" y "una menor distancia" en la navegación marítima o aérea para ir de un punto a otro: sobre el mapa gnomónico se marca la ruta más corta entre los dos puntos y a intervalos regulares se hacen marcas (puntos de referencia) que se localizan en el mapa de Mercator con el cual se conectan esos puntos y así se logra la ruta para navegar. Esta ruta es de una orientación constante y es bastante próxima a la ruta óptima en cuanto a menor distancia.





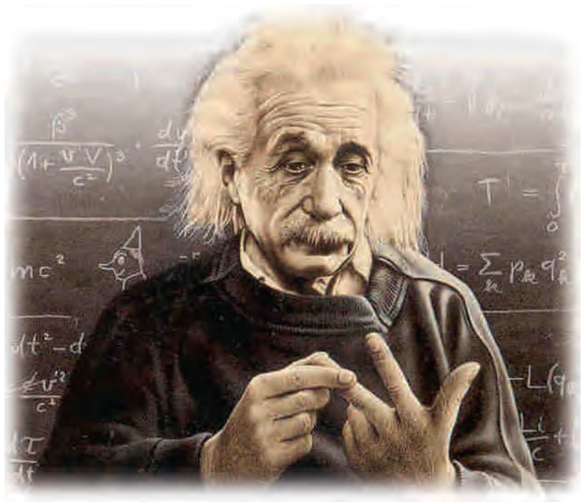
Proyección de Mercator
(Esta proyección es muy utilizada para la navegación marítima y aérea).

Mapa de América preparado por Mercator en 1584.
Fuente: Librería de la Universidad de Yale.
http://www.library.yale.edu/MapColl/whem1584.gif

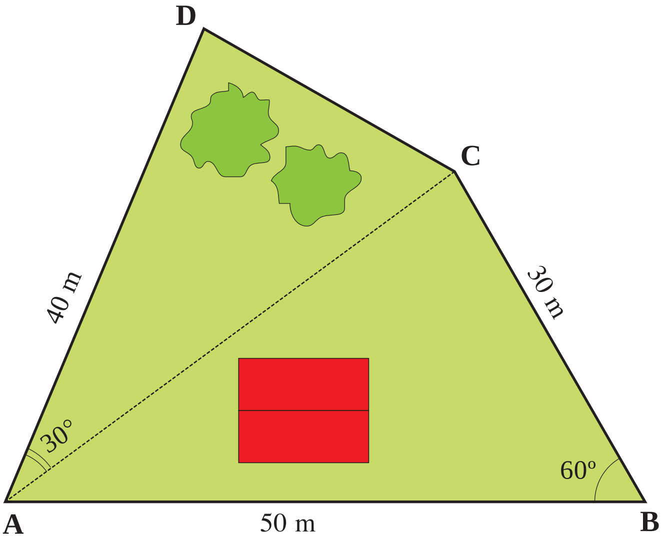
Una escalera siguiendo un arco de loxodroma en la superficie de un tanque cilíndrico. Aquí ese arco de curva forma ángulo constante con cada generatriz de la superficie cilíndrica.

Resultados de la página 112:
1) BD= $10\sqrt{19}$ m y el área = $(375\sqrt{3} + 100\sqrt{19})\text{m}^2$
2) d ≈ 4,44 m
3) No. El número π es doble del número $\pi/2$ y sen $\pi = 0 \neq 2$
4) Valor máximo 1
5) Aproximadamente 2 horas y media.

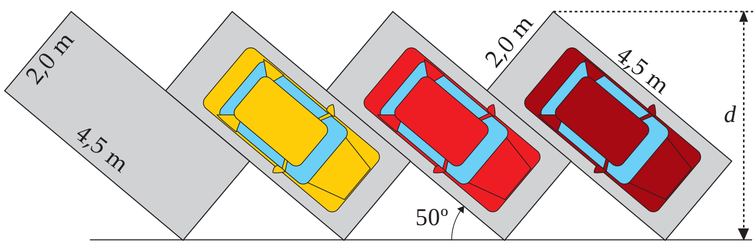
Tengo que pensarlo



1 El dueño de un terreno quiere conocer el área de su terreno de forma de cuadrilátreo y la longitud de la distancia BD.



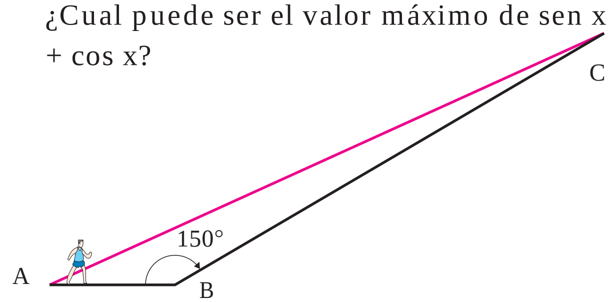
2 Calcula la distancia *d* en el estacionamiento de vehículos.



3 Si un número es doble del otro ¿su seno también lo es?

4 Si el valor de x se expresa en radianes, los valores del seno y del coseno pueden ser aproximados como sigue para valores de x cercanos a 0: sen x ≈ x y cos x ≈ $1-\frac{x^2}{2}$ ¿Cual puede ser el valor máximo de sen x + cos x?

5 Un caminante avanza con velocidad constante por la carretera ABC que forma en B un ángulo de 150°. Parte de A, a la media hora está en B y dos horas después está en C. Hallar el tiempo que habría tardado en ir de A a C en línea recta.



Bibliografía

- BAENA RUIZ, Julián; CORIAT BENARROCH, Moisés; MARÍN del MORAL, Antonio; MARTÍNEZ LÓPEZ, Pedro S. (1996): La Esfera. Editorial Síntesis, Colección Educación Matemática en Secundaria, 17, Madrid, España.
- FEEMAN, Timothy G. (2002): Portraits of the Earth. A Mathematician Looks at Maps. American Mathematical Society, Serie Mathematical World, vol. 18, U.S.A.
- MAOR, Eli (2002): Trigonometric Delights. Princeton University Press, 6a. impression, U.S.A.

Páginas web:

http://www.recursosmatemáticos.com/secundaria.html

http://platea.pntic.mec.es/~mzapata/tutor_ma/trig.htm