Fundación POLAR

Matemática Maravillosa
Trigonometría

Escalera en espiral del Arco de Triunfo, París (Francia).

MM

Fascículo 13

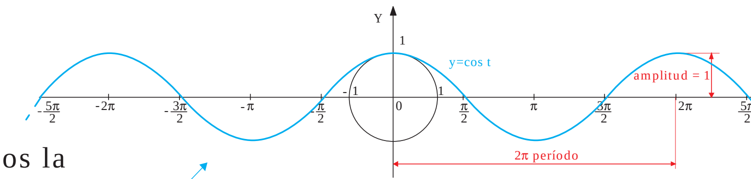
EMPRESAS POLAR 65 años cumpliéndole a Venezuela

ÚltimasNoticias

La función tangente y otras funciones trigonométricas

La función tangente se define mediante:

$$\text{tg } t = \frac{\text{sen } t}{\cos t}$$

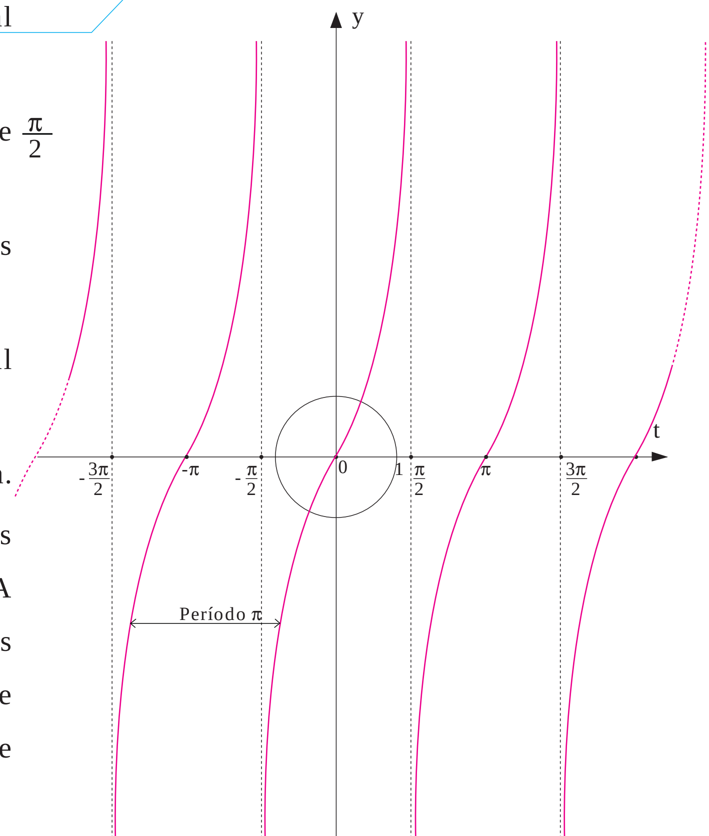


para todo número real t tal que cos t≠0. Si observamos la gráfica de la función y= cos t, notamos que la misma corta al eje t (eje horizontal) en los puntos correspondientes a $t = \ldots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ esto es, en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ (la función cos t se anula para estos valores de t).

De manera general la función y=cos t se anula para los valores $t = 2n+1\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} n\pi$ (n= ... , -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...).

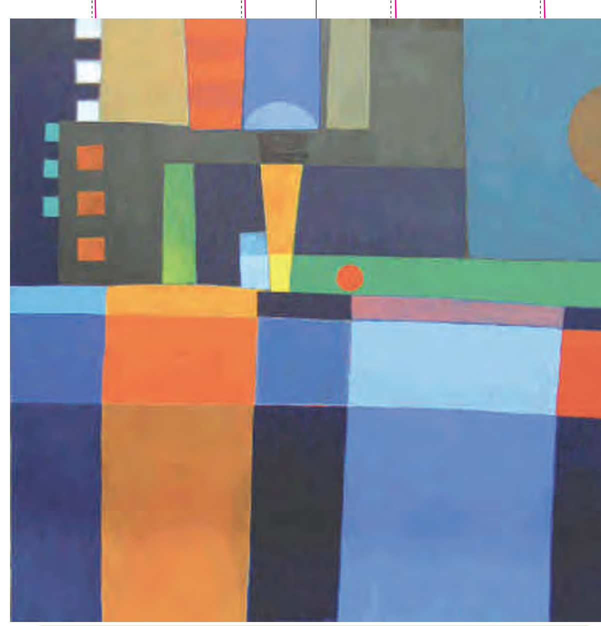
Por lo tanto $\text{tg } t = \frac{\text{sen } t}{\cos t}$ está definida para todo número real $t \neq (\frac{\pi}{2} + n\pi)$, n entero.

La gráfica de la función tangente es la mostrada a la derecha.



Observa que esta función tiene período π y que en los puntos de abscisa $t = \frac{\pm\pi}{2}, \frac{\pm 3\pi}{2}, \frac{\pm 5\pi}{2}, \ldots$ esa función no está definida. A medida que "t se aproxima" a uno de esos valores, entonces tg t se hace "infinitamente grande" en valor absoluto. Así que para esta función no tiene sentido hablar de "amplitud" de la misma.

	t	tg t
0°	0	0
30°	π / 6	$\sqrt{3}/3 \approx 0{,}577350269$
45°	π / 4	1
60°	π / 3	$\sqrt{3} \approx 1{,}732050808$
75°	5π / 12	3,732050808
80°	4π / 9	5,67128182
85°	17π / 36	11,4300523
88°	22π / 45	28,63625328
89°	89π / 180	57,28996163
	...	...
90°	π / 2	no está definido



Tangente Roja. Steve Jee (artista norteamericano).
Fuente: http://www.edgarmodern.com

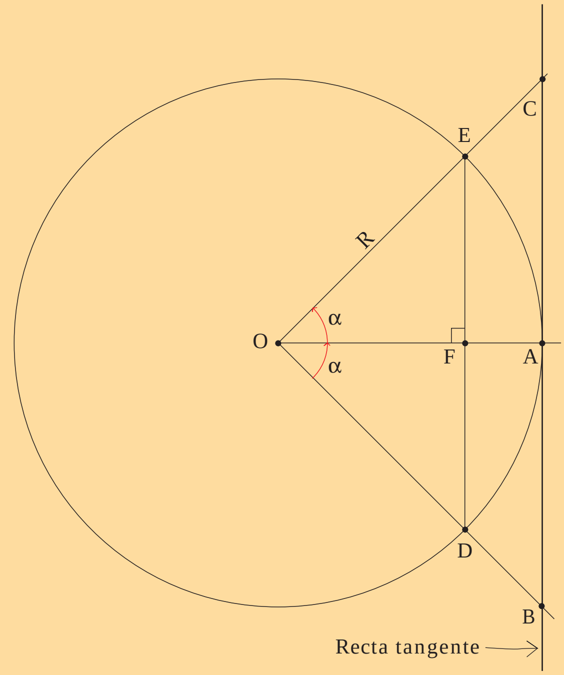
RETO

¿Qué propiedad tiene la gráfica de la tangente respecto al origen 0?

Completa la igualdad tg(-t) =

SABÍAS QUE...

La palabra tangente viene del latín *tangere* que significa “tocar” y esto se vincula con el hecho de que la recta tangente a la circunferencia en A tiene solamente un punto de contacto con ésta y tgα se asocia con el segmento de recta tangente BC mediante $BC = 2R \operatorname{tg}\alpha$.



La función senα está relacionada con la cuerda DE mediante $DE = 2R \operatorname{sen} \alpha$.

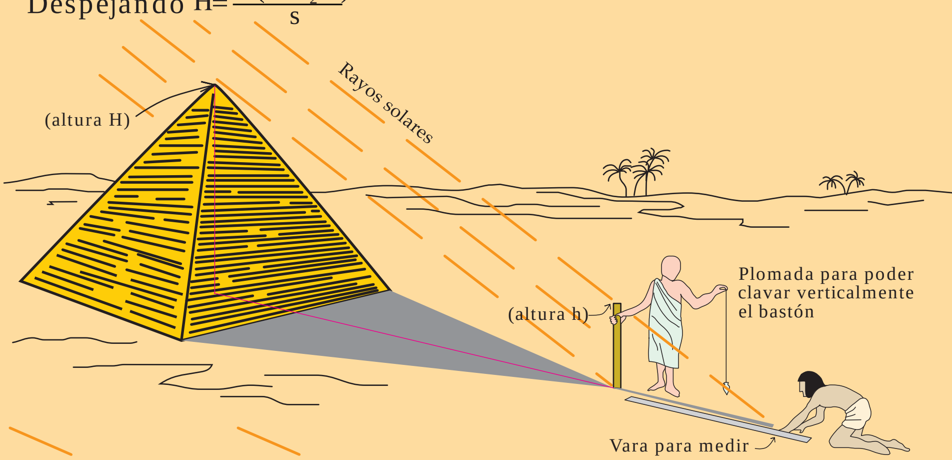
El cálculo de “sombras” fue conocido en la antiguedad, como lo testimonia la determinación de la altura de una pirámide realizada por Thales (s. VI a.C.) utilizando su conocido teorema (semejanza de triángulos) y las sombras arrojadas por la pirámide y un bastón (a mediodía).

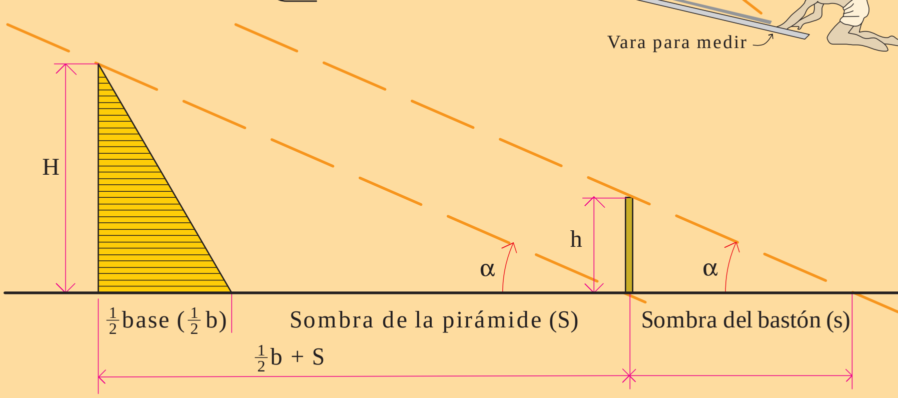
La tangente de ángulos, vinculada al cálculo de “sombras”, no era conocida para esa época. Su tratamiento, como razón de dos segmentos, comenzó con los árabes, ca. 860 d.C., cuando se construyó la primera tabla de tangentes y cotangentes por Ahmed ibn Abdallah al-Mervazi (conocido como Habash al-Hasib).

Con la tangente de ángulos se obtiene fácilmente la altura de la pirámide mediante:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{s}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{S + \frac{1}{2}b}$, de donde $\frac{h}{s} = \frac{H}{S + \frac{1}{2}b}$

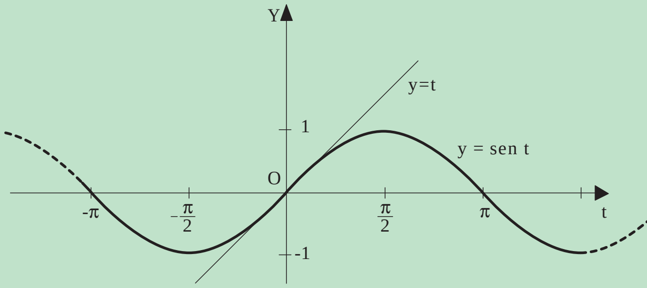
Despejando $H = \frac{h(S + \frac{1}{2}b)}{s}$





Una propiedad importante de la función seno es: sen t es aproximadamente igual a t para valores de t próximos a 0 ("ángulos pequeños") siempre que t esté expresado en radianes. Veamos esto con la tabla siguiente:

grados	t radianes	sen t
1°	0,017453293	0,017452406
0,5°	0,008726646	0,008726535
0,1°	0,001745329	0,001745328



Para cambiar grados sexagesimales a radianes utilizamos la fórmula $1° = (2\pi/360)$ radianes $\approx 0{,}017453293$ rad, tomando $\pi \approx 3{,}141592654$. Los otros valores resultan de forma análoga.

Esta propiedad expresa que sen $t \approx t$ o bien $(\text{sen } t)/t \approx 1$, lo cual se enuncia así: $\frac{\text{sen } t}{t}$ "tiende a 1" a medida que "t tiende a 0", siempre que t esté en radianes.

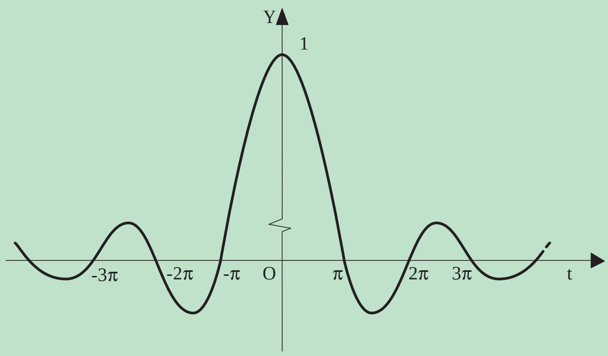
Gráficamente las funciones y= sen t, y= t, t en radianes, "son prácticamente iguales" en la cercanía del origen.

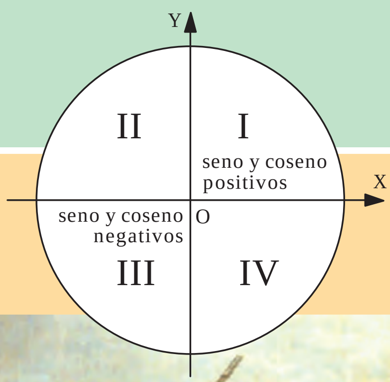
Dicha propiedad es básica para el desarrollo del cálculo infinitesimal de funciones trigonométricas.

La gráfica de la función:

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{\text{sen } t}{t} & \text{si } t\neq 0 \\ 1 & \text{si } t=0 \end{cases}$$

es la mostrada al lado.





SABÍAS QUE...

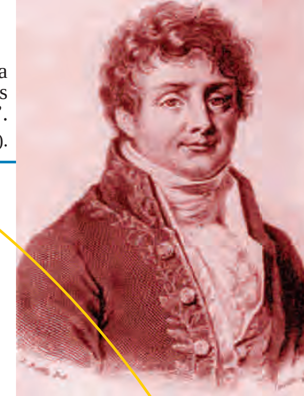
Es a Lazare Carnot (político, ingeniero militar y matemático francés, 1753-1823) a quien se debe el círculo trigonométrico, pues fue quien interpretó los signos de las funciones seno y coseno con la configuración completa de los cuatro cuadrantes y no únicamente en un cuadrante o con un triángulo rectángulo, ya que es a partir de Carnot que el círculo se divide con dos ejes perpendiculares y esto pasó a ser la figura resumen de la trigonometría.

Destacó en geometría, escribiendo una célebre obra "Geometría de posición" (1803). Asimismo escribió sobre diversas cuestiones científicas: "Ensayo sobre las máquinas en general", "Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal", entre otras, y fue uno de los que intervino en la formación de la Escuela Politécnica de París, de donde se origina la denominada etapa de las ingenierías científicas que abarca desde la creación de esa Escuela Politécnica hasta la finalización de la Primera Guerra Mundial.

Los descendientes de Carnot tuvieron una figuración preeminente en Francia: Su hijo, Sadi Carnot, fue un físico (se le debe el ciclo de Carnot), otro hijo, Hipólito, fue asambleísta y ministro de Instrucción Pública. Su nieto, Adolfo Carnot, fue químico y miembro de la Academia de Ciencias, y otro nieto, Sadi Carnot, fue el cuarto presidente (1887-1894) de la Tercera República de Francia.

General Lazare Carnot al frente de un batallón napoleónico.
Fuente: http://www.wargame.ch/wc/nwc/newsletter/21st_edition/Newsletter21/images/FRgenLazareCarnot.jpg

"El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de los descubrimientos matemáticos".
Joseph Fourier (Francia, 1768-1830).



Funciones trigonométricas y música

Los procesos periódicos se representan y se aproximan mediante funciones periódicas y éstas, a su vez, pueden aproximarse mediante funciones trigonométricas, lo que es conocido con el nombre de aproximaciones de Fourier.

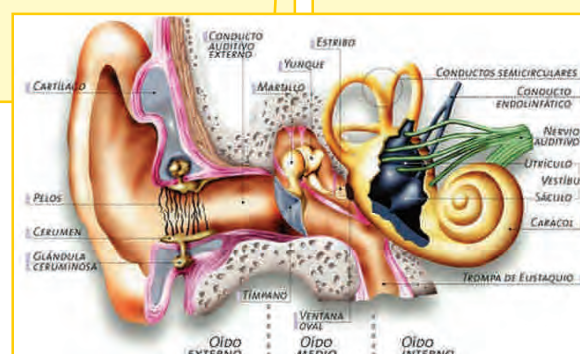
El sonido, es decir las ondas sonoras, están formadas por oscilaciones periódicas de las moléculas de aire.

Generación y transmisión

Generación por vibraciones físicas. Por ejemplo, un diapasón vibrando; una cuerda vibrante.

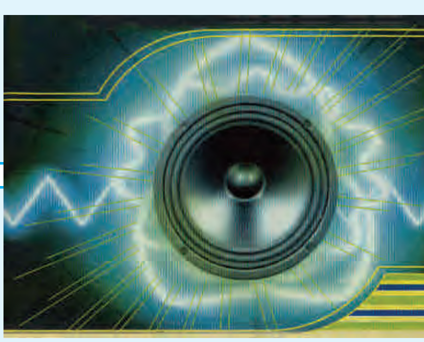
Transmisión por un medio material, como el aire, mediante compresiones y rarefacciones de las moléculas (onda sonora).

Esa onda sonora llega al oído humano y golpea la membrana del tímpano, luego se transmiten mensajes electro-químicos al cerebro y es lo que escuchamos como sonido.



Características

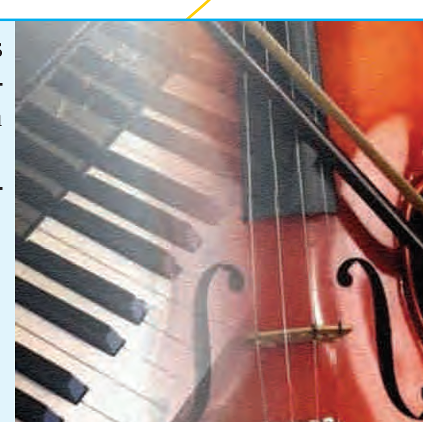
Tono (agudeza del sonido) se determina con la frecuencia (número de oscilaciones en la unidad de tiempo) que se mide en Hertzios (Hz).



Intensidad es la energía de la onda y la determina la amplitud del movimiento molecular (máximo valor de la ordenada en la gráfica asociada). Se mide en watios / m^2 o W / cm^2.

Timbre: sonidos con iguales frecuencias pero producidos por instrumentos distintos (un piano y un violín) producen en el oído efectos diferentes y estos sonidos se distinguen por sus armónicos (con frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental) y sus amplitudes.

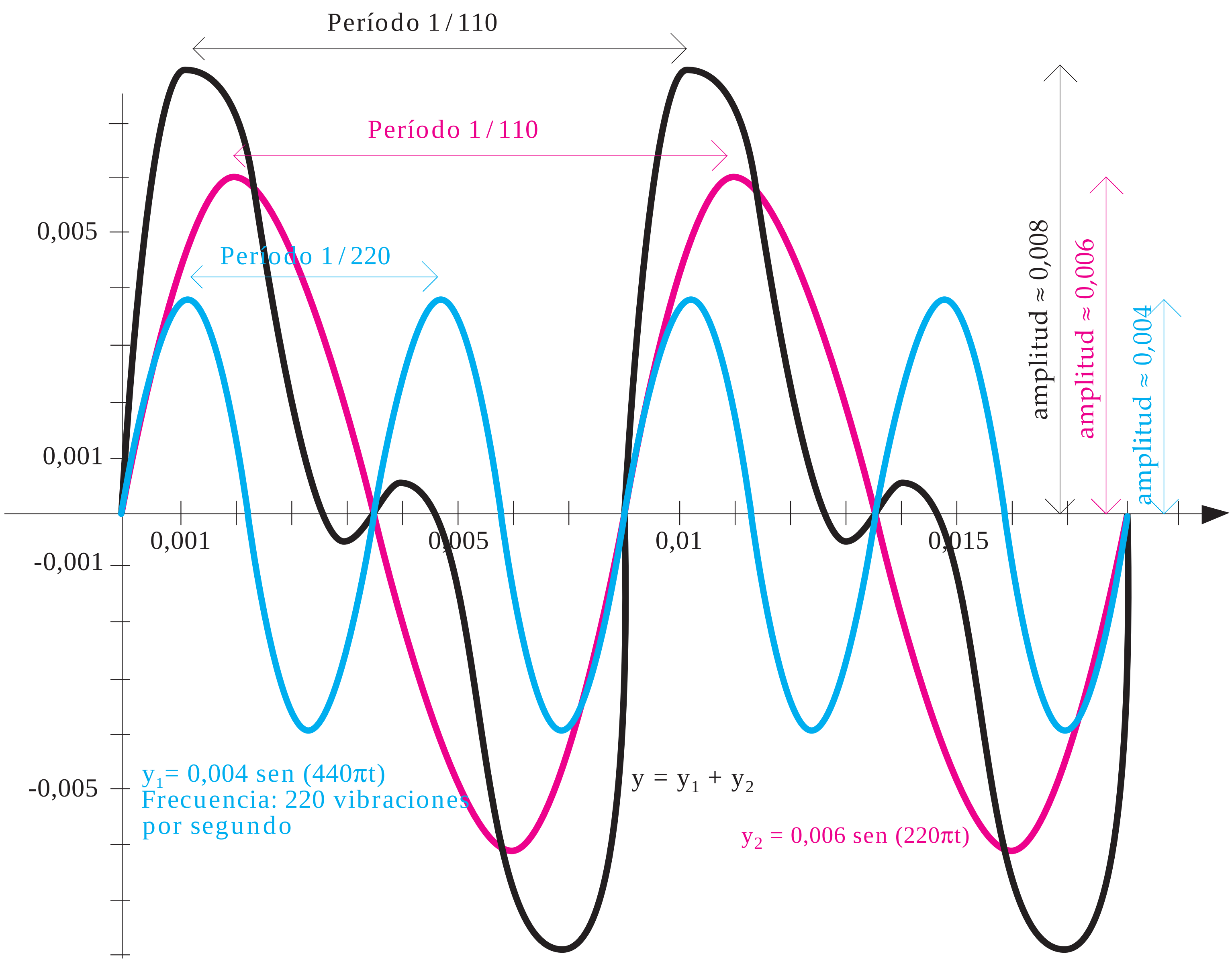
La misma nota tocada por dos instrumentos musicales distintos suenan diferentes.



Los sonidos con frecuencia entre 16 Hz y 15 000 a 20 000 Hz son percibidos por el oído humano. Los que tienen menos de 16 Hz son infrasónicos y con más de 20 000 Hz son los ultrasónicos.

Mediante un osciloscopio, que es un instrumento electrónico, se pueden convertir ondas de sonido en impulsos eléctricos y dibujarlos en una pantalla.

Osciloscopio Micrófono Corneta de sonido



La suma de las funciones $y_1 = 0{,}004 \text{ sen } (440\pi t)$, representada en azul y la $y_2 = 0{,}006 \text{ sen } (220\pi t)$, representada en fucsia, que son armónicos simples, da origen a la gráfica de la función $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 0{,}004 \text{ sen } (440\pi t) + 0{,}006 \text{ sen } (220\pi t)$.

La gráfica resultante (de color negro) es periódica con período $T=1/110$ que es el período de y_2. Su frecuencia es f=110 Hz.

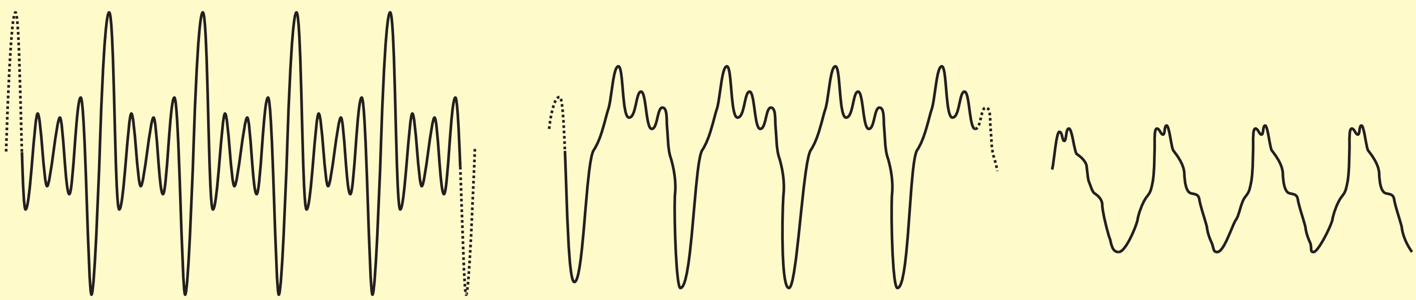
Un sonido simple (un tono puro) origina un movimiento armónico simple. Esto es análogo a lo que sucede para el movimiento de una masa atada a un resorte sin amortiguación.

Los sonidos emitidos por casi todos los instrumentos (incluyendo la voz humana) no son sonidos simples y no se representan por una única onda sinusoidal. Las curvas que los representan son variadas, pero periódicas.

Dada la curva de color negro del gráfico de la página anterior, sin conocer las de y_1 (azul) e y_2 (fucsia), ¿cómo sabemos que ella es la suma de dos funciones periódicas sinusoidales?

Esa es la situación usual en las ondas sonoras de los instrumentos musicales que son sonidos compuestos de armónicos simples:

Sound Wave. Danny Foy. Artista norteamericano.
Fuente: www.foyart.com.



Una onda sonora — Saxofón (f= 209 vibraciones / s) — Clarinete (f= 209 vibraciones / s)

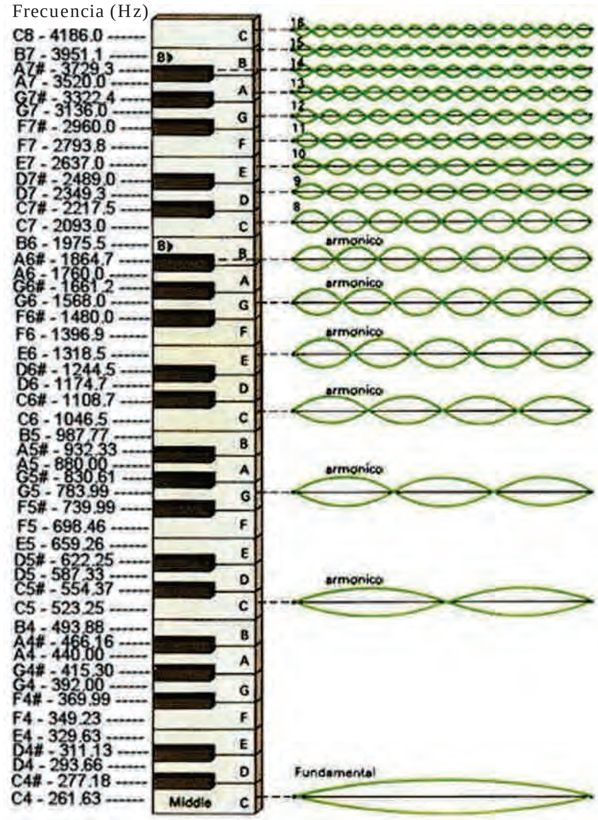
La respuesta viene dada por una proposición debida a J. Fourier:

Cualquier función periódica (un sonido periódico) que no es armónico simple, puede suponerse como la superposición (suma) de una sucesión de armónicos simples, de tal forma que todas las frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia del sonido compuesto.

Así, la gráfica de la función periódica se aproxima mediante una suma finita de armónicos simples:

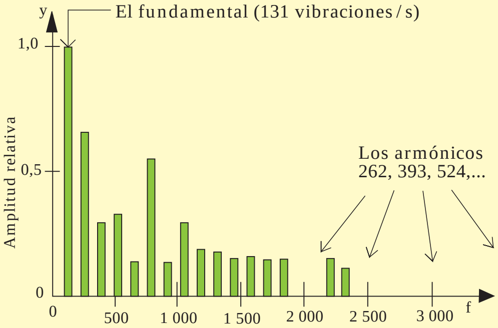
A_1 sen (2πft), A_2 sen (2π.2ft), A_3 sen (2π.3ft), ….., con amplitudes variables pero con frecuencias f, 2f, 3f, …. , múltiplos enteros de f (la fundamental, que es la frecuencia del sonido más grave). Los otros sonidos son los armónicos del fundamental o primer armónico: el sonido de frecuencia 2f es el segundo armónico, etc.

El conjunto de frecuencias que integran un sonido compuesto se denomina *espectro*.

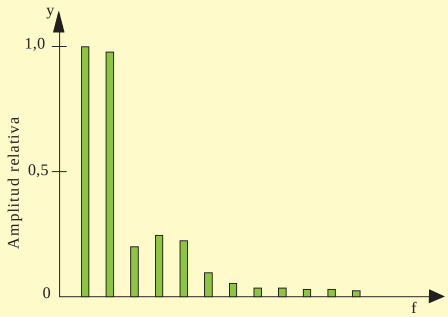


Algunos espectros se ilustran a continuación:

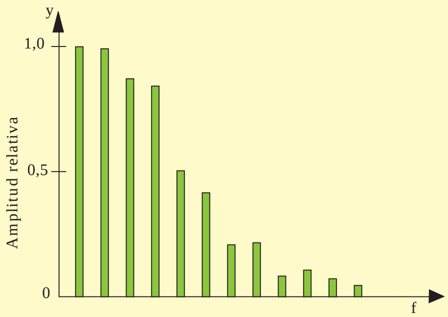
La trompeta emite un sonido "brillante" debido a la riqueza de sus armónicos, en comparación con el emitido por una flauta.



Espectro de la nota C (do_3) de un piano



Espectro de flauta. A partir del 6° armónico las amplitudes (energías) son débiles



Espectro de trompeta. El segundo armónico producido por la trompeta tiene casi la misma amplitud (energía) que la fundamental

El sintetizador electrónico es un aparato que permite producir un sonido a partir de sus características: frecuencia, intensidad y tiempo de duración. Sus antecedentes remontan a los resonadores del físico alemán Hermann von Helmholtz (1821-1894).

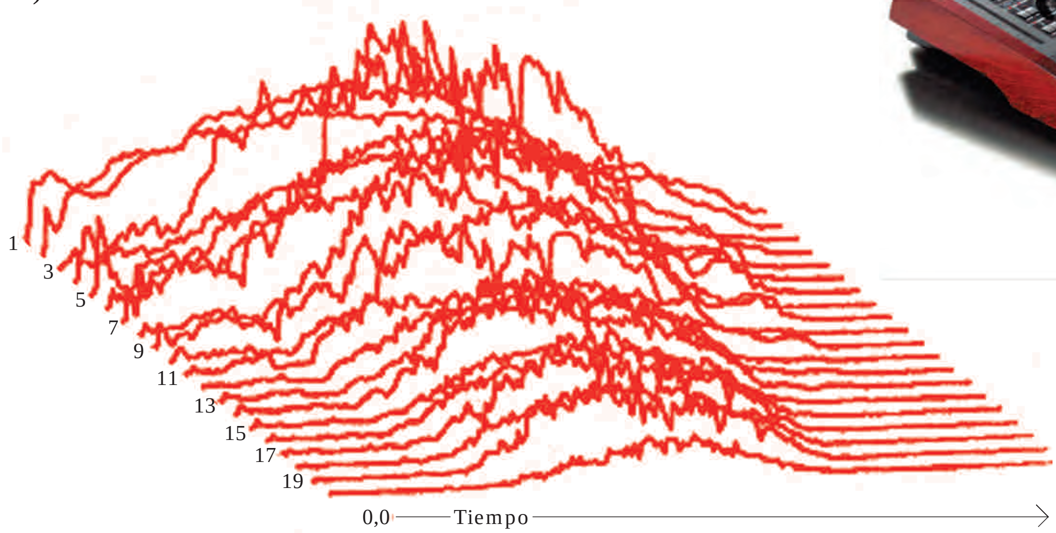


Ilustración tridimensional del espectro de una trompeta mostrando los primeros 20 armónicos.

Fuente: www.sfu.ca / sonic-studio / handbook / Spectrum.html

Hermann von Helmholtz

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web: **http://www.fpolar.org.ve/matematica3**