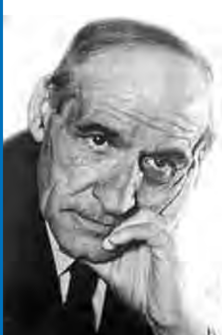
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa

Trigonometría

MM

Portada de *The castle of knowledge* (El castillo del conocimiento), publicado en 1556, de Robert Recorde (médico y matemático, País de Gales, ca. 1510-1558). Es una obra de astronomía y esa portada ilustra el propósito pedagógico de Recorde y el "triunfo de la razón sobre la autoridad".



Siempre que me enseñes,
enséñame a la vez a dudar.

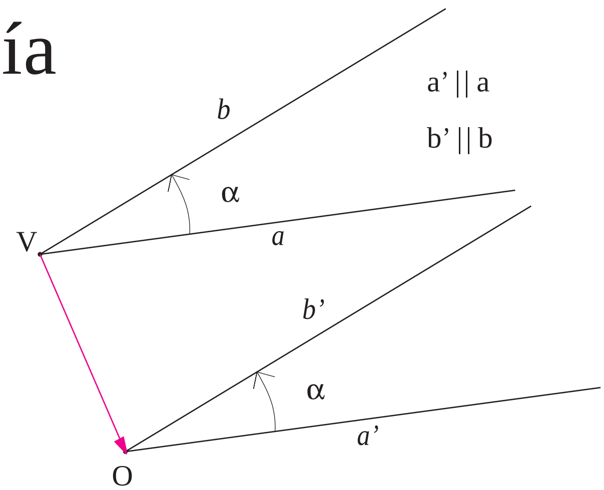
José Ortega y Gasset.
(España, 1883-1955).

Fascículo 12

El mundo de la trigonometría

Un ángulo $\widehat{ab}$ es un ente geométrico definido a partir de dos semirrectas *a* y *b* del mismo origen V, denominado vértice del ángulo. Dado un punto cualquiera del plano O, el ángulo $\widehat{a'b'}$ lo podemos considerar con vértice en O sólo con efectuar la traslación del vector $\overrightarrow{VO}$ como se indica en el dibujo. De la misma manera cualquier ángulo puede ser trasladado al vértice O.

El ángulo α define la rotación indicada por la flecha y su respectivo centro de rotación.



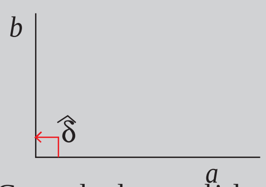
¿Qué estudiamos de los ángulos?

a) medidas de ángulos

b) Funciones trigonométricas de ángulos

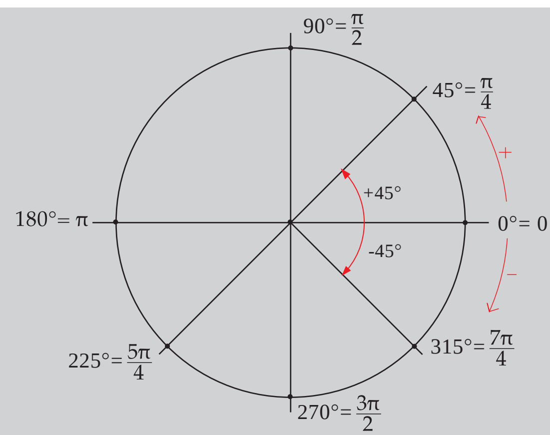
a) Medidas de ángulos

A cada ángulo α se asocian varios números: su medida en grados sexagesimales o en radianes.



ángulo recto $\delta = 90° = \pi/2 \text{ rad} \approx 1{,}57 \text{ rad}$

Cuando la medida de un ángulo se expresa sin indicar el sistema de medidas, se sobreentiende que es en radianes. La medida en radianes toma valores en el intervalo $0 \leq \alpha < 2\pi$.



b) Funciones trigonométricas de ángulos

A cada ángulo α se asocian otros números que son los valores de las funciones trigonométricas de ese ángulo..

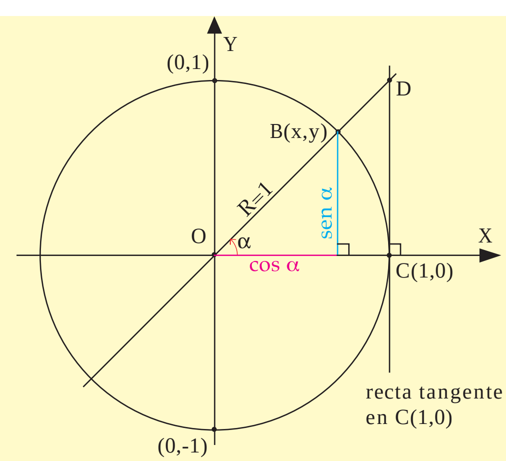
Sen α, cos α, tg α,...

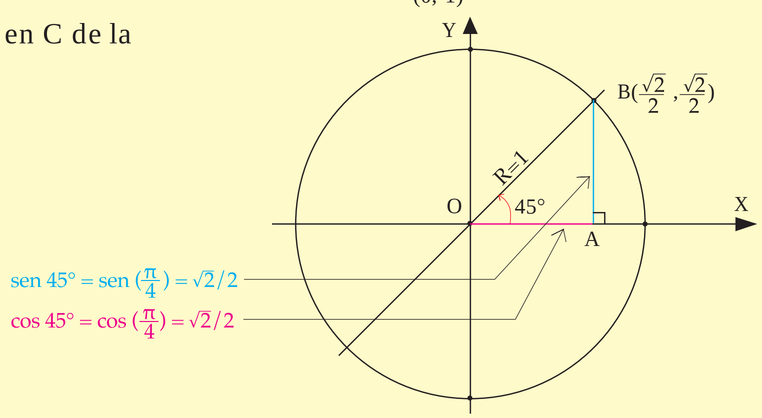
Por ejemplo, para el ángulo recto δ, se tiene: sen δ=1, cos δ=0, tg δ = ?; para el ángulo llano ω resulta: sen ω=0, cos ω= -1, tg ω=0. Esa misma notación se utiliza cuando se trabaja con las medidas de los ángulos y así escribimos, en el caso del ángulo recto, sen 90° = sen $(\frac{\pi}{2})$ = 1, ...

sen α = y (ordenada de B)

cos α = x (abscisa de B)

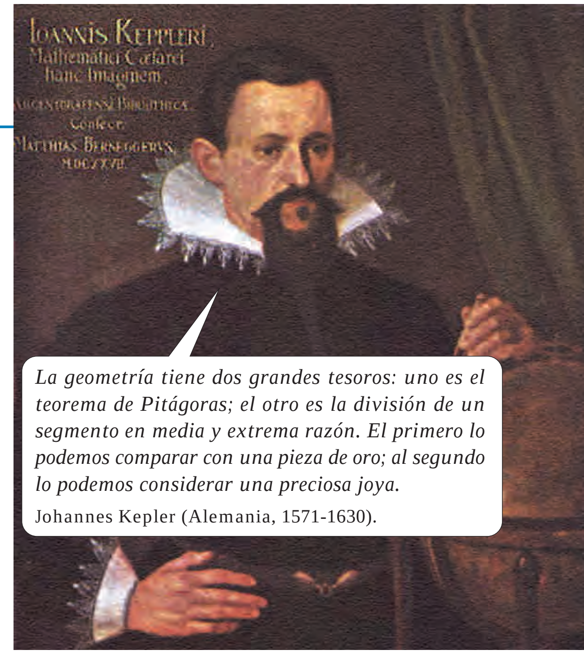
tg α = CD (D es el punto de corte de la recta tangente en C de la circunferencia con la prolongación del radio OB).





Esas funciones trigonométricas de ángulos se han definido en los triángulos rectángulos y también utilizando una circunferencia de centro O y radio R = 1 (de donde procede el nombre de funciones circulares).

Observa que a través de la medida de los ángulos estamos considerando esas funciones trigonométricas sobre números y no solamente sobre ángulos.



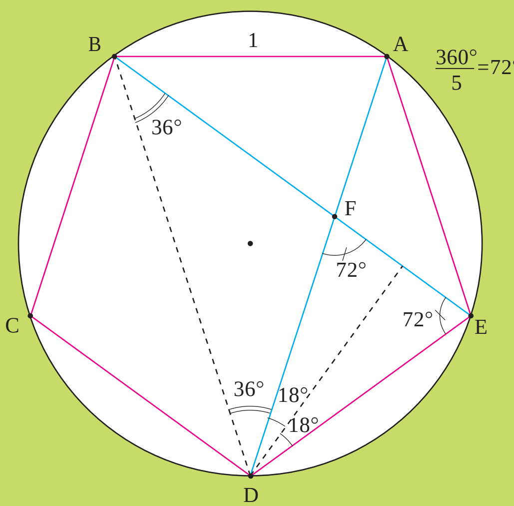
La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro es la división de un segmento en media y extrema razón. El primero lo podemos comparar con una pieza de oro; al segundo lo podemos considerar una preciosa joya.

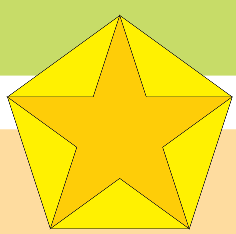
Johannes Kepler (Alemania, 1571-1630).

RETO

A partir de un triángulo equilátero, de un cuadrado y de un pentágono regular, determina, respectivamente: a) seno, coseno y tangente de 30º y 60º; b) seno, coseno y tangente de 45º; c) seno, coseno y tangente de 18° y 36°. Observa las relaciones de estas últimas con el número de oro $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ y el hecho de que el punto F divide la diagonal BE en sección áurea (división en media y extrema razón $\frac{BE}{BF} = \frac{BF}{FE}$).

Sugerencia: Considera como unidad el lado del pentágono ($\overline{AB}$=1) y comprueba que los triángulos EBD y EDF son semejantes. Luego demuestra que BE = ϕ.





SABÍAS QUE...

El pentágono regular estrellado (pentagrama) era el símbolo de los pitagóricos y el dodecaedro regular convexo (uno de las cinco figuras cósmicas o poliedros regulares convexos), que se forma con pentágonos regulares convexos pues así son sus doce caras, representaba el Universo. El símbolo pitagórico y el conocimiento del dodecaedro indican que ellos debían conocer la división de un segmento en media y extrema razón (sección áurea). Esa prueba de la división de la diagonal del pentágono (reto anterior) se atribuye a un pitagórico: Hipaso de Metapontum (ca. 450 a.C.) y de él se dice que fue expulsado de la secta de los pitagóricos por quebrantar el juramento de la misma, pues reveló públicamente el descubrimiento del poliedro regular con su geometría de doce caras pentagonales. Inclusive, entre las historias en torno de este matemático, se menciona que debido a su apostasía fue castigado y lo ahogaron en el mar.

La Última Cena de Salvador Dalí (España, 1904-1989), donde se puede notar que el rectángulo del cuadro es un rectángulo de oro, la bóveda es un dodecaedro regular el cual tiene la propiedad que uniendo los centros de sus caras resultan secciones áureas. Hay otros rectángulos áureos en el cuadro determinando la posición de los apóstoles.

Funciones trigonométricas de números reales

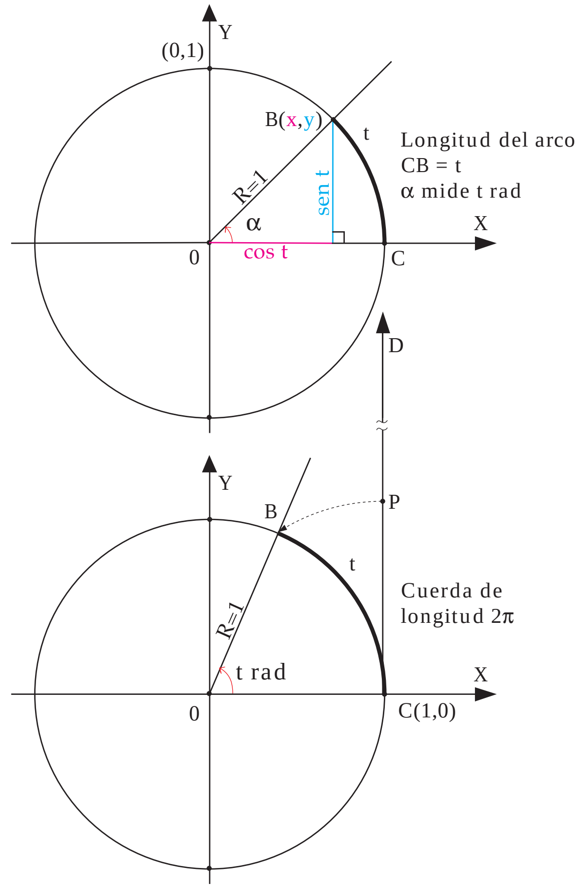
Funciones seno y coseno definidas en el intervalo $0 \leq t < 2\pi$

La situación es la siguiente: en lugar de dar un ángulo damos un número t y queremos definir las funciones trigonométricas seno y coseno para ese número. Inicialmente consideramos t en el intervalo $0 \leq t < 2\pi$ y posteriormente las definiremos para cualquier número real t.

Dado el número t en ese intervalo, entonces existe un único arco $\overset{\frown}{CB}$ de la circunferencia unitaria tal que su longitud es igual a t. Se forma así un ángulo $\widehat{COB} = \alpha$ y se define sen t y cos t a partir del seno y coseno del ángulo α, o sea con las coordenadas (x,y) del punto B:

$$\text{sen } t = y, \quad \cos t = x$$

La interpretación geométrica de asignar al número t el arco $\overset{\frown}{CB}$ de igual longitud es la siguiente: imaginamos una cuerda CD de longitud 2π, uno de cuyos extremos coincide con el punto C(1,0). Al enrollar esa cuerda sobre la circunferencia, cada punto P de la misma con CP= t cae sobre la circunferencia en un punto B(x,y) tal que la longitud del arco $\overset{\frown}{CB}$ es t.

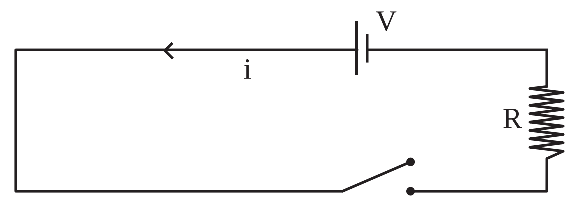


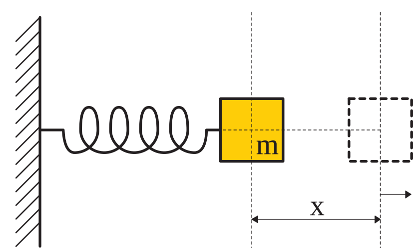
Procesos y fenómenos periódicos y funciones seno y coseno definidas para cualquier número real

Hay muchos procesos de la naturaleza o creados por las personas que son repetitivos o periódicos. Esta periodicidad está presente en situaciones de la vida diaria donde se repiten valores de algunas variables a determinados intervalos. Por ejemplo: en el nivel del agua de las mareas (pasa de la pleamar o marea alta a la bajamar o marea baja), en la respiración (movimiento de los pulmones), en los latidos cardíacos, en la corriente eléctrica utilizada en nuestros hogares, en las ondas sonoras que están formadas por oscilaciones periódicas de las moléculas de aire. En varios de esos procesos o fenómenos es frecuente encontrar funciones como las siguientes:

- $V = 100 \text{ sen}(130\pi t)$, V (en voltios) indica voltaje producido por un generador eléctrico, t tiempo en segundos
- $x = A \text{ sen } (\omega t+\phi_0)$, $(x = A \cos(\omega t+\phi_1))$ ecuación que rige el movimiento oscilatorio de un sistema masa-resorte donde la única fuerza que actúa es la de restauración del resorte: $\omega=\sqrt{k/m}$, k una constante del resorte que depende de su elasticidad, m es la masa; t el tiempo; A es constante (la amplitud de la oscilación); ϕ_0, ϕ_1 la fase; w es la frecuencia angular.

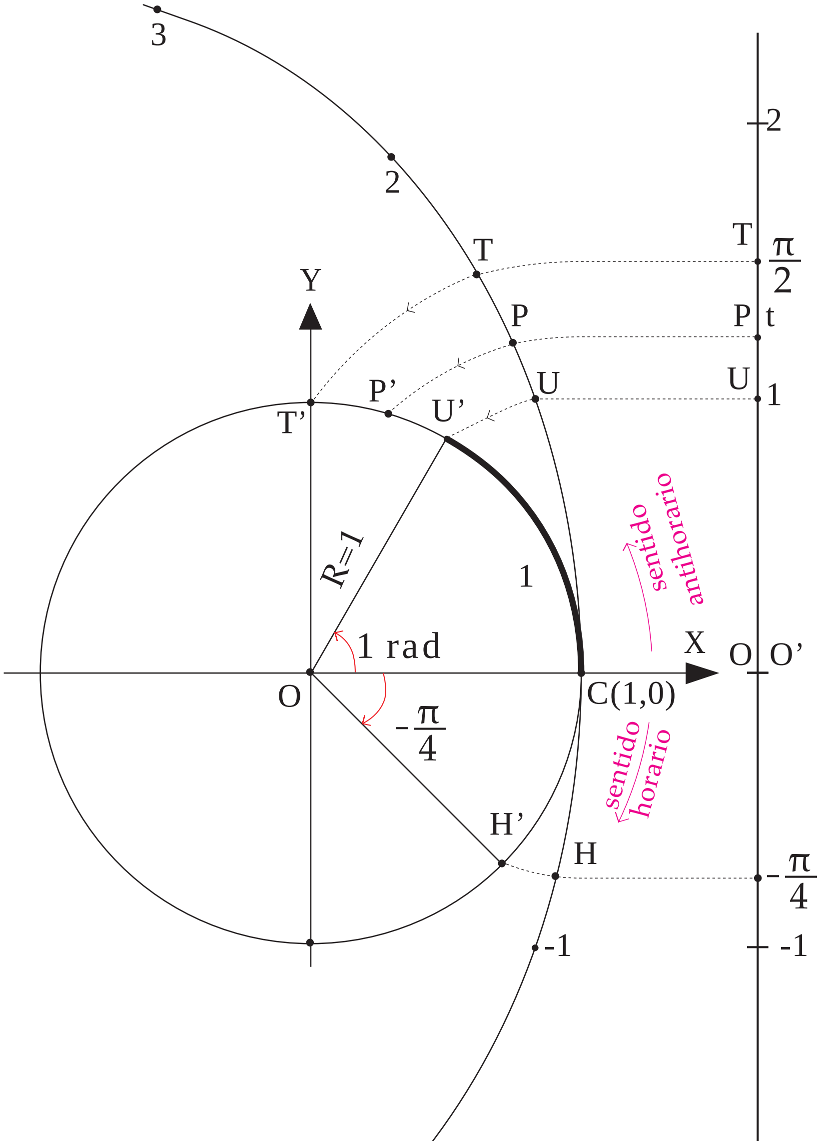
  x es la distancia de la masa a su posición de equilibrio.





Si en V=100 sen(130πt) damos a t un valor como 10 (segundos), resulta V= 100 sen(1 300π).

¿Qué significa calcular el seno de 1 300π cuando solamente lo hemos definido para valores de la variable independiente entre 0 y 2π?



A los fines de definir sen(1300π) y, en general, sen t, cos t, para cualquier número real t, pensemos en enrollar alrededor de la circunferencia unitaria una cuerda “infinitamente” larga que representa todos los números reales (la recta real).

Consideremos un punto origen O’ en la cuerda que hacemos coincidir con el punto C(1,0) de la circunferencia. La unidad de medida de segmentos en la cuerda (O’U=1) es igual al radio R=1 de la circunferencia.

Cada punto P (P≠C) de la cuerda, de abscisa t, es llevado en un punto P’ de la circunferencia de tal forma que la longitud del arco CP’ es |t|.

Después de hacer una o más vueltas completas con la cuerda (en un sentido o en el sentido contrario), los puntos comienzan a superponerse.

Por ejemplo, el punto S de la cuerda tal que O’S = $\widehat{CS}$= 1 300π = 650 x 2π es llevado en C pues se dan 650 “vueltas completas” en sentido positivo o sentido antihorario (el contrario al movimiento de las agujas de un reloj).

Este proceso de llevar los puntos de la recta sobre la circunferencia unitaria, permite definir sen t y cos t para cualquier valor de la variable independiente t. Así:

sen ($1\,300\pi$)= sen 0 = 0 y cos ($1\,300\pi$) = cos 0 =1;

sen $(\frac{-33\pi}{4})$= sen $(\frac{-\pi}{4})$= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos $(\frac{-33\pi}{4})$= cos $(\frac{-\pi}{4})$= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observa que en ese proceso de enrollar la cuerda se tiene que cualquier número $2\pi n$ (n entero) es llevado sobre el punto C(1,0)

RETO

Completa, en cada caso, para obtener una igualdad:

sen (25π)=

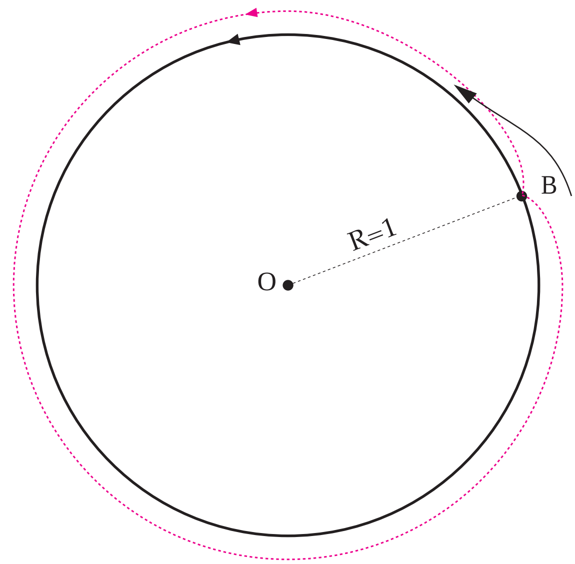
cos (720°)=

sen ($11\pi/2$)=

cos (-370°)=

sen ($-16\pi/3$)=

cos (-500°)=



Así que cada vez que se aumenta o disminuye la variable independiente t en un múltiplo entero de 2π, las funciones seno y coseno toman los mismos valores, lo cual se traduce en:

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t$$
$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t$$

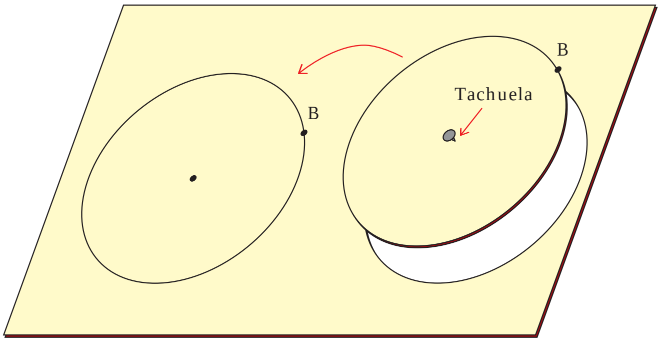
cualquiera que sea el número entero n y el número real t

El menor valor positivo de $2n\pi$ para el cual se verifica esa propiedad es 2π, denominado período de esas funciones (se repiten los valores de seno y coseno).

A medida que el punto P'(x,y) recorre la circunferencia unitaria, los valores de la abscisa x y de la ordenada y son tales que $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Por lo tanto, las funciones seno y coseno toman sus valores en el intervalo cerrado de extremos –1 y 1.

Haciendo dos vueltas completas en esta circunferencia a partir del punto B, volvemos a dicho punto. Esto es, al recorrer un arco de longitud $2 \times 2\pi = 4\pi$ a partir de B, volvemos a ese punto y los valores de las funciones seno y coseno se repiten.

Recortando un círculo en una cartulina y marcando puntos sobre su circunferencia podemos darnos cuenta de esta propiedad, sólo con fijar con una tachuela o un chinche el círculo recortado (de tal forma que pueda girar) y superponerlo a otro del mismo radio.

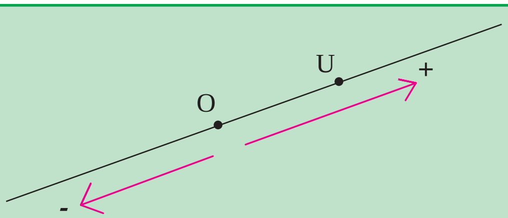


A partir de la definición de las funciones seno y coseno de dominio el conjunto de los números reales, se pueden definir las otras funciones trigonométricas, mediante:

Tangente de t: $\operatorname{tg} t = \operatorname{sen} t / \cos t$; Cotangente de t: $\operatorname{cotg} t = \cos t / \operatorname{sen} t = 1 / \operatorname{tg} t$; Secante de t: $\sec t = 1 / \cos t$; Cosecante de t: $\operatorname{cosec} t = 1 / \operatorname{sen} t$; siempre que los denominadores sean no nulos.

INTERESANTE

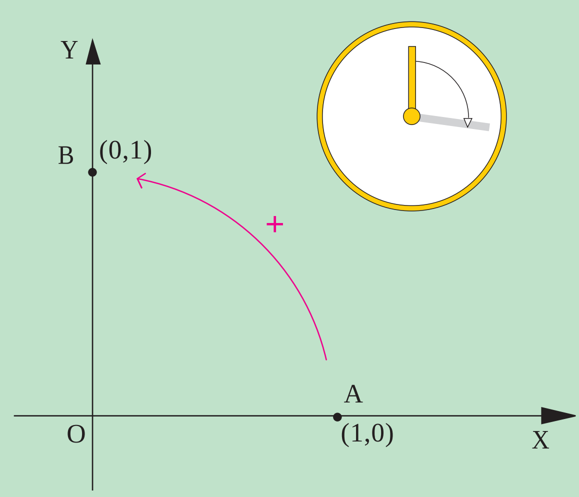
Una recta orientada es aquella en la cual se han fijado dos sentidos de recorrido de la misma, denominados sentido positivo y sentido negativo. Éstos se determinan mediante dos puntos que definen un sistema de coordenadas sobre la recta: el punto origen O(0) y el punto unidad U.



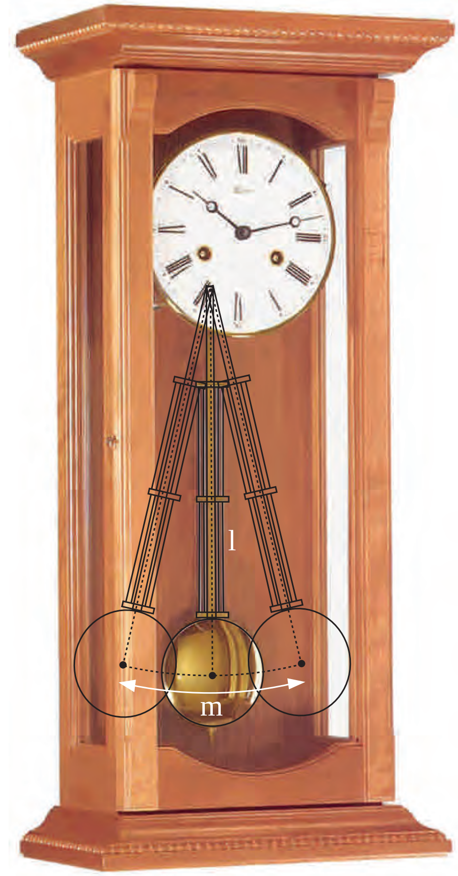
En un plano también hay dos orientaciones, denominadas sentido horario y sentido antihorario, las cuales se definen a partir de tres puntos no alineados que determinan un sistema de coordenadas.

Es costumbre fijar el sentido positivo o antihorario como el contrario al movimiento de las agujas de un reloj. El sentido negativo o sentido horario es el del movimiento de las agujas del reloj.

Esto es una convención que tiene siglos y no se conoce bien cuándo se inició. Es posible que ello se originó con la forma como usualmente colocamos un sistema de coordenadas rectangulares: el sentido antihorario es el de la rotación de centro en O, ángulo de 90°, que transforma +OX en +OY.



Propiedades y gráficas de las funciones trigonométricas

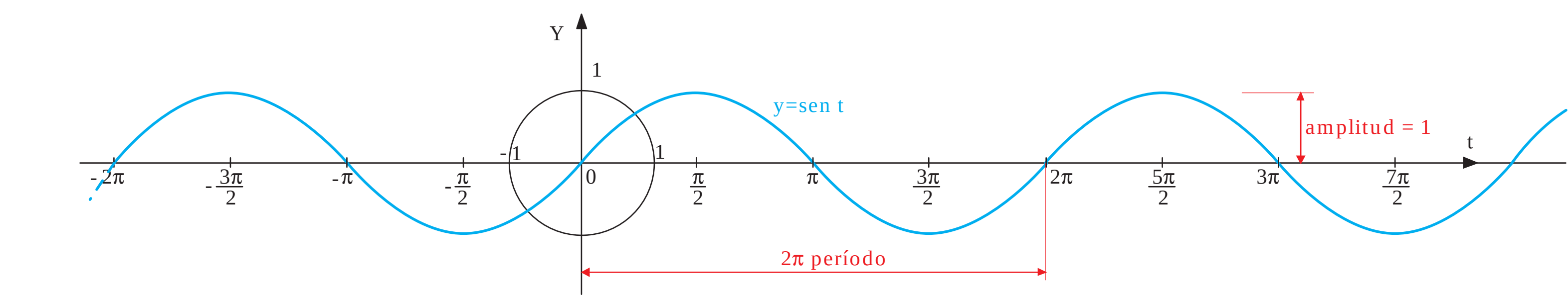


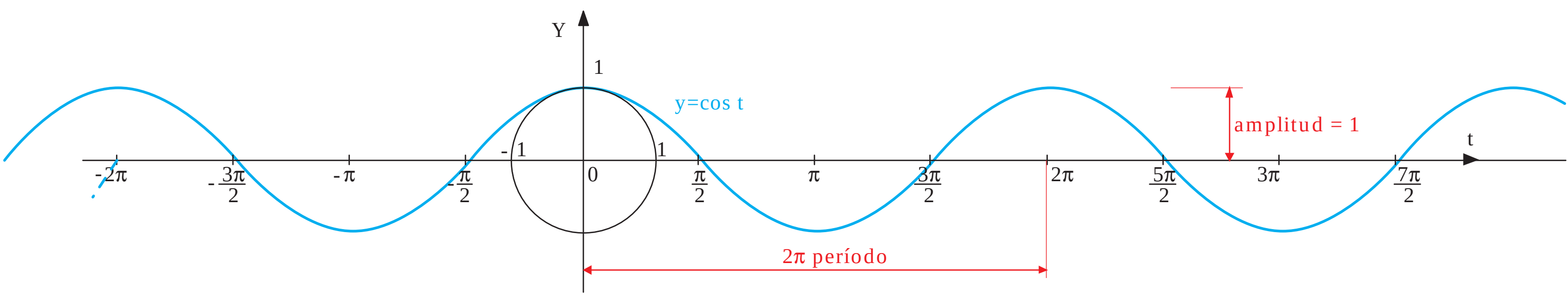
Las dos funciones básicas de la trigonometría, el seno y el coseno, tienen algunas propiedades que destacamos a continuación:

- Son funciones periódicas de período 2π. Si la variable independiente t se interpreta como tiempo, entonces el período es el tiempo necesario para que la función ejecute un ciclo completo.
- El dominio de esas funciones es el conjunto de todos los números reales. Las funciones toman valores en el intervalo cerrado de extremos –1 y 1.
- Para todo número real t se verifica que: $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Identidad fundamental.

La primera propiedad implica que al graficar esas funciones es suficiente hacerlo en un intervalo de longitud 2π y luego repetir sucesivamente la gráfica obtenida.

Las gráficas de las funciones y= sen t (*senoide*), y= cos t (*cosenoide*), son las dibujadas a continuación:





Observa que esas gráficas tienen la misma forma sólo que están desplazadas horizontalmente una respecto de la otra.

Así, la cosenoide se obtiene a partir de la senoide trasladándola $\pi/2$ hacia la izquierda y esto implica la siguiente propiedad:

$$\cos t = \text{sen}(t + \pi/2), \text{ para todo t real.}$$

Análogamente, con la senoide respecto de la cosenoide, resulta $\text{sen } t = \cos(t - \pi/2)$, para todo t real.

Se dice que la diferencia de fase o ángulo de fase entre sen t y cos t es $\pi/2$.

RETO

¿Qué propiedad tiene la curva senoide respecto del origen O?

Completa la igualdad sen(-t)=

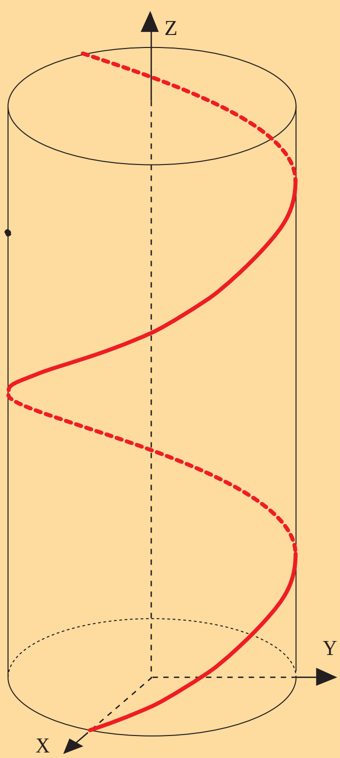
¿Qué propiedad tiene la curva cosenoide respecto del eje OY?

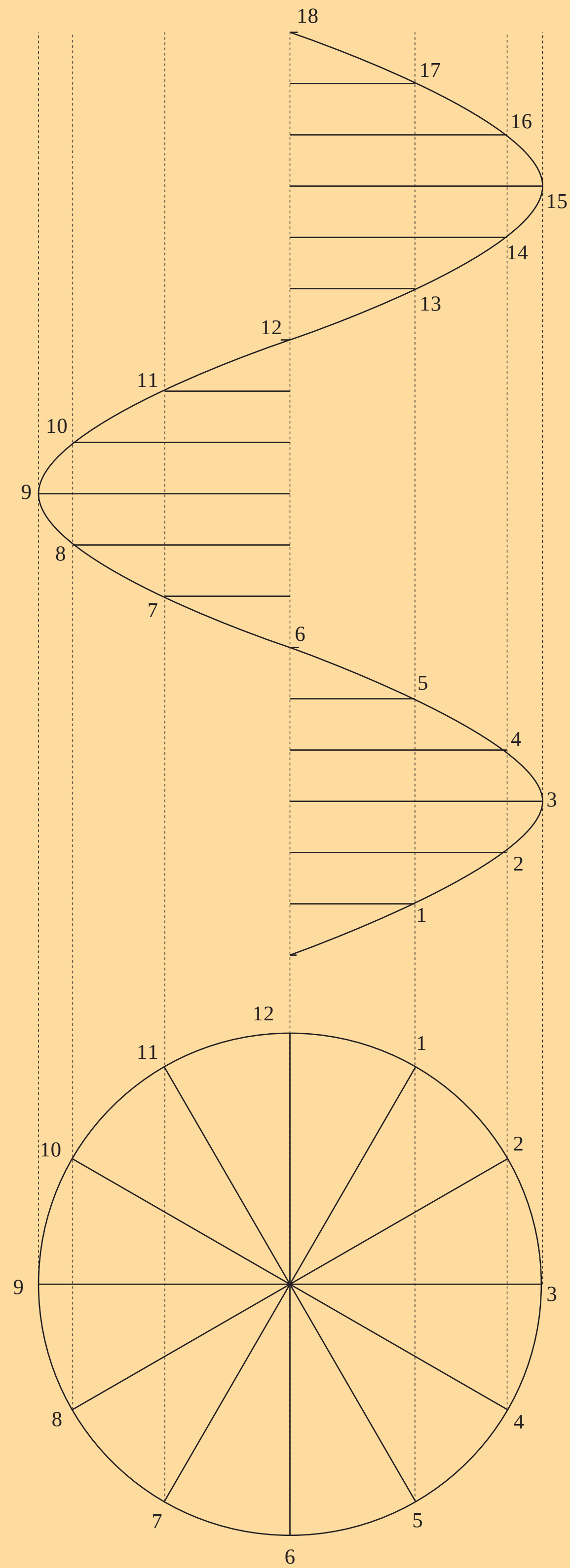
Completa la igualdad cos(-t)=

SABÍAS QUE...

El artista, grabador y geómetra A. Durero (Alemania, 1471-1528) en su obra “Instituciones geométricas” (publicada en alemán en 1525 y traducida al latín en 1535) dirigida a pintores, arquitectos y canteros, representó una senoide, que llamaba “cocliograma”, útil para construir una “escalera circular o en caracol”. Dice Durero: “Todavía se puede hacer otra línea de caracol, partiendo sólo de la circunferencia de la línea, que utilizan también los canteros al construir los caracoles y que, sin embargo, se llama más cómodamente cocliograma”.

Fuente: Instituciones de Geometría, traducido del latín al español por Jesús Yhmoff Cabrera, Universidad Nacional Autónoma de México (1987).





La curva aquí representada es una *hélice circular* que está enrollada en una superficie cilíndrica. Sus proyecciones sobre los planos coordenados son:

a) Sobre el plano XY (plano de la base del cilindro) es una circunferencia.

b) Sobre el plano YZ es una gráfica del tipo senoidal y sobre el plano XZ es del tipo cosenoidal.

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
http://www.fpolar.org.ve/matematica3