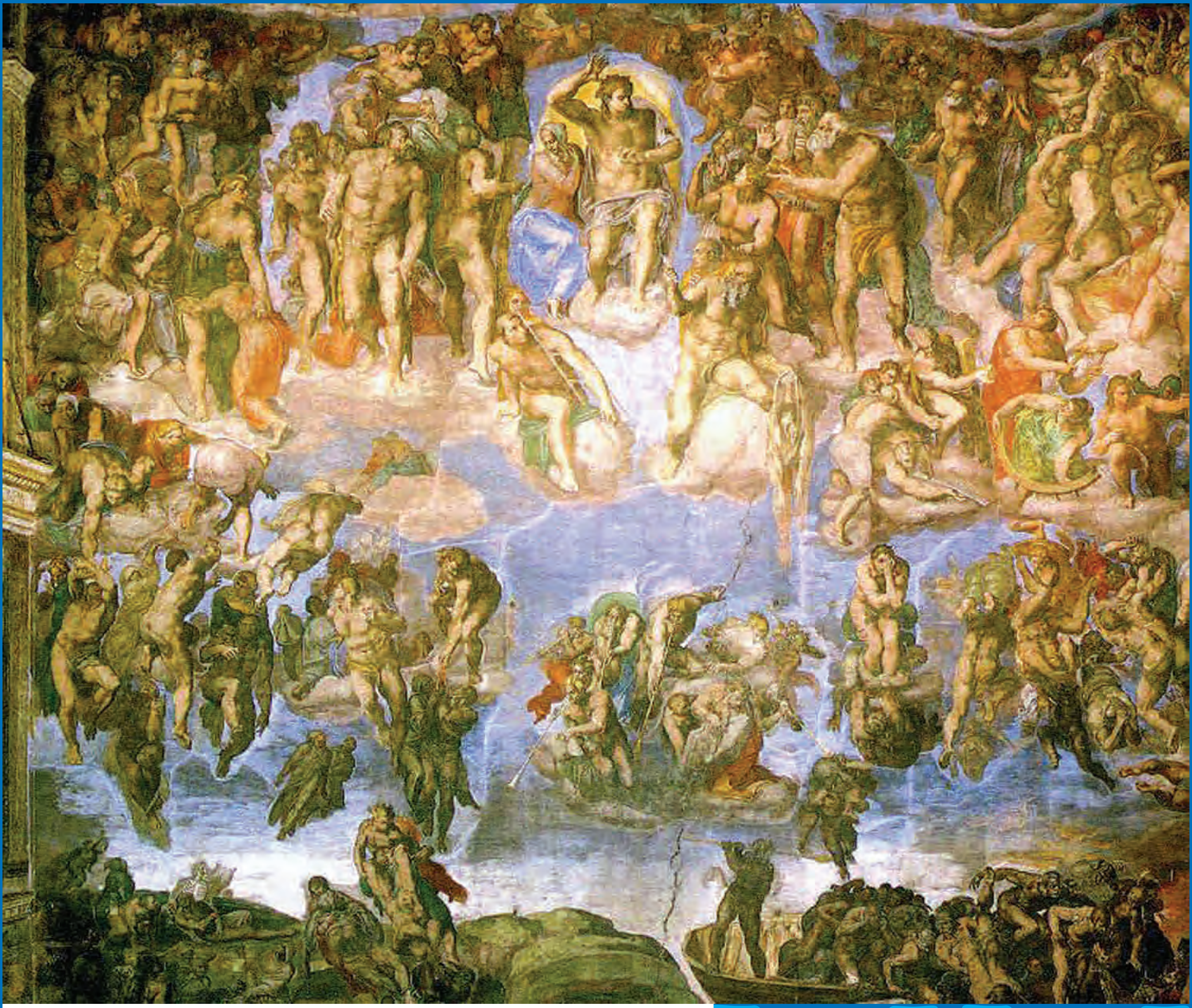
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa

Trigonometría



El *Juicio Final* de Miguel Ángel. En la fotografía las figuras superiores se ven más largas que las inferiores, pero cuando estamos a nivel del piso se observan del mismo tamaño.

MM

Me dijo el corazón: "Quiero conocer, quiero aprender. ¡Instrúyeme tú, Khayyam, que tanto has estudiado!" Al pronunciar la primera letra del alfabeto, me replicó el corazón: "Ahora ya sé. Uno es la primera cifra del número que nunca acaba".

Omar Khayyam, poeta, matemático y astrónomo.
(Persia –hoy Irán–, ca. 1044, ca. 1125)
Estos versos pertenecen al *Rubaiyat*, su excelso poemario.

Fascículo 11

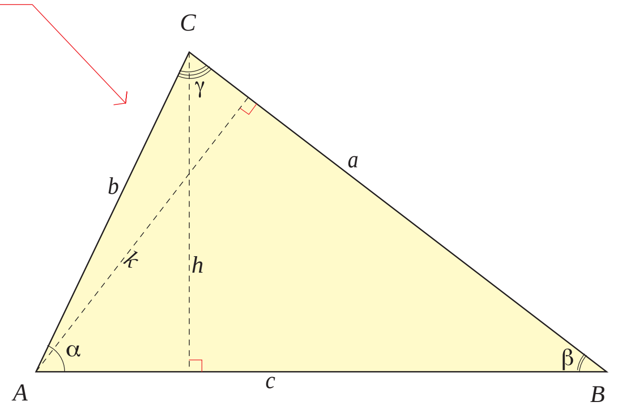
La ley de los senos

Triángulo.
Sven Geier. Artista norteamericano.

Hasta ahora se ha utilizado la trigonometría para estudiar las relaciones de los ángulos y lados en triángulos rectángulos. También se puede utilizar en el caso de triángulos no rectángulos.

Veamos cómo establecer una propiedad llamada ley de los senos, que permite calcular las longitudes de dos lados del triángulo conocidos, la longitud del otro lado y las medidas de dos ángulos.

Te invitamos a establecer la ley de los senos realizando los siguientes pasos y utilizando la figura de la derecha:

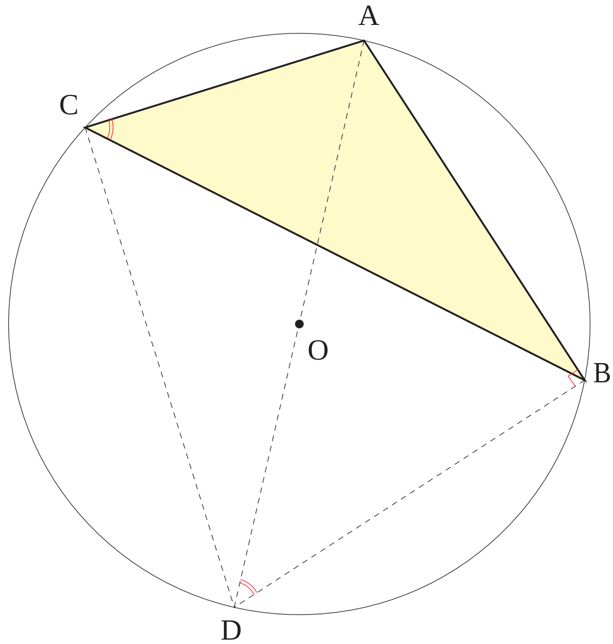


1. Determina la altura *h* en términos de la longitud *a* y el seno de un ángulo.
2. Determina la altura *h* en términos de *b* y el seno de un ángulo.
3. ¿Que relación existe entre $\dfrac{a}{\text{sen}\ \alpha}$ y $\dfrac{b}{\text{sen}\ \beta}$
4. Determina la altura *k* en términos de *c* y el seno de un ángulo.
5. Determina la altura *k* en términos de *b* y el seno de un ángulo.
6. ¿Qué relación existe entre $\dfrac{b}{\text{sen}\ \beta}$ y $\dfrac{c}{\text{sen}\ \gamma}$?
7. De 3 y 6 ¿qué concluyes?

$$\frac{a}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{b}{\text{sen}\ \beta} = \frac{c}{\text{sen}\ \gamma}$$

Así has demostrado la Ley de los Senos: “En cualquier triángulo se verifica que las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos”.

Otra forma no menos elegante de demostrar la ley de los senos es utilizando la circunferencia circunscrita de un triángulo.



En la figura se tiene un triángulo ABC, no necesariamente rectángulo, y su circunferencia circunscrita de radio *r*.

Los triángulos ABD y ACD son triángulos rectángulos (inscritos en una semicircunferencia). Los ángulos ADB y ACB son iguales porque comprenden el mismo arco $\overset{\frown}{AB}$. Luego:

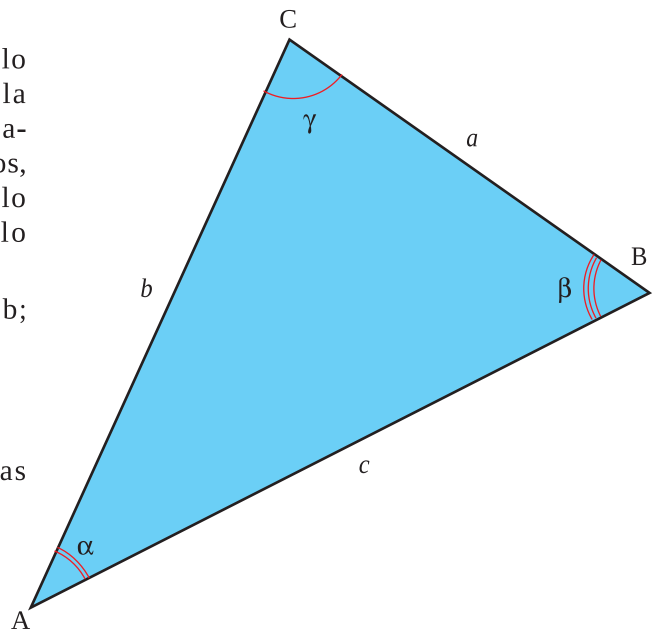
$$\text{sen}\ (\measuredangle ACB) = \text{sen}\ (\measuredangle ADB) = \frac{AB}{2r}$$

Así: $\dfrac{AB}{sen(\measuredangle ACB)} = 2r$

Se aplica el mismo procedimiento a los otros dos ángulos del triángulo y se obtiene:

$$\frac{AB}{sen(\measuredangle ACB)} = \frac{AC}{sen(\measuredangle ABC)} = \frac{BC}{sen(\measuredangle BAC)} = 2r$$

La ley de los cosenos



En la ley de los senos se relacionan los lados de un triángulo con los senos de sus ángulos y también con el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Otra relación fundamental de la trigonometría es la denominada ley de los cosenos, la cual permite calcular la longitud de un lado del triángulo conociendo los otros dos lados y la medida del ángulo comprendido entre éstos.

Considerando el triángulo ABC de lados AB = c, AC = b; BC = a, y ángulos $C\hat{A}B = \alpha$, $C\hat{B}A = \beta$, $A\hat{C}B = \gamma$

Se verifica:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{\beta}}$$

Enuncia en palabras esa ley y escribe las relaciones análogas para los otros dos lados del triángulo.

RETO

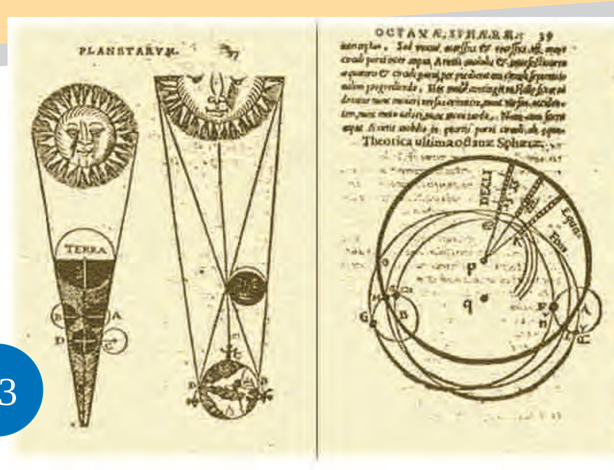
Demuestra la ley de los cosenos.

Sugerencia: Desde el vértice C traza la altura CD = h y aplica el teorema de Pitágoras al triángulo ACD para calcular b^2.

SABÍAS QUE...

Johannes Müller (Alemania, 1436-1476), llamado Regiomontano, posiblemente el matemático que más influencia tuvo en el s. XV y además un eminente astrónomo, fue el primer editor de textos de matemática y astronomía de uso comercial. Sus obras más conocidas son: el primer tratado de trigonometría que tuvo gran influencia en su tiempo (escrito en latín "De triangulis omnimodis", "Sobre los triángulos de toda clase") y "Ephemerides". En el primero está el enunciado de la "ley de los senos" y la regla para calcular el área de un triángulo, en notación actual, $S = (bc \operatorname{sen} \alpha)/2$, y mostró como resolver cualquier triángulo plano (o esférico) utilizando la ley de los senos o la del seno de su complemento (el coseno). En la otra obra hay tablas para la posición del Sol, de la Luna y de los planetas (cada día en los años 1475-1506).

Cristóbal Colón disponía de una copia de esta obra en su cuarto viaje al Nuevo Mundo (1504) y la utilizó para predecir el eclipse lunar del 29 de febrero de 1504, lo cual causó gran impacto en la población indígena que le era hostil y a partir de este evento logró la ayuda de dicha población.



Venezuela en el Polo Norte

Desde tiempos inmemoriales los hombres y mujeres han querido alcanzar sitios de muy difícil acceso, inhóspitos y donde sólo pueden llegar los que cuentan con buen entrenamiento, excelentes condiciones físicas, voluntad y coraje. La conquista de montañas muy elevadas como el Everest (*Chomolungma* o “diosa madre del mundo” en la lengua local) de 8 850 m de altura y el Pico Bolívar en Venezuela (4 980,8m), están entre estos sitios. Asimismo, las profundidades del mar, el Salto Angel, el Polo Sur y el Polo Norte, son objeto de esas hazañas.

El miércoles 28 de abril de 2004 los venezolanos fuimos sorprendidos por una buena noticia que circuló en los principales diarios del país: cinco profesionales venezolanos, Carlos Calderas, Marco Cayuso, Martín Echeverría, Carlos Castillo y Marcus Tobía plantaron la bandera de Venezuela en el Polo Norte el día anterior, después de una caminata de 280 km durante 17 días.

CARLOS CALDERAS
Médico Cardiólogo

Miembro fundador de Proyecto Cumbre. Ha estado vinculado por más de 24 años a actividades de montañismo y ha participado en más de 28 expediciones en calidad de médico y escalador. Ha sido uno de los pioneros en el campo de la Medicina de Montaña en el país. Trabaja como Cardiólogo Intervencionista en el Urológico San Román y está profundamente involucrado en actividades de docencia e investigación clínica.

MARCO CAYUSO
Ingº Electrónico

23 años de experiencia en el montañismo. Miembro fundador de la Asociación Venezolana de Instructores y Guías de Montaña. Miembro de equipos de filmación en las montañas y selvas de Venezuela, Argentina, Colombia, Ecuador y Brasil. Ha participado en numerosas expediciones a las montañas de las cordilleras de los Andes, Pamir e Himalaya. Ascenso al Shisha Pangma Central (8 027 m). Miembro de la Primera expedición venezolana al Everest.

MARTÍN ECHEVERRÍA
Ingº en Computación

Más de 28 años de experiencia en el montañismo. Exdirectivo del Centro Excursionista OIKOS (USB) y del Centro Excursionista Loyola Senior. 20 expediciones a las montañas y selvas de América y Asia. Escaladas del Autana y Aratitiope. Descenso a la Sima Ahonda del Auyantepui. Ascenso al Pumori y al Ama Dablam, en Nepal. Miembro de la Primera expedición venezolana al Everest.

CARLOS CASTILLO
Ingº Mecánico

22 años de experiencia en el montañismo y la escalada en roca. Ha realizado diferentes escaladas en la cordillera de los Andes, Alpes e Himalaya. Escaladas en Estados Unidos (ascensos al Capitán) y Europa (Ascenso al Mont Blanc). Ascenso al Gasherbrum2 (8 035 m). Miembro de la primera expedición venezolana al Everest. Campeón nacional de escalada años 1997 y 1998. Finalista en Panamericanos de escalada en México y Colombia.

MARCUS TOBÍA
Arquitecto

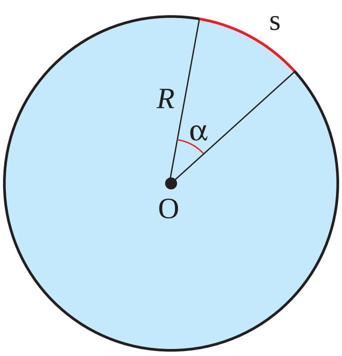
Más de 24 años de experiencia en el montañismo. Fundador y Director del Centro Excursionista Colegio Humboldt. Miembro Fundador de Proyecto Cumbre. Ha participado en numerosas escaladas en las cordilleras de los Andes y ha liderizado seis expediciones venezolanas a montañas del Himalaya. Ascenso al Shisha Pangma Central (8 027 m). Piloto de parapente. Ascenso al Everest (8 848 m).

Fuente: Proyecto Cumbre. http://www.proyectocumbre.com.ve

Según informaciones de prensa, el inicio del viaje a pie se hizo el 6 de abril a partir del “paralelo 87” caminando sobre un mar congelado.

¿Cómo verificamos matemáticamente esa distancia recorrida?

La respuesta se basa en una propiedad que permite calcular la longitud s de un arco de circunferencia conociendo el ángulo subtendido: $s = R\alpha$ (si el ángulo α está en radianes).



Para tener certeza de esa distancia, es necesario indicar que la caminata se inicia "un poco" más allá del paralelo 87° N, digamos 87° 25' N. Con este dato procedemos a calcular la longitud del arco de meridiano $\overset{\frown}{BN}$ conociendo que el radio polar es R=6 356,8 km (suponemos la Tierra de forma esférica).

87° 25' N significa el paralelo de esa latitud norte, como se observa en el dibujo. El ángulo complementario BON mide 90° - 87° 25' = 2° 35' ≈ 2,5833°, lo cual convertimos a radianes sabiendo que $1° = \left(\frac{2\pi}{360}\right)$rad.

Se tiene: $2{,}5833° = 2{,}5833\left(\frac{2\pi}{360}\right)$ rad $\approx \frac{2{,}5833 \cdot 2 \cdot 3{,}1415}{360} \approx 0{,}0450$ rad.

Por lo tanto, s= 6 356,8 x 0,0450 km ≈ 286,05 km

El error porcentual cometido entre este resultado y el dado por la prensa es:

$$100\,\frac{286{,}05 - 280}{280} = 2{,}16\%$$

También podemos calcular la distancia lineal BN en lugar de la distancia a lo largo del meridiano de 120°.

Radio del paralelo:

$r = BC = R \text{ sen } 2°\,35' \approx 286{,}5125$ km

$OC = R \cos 2°\,35' \approx 6\,350{,}3398$ km

$CN = ON - OC = 6{,}4602$ km

Teorema de Pitágoras

$$BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} \approx 286{,}58 \text{ km}$$

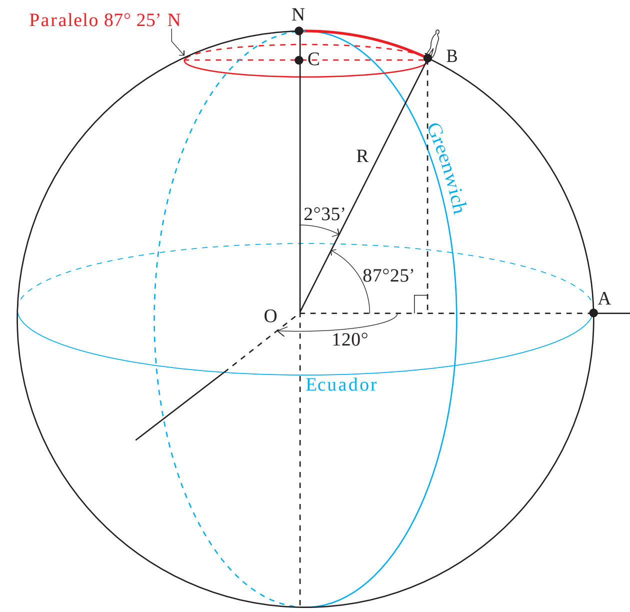
Observa que la longitud de arco BN, y la distancia lineal BN son "prácticamente iguales", es decir el "recorrido lineal" y el "curvilíneo" resultan "iguales" en la práctica. Esto se debe a que CN^2 es bastante pequeño en comparación con el cuadrado del radio ($r^2 = CB^2$) y por ello $BN \approx BC \approx \overset{\frown}{BN}$. El error porcentual cometido al aproximar el arco BN por el segmento BN es igual a:

$$100\,\frac{286{,}58 - 286{,}05}{286{,}05} = 0{,}18\%$$

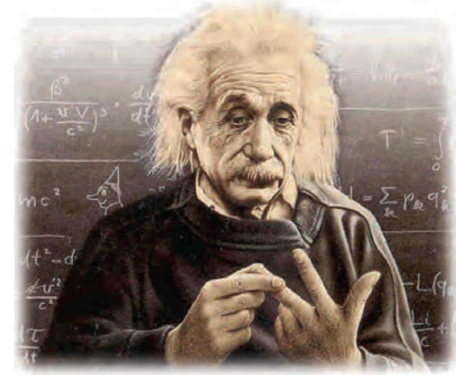
RETO

a) Calcula la longitud del paralelo 87°25' N.

b) Otra forma de calcular la longitud del arco BN es con la longitud del meridiano. ¿Cómo?



Fuente: Proyecto Cumbre. http://www.proyectocumbre.com.ve



Tengo que pensarlo

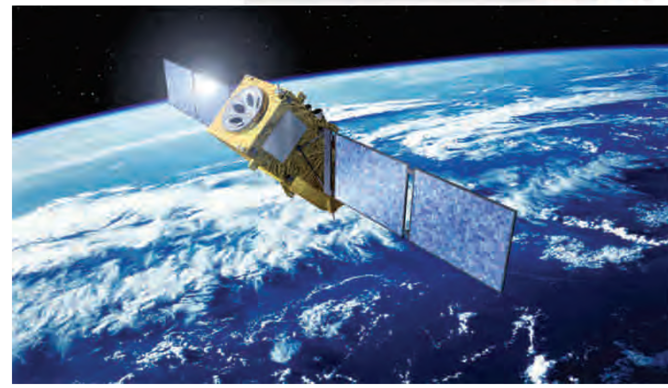
1 Un satélite viaja en una órbita circular de 1500 km por encima de la Tierra y tarda 2 horas y 15 minutos para dar una vuelta completa alrededor de la misma.

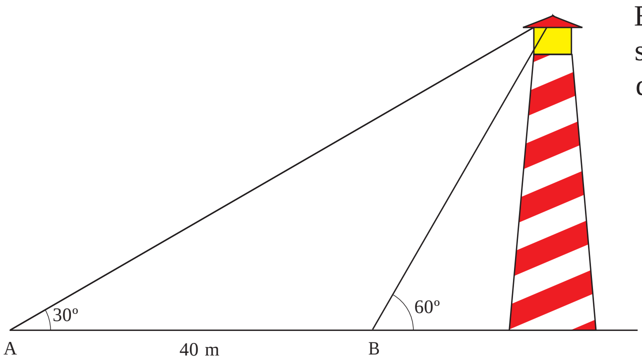
Se prevé que el satélite pasara sobre una estación de rastreo de la Tierra a las 12 del mediodía.

a) Si la antena rastreadora apunta 30° por encima del horizonte (altitud 30°), ¿a qué hora exactamente pasará el satélite por encima del astil de la antena?

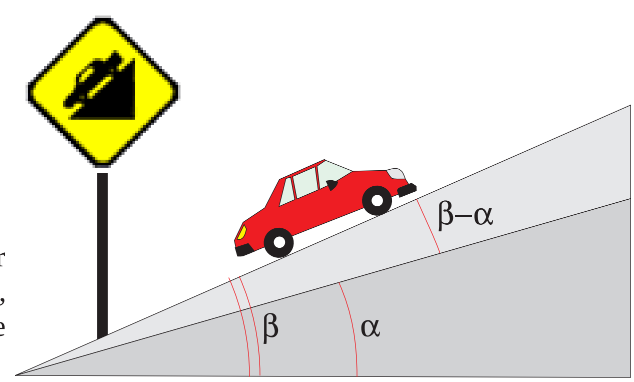
b) ¿Cuál es la distancia que hay entre el satélite y la estación rastreadora a las 12:05 horas?

Sugerencia: Suponemos que la Tierra es de forma esférica con radio R=6367,59 km (promedio del radio ecuatorial y del radio polar).

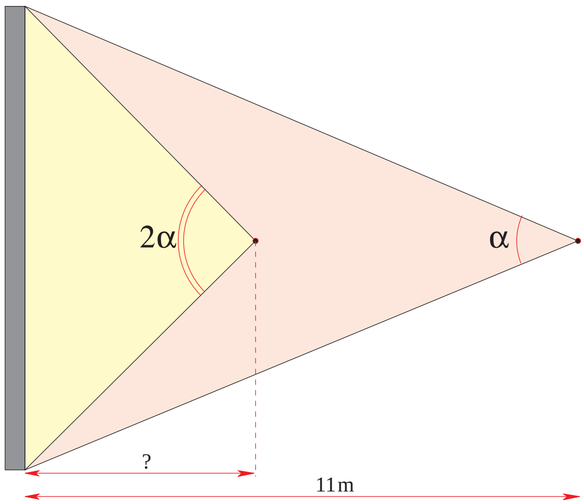




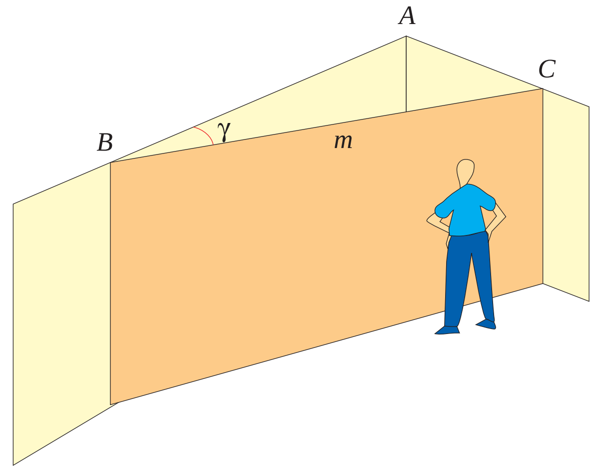
2 El faro en la figura se ve desde dos puntos de observación según la medida de los ángulos señalados. ¿Cuál es la altura del faro?



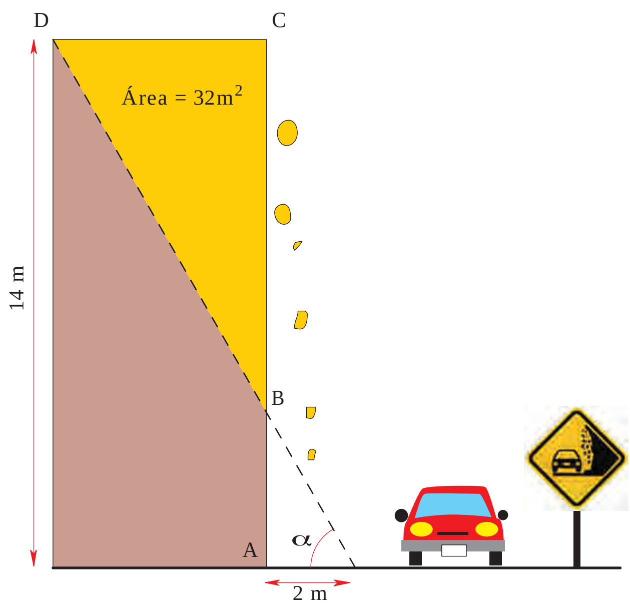
3 Un cierto tramo de carretera es una subida del 12% (al avanzar 100 m se suben 12 m); como se considera excesiva esta subida, se va a reducir al 8%. Se desea conocer el ángulo que debe formar la nueva carretera con la antigua.



4 Juan está sentado en una butaca central de un cine que dista 11 m de la pantalla. Para ver mejor se acerca a la pantalla para conseguir un ángulo doble del inicial. ¿A qué distancia se pone de la pantalla?



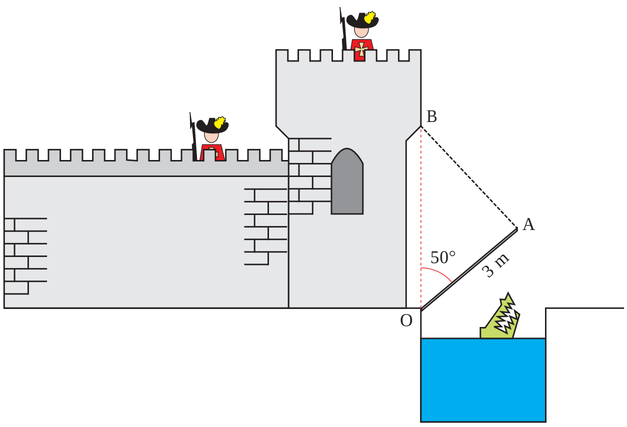
5 Para los decorados de una representación teatral un tramoyista desea reducir la longitud de las paredes de una estancia. Para ello recurre a la mampara BC que tiene una longitud *m*, con la que se tapa la esquina. Hallar el ángulo γ con el que se tapa la mayor longitud de pared, sabiendo que las paredes AB y AC son perpendiculares.



6 A dos metros del borde de una carretera hay un escarpado vertical AC de 14 m de altura. Como se producen desprendimientos, se va a quitar la parte más alta del escarpado. Para ello se retirará la parte del terreno situada por encima de una cierta recta BD.

Con el presupuesto de que se dispone sólo se puede quitar terraplén hasta que el área de su sección se reduzca en 32 m^2. ¿Cuánto debe valer aproximadamente el ángulo señalado en la figura?

7 Hallar la longitud de la cadena (AB) de modo que el puente levadizo (OA) forme un ángulo de 50° con la vertical, sabiendo que la distancia OB = 3,5 m y que el puente OA mide 3 m.



Respuestas:

1) a= 5,81 minutos y b=2 225,03 km.

2) $20\sqrt{3}$

3) b - a ≈ 2,3°

4) La respuesta está en función del ancho de la pantalla l. La distancia es $\frac{484 - l^2}{88}$

5) α= 45°

6) α≈ 60°

7) la cadena mide 2,78 m aproximadamente

Bibliografía

Philosopher Pythagoras.
Pietro Longhi (Italia 1701-1785).
Fuente: artyzm.com / world / l / longhi / philosopher.htm

Páginas web

http://www.recursosmatematicos.com/secundaria.html
http://www.unizar.es/ice/jaem
http://platea.pntic.mec.es/~mzapata/tutor_ma/trig.html
http://www.usuarios.lycos.es/arquillos/trirel4.htm

Bibliografía

Garnier, Rowan & Taylor, John (1996). 100% Mathematical Proof. New York, EE.UU. John Wiley & Sons.
Mankiewicz, Richard (2000). The Story of Mathematics. Princetown University Press. New Jersey, EE.UU.
Maor, Eli (2002). Trigonometric Delights. Princetown University Press. New Jersey, EE.UU.
O' Daffer, Charles; Cooney, Dossey & Schielak (1998). Mathematics for Elementary School Teachers. New York, EE.UU. Addison-Wesley.
Serra, Michael (1993). Discovering Geometry. Berkeley, California, EE.UU. Key Curriculo Press.

Programa TV

Escuadrón Matemático. Cl@se, Canal 160 DirecTV.

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web: http://www.fpolar.org.ve/matematica3