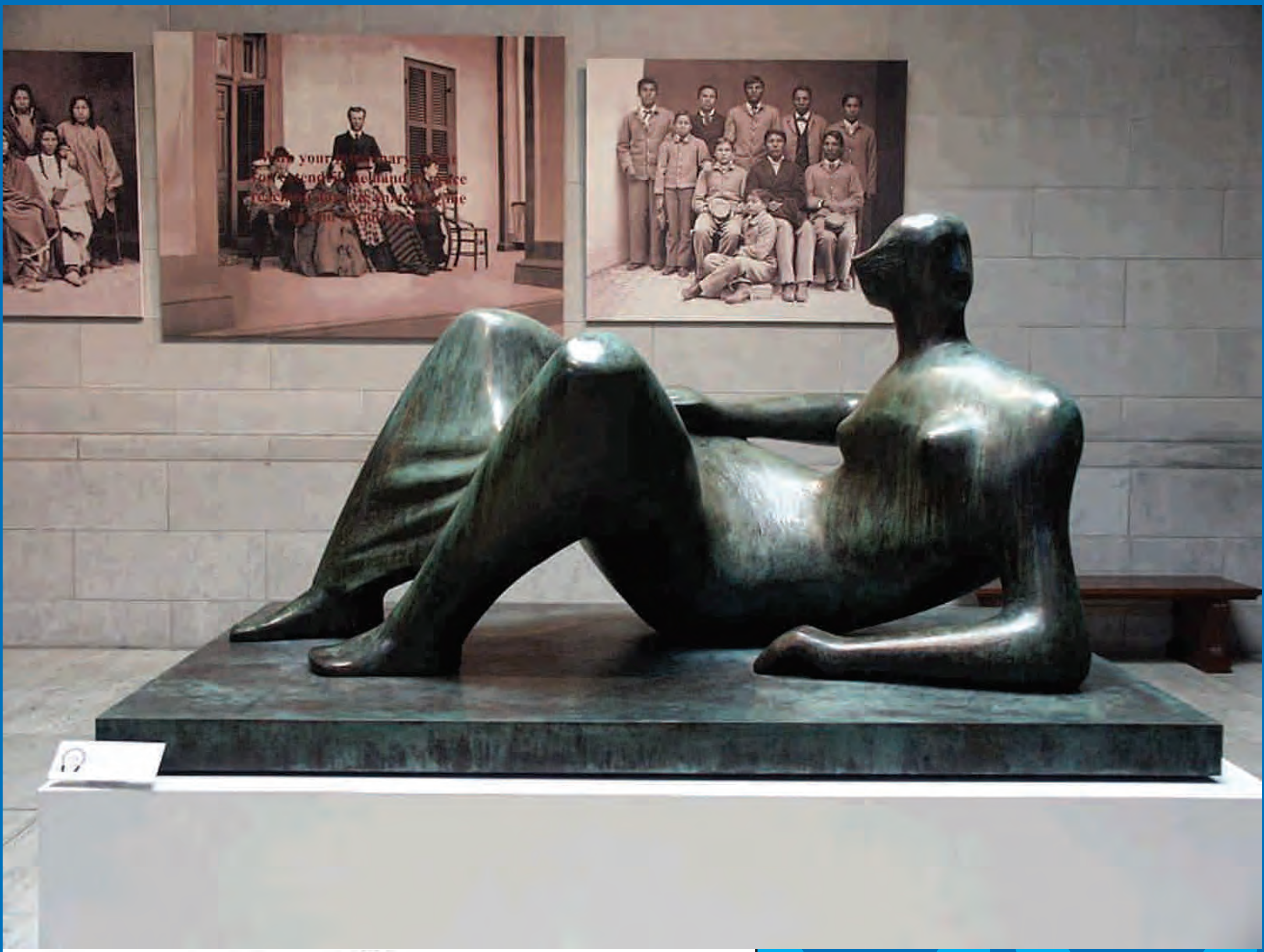
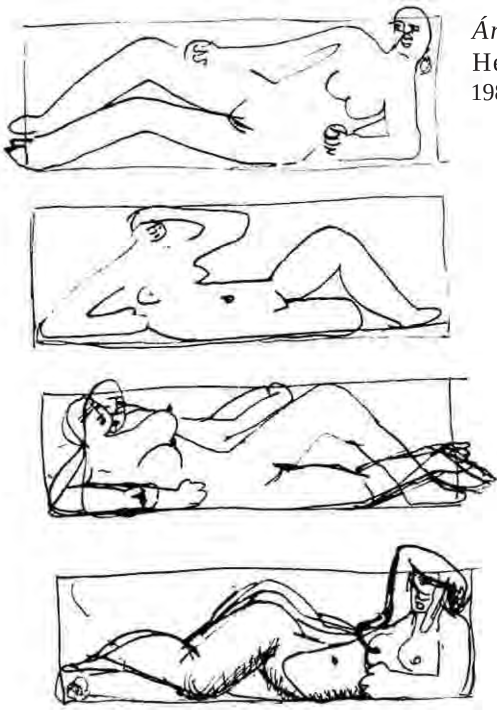
Fundación
POLAR

Matemática Maravillosa

Trigonometría





Ángulos en figura reclinada (1979)
Henry Moore (Gran Bretaña, 1898-1986).

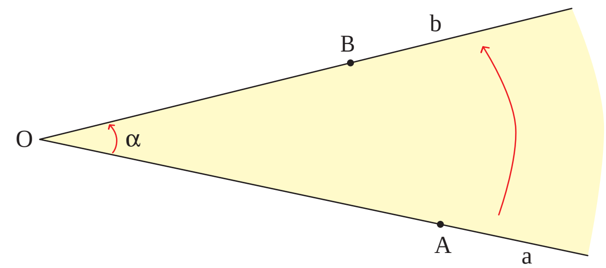
MM

Fascículo 10

Descubriendo el mundo de la trigonometría

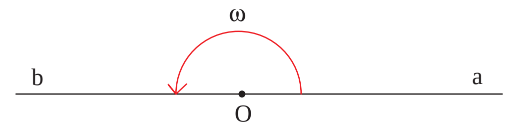
Ángulos y sus medidas

Los ángulos se encuentran en la geometría cuando dibujamos polígonos, semirrectas y rectas que se cortan. La primera definición la dio Euclides en su famoso tratado "Los Elementos" (s. III a.C.).



Un ángulo está definido por un par de semirrectas a y b de origen común O, donde damos las semirrectas en el orden indicado por la flecha curvilínea.

El ángulo se denota mediante el símbolo $\widehat{AOB}$ o $\measuredangle AOB$, siendo A y B, puntos cualesquiera de a y b, respectivamente. Asimismo se denota mediante $\widehat{ab}$.

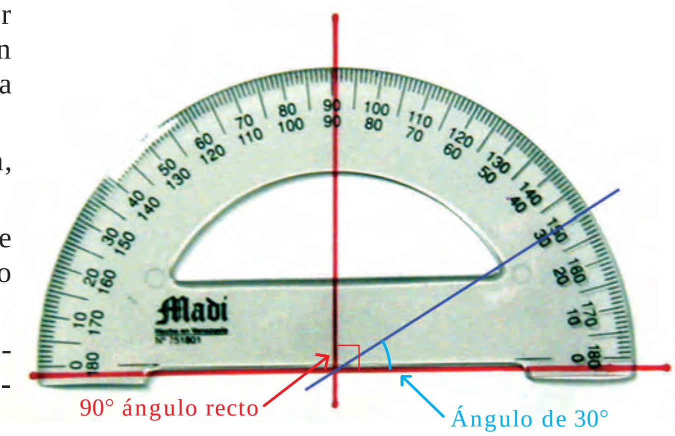


Otra forma de denotarlos es utilizando letras griegas, por ejemplo: α, β, γ, δ, θ. La flecha curvilínea dibujada también indica la rotación de centro O y ángulo α que transforma la semirrecta a en la semirrecta b.

La región sombreada se denomina *sector angular* de lados a, b y vértice O.

Si las dos semirrectas coinciden se tiene el ángulo nulo que denotamos por $\widehat{O}$ y si son opuestas se tiene el ángulo raso o llano. Si son perpendiculares se tiene el ángulo recto.

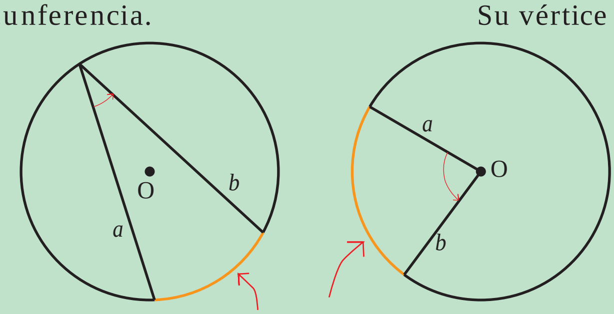
Los ángulos se miden con un instrumento denominado *transportador*, que da la *medida de ángulos en grados sexagesimales* en el intervalo 0° - 180°.



INTERESANTE Ángulos en el círculo

Ángulo inscrito:
Su vértice está en la circunferencia.

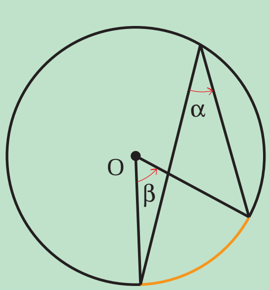
Ángulo central o en el centro:
Su vértice es el centro de la circunferencia.

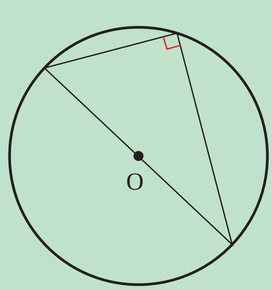


Si en un círculo, un ángulo central y un ángulo inscrito subtienden el mismo arco, entonces la medida del ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central.

Arco comprendido por el ángulo. En cada caso se dice que el ángulo subtiende al arco.

$$\alpha=\frac{\beta}{2}$$



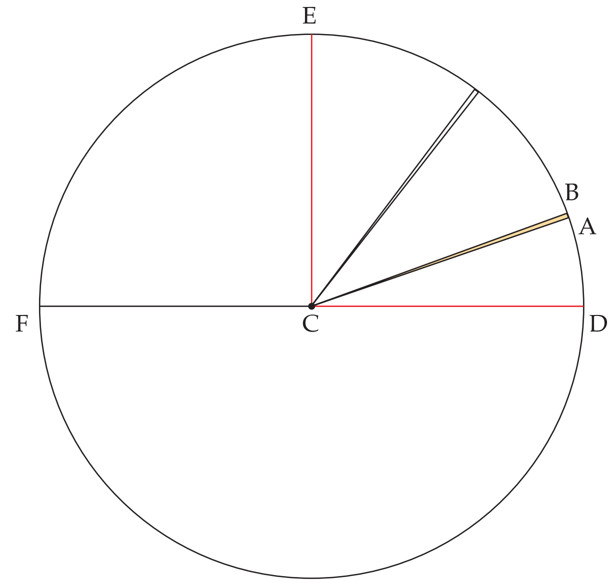


Un diámetro determina un ángulo llano en el centro. Luego un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto, pues el llano mide 180° y su mitad es 90°.

¿Qué es medir ángulos?

Medir ángulos significa establecer una correspondencia entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los ángulos.

Los dos sistemas de medida de ángulos más utilizados son: el **sistema sexagesimal** y el **sistema de radián**.



¿Cómo se obtienen esos sistemas de medida de ángulos?

En el **sistema sexagesimal** la unidad de medida es un grado sexagesimal, denotado 1°. Para definirla se considera una circunferencia de centro C que se divide en 360 arcos de la misma longitud. Cada uno de estos arcos, junto con el centro C, origina un ángulo $\widehat{ACB}$ (indicado en el dibujo) que mide 1°.

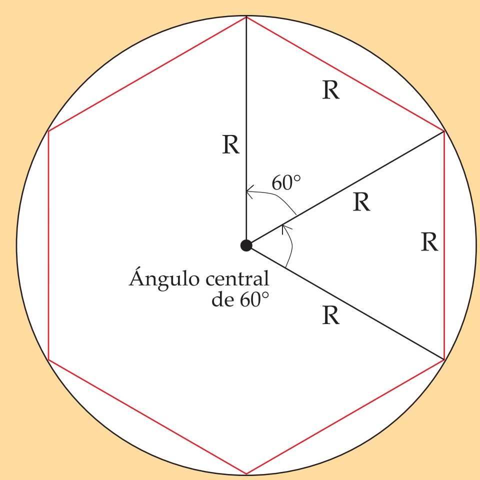
En este sistema de medida, los ángulos $\widehat{DCE}$ y $\widehat{DCF}$ miden 90° (ángulo recto) y 180° (ángulo llano), respectivamente.

Los ángulos que son iguales tienen la misma medida.

SABÍAS QUE...

El sistema sexagesimal tuvo su origen con los babilonios y posiblemente esa división de la circunferencia en 360 partes estuvo basada en lo próximo de este número con la duración de un año, 365 días. También es posible que esto se deba a que una circunferencia se divide fácilmente en seis partes iguales que originan un hexágono regular y cada uno de los ángulos en el centro mide 60°.

¿Existirá algún sistema de medida de ángulos relacionado con el sistema decimal? La respuesta es afirmativa y consiste en dividir la circunferencia en 400 arcos de igual longitud. Cada uno de esos arcos origina un ángulo que mide un grado centesimal. Por ejemplo, en este sistema los ángulos rectos miden 100 grados centesimales o gonios (100^g). Este sistema centesimal es utilizado en algunas aplicaciones técnicas. Varias calculadoras tienen los tres sistemas: rad (radián), degree (sexagesimal) y grade (centesimal).

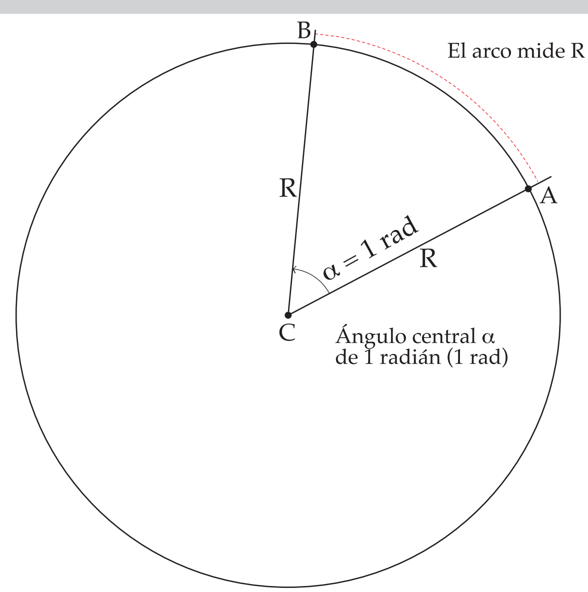


En el **sistema radián o medida circular** la unidad de medida es un radián, que es la medida de un ángulo $\widehat{ACB}$ de vértice en el centro C de una circunferencia y que subtiende un arco de longitud igual al radio de la misma.

Si R es el radio de la circunferencia, la longitud de ésta es 2π veces el radio y cada radio corresponde a un ángulo central de 1 rad. Luego para la totalidad de la circunferencia, se tiene 360° = 2π rad.

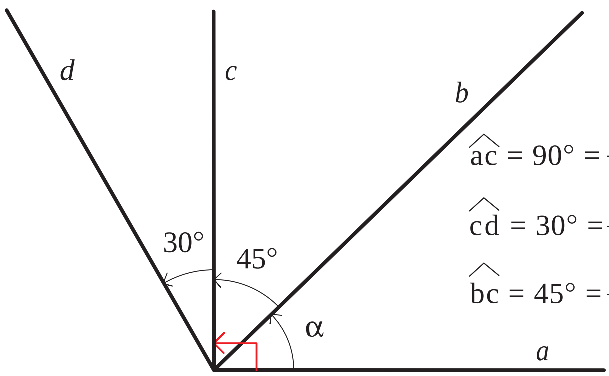
De aquí se deduce $1° = (\frac{2\pi}{360})$ rad $\approx (2x\frac{3{,}1416}{360})$ rad $\approx 0{,}017453$ rad

y $1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} \approx \frac{360°}{6{,}2832} \approx 57{,}296°$; lo que permite hacer los cambios de grados sexagesimales a radianes y viceversa.



El radián mide el ángulo que ha girado una rueda cuando la llanta ha rodado una distancia igual al radio de la misma.

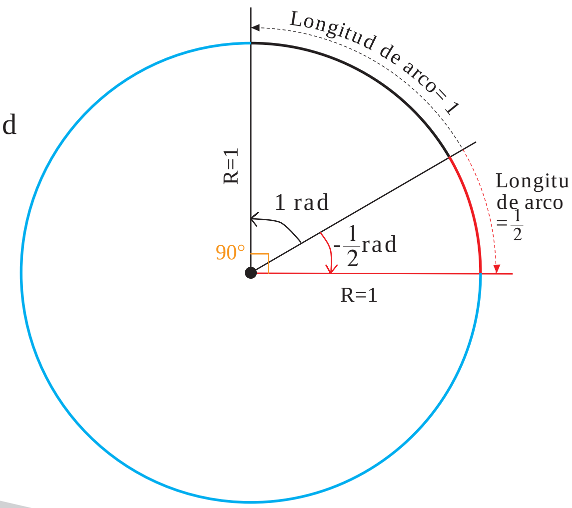
Es una práctica usual denotar un ángulo y su medida con la misma letra. Así se escribe $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ para indicar el ángulo α que mide 45° (en el sistema sexagesimal) o bien $\frac{\pi}{4}$ (en el sistema radián).



$\widehat{ac} = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad ≈ 1,57 rad

$\widehat{cd} = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad

$\widehat{bc} = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad



RETO

1) Si un ángulo mide θ radianes, ¿cuánto mide en grados sexagesimales?; 2) Si un ángulo mide x° en el sistema sexagesimal, ¿cuánto mide en radianes? Determina los valores de θ radianes y x° para obtener las igualdades siguientes $90° = \theta$; $\frac{\pi}{3} = x°$; $360° = \theta$; $0{,}4° = \theta$.

Hiparco. Fuente: perso.wanadoo.es / antoni.salva figures / hiparco.jpg

SABÍAS QUE...

La trigonometría tiene una historia muy antigua. Una de las primeras cuestiones que se plantearon en la antigüedad fue de qué manera se podía medir un ángulo por intermedio de una regla. Es claro que esto no puede hacerse directamente, pero sí puede medirse la cuerda que subtiende el ángulo y luego con ayuda de tablas determinar el ángulo.

Fue Hiparco (Nicea, actualmente Iznik en Turquía, ca. 190-ca. 120 a.C.), el gran astrónomo de los griegos considerado "el padre de la trigonometría", quien construyó una tabla de cuerdas y para esto consideró los triángulos inscritos en una circunferencia la cual dividió en 360 partes iguales, siendo cada lado de un triángulo una cuerda. Los cálculos eran para determinar la longitud de la cuerda en función del ángulo central, lo que convirtió en la tarea fundamental de la trigonometría durante los siglos siguientes.

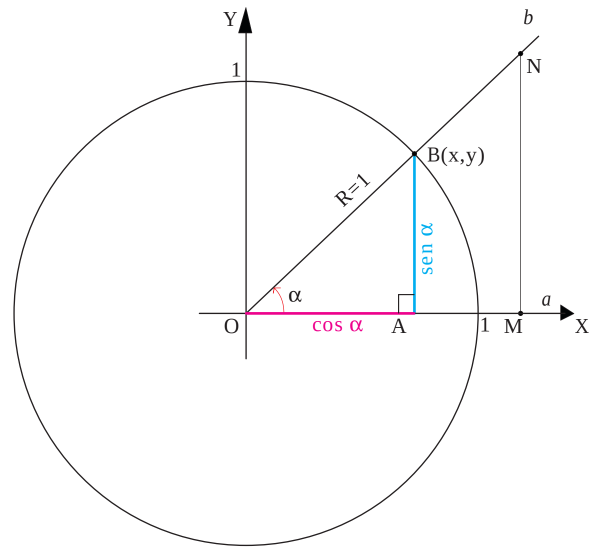
Funciones trigonométricas de un ángulo

Coseno y seno de un ángulo

Dado un punto O del plano, podemos considerar cualquier ángulo $\widehat{ab}$ con su vértice en O puesto que mediante una traslación lo llevamos a tal vértice.

Asimismo, podemos considerar el lado *a* como eje de abscisas +OX y se dice que el ángulo está en *posición estándar*.

Consideremos una circunferencia de centro O y radio unidad y un ángulo α de vértice en O. La proyección OA del radio R=1 sobre el lado a se denomina coseno de α, que es la longitud del cateto OA en el triángulo rectángulo OAB. La longitud del otro cateto AB se denomina seno de α. Esos dos números, asociados con el ángulo α, se denotan cos α y sen α, respectivamente: cos α= OA=x, sen α = AB=y, siendo (x,y) las coordenadas del punto B.



Si consideramos dos puntos M y N, respectivamente en los lados *a* y *b* del ángulo α, tales que MN||AB, por el teorema de Thales resulta:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} = \frac{\cos\alpha}{1} = \cos\alpha$$

$$\frac{MN}{ON} = \frac{AB}{OB} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1} = \operatorname{sen}\alpha$$

Al considerar el triángulo rectángulo MNO o el ABO con ángulos rectos en M y A, respectivamente, esas igualdades expresan que:

$$\cos\alpha = \frac{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

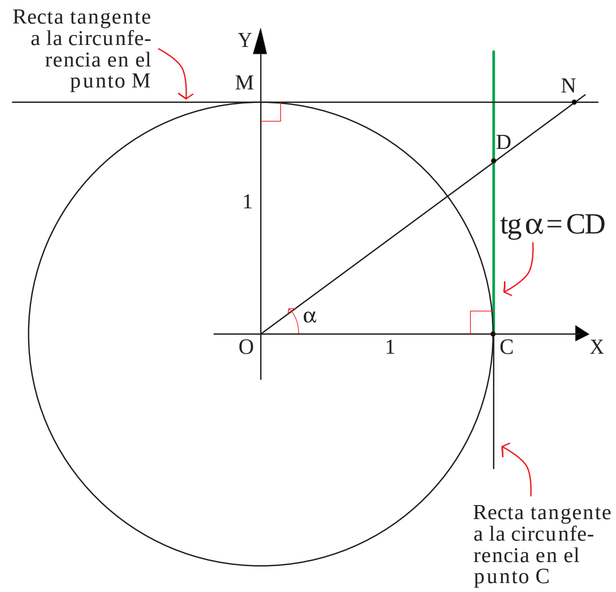
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

Tangente de un ángulo

Se define la tangente de α (tgα) mediante:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$ = lo que resulta igual, en cualquier triángulo rectángulo, a:

$$\frac{\text{longitud del cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente al ángulo } \alpha}$$

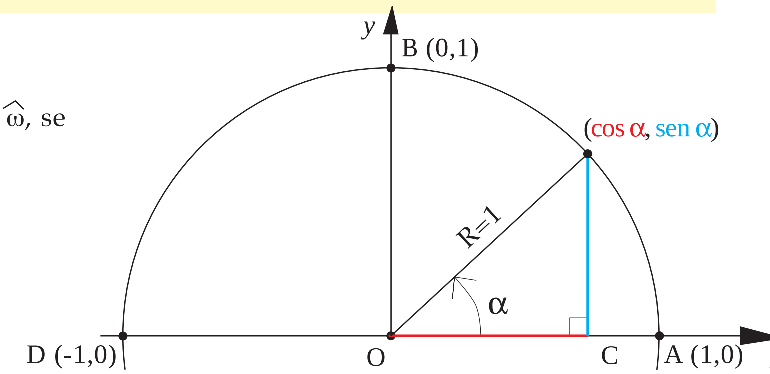


y ella mide la longitud del segmento CD de la tangente trazada en C a la circunferencia unitaria. ¿Por qué?

Las otras funciones trigonométricas de un ángulo α se definen a partir de las anteriores mediante:

Secante de α: $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$ Cosecante de α: $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ Cotangente de α: $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Siempre que los denominadores sean no nulos.



Para el ángulo nulo $\widehat{O}$, el ángulo recto $\widehat{\partial}$ y el ángulo llano $\widehat{\omega}$, se tienen los siguientes valores del seno y el coseno:

$\cos \widehat{O} = 1$; $\operatorname{sen} \widehat{O} = 0$: coordenadas de A

$\cos \widehat{\partial} = 0$; $\operatorname{sen} \widehat{\partial} = 1$: coordenadas de B

$\cos \widehat{\omega} = -1$; $\operatorname{sen} \widehat{\omega} = 0$: coordenadas de D

RETO

Demuestra en la ilustración que está en la parte inferior de la página anterior que:

OD = sec α y MN = cotg α

SABÍAS QUE...?

Posterior a Hiparco, el paso siguiente en la construcción de tablas trigonométricas y astronómicas lo dió Claudio Ptolomeo, conocido como Tolomeo (Grecia-Egipto, ca.85-ca.165), con su tratado *Almagesto* (imagen de la derecha) de trece libros, que en astronomía es el equivalente a *Los Elementos de Euclides* en geometría. Todas las tablas astronómicas hasta el siglo XII se basan en ese tratado.

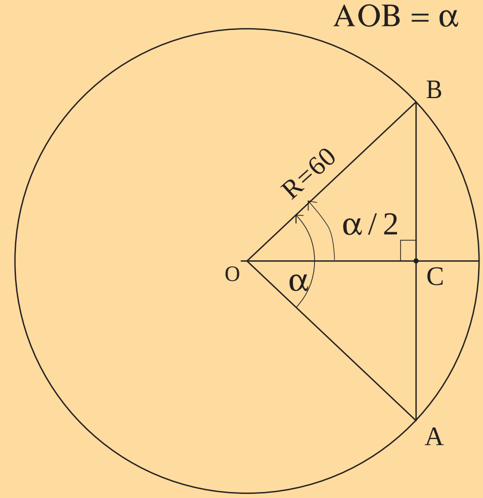
Tolomeo dividió la circunferencia en 360 partes iguales (los grados sexagesimales) y el diámetro en 120 partes iguales (así el radio queda dividido en 60 partes, base del sistema sexagesimal). Luego, de manera natural subdividió los grados en 60 partes (*pars minuta prima*, la primera pequeña parte) y éstos, a su vez, en otras 60 partes (*pars minuta secunda*, la segunda pequeña parte), de donde se derivaron las palabras “minuto” y “segundo”.

La tabla de Tolomeo da la longitud de una cuerda en función del ángulo central que la misma subtiende:

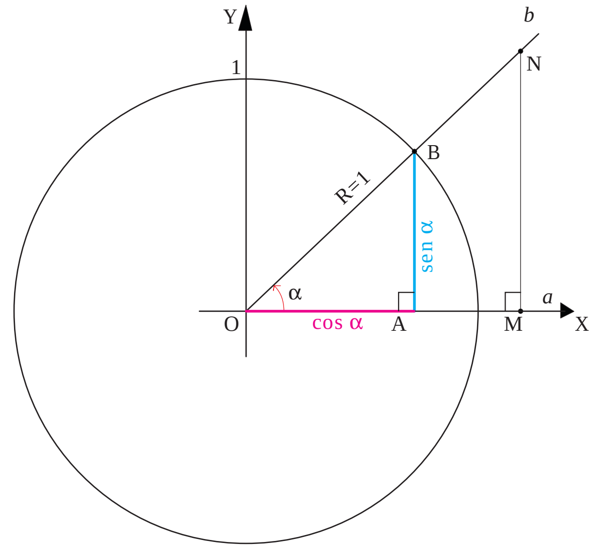
AB = cuerda α = 2R sen $(\frac{\alpha}{2}/2)$ = 120 sen $(\frac{\alpha}{2}/2)$, lo cual se deduce fácilmente del triángulo rectángulo OCB, recto en C, pues

sen (α / 2) = CB / OB = CB / R y AB = 2 CB

$\widehat{AOB} = \alpha$



La identidad fundamental



En el triángulo rectángulo OAB, por el teorema de Pitágoras se tiene:

$OA^2 + AB^2 = OB^2 = 1$. Como AB = sen α y OA = cos α, entonces;

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

identidad conocida como la *identidad fundamental de la trigonometría.*

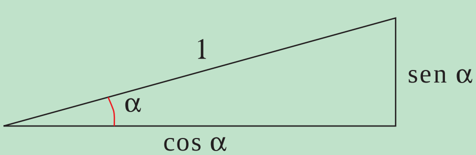
RETO

La identidad fundamental se dedujo utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OAB con hipotenusa OB = R = 1.

1. Dedúcela utilizando el triángulo rectángulo OMN con hipotenusa ON.
2. Recíprocamente, deduce el teorema de Pitágoras a partir de la identidad fundamental.

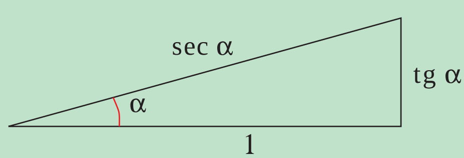
INTERESANTE

Observa cómo se relacionan en los triángulos rectángulos esas funciones, utilizando el teorema de Pitágoras.

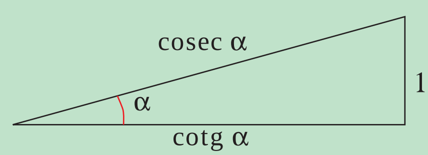


$(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

Identidad fundamental



$1 + (\text{tg } \alpha)^2 = (\sec \alpha)^2$



$1 + (\text{cotg } \alpha)^2 = (\text{cosec } \alpha)^2$

SABÍAS QUE...

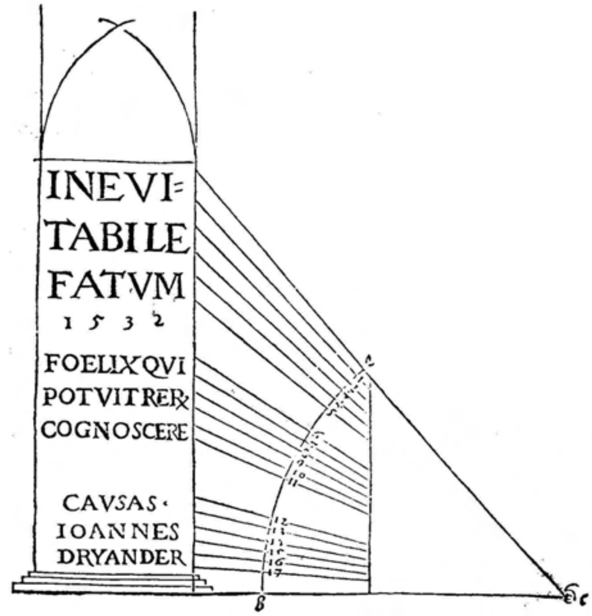
Es costumbre denotar $(\text{sen } \alpha)^2$ mediante $\text{sen}^2\ \alpha$ y análogamente para $(\cos \alpha)^2$. Uno de los matemáticos más importantes del siglo XIX, Carl Friedrich Gauss (Alemania, 1777-1855), objetó el uso de $\text{sen}^2\ \alpha$ en lugar de $(\text{sen } \alpha)^2$ puesto que la notación $\text{sen}^2\ \alpha$ podía ser ambigua y tener el significado de sen(sen α).

Trigonometría y arte

Es un saber cotidiano que cuando un objeto se va alejando de nosotros aparece progresivamente de tamaño más pequeño. Al contrario, sí se acerca se ve más grande. Este efecto visual es tomado en cuenta cuando se construyen estructuras muy elevadas desde el piso, como estatuas y pinturas en techos muy altos, pues en tal caso nuestro ángulo visual es elevado.

Autorretrato
Durero.
http://cv.uoc.es/~991_04_005_01_web/fitxer/autodurero.jpg

El grabador y pintor Durero (Albrecht Durer, Alemania 1471-1528) en su obra *Instituciones geométricas* (publicada en alemán en 1525 y traducida al latín en 1535), dirigida a pintores, canteros, arquitectos, entre otros, dibujó una columna como la siguiente para visualizar el incremento de las partes de la misma, a medida que subimos y con ángulos iguales desde el vértice f.



Además mostró un ejemplo con letras en la misma obra.

Es por ello que utilizando tal tipo de construcción, sugerida por los dibujos anteriores, compensamos la percepción visual para objetos elevados.

¿Cuál es la situación matemática subyacente?

Tenemos un triángulo rectángulo en A y consideramos a partir del vértice O un conjunto de ángulos iguales. Observamos que en el cateto vertical AB los segmentos que se forman no tienen la misma longitud puesto que ésta va aumentando. Para explicarlo acudimos a la función tangente: si consideramos como unidad de longitud el cateto OA, entonces los segmentos verticales miden AA_1=tg α, AA_2=tg 2α, AA_2=tg 3α, ..., AA_N=AB= tg nα, si hay n ángulos α (en el dibujo n=14). Como la tangente es creciente (no uniformemente, o como se dice, no linealmente) en el intervalo $0º \leq \alpha < 90°$, entonces al calcular valores en ese intervalo,de cinco en cinco grados, y suponiendo que el ángulo α mide 5°, se tiene:

tg 0°< tg 5°< tg 10°< .... < tg 30° < tg 45°< .... < tg 80°< tg 85°

0 < 0,0875 < 0,1763 < ... < 0,5774 < 1 < .... < 5,6713 < 11,4301

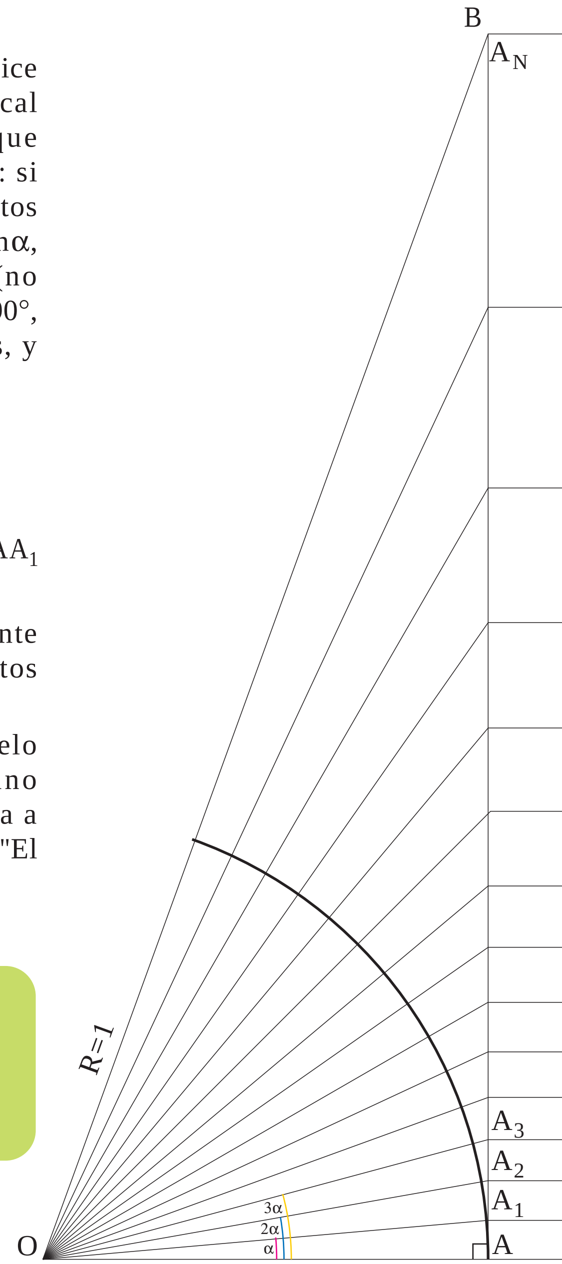
Por lo tanto:

$AA_1 = 0{,}0875$, $AA_2 = 0{,}1763 \neq 2\,AA_1$ (tg $2\alpha \neq 2$ tgα) y $A_1A_2 = AA_2 - AA_1 = 0{,}0888 > AA_1$

y esto explica el crecimiento de esas longitudes.

A medida que el ángulo AOB=nα se aproxima a un ángulo recto, la tangente crece indefinidamente (se dice que "tiende hacia infinito") y los segmentos verticales se hacen "muy grandes".

El gran genio del Renacimiento italiano, Miguel Ángel (Michelangelo Buonarrotti, 1475-1564), quien decoró la Capilla Sixtina en El Vaticano (1536-1541) utilizando la perspectiva, utilizó una construcción análoga a la de Durero como la mostrada antes con las letras, lo cual se refleja en "El Juicio Final".



RET

Dibuja un triángulo rectángulo OAB de ángulo recto en A (como el anterior). Divide el cateto vertical AB en varios segmentos de igual longitud y une los extremos de esos segmentos con el vértice O. ¿Qué observas?

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web:
http://www.fpolar.org.ve/matematica3