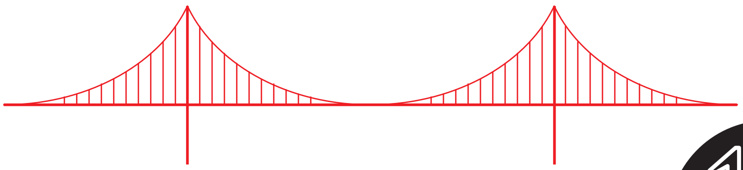
Fundación POLAR

Matemática Maravillosa
Cónicas y cuádricas

MM

Una aplicación importante de una cónica (parábola) es en la construcción de puentes colgantes. Un cable de suspensión colgado entre dos postes sostiene una estructura de densidad uniforme mucho más pesada que el propio cable y toma la forma aproximada de una parábola. Esto se debe a que la forma parabólica permite sostener un peso uniforme horizontal de tal forma que exista una tensión uniforme en cada uno de los puntos.

Golden Gates (San Francisco, EEUU).
Fuente: www.aynsof.com / photo.htm



Fascículo 15

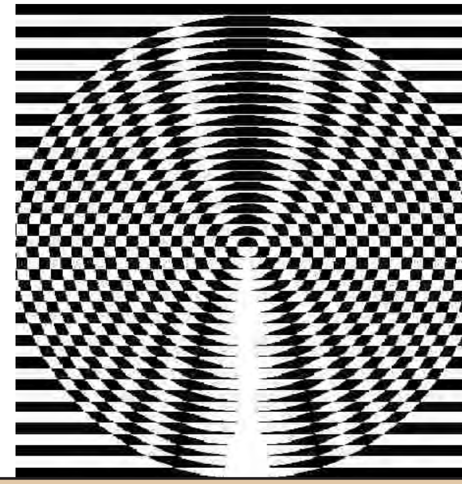
Elementos básicos de geometría

En los planos tenemos puntos y rectas como elementos básicos, a partir de los cuales se definen segmentos, semirrectas y otras figuras geométricas.

¿Cuáles son las posiciones relativas entre dos rectas de un plano?

Análogamente, en el espacio tenemos puntos, rectas y planos como elementos básicos, a partir de los cuales se definen otras figuras geométricas.

¿Cuáles son las posiciones relativas entre dos rectas, una recta y un plano y entre dos planos en el espacio?



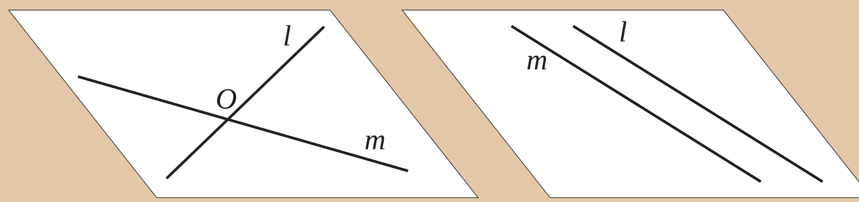
Posiciones relativas entre dos rectas, una recta y un plano, y dos planos.

En un plano

Dos rectas distintas *l*, *m*:

Se cortan en un punto *O* (se dice que son secantes)

No se cortan (se dice que son *paralelas*)



En el espacio

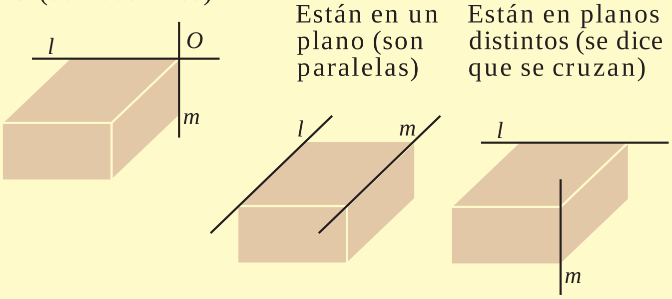
Dos rectas distintas *l*, *m*

Se cortan en un punto O (son secantes)

No se cortan

Están en un plano (son paralelas)

Están en planos distintos (se dice que se cruzan)

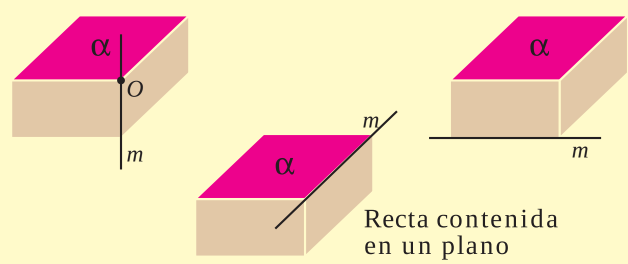


Una recta *l* y un plano α

Se cortan en un punto O

No se cortan

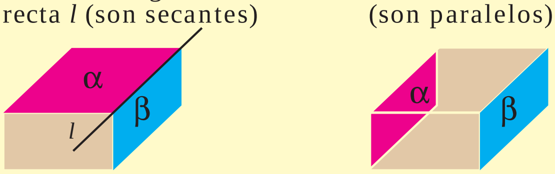
Recta contenida en un plano

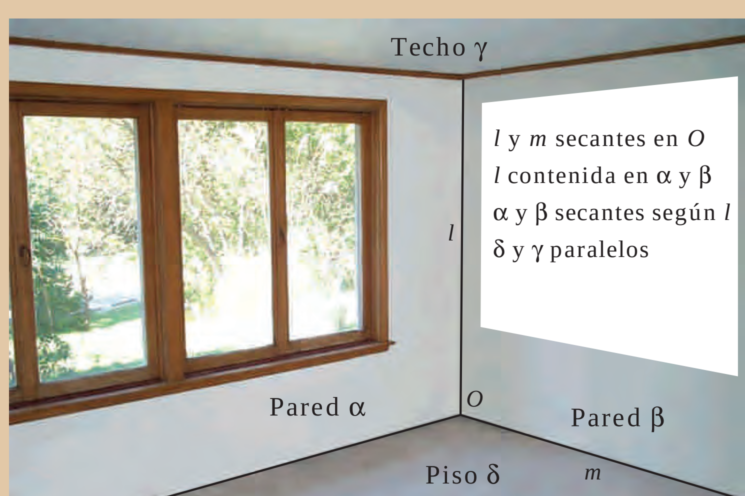


Dos planos distintos α y β

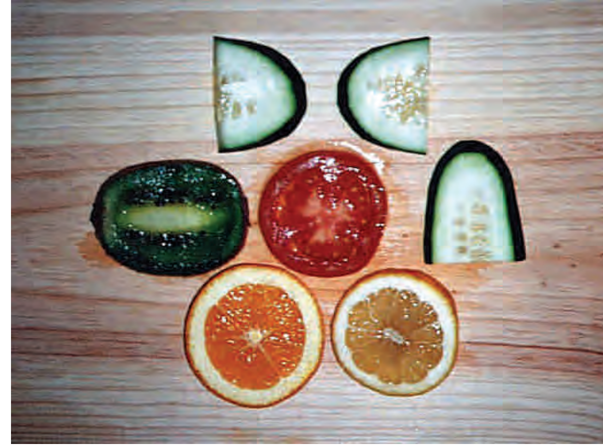
Se cortan según una recta *l* (son secantes)

No se cortan (son paralelos)



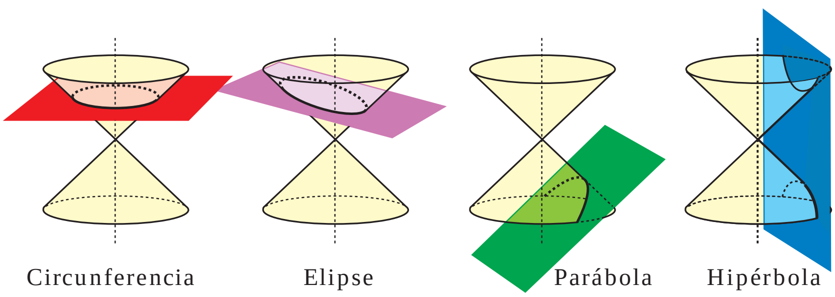


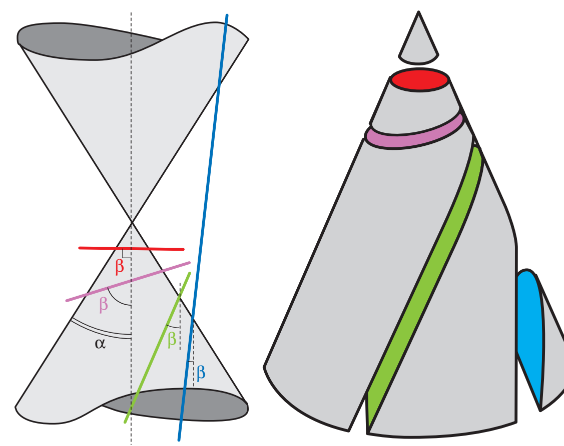
El mundo de las cónicas

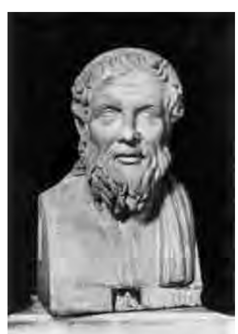


Piensa en una naranja o en un limón, o una fruta de forma casi esférica. Si cortamos a uno de ellos con un cuchillo, la forma de la sección cortada es un círculo. La concha tiene forma de circunferencia. Si se hacen cortes transversales o longitudinales en algunas frutas, se obtienen curvas que se asemejan a cónicas.

Cuando un cono se corta con un plano se forma una curva en la intersección de la superficie cónica y el plano. Estas curvas reciben el nombre de secciones cónicas o simplemente cónicas. En función de la relación existente entre el ángulo de conicidad (α) y la inclinación del plano respecto del eje del cono (β), pueden obtenerse diferentes secciones cónicas.



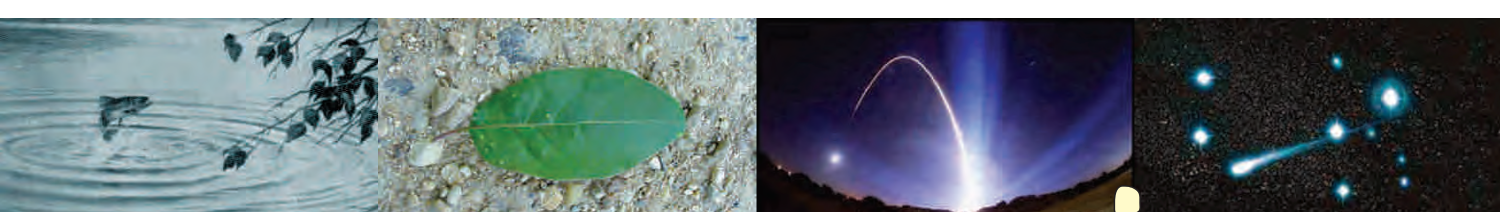




Apolonio (ca. 262-200 a.C.) de la Escuela de Alejandría y a quien se deben los nombres de parábola, hipérbola y elipse, dio una visión general de las secciones cónicas, al generar todas, variando la inclinación del plano que corta al cono con respecto del eje del mismo.

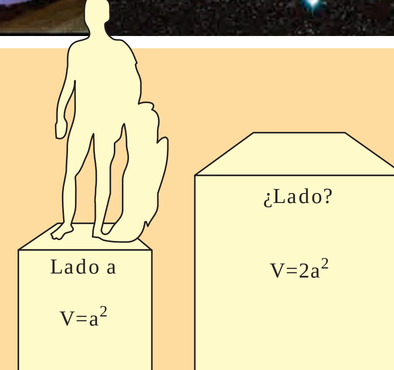
$\beta < \alpha$: Hipérbola (azul)
$\beta = \alpha$: Parábola (verde)
$\beta > \alpha$: Elipse (morado)
$\beta = 90°$: Circunferencia (rojo)

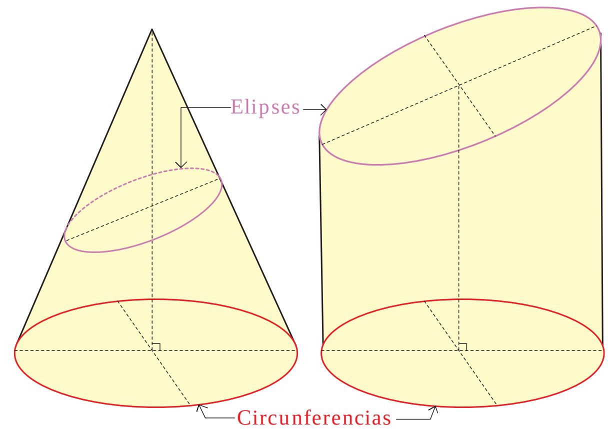
En la naturaleza existen ejemplos que ilustran las formas cónicas como: las ondas en el agua (circunferencias), la forma de una hoja (elipse), la forma de un haz de luz (parábola) y la trayectoria de planetas o cometas alrededor del sol (elipses).



SABÍAS QUE...

Existe una leyenda que dice que alrededor de 430 a.C. una plaga cayó sobre Atenas (Grecia). Zeus, en el oráculo de Delos, anunció que el sufrimiento de la población terminaría cuando construyesen un altar de doble tamaño del cubo que sostenía la estatua de Apolo. Aunque fallaron todos los intentos de duplicación del cubo utilizando regla y compás como instrumentos de dibujo, esto dio origen al estudio de las secciones cónicas.



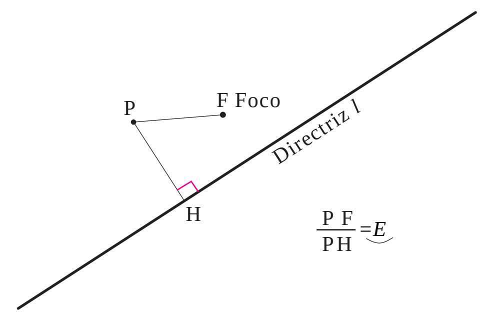


Cuando se corta una superficie cilíndrica con un plano se obtiene una elipse.

Si el plano que corta al cilindro o al cono es perpendicular al eje, la sección es una circunferencia.

La visión anterior de las cónicas es geométrica: superficies cortadas por planos. Veamos cómo se pueden caracterizar las cónicas como un modelo basado en relaciones métricas. En este caso se considera una recta *l* y un punto *F* que no pertenezca a la recta. En el plano definido por la recta *l* y el punto *F* se mueve un punto P, de tal forma que la razón de su distancia a *F* y a la recta *l* es la misma, esto es una constante denotada por *E*. En estas condiciones el punto P describe una cónica.

Mas formalmente: sea *F* un punto del plano llamado Foco, una recta *l* llamada directriz y un número *E* mayor que 0, llamado excentricidad.

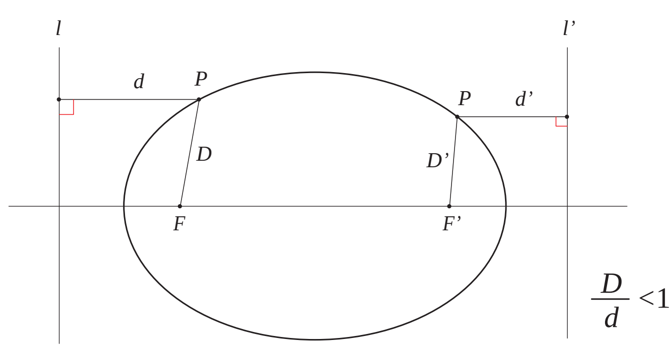


> Las cónicas se pueden caracterizar como el conjunto de los puntos *P* del plano cuya distancia al foco es *E* veces su distancia a la directriz

$d(P,F) = E\, d(P,l)$ donde *d* indica distancia

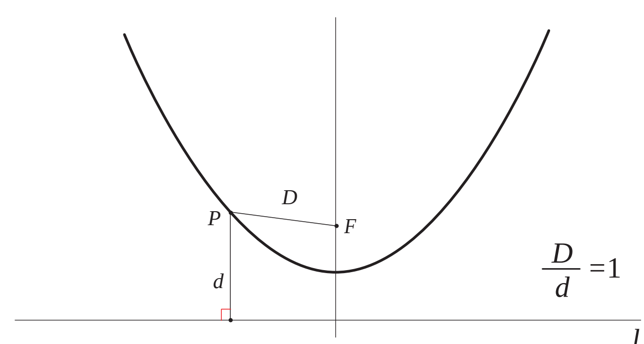
Según los valores de excentricidad E se obtienen diversos tipos de cónicas.

Para E < 1 se obtiene una elipse



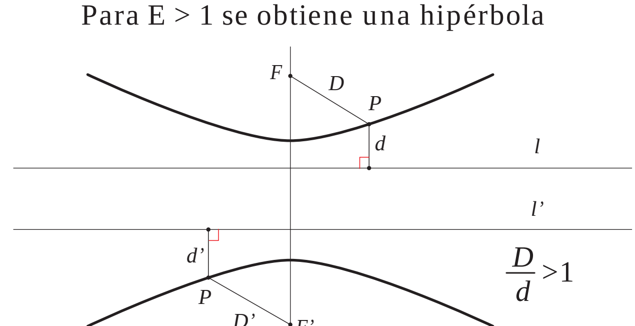
La elipse tiene dos focos *F* y *F'* y dos directrices *l* y *l'* (una para cada foco).

Para E = 1 se obtiene una parábola



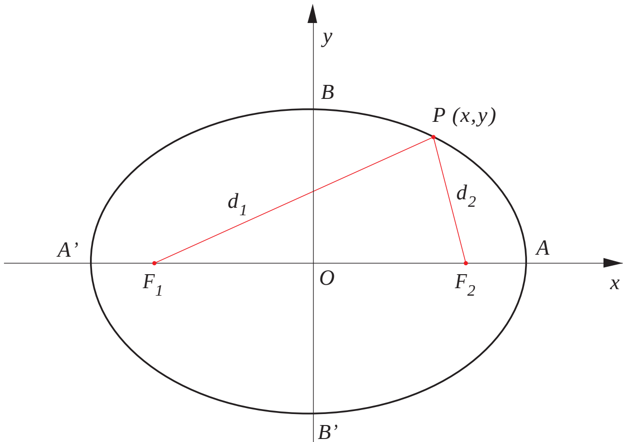
La parábola tiene un único foco *F* y una sola directriz *l*.

Para E > 1 se obtiene una hipérbola



La hipérbola tiene dos focos *F* y *F'* y dos directrices *l* y *l'* (una para cada foco). Además tiene dos ramas.

Veamos una tercera definición de las cónicas utilizando un modelo de sistema de coordenadas.



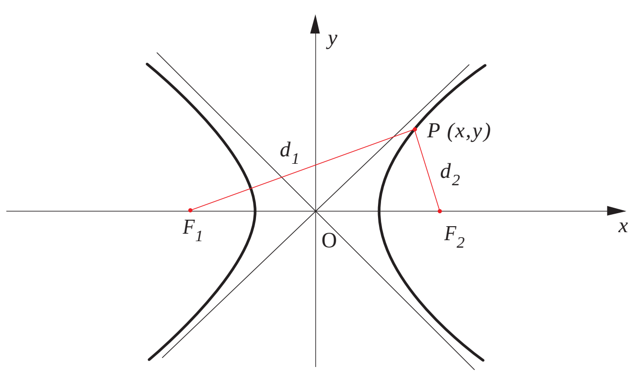
Elipse: Es el conjunto de los puntos P(x,y) tales que la suma de sus distancias a los focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ es constante:

$$d_1 + d_2 = 2a$$

La ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ siendo } b^2 = a^2 - c^2$$

Observa que los ejes de coordenadas x e y son ejes de simetría de la elipse. El origen O es centro de simetría de la elipse.



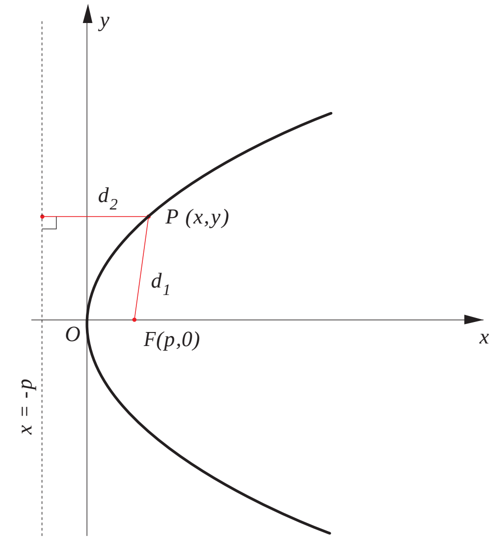
Hipérbola: Es el conjunto de los puntos P(x,y) tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos $F_1(-c,O)$ y $F_2(c,O)$ es constante:

$$|\, d_1 - d_2 \,| = 2a$$

La ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ siendo } b^2 = c^2 - a^2$$

Observa que el eje de coordenadas x es eje de simetría de la hipérbola. El eje *y* recibe el nombre de eje conjugado de la hipérbola que también es eje de simetría.



Parábola: Es el conjunto de los puntos P(x,y) tales que su distancia al foco F(p,0) es igual a su distancia a una recta fija:

$$d_1 = d_2$$

La ecuación canónica de la parábola es: $y^2=4px$ Observa que el eje de coordenadas x es eje de simetría de la parábola.

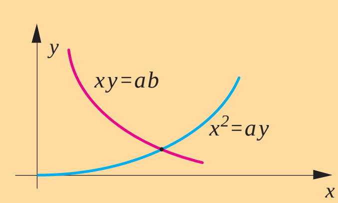
SABÍAS QUE...

Menecmo (ca. 350 a.C.) es famoso por considerarse el primero en estudiar las cónicas como secciones de un cono. Al ocuparse del problema clásico de la duplicación del cubo o problema de Delos (construir un cubo de doble volumen de otro cubo dado), redujo el problema a la construcción de dos medias proporcionales entre 1 y 2, es decir, en hallar x e y tales que:

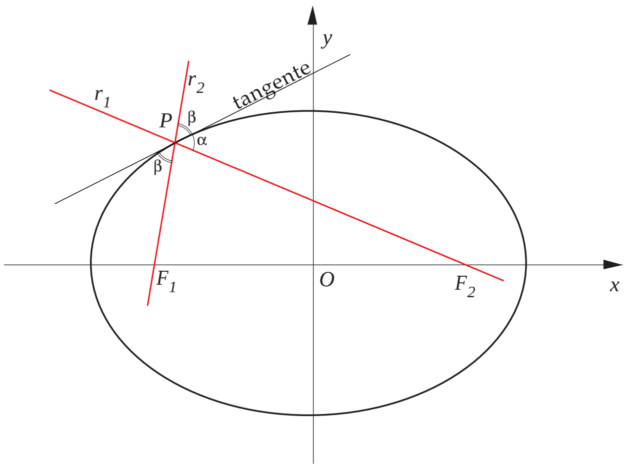
$$\frac{2}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{1}$$ de donde obtuvo $x^2=2y$; $y^2 = x$ y así $x^3 = 2y^3$

En general, consideró la construcción de medias proporcionales entre a y b, es decir, hallar *x* e *y* tales que: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$

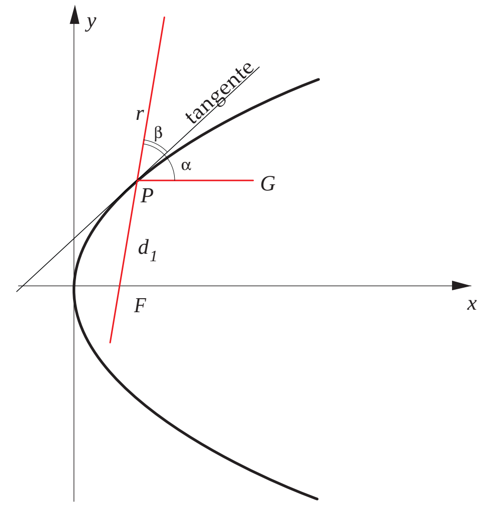
y, por tanto, redujo el problema de la duplicación del cubo a hallar la intersección de las curvas $x^2=ay$ (parábola) con $xy= ab$ (hipérbola).



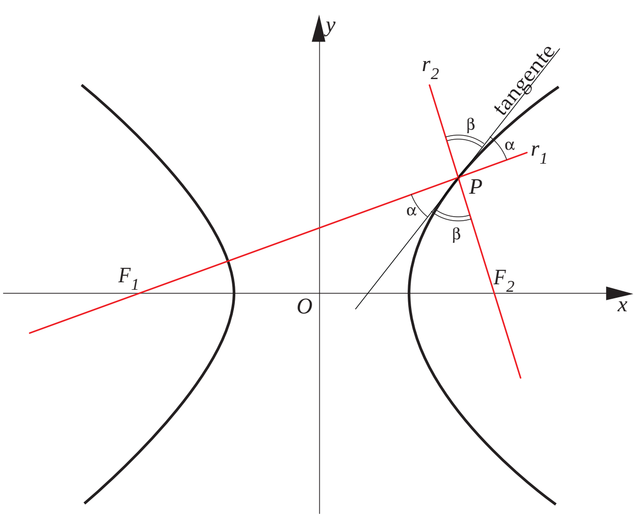
Propiedades ópticas de las cónicas



Tracemos la recta tangente a una elipse en un punto P. Tracemos las rectas r_1 y r_2 que pasan por P y cada uno de los focos F_1 y F_2. La recta tangente a una elipse en un punto P forma ángulos iguales ($\alpha=\beta$) con las rectas que pasan por los focos. Así la tangente es bisectriz del ángulo entre r_1 y r_2.



Tracemos la recta tangente a la parábola en un punto P. Tracemos la recta que une a P con el foco F de la parábola y la recta PG que pasa por P y es paralela al eje de simetría x de la parábola. Los ángulos α y β que forma la recta tangente en P con las rectas PF y PG son iguales. Así, la tangente es bisectriz del ángulo entre las rectas r y PG.

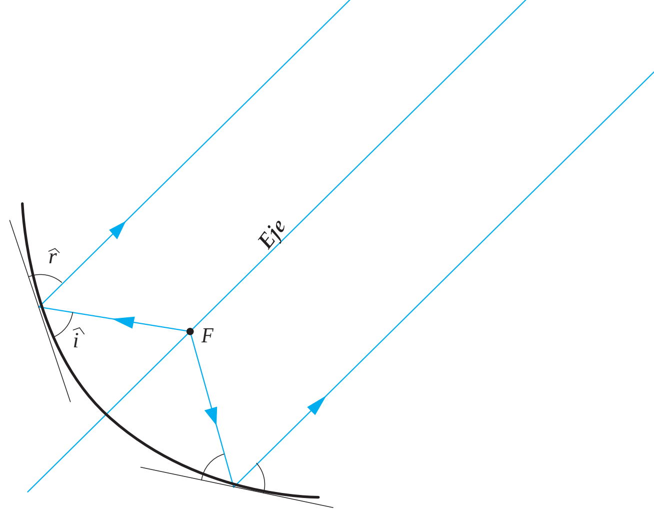


Tracemos la recta tangente a la hipérbola en un punto P. Tracemos las rectas r_1 y r_2 que unen a P con los focos F_1 y F_2 de la hipérbola. Los ángulos α y β que forma la recta tangente en P con las rectas PF_1 y PF_2 son iguales. Así, la tangente es bisectriz del ángulo entre las rectas r_1 y r_2.

SABÍAS QUE...

Hasta el siglo XVI los cometas eran fenómenos astronómicos inexplicables, los cuales parecían no obedecer las leyes del sistema solar establecidas por Copérnico y Kepler. En 1704, el astrónomo inglés Edmundo Halley (1656-1742) trabajó sobre las órbitas de varios cometas. Los datos más completos eran sobre el cometa de 1682. Halley observó que la órbita de este cometa pasaba por las mismas regiones del cielo que los cometas de 1607, 1531 y 1456, por lo que dedujo que se trataba del mismo cometa, con una órbita elíptica alrededor del Sol, el cual aparecía cada 75 o 76 años. Por ello predijo el retorno de ese cometa en 1758, lo cual sucedió, y de allí que dicho cometa es conocido por su nombre: Cometa Halley.

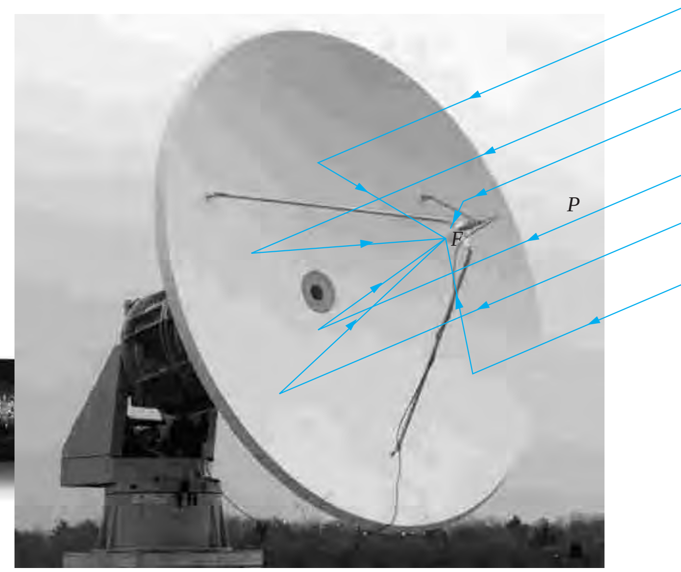
Cónicas y sus aplicaciones



Una aplicación importante de la elipse es el descubrimiento de Kepler: los planetas y satélites tienen trayectorias elípticas; siendo el Sol uno de los focos.

La propiedad óptica o reflectante de las cónicas es utilizada en los espejos y reflectores parabólicos que tienen forma de paraboloide de revolución (superficie obtenida al rotar una parábola alrededor de su eje).

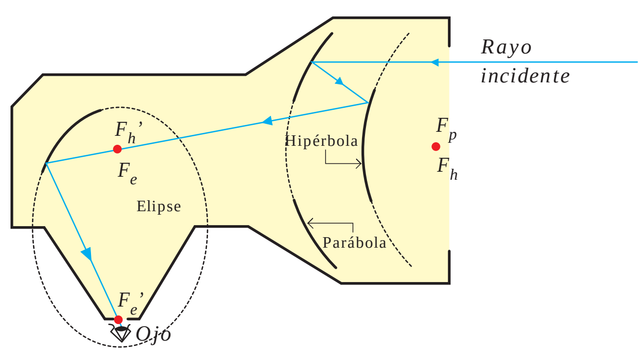
Un reflector con esta forma transforma la luz que emana de una fuente ubicada en el foco F en un rayo paralelo al eje. Esto se deduce de una ley física: "El ángulo de reflexión r es igual al ángulo de incidencia i" ($\hat{r}=\hat{\imath}$) y de la antes enunciada propiedad óptica de la parábola.



Antena parabólica para la recepción de señales.

Si se trata de un telescopio, los rayos paralelos de luz se transforman en rayos concentrados en el foco.

Igualmente, se utiliza la propiedad reflectante de la elipse en la acústica con el objeto del diseño y construcción de "galerías de murmullos": si la forma de la cúpula de un auditórium o de una galería es elíptica, entonces un susurro o murmullo débil emitido en un foco no es casi percibido en la mayor parte del salón excepto en el otro foco. Esto ha sido utilizado en el *Salón de las Estatuas* del Capitolio de Washington D.C., en el *Tabernáculo Mormón* en Salk Lake City, en la denominada "Galería de los Suspiros" en el *Convento del Desierto de Los Leones* cerca de Ciudad de México, y otras edificaciones.



Propiedad de las tres cónicas utilizadas en el diseño de un telescopio.

En el famoso Taj Mahal, construido en el siglo XVII (1630-1652) en la India por el emperador Sah Yahan en honor de su esposa Mumtaz-i Mahall, uno de los máximos logros de la arquitectura mogol, tiene una galería de los suspiros en donde anteriormente a la pareja en luna de miel se le colocaba en los respectivos focos, de tal forma que el novio murmuraba la frase: *A la memoria de mi amada inmortal*, la cual era solamente escuchada por su novia situada a una distancia de algo más de 15 m.

Palacio Taj Mahal, India.

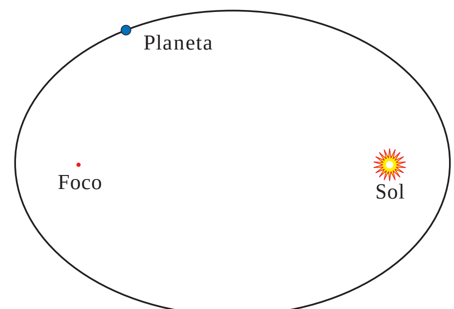
En 1609 Johannes Kepler (1571-1630) publicó, utilizando las observaciones de su maestro Tycho Brahe, su obra *Astronomía Nova* en donde enunció las dos primeras leyes referentes a las órbitas de los planetas.

Posteriormente, en 1619, en el libro *Harmonices Mundi Libri*, Kepler publicaría la tercera Ley.

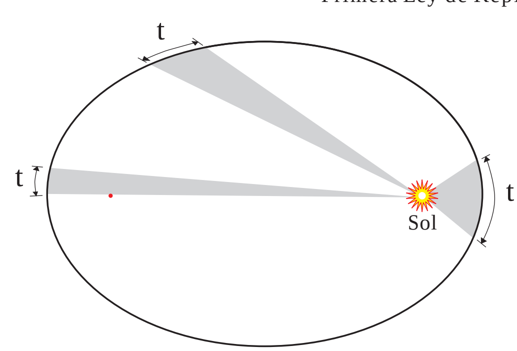
Aproximadamente 80 años más tarde, Isaac Newton (1642-1727) probaba que las órbitas elípticas de los planetas implicaban la ley de la gravitación universal.

Las leyes de Kepler fueron enunciadas para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Aunque él no las enunció en el mismo orden, en la actualidad las leyes se numeran como sigue:

- Primera Ley (Ley de las trayectorias elípticas): todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos.
- Segunda Ley (Ley de las áreas): el *radiovector* que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- Tercera Ley (Ley de los tiempos): para cualquier planeta, el cuadrado de su *período orbital* (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el Sol.



Primera Ley de Kepler



Segunda Ley de Kepler

SABÍAS QUE...

La trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo, sin tomar en cuenta la resistencia del aire, describe una parábola. Esta propiedad fue demostrada por Galileo Galilei en el siglo XVI. Hoy en día se sigue utilizando esta demostración en estudios de balística.

Estos fascículos están disponibles en línea, visitando la página web: http://www.fpolar.org.ve/matematica3