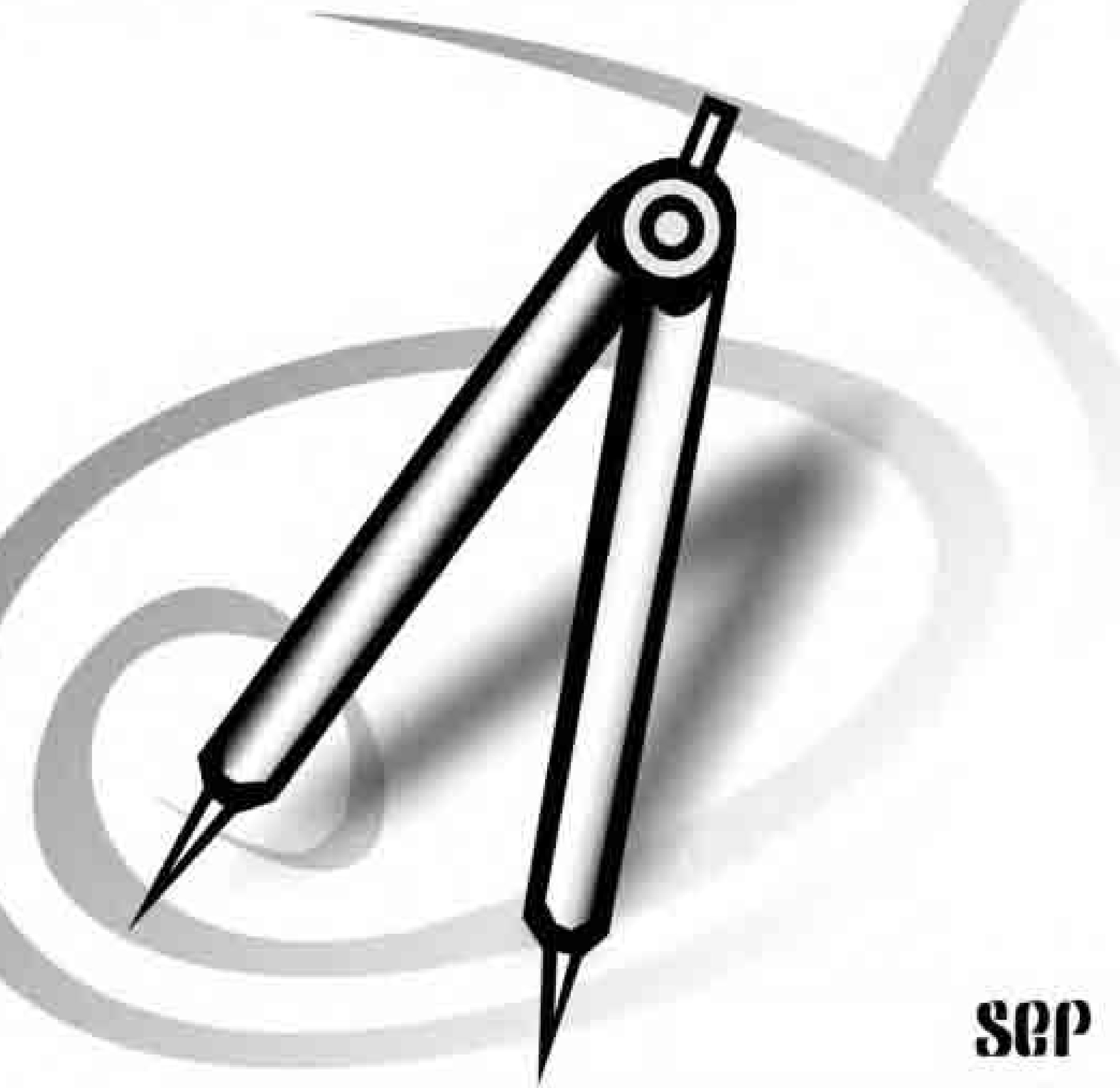
TELESECUNDARIA

VOLUMEN. II
CONCEPTOS Y GUÍA

MATEMÁTICAS



SEP

Revolución educativa
Colombia aprende

Ministerio de
Educación Nacional
República de Colombia

Libertad y Orden

COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

COORDINACIÓN PEDAGÓGICA Y EDITORIAL

Mary Luz Isaza Ramos

ASESORÍA PEDAGÓGICA Y DIDÁCTICA

Edith Figueredo de Urrego	Ciencias Naturales y Educación Ambiental: (Biología, Física, Química, Educación Ambiental)
Cecilia Casasbuenas Santamaría	Matemáticas

ADAPTACIONES Y/O PRODUCCIONES NACIONALES MATERIAL IMPRESO

Edith Figueredo de Urrego Ana María Cárdenas Navas	Biología y Educación Ambiental
Cecilia Casasbuenas Santamaría Virginia Cifuentes de Buriticá	Matemáticas
Patricia Arbeláez Figueroa	Educación en Tecnología
Eucaris Olaya	Educación Ética y en Valores Humanos
Alejandro Castro Barón	Español
Mariela Salgado Arango Alba Irene Sáchica	Historia Universal
Antonio Rivera Serrano Javier Ramos Reyes	Geografía Universal
Edith Figueredo de Urrego Alexander Aristizábal Fúquene César Herreño Fierro Augusto César Caballero Adiela Garrido de Pinzón	Física, Química y Ambiente
Betty Valencia Montoya Enoc Valentín González Palacio Laureano Gómez Ávila	Educación Física
Edith Figueredo de Urrego Mary Luz Isaza Ramos	Horizontes de Telesecundaria
Mary Luz Isaza Ramos Edith Figueredo de Urrego	Perspectivas del Camino Recorrido

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA - MÉXICO
COORDINACIÓN GENERAL PARA LA MODERNIZACIÓN DE LA EDUCACIÓN
UNIDAD DE TELESECUNDARIA

COORDINACIÓN GENERAL	Guillermo Kelley Salinas Jorge Velasco Ocampo
ASESORES DE TELESECUNDARIA PARA COLOMBIA	Pedro Olvera Durán
COLABORADORES	
ESPAÑOL	María de Jesús Barboza Morán, María Carolina Aguayo Roussell, Ana Alarcón Márquez, María Concepción Leyva Castillo, Rosalía Mendizábal Izquierdo, Pedro Olvera Durán, Isabel Rentería González, Teresita del Niño Jesús Ugalde García, Carlos Valdés Ortíz.
MATEMÁTICAS	Miguel Aquino Zárate, Luis Bedolla Moreno, Martín Enciso Pérez, Arturo Eduardo Echeverría Pérez, Jossefina Fernández Araiza, Esperanza Issa González, Héctor Ignacio Martínez Sánchez, Alma Rosa Pérez Vargas, Mauricio Rosales Avalos, Gabriela Vázquez Tirado, Laurentino Velázquez Durán.
HISTORIA UNIVERSAL	Francisco García Mikel, Ivonne Boyer Gómez, Gisela Leticia Galicia, Víctor Hugo Gutiérrez Cruz, Sixto Adelfo Mendoza Cardoso, Alejandro Rojas Vázquez.
GEOGRAFÍA GENERAL	Rosa María Moreschi Oviedo, Alicia Ledezma Carbajal, Ma. Esther Encizo Pérez, Mary Frances Rodríguez Van Gort, Hugo Vázquez Hernández, Laura Udaeta Collás, Joel Antonio Colunga Castro, Eduardo Domínguez Herrera, Alma Rosa María Gutiérrez Alcalá, Lilia López Vega, Víctor López Solano, Ma. Teresa Aranda Pérez.

BIOLOGÍA	Evangelina Vázquez Herrera, César Minor Juárez, Leticia Estrada Ortuño, José Luis Hernández Sarabia, Lilia Mata Hernández, Griselda Moreno Arcuri, Sara Miriam Godrillo Villatoro, Emigdio Jiménez López, Joel Loera Pérez, Fernando Rodríguez Gallardo, Alicia Rojas Leal.
INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA Y QUÍMICA	Ricardo León Cabrera, Ma. del Rosario Calderón Ramírez, Ma. del Pilar Cuevas Vargas, Maricela Rodríguez Aguilar, Joaquín Arturo Melgarejo García, María Elena Gómez Caravantes, Félix Murillo Dávila, Rebeca Ofelia Pineda Sotelo, César Minor Juárez, José Luis Hernández Sarabia, Ana María Rojas Bribiesca, Virginia Rosas González.
EDUCACIÓN FÍSICA	María Alejandra Navarro Garza, Pedro Cabrera Rico, Rosalinda Hernández Carmona, Fernando Peña Soto, Delfina Serrano García, María del Rocío Zárate Castro, Arturo Antonio Zepeda Simancas.
PERSPECTIVAS DEL CAMINO RECORRIDO	Rafael Menéndez Ramos, Carlos Valdés Ortíz, Carolina Aguayo Roussell, Ma. de Jesús Barbosa Morán, Ana Alarcón Márquez.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA - MÉXICO
COORDINACIÓN GENERAL PARA LA MODERNIZACIÓN DE LA EDUCACIÓN
UNIDAD DE TELESECUNDARIA

ASESORÍA DE CONTENIDOS

ESPAÑOL	María Esther Valdés Vda. de Zamora
MATEMÁTICAS	Eloísa Beristáin Márquez
INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA Y QUÍMICA	Benjamín Ayluardo López, Luis Fernando Peraza Castro
BIOLOGÍA	Rosario Leticia Cortés Ríos
QUÍMICA	Luis Fernando Peraza Castro
EDUCACIÓN FÍSICA	José Alfredo Rutz Machorro
CORRECCIÓN DE ESTILO Y CUIDADO EDITORIAL	Alejandro Torrecillas González, Marta Eugenia López Ortíz, María de los Angeles Andonegui Cuenca, Lucrecia Rojo Martínez, Javier Díaz Perucho, Esperanza Hernández Huerta, Maricela Torres Martínez, Jorge Issa González
DIBUJO	Jaime R. Sánchez Guzmán, Juan Sebastián Nájera Balcázar, Araceli Comparán Velázquez, José Antonio Fernández Merlos, Maritza Morillas Medina, Faustino Patiño Gutiérrez, Ignacio Ponce Sánchez, Aníbal Angel Zárate, Gerardo Rivera M. y Benjamín Galván Zúñiga.

ACUERDO DE COOPERACIÓN MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE COLOMBIA Y LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA DE MÉXICO

Colombia ha desarrollado importantes cambios cualitativos en los últimos años como espacios generadores de aprendizaje en los alumnos. En este marco el Ministerio de Educación de Colombia firmó con la Secretaría de Educación Pública de México un **ACUERDO DE COOPERACIÓN EDUCATIVA**, con el propósito de alcanzar mayores niveles de cooperación en el ámbito educativo.

En el acuerdo, el Gobierno de México a través de la Secretaría de Educación Pública, ofrece al Gobierno de Colombia el Modelo Pedagógico de **TELESECUNDARIA**, como una modalidad educativa escolarizada apoyada en la televisión educativa como una estrategia básica de aprendizaje a través de la Red Satelital Edusat.

El Ministerio de Educación de Colombia ha encontrado en el modelo de **TELESECUNDARIA**, una alternativa para la ampliación de la cobertura de la Educación Básica Secundaria en el área rural y una estrategia eficiente para el aprendizaje de los alumnos y las alumnas.

El programa se inicia en Colombia a través de una **ETAPA PILOTO**, en el marco del **PROYECTO DE EDUCACIÓN RURAL**, por oferta desde el Ministerio de Educación de Colombia en el año 2000, realizando las adaptaciones de los materiales impresos al contexto colombiano, grabando directamente de la Red Satelital Edusat los programas de televisión educativa, seleccionando los más apropiados a las secuencias curriculares de sexto a noveno grado, organizando 41 experiencias educativas en los departamentos de Antioquia, Cauca, Córdoba, Boyacá, Cundinamarca y Valle del Cauca, capacitando docentes del área rural y atendiendo cerca de 1 200 alumnos en sexto grado. El pilotaje continuó en el año 2001 en séptimo grado, 2002 en octavo grado, y en el año 2003 el pilotaje del grado noveno.

En la etapa de expansión del pilotaje se iniciaron por oferta en el presente año 50 nuevas experiencias en el marco del Proyecto de Educación Rural. Otras nuevas experiencias se desarrollaron con el apoyo de los Comités de Cafeteros, el FIP y la iniciativa de Gobiernos Departamentales como el del departamento del Valle del Cauca que inició 120 nuevas Telesecundarias en 23 municipios, mejorando los procesos de ampliación de cobertura con calidad.

El Proyecto de Educación para el Sector Rural del Ministerio de Educación Nacional - PER, inició acciones en los diez departamentos focalizados y en ocho de ellos: Cauca, Boyacá, Huila, Antioquia, Córdoba, Cundinamarca, Bolívar y Norte de Santander se organizaron por demanda 40 nuevas experiencias del programa de Telesecundaria a partir del año 2002.

Al presentar este material hoy a la comunidad educativa colombiana, queremos agradecer de manera muy especial al **Gobierno de México**, a través de la **Secretaría de Educación Pública de México - SEP** y del **Instituto Latinoamericano para la Comunicación Educativa - ILCE**, el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos al Ministerio de Educación de Colombia.

CONTENIDO

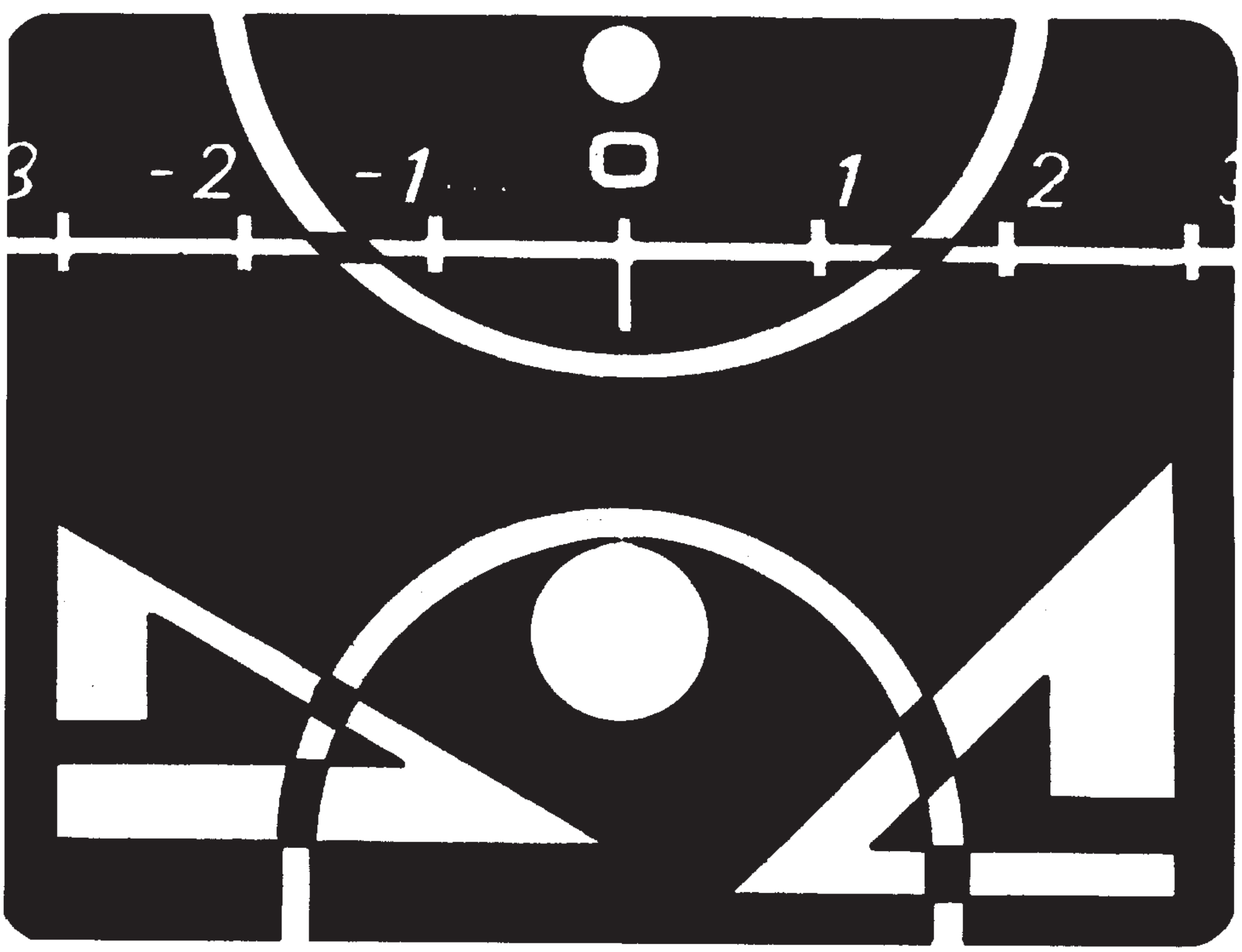
Núcleo Básico 5 – ECUACIONES LINEALES

Núcleo Básico 6 – TRAZOS GEOMÉTRICOS

Núcleo Básico 7
ÁREAS

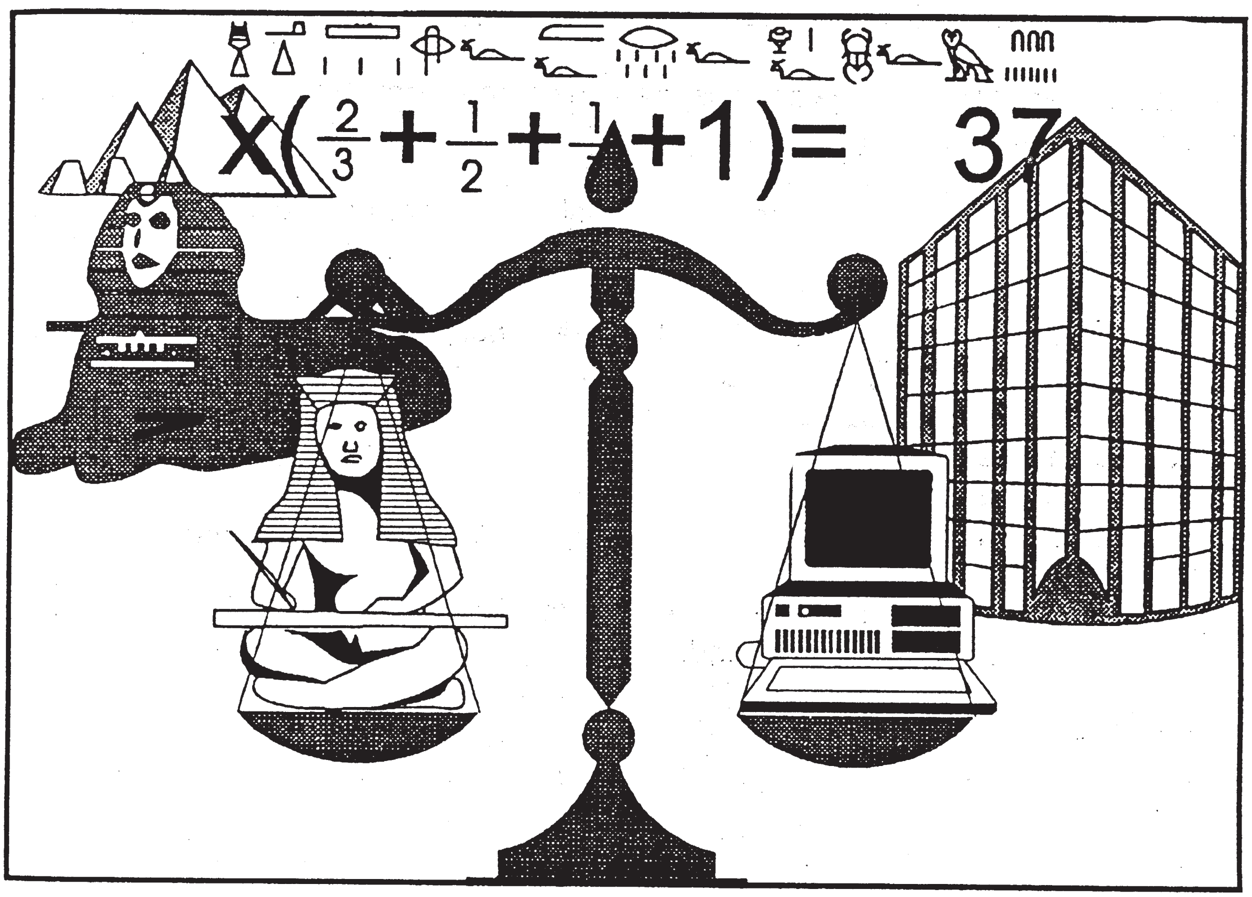
Núcleo Básico 8
MANEJO DE LA INFORMACIÓN Y PROBABILIDAD

MATEMÁTICAS



Núcleo Básico 5

ECUACIONES LINEALES



En este núcleo se retoma el concepto de ecuación a través de la solución de problemas. La ecuación es sumamente útil en la resolución de una infinidad de problemas que por métodos aritméticos sería bastante laborioso resolver. En cambio, utilizando el lenguaje algebraico y planteando una ecuación que representa el enunciado del problema se llega más directamente a la solución. Las ecuaciones se usaron desde más de 16 siglos a.C. en las civilizaciones más antiguas y su utilidad sigue vigente en la actualidad, a pesar de los grandes avances de la ciencia y la tecnología.

75

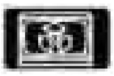
(68)

LO MISMO AQUÍ QUE ALLÁ

La igualdad y sus propiedades

Conocimientos del concepto de igualdad y sus propiedades

Puedes hablar acerca de que dos cosas son o no parecidas. Sin embargo, ¿cuándo se puede afirmar que son iguales?



Ve atentamente el video. Comenta con el grupo en dónde has observado que se utilizan las igualdades.

Lee con un compañero.

LA IGUALDAD Y SUS PROPIEDADES

Comúnmente se escucha decir que dos cosas son iguales y eso es verdad cuando existe una relación de equivalencia entre ellas; esa relación, llamada **igualdad**, es muy importante en los conceptos matemáticos y se denota con el signo igual (=).

Esta relación se establece frecuentemente entre los números. Por ejemplo, al decir que cuatro más uno da como resultado cinco, se puede establecer la siguiente igualdad:

$$4 + 1 = 5$$

Con lo cual podemos concluir que:

La igualdad se establece cuando dos expresiones representan el mismo valor.

En la igualdad se observan dos partes esenciales: el primer miembro, que se localiza a la izquierda del signo igual, y el segundo miembro, ubicado a la derecha del signo.

Ejemplo:

$$\underbrace{a + b}_{\text{Primer miembro}} \quad = \quad \underbrace{c}_{\text{Segundo miembro}}$$

Observa y analiza cómo podemos identificar propiedades de la igualdad.

1. ¿Podemos decir que 5 es igual a 5?

   O que $23 + 8 = 23 + 8$

$$a = a$$

Cuando establecemos que toda cantidad o expresión tiene una relación de igualdad consigo misma, nos referimos a la propiedad **idéntica o reflexiva**.

Todo número es igual a sí mismo.

2. Al manipular una igualdad se puede afirmar que el primer miembro es igual al segundo y el segundo es igual al primero. Dicho en otras palabras:

Los miembros de una igualdad pueden permutar sus lugares.

Así: si $12 + 6 = 18$, entonces $18 = 12 + 6$

Si $a = b$, entonces $b = a$

Esta propiedad la llamamos **simétrica**.

3. Cuando se establece que una expresión es igual a otra y ésta es igual a una tercera, la primera es igual a la tercera. Esto también puede expresarse como:

Si dos igualdades tienen un miembro común, los otros dos son iguales.

Ejemplos:

Si $a + b = c,\ d - e = c$, entonces $a + b = d - e$

Si $a = b,\quad b = c$, entonces $a = c$

A esta propiedad la llamamos **transitiva**.

4. También hemos observado que:

Si a los dos miembros de una igualdad se les aumenta, disminuye, multiplica o divide entre la misma cantidad, la igualdad subsiste.

Por ejemplo

Si $3 + 5 = 8$, entonces $(3 + 5) - 4 = 8 - 4$

Si $3 \times 4 = 12$, entonces $\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2}$

Si $x = y$, entonces $x + a = y + a$

A esta propiedad de la igualdad la llamamos **uniforme.**

5. También hemos visto que:

> Se pueden suprimir sumandos o factores iguales en los dos miembros de una igualdad y el resultado es otra igualdad; hablamos entonces de la propiedad **cancelativa**.

Ejemplos

Si	$8 \times 3 + 6 = 24 + 6$	entonces	$8 \times 3 = 24$
Si	$(5 - 2)\, 3 = 3 \times 3$	entonces	$5 - 2 = 3$
Si	$a + b = c + b$	*entonces*	$a = c$

Las propiedades de la igualdad son aplicables en cualquier grupo de números y son indispensables en la resolución de ecuaciones.

Discute en grupo:.

1. ¿Qué se necesita para que exista la relación de igualdad?

Con tu compañero(a) discute y anota lo que significa cada una de las propiedades de la igualdad; escribe un ejemplo.

a) Idéntica o reflexiva

b) Transitiva

c) Simétrica

d) Uniforme

e) Cancelativa

Compara tus anotaciones con las de tus compañeros(as). Si existen diferencias coméntalas y acláralas.

Efectúa en tu cuaderno los siguientes ejercicios junto con tu compañero(a).

1. Analiza las siguientes expresiones y anota la propiedad de la igualdad que se podría ilustrar con estas situaciones.

   a) Juan es hermano de Pepe y Pepe es hermano de Miguel, por lo tanto, Juan es hermano de Miguel.

   b) El señor Ruiz y la señora González tenían en el banco \$40 000 cada uno. Si ambos depositan \$60 000 en su respectiva cuenta, tendrán la misma cantidad.

c) De una balanza cuyos pesos están equilibrados se quita una pesa de cada lado de 200 g cada una.

d) Gloria es igual de alta que Elsa, y Elsa es igual de alta que Gloria.

Comenta tus resultados con tus compañeros(as) y corrige si es necesario.

Relaciona, de manera individual, la columna de la izquierda con la de la derecha y anota en el paréntesis la letra correspondiente de acuerdo con la propiedad aplicada. Hazlo en tu cuaderno.

a) Si $3 + 5 = 8$, entonces $8 = 3 + 5$	Reflexiva	( )
b) $4 + 6 = 10$	Transitiva.	( )
c) $7 (4 + 5) = 7 (9)$	Cancelativa	( )
d) Si $4 + 8 – 3 = 12 – 3$, entonces $4 + 8 = 12$	Uniforme	( )
e) Si $d = e$ y $e = g$, entonces $d = g$	Simétrica	( )
f) $4 + 6 = 4 + 6$		

En la igualdad $3 + 7 = 2 (5)$

g) El primer miembro es

h) El segundo miembro es

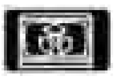
Compara tus resultados con la clave. Si hay diferencias, revisa la guía y corrige.

CLAVE

(f), (e), (d), (c), (a), g) 3 + 7, h) 2 (5).

76	**ECUACIÓN O IGUALDAD**
	Concepto de ecuación
(69)	**Conocimiento del concepto de ecuación**

Una manzana siempre es una fruta, pero una fruta no es siempre una manzana. Entre las ecuaciones y las igualdades sucede algo semejante.



Observa el video, te mostrará un tipo especial de igualdad. Comenta en tu grupo lo que entiendas por ecuación.

Lee con un compañero(a). Comenta en tu grupo cuándo una igualdad es una ecuación.

CONCEPTO DE ECUACIÓN

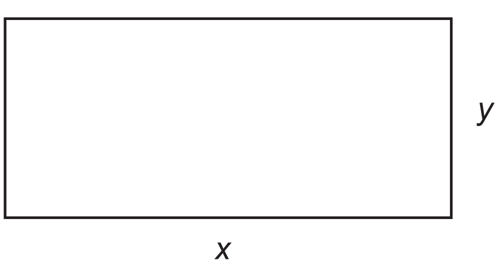
En la vida cotidiana se presentan problemas que requieren de una interpretación matemática con la cual resulte fácil resolverlos; una de esas formas de interpretación son las igualdades, en las cuales se establecen ciertas relaciones entre los números.

Si se dice que 258 menos 129 es un número desconocido, esta relación puede representarse por medio de la siguiente igualdad:

$$258 - 129 = x$$

El valor desconocido se señala con la letra *x*, que remplaza la incógnita.

Si se habla de que el perímetro de un rectángulo es igual a 56 cm, se establece la siguiente igualdad.



$$x + x + y + y = 56$$

$$2x + 2y = 56$$

Ya que la altura del rectángulo está indicada por la letra *y* y la base por la *x*.

En las igualdades anteriores se presentan uno o varios valores desconocidos que se señalan como una forma especial de igualdad: **la ecuación.**

Una ecuación es una igualdad en la que se localizan uno o varios valores desconocidos.

En las ecuaciones se aplican, como en las igualdades, las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva, uniforme y cancelativa.

La propiedad uniforme o fundamental aplicada a las ecuaciones se define así:

Se pueden sumar o restar cantidades iguales a los miembros de una ecuación para obtener una ecuación equivalente.

Ejemplo:

$$x - 3 = 8$$

$$x - 3 + (5) = 8 + (5)$$

$$x + 2 = 13$$

$x - 3 = 8$ es equivalente con $x + 2 = 13$

Para obtener una ecuación equivalente, los dos miembros de una ecuación se pueden multiplicar o dividir entre cantidades iguales.

Ejemplo:

$$3x + 5 = -1$$

$$5(3x + 5) = (-1)\,5$$

$$15x + 25 = -5$$

$3x + 5 = -1$ equivalente con $15x + 25 = -5$

En las ecuaciones se observa, lo mismo que en las igualdades, el primero y el segundo miembro.

$$\underbrace{x + y}_{\text{Primer miembro}} \quad = \quad \underbrace{z}_{\text{Segundo miembro}}$$

Como ya se dijo, las propiedades de la igualdad se aplican también a las ecuaciones, ya que éstas son una forma especial de igualdades.

Reúnete con tus compañeros(as) y anota en tu cuaderno las ideas principales del texto; para ello toma como guía las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es igualdad? b) ¿Qué es una ecuación? c) ¿Cuáles son las partes de una ecuación? d) ¿Qué propiedades de la igualdad son aplicables a las ecuaciones?

Lee tus anotaciones a compañeros(as). Si difiere de otros, coméntalo y concluye.

Junto con uno de tus compañeros(as) realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

1. Anota Sí frente a cada igualdad, si se refiere a una ecuación, y NO si no lo es.

   a) $4 + 5 = 9$
   b) $7 + x = 2x$
   c) $\frac{4+8}{2} = 9 - 3$
   d) $a = b = c$
   e) $2x + y = 9$
   f) $\sqrt[3]{8} + \frac{1}{2} = 2.5$

2. Aplica en cada ecuación la propiedad señalada. Observa el ejemplo:

   a) $4 + x = y$ $\quad y = 4 + x$ Propiedad simétrica
   b) $a + b$ Propiedad reflexiva
   c) Si $a = b$ y $b = c$ Propiedad transitiva
   d) $a + b = 8$ Propiedad simétrica
   e) $x + a = y + a$ Propiedad cancelativa

   Revisa tus respuestas comparándolas con las de otros compañeros(as). Si tienes dudas, consulta con tu profesor(a).

Resuelve individualmente las siguientes preguntas. Trabaja en tu cuaderno.

Tomando las igualdades: $(x + 5) + 2 = 10$; $6 + 7 = 13$; $4 + 3 = 7$; $10 = 4y + 2$, completa o contesta lo siguiente:

a) Las igualdades que son ecuaciones son:

b) ¿Te es fácil identificarlas? ¿Por qué?

c) Sus incógnitas son: ____.

d) En la primera de las ecuaciones, ¿cuál es el primer miembro? y ¿cuál es el segundo?

e) En ellas se puede aplicar la propiedad transitiva, con la cual la ecuación resultante sería:

f) Aplicando la propiedad cancelativa en esta ecuación se tiene:

Compara tus respuestas con la clave. Si hay diferencias, examínalas y corrige los errores.

CLAVE

a) $(x + 5) +2 = 10$ y $10 = 4y + 2$; b) Tiene valores desconocidos llamados incógnitas; c) x y y; d) $(x + 5) + 2 = 10$; e) $(x + 5) + 2 = 4y + 2$; f) $x + 5 = 4y$

77 (70) NO HAY PROBLEMA

Situaciones que originan una ecuación
Planteamiento de situaciones que se resuelven a través de ecuaciones

Cuando nos enfrentamos a problemas primero debemos analizarlos para encontrar la mejor solución. ¿Te gustaría conocer el camino?

RECUERDA: En tu cuaderno contesta con otro compañero(a) las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es una igualdad?

b) ¿Qué diferencia hay entre una igualdad y una ecuación?

c) ¿Cuáles son el primero y el segundo miembros en una ecuación?

d) ¿Cómo explicas la propiedad uniforme o fundamental de las ecuaciones?

Lee en el grupo tus respuestas. Si existen diferencias con las de otros, discútelas y corrige los errores.

Observa con atención el video, en él verás que las situaciones problemáticas pueden resolverse con la ayuda de las ecuaciones.

Lee y comenta con un compañero(a) y enseguida, discute con el grupo qué problemas cotidianos pueden resolverse con una ecuación.

SITUACIONES QUE ORIGINAN UNA ECUACIÓN

Saber cómo plantear ecuaciones a partir de una situación cotidiana es una herramienta muy importante que se puede emplear para solucionar problemas que requieran la aplicación de cálculos matemáticos. Véase esto en los siguientes problemas.

Problema 1

Enrique va a la papelería y compra una resma de papel; paga con un billete de \$10 000 y recibe de cambio \$5 400. ¿Cuál es el costo del papel?

Analizando el problema se observa que:

a) El costo del papel más el cambio es igual al valor del billete.

b) El valor del billete y el cambio recibido son valores conocidos.

c) El valor del papel, se desconoce.

A partir de estos datos se obtiene la ecuación:

$$x + 5\,400 = 10\,000$$

El análisis de los problemas permite determinar correctamente la ecuación que los soluciona. Para resolverlos se aplica la propiedad uniforme, empleando el inverso aditivo y multiplicativo.

$x + 5\,400 = 10\,000$	Ecuación planteada
$x + 5\,400 - 5\,400 = 10\,000 - 5\,400$	sumando el inverso aditivo de 5 400 a ambos miembros y así dejar sola a x.
$x = 4\,600$	realizando la sustracción.

Es posible comprobar si el resultado es correcto sumando el valor encontrado con el cambio recibido.

$$4\,600 + 5\,400 = 10\,000$$

Problema 2

El señor Martínez reparte una caja de chocolates entre sus seis hijos. Si a cada uno de ellos le tocaron ocho chocolates, ¿cuántos chocolates traía la caja?

Haciendo un análisis del problema se tiene que:

a) Al hablar de una repartición, la operación involucrada es una división.

b) La división se plantea: el número de chocolates de la caja entre el número de hijos del señor Martínez.

c) El cociente de esa división es 8.

d) En la división los datos conocidos son el divisor y el cociente; el dato desconocido es el dividendo, por lo tanto, éste es la incógnita.

De donde se obtiene la ecuación:

$$\frac{x}{6} = 8$$

La cual se soluciona aplicando la propiedad uniforme.

$\frac{x}{6} = 8$	ecuación planteada
$\frac{x}{6}(6) = (8)(6)$	multiplicando por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{6}$ ambos miembros de la ecuación
$x = 48$	efectuando la multiplicación

Por medio de la comprobación se tiene $\frac{48}{6} = 8$

Con lo cual se dice que la caja tenía 48 chocolates.

Para representar un problema por medio de una ecuación, deben tomarse en cuenta los siguientes puntos.

a) Leer varias veces el problema con la finalidad de localizar las ideas principales.

b) Identificar los datos que proporciona el problema y la relación que guardan entre ellos.

c) Establecer cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.

d) Encontrar la ecuación que represente el problema.

e) Buscar su solución.

f) Comprobar el resultado.

El análisis de los problemas nos lleva a resolverlos por medio de un planteamiento más seguro y una solución más directa.

Con un compañero(a) describan los pasos a seguir para solucionar un problema, usando una ecuación.

Compara tu procedimiento con el de otros grupos.

Junto con un compañero(a):

1. Resuelve los problemas, usando ecuaciones para representarlos.

   a) El perímetro de un triángulo es de 23 cm; el primer lado mide 8 cm, el segundo 10 cm, ¿cuánto mide el tercero?

   b) El costo de tres cajas de manzanas es de $48 000 ¿cuánto cuesta una caja?

   c) Cinco kilogramos de mango cuestan $17 000, ¿cuánto cuesta el kilogramo?

2. Relaciona la columna de la izquierda con la de la derecha, y anota en el paréntesis la letra que concuerde con la ecuación señalada.

a) El costo de tres litros de leche es de $2 700	$x + 2y = 45$	( )
a) Se compran tres lápices y se paga con un billete de $2 000; el cambio que se recibe es de $850.	$3\ell + 8\ 50 = 2000$	( )
	$3x = 2\,700$	( )
b) La edad de Aurora más el doble de la edad de Pilar es de 45 años.	$245 - x = 189$	( )
d) Si a 245 le restamos un número la diferencia es 189.	$3x + y = 20$	( )

Comenta en tu grupo las respuestas que obtuviste. Corrige los errores.

De manera individual, lee cuidadosamente el siguiente problema y anota los datos que se piden para su resolución.

Si a la edad de Mario se le aumentan 23 años, el resultado será la de su papá, que tiene 38. ¿Qué edad tiene Mario?

a) ¿Qué datos conocidos da el problema?

b) ¿Qué datos solicita?

c) ¿Qué operaciones hay entre ellos?

d) ¿Qué dato es la incógnita?

e) ¿Cuál es la ecuación que plantea el problema?

f) Busca la solución.

g) ¿Cuál es la edad de Mario?

Consulta la veracidad de tus respuestas con la clave adjunta; si no todas fueron correctas, corrígelas.

CLAVE

a) La edad del papá de Mario y cuántos años más que su hijo tiene; b) La edad de Mario; c) Una sustracción; d) La edad de Mario; e) $x + 23 = 38$; f) $x + 23 = 38$, $x + 23 - 23 = 38 - 23$, $x = 5$; g) 15 años.

78 ¿CUÁL ES EL NÚMERO?

(71)

Ecuaciones de la forma $a + x = b$

Establecimiento del proceso de resolución

¿Puedes determinar rápidamente qué número sumado a 30 da como resultado 43? En este problema ya aplicaste, indirectamente, una ecuación y la resolviste.

Con un compañero(a), lee y analiza.

Ecuaciones de la forma $a + x = b$

¿Cuál es el número que disminuido en cinco unidades es igual a 73?

El número desconocido se representa como: x
Si este número se disminuye en cinco, la expresión queda: $x - 5$
Ahora la ecuación que se busca queda: $x - 5 = 73$
Una vez obtenida la ecuación, se procede a resolverla.

Para resolver una ecuación, un procedimiento sencillo es dejar la variable o incógnita en un miembro de la ecuación y las cantidades conocidas en el otro.

Si se tiene la ecuación

$$x - 5 = 73$$

Se aplica la propiedad fundamental de la igualdad a ambos miembros, en este caso se les suma 5, para que la igualdad permanezca; esto es:

$$x - 5 + 5 = 73 + 5$$

Se efectúan las operaciones indicadas, y se obtiene el valor de la incógnita.

$$\begin{aligned} x - 5 + 5 &= 73 + 5 \\ x &= 78 \end{aligned}$$

En la ecuación original se sustituye el valor de x, para comprobar que este valor cumple con la igualdad.

$$\begin{aligned} x - 5 &= 73 \\ 78 - 5 &= 73 \\ 73 &= 73 \end{aligned}$$

Como la igualdad se cumple, puede afirmarse que el número disminuido en cinco unidades es 78.

Aquí se estudiará la resolución de ecuaciones de la forma $a + x = b$

En la ecuación $a + x = b$, a y b son números racionales y x es una variable con incógnita. En el caso anterior:

$$a = -5 \;\; \text{y} \;\; b = 73$$

A continuación se proporcionan algunos ejemplos de cómo expresar ecuaciones en esta forma:

1. $x - 8 = 11$. de aquí se tiene que $a = -8$ y $b = 11$

2. $-13 + x = -12$, de aquí se tiene que $a = -13$ y $b = -12$

3. $19 = 4 + x$, de aquí se tiene que $a = 4$ y $b = 19$

Obsérvese que en un miembro de la ecuación aparecen siempre la variable y una constante, mientras que en el otro únicamente una constante.

Veamos otro ejemplo:

Si el papá de Ángel tiene 32 años de edad y excede en 25 años la edad de él, ¿cuál es la edad de Ángel?

Edad de Ángel: x
La edad del papá excede a la de Ángel en 25 años, por lo tanto: $x + 25$.
Edad del papá: 32 años.
La ecuación que se obtiene es: $x + 25 = 32$

Se aplica la propiedad fundamental de la igualdad, en este caso se suma –25 a ambos miembros, esto es:

$$x + 25 + (-25) = 32 + (-25)$$

La realización de las operaciones indicadas proporciona el valor de la incógnita.

$$x + 25 - (-25) = 32 + (-25)$$
$$x = 7$$

Mediante la comprobación del resultado se tiene:

$$x + 25 = 32$$
$$7 + 25 = 32$$
$$32 = 32$$

Como la igualdad se cumple, se afirma que la edad de Ángel es de 7 años.

Ahora se presentará un caso particular de este tipo de ecuaciones: cuando la incógnita es negativa.

Ejemplo:

$$9 - x = 17$$

Obsérvese que la incógnita es negativa; como ésta siempre debe quedar positiva en el miembro en el que esté, para que lo sea se aplica el inverso aditivo de $-x$, es decir, x se suma en ambos miembros de la ecuación para que la igualdad permanezca.

$$9 - x + x = 17 + x$$

Se reducen los términos semejantes

$$\begin{aligned} 9 - x + x &= 17 + x \\ 9 &= 17 + x \end{aligned}$$

Una vez que la incógnita queda positiva, se procede a determinar su valor.

Después se aplica la propiedad fundamental de la igualdad, en este caso se suma –17 a ambos miembros de la ecuación, para conservar la igualdad, esto es:

$$9 + (-17) = 17 + x + (-17)$$

Enseguida se efectúan las operaciones indicadas y se obtiene el valor de la incógnita.

$$-8 = x$$

Ahora se aplica la propiedad simétrica, esto es:

$$x = -8$$

Con la comprobación del resultado se tiene:

$$\begin{aligned} 9 - x &= 17 \\ 9 - (-8) &= 17 \\ 9 + 8 &= 17 \\ 17 &= 17 \end{aligned}$$

Como la igualdad se cumple, entonces se afirma que el valor de x es – 8.

Con base en lo expuesto puede concluirse que:

> Para determinar el valor de la incógnita en una ecuación de la forma $a + x = b$, se aplican las propiedades de la igualdad a ambos miembros de la ecuación para que la igualdad permanezca.

Ahora observa el video, éste proporcionará información importante que te permitirá comprender cómo plantear y resolver una ecuación.

Junto con otro compañero(a) contesta lo que se pide a continuación:

1. En una ecuación de la forma $a + x = b$, ¿qué representan a y b?

   ¿Qué representa la x?

2. ¿Cómo identificas una ecuación de la forma $a + x = b$?

3. ¿Qué propiedades se aplican en la resolución de ecuaciones de este tipo?

4. ¿Cómo compruebas el resultado?

Comprueba tus respuestas con las de tus compañeros(as).

Sigue trabajando con tu compañero(a), y contesta lo siguiente:

1. Mentalmente, resuelve los siguientes problemas y escribe el resultado en el cuaderno.

   a) La suma de dos números es –3, y uno de esos números es 8; ¿cuál es el otro número?

   b) Un número disminuido en 5 unidades es cero; ¿cuál es ese número?

   c) ¿Cuál es el número que sumado a tu edad da como resultado 27?

2. Con base en los siguientes cuestionamientos, plantea la ecuación para el primer problema:

   a) ¿Qué datos se tienen?

   b) ¿Qué representa cada uno de ellos?

   c) ¿Qué es lo que se va a determinar? ¿Cómo se representa?

   d) ¿Qué operación se debe realizar para plantear la ecuación?

   e) ¿Cómo queda la ecuación planteada?

3. Resuelve la ecuación y compara el resultado que obtengas con el que diste en un principio.

Comparte tus respuestas con las de otros compañeros(as).

Resuelve en tu cuaderno lo que se presenta a continuación:

1 Determina el valor de x en las siguientes ecuaciones:

   a) $-8 + x = -25$ b) $32 = 16 - x$ c) $x + 17 = 2$

2. Plantea las ecuaciones de los problemas b y c, y resuélvelas. Si conoces otro procedimiento para resolver las ecuaciones, aplícalo.

Intercambia con otro compañero(a) tu trabajo y coteja tus resultados.

CLAVE

1. a) $x = -17$, b) $x = -16$, c) $x = -15$, 2. b) $x - 5 = 0$; $x = 5$, c) queda abierta la respuesta.

79 UN SUMANDO DESCONOCIDO

(72)

Problemas sobre ecuaciones de la forma $a + x = b$
Resolución de problemas

Seguramente habrás puesto en juego tu imaginación y creatividad para replantear y resolver un problema; aquí lo harás y con ello podrás visualizar la utilidad que tienen las ecuaciones en la resolución de problemas que quizá en alguna oportunidad se te presenten.

Observa con atención el programa televisivo; en él obtendrás información que te permitirá comprender mejor el tema. Después comenta con tus compañeros(as) cuál fue la idea principal del programa.

Integra un equipo de trabajo y resuelve el siguiente problema:

Al señor González le descuentan mensualmente \$135 000 del sueldo. Si cada mes recibe un cheque por \$745 000, ¿cuál es su sueldo mensual?

a) ¿Qué cantidad es la que se desconoce?, ¿cómo se representa?

b) ¿Qué cantidad le descuentan?

c) ¿Qué cantidad es la que recibe?

d) Al sueldo mensual se le suma o resta lo que le descuentan, ¿por qué?

e) ¿Cómo queda planteada la ecuación?

f) Resuelve dicha ecuación.

g) ¿Cuál es el sueldo mensual del señor González?

De qué otra forma resolverías este problema; explícala.
Compara tus resultados con los de otros compañeros(as).

Sigue con tu equipo de trabajo y contesta lo que se pide en cada caso:

1. Mentalmente, resuelve los siguientes problemas y posteriormente escribe la respuesta.

   a) ¿Qué número sumado con 36 da 87?

   b) Si a un número se le resta 52 el resultado es 200; ¿cuál es ese número?

   c) La diferencia de dos números es 86; si el número menor es 751, ¿cuál es el número mayor?

   d) Dos varillas juntas tienen una longitud de 38 cm; si una mide 13 cm, ¿cuánto mide la otra?

   e) En una caneca caben 448 litros. Si le faltan 215 litros para llenarse, ¿cuántos litros contiene ahora?

2. En tu cuaderno plantea las ecuaciones para cada uno de los problemas anteriores.

De acuerdo con las indicaciones del profesor(a), un integrante de cada equipo leerá sus respuestas.

En forma Individual, contesta en tu cuaderno lo que se pide en cada caso.

1. De las ecuaciones que se dan en cada inciso, elige la que se adapta al problema, resuélvela y di cuál es la solución del problema. Recuerda que antes de elegir la ecuación debes plantearla.

   a) Antes de ponerse a dieta, una señora pesaba determinados kilogramos. Si en la dieta reduce 15 kg y llega a pesar 56, ¿cuál era su peso inicial?

   $x + 15 = 56$ $\qquad$ $x - 56 = 15$ $\qquad$ $x - 15 = 56$

   b) De una caneca llena de agua se utilizan 210 litros. Si aún le quedan 460 litros, ¿cuál es la capacidad de la caneca?

   $x + 210 = 460$ $\qquad$ $x - 460 = 210$ $\qquad$ $x - 210 = 460$

   c) Una báscula registra 143 kg cuando se suben juntos Juan y Rodrigo. Si al bajarse Juan de la báscula ésta registra 63 kg, ¿cuánto pesa Juan?

   $x - 63 = 143$ $\qquad$ $x + 63 = 143$ $\qquad$ $x + 143 = 63$

Compara tus resultados con los de otro compañero(a); en caso de que sean diferentes consulta la clave.

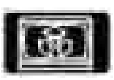
CLAVE

a) 71 kg; b) 670 ℓ; c) 80 kg.

80 (73) UN FACTOR DESCONOCIDO

Ecuaciones de la forma *ax = b*
Establecimiento del proceso de resolución

Una vez que ya dominaste las ecuaciones de la forma $a + x = b$, se te facilitará el estudio de las ecuaciones de la forma $ax = b$.



Observa el video, ya que en él se te presentará información para complementar el contenido de esta sesión; posteriormente, comenta cuál fue la idea principal del programa.

Analiza y comenta con un compañero(a).

ECUACIONES DE LA FORMA *ax = b*

Otro tipo de ecuaciones de primer grado con una incógnita son las de la forma $a\,x = b$, en donde a y b son números racionales y x la incógnita.

Examina el siguiente problema.

Un terreno rectangular tiene un área de 475 m^2 y un fondo de 28 m; ¿cuánto mide de frente? Para resolver este problema veamos cómo plantear la ecuación:

Frente o ancho del terreno: x
Fondo o largo del terreno: 28 m
Área del terreno: 476 m^2

Como el área de un rectángulo se determina mediante la relación de multiplicar la base por la altura, se tiene:

$$A = b \cdot a$$

Se sustituye el valor del área, el largo o fondo del terreno y el ancho o frente del mismo, los cuales son 476, 28 y x, respectivamente, en la fórmula anteriormente establecida, con lo cual se tiene la siguiente ecuación:

$$476 = 28x$$

Se aplica la propiedad fundamental de la igualdad a ambos miembros; en este caso, se dividen éstos entre 28 para que la igualdad permanezca; esto es:

$$\frac{476}{28} = \frac{28x}{28}$$

Se efectúan las operaciones indicadas y se obtiene el valor de la incógnita.

$$\frac{476}{28} = \frac{28x}{28}$$

$$17 = x$$

Al aplicar la propiedad simétrica, se tiene: $x = 17$

Para comprobar que este valor cumple con la igualdad, se sustituye en la ecuación original:

$$476 = 28x$$
$$476 = 28\,(17)$$
$$476 = 476$$

Como la igualdad se cumple, se afirma que el terreno tiene de frente 17 m.

Un objeto, observado con una lente de aumento, se ve cuatro veces mayor que lo que mide en realidad. Si la imagen de un objeto en la lente de aumento mide 76 mm, ¿cuántos milímetros mide realmente el objeto?

Medida real del objeto: x.

La lente hace que el objeto se vea cuatro veces mayor que su tamaño real; esto es: $4x$

Medida con la que se ve el objeto en la lente de aumento: 76 mm

La ecuación que se obtiene es: $4x = 76$

Para resolverla, se aplica la propiedad fundamental de la igualdad; en este caso, se dividen entre 4 ambos miembros de la igualdad; esto es:

$$\frac{4x}{4} = \frac{76}{4}$$

Se efectúan las operaciones indicadas y se obtiene el valor de la incógnita.

$$\frac{4x}{4} = \frac{76}{4}$$
$$x = 19$$

Para comprobar el resultado, se sustituye *x* por 19 en la ecuación original.

$$4x = 76$$
$$4\,(19) = 76$$
$$76 = 76$$

Como la igualdad se cumple, se afirma que la medida del objeto real es 19 mm.

Con base en lo anterior, puede afirmarse que:

> Para resolver una ecuación de la forma $ax = b$, se aplican las propiedades fundamentales de la igualdad a ambos miembros de la ecuación para que la igualdad permanezca y la incógnita quede sola.

Con dos de tus compañeros(as) contesta lo que se pide a continuación:

El cometa Halley fue observado siete veces desde la Tierra durante un período de 532 años: ¿Cada cuántos años se puede observar dicho cometa, si el tiempo entre una aparición y otra es el mismo?

¿Qué dato se desconoce del problema?

¿Cuántas veces se ha visto el cometa desde la Tierra?

¿Cómo se plantea la relación entre las veces que se observó el cometa y el tiempo que debe transcurrir para que sea visto nuevamente?

¿Cuál es el lapso durante el cual se ha visto el cometa?

¿Cómo queda planteada la ecuación?

¿Qué es lo primero que se hace para resolverla?

Una vez que hallaste el valor de la incógnita, ¿qué debes hacer?

Escribe la respuesta al problema.

¿Te pareció fácil el procedimiento de resolución? ¿Por qué?

¿Conoces otra forma para resolver este problema? Explícala.

Comparte tus respuestas con compañeros(as).

Continúa con tus compañeros(as) y contesta lo que se te pide a continuación:

1. Mentalmente, resuelve los siguientes problemas y después escríbelos en tu cuaderno.

a) El producto de dos números es 56; si uno de ellos es 4, ¿cuál es el otro número?

b) El número 216 es 12 veces mayor que otro número; ¿cuál es ese otro número?

c) Si se pagaron $80 000 por cinco pelotas de tenis ¿cuánto cuesta cada una?

2. Plantea las ecuaciones de los tres problemas propuestos.

3. Resuelve en tu cuaderno las ecuaciones planteadas y anota el resultado.

Compara las respuestas ante el grupo; si tuviste errores, revisa tus procedimientos.

En forma individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas y contesta en los espacios correspondientes:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-7 = 3x$ b) $0.25x = 4$

2. Elige la ecuación que se adapte a cada problema y resuélvela; recuerda que antes de elegirla debes plantearla.

   a) Luis pesa cinco veces lo que pesa su hermano Raúl. Si Luis pesa 70 kg, ¿cuánto pesa Raúl?

   $\boxed{70x = 5}$ $\boxed{70 = 5x}$ $\boxed{\frac{x}{5} = 70}$

   b) El área ocupada por un departamento es, aproximadamente, de 247 000 km^2. Si el área de dicho departamento es 164 veces mayor que la de su capital, ¿cuál es el área de la capital?

   $\boxed{64x = 247\,000}$ $\boxed{247\,000x = 164}$ $\boxed{\frac{164}{x} = 247\,000}$

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as); en caso de existir diferencias, consulta la clave.

CLAVE

1. a) $x = -\frac{7}{3}$; b) $x = 16$; 2. a) $5x = 70$; $x = 14$. Raúl pesa 14 kg; b) $164x = 247\ 000$; $x = 1\ 500$, el área de la capital es 1 506 km^2

81 LA BÚSQUEDA DEL FACTOR

(74)

Problemas sobre ecuaciones de la forma *ax = b*

Resolución de problemas

Para resolver problemas, requerirás plantear ecuaciones y solucionarlas. Esta es una oportunidad de usar el lenguaje algebraico y progresar en el aprendizaje de las matemáticas. ¿Estás listo?

Observa el video y te darás cuenta del procedimiento, para que posteriormente lo apliques e incrementes tu habilidad en los procedimientos algebraicos. Al terminar, comenta con el resto del grupo lo que hayas aprendido.

Forma un equipo y describe el procedimiento para resolver un problema por medio de la ecuación.

Con el mismo equipo, resuelve los siguientes problemas. Anota la representación del problema en lenguaje algebraico, calcula el valor de la incógnita, mentalmente y compruébalo,

1. José adquirió 3 balones por $19 500, ¿cuánto pagó por cada balón?
2. Manuel realizó un trabajo de plomería en el que tardó 7 horas. Recibió un pago de $63.000 ¿cuánto le corresponde por cada hora de trabajo?
3. Los seis integrantes de un equipo de trabajo de cierta escuela adquirieron material para un experimento, el cual costó $45.000 ¿Cuánto le corresponde aportar a cada miembro del equipo?

En forma individual, resuelve y comprueba los siguientes problemas; plantea la ecuación y obtén el valor de la incógnita. Realiza el proceso completo en tu cuaderno.

1. El área de una habitación rectangular es de 13.2890 m^2 y un lado mide 4.85m ¿cuánto mide el otro lado? Usa la calculadora.
2. Para confeccionar 13 chalecos se utilizaron 17.55 m de tela, ¿qué cantidad de tela se utilizó para cada chaleco?

Compara tus resultados con la clave que se te proporciona para esta sesión. Si no coinciden, revisa tus procedimientos y, si hay errores, corrígelos.

CLAVE

1. $x = 2.74$ m; comprobación: $4.85 \text{ m} \times 2.74 \text{ m} = 13.2890 \text{ m}^2$; 2. $x = 1.35$ m, comprobación: $1.35 \text{ m} \times 13 = 17.55$ m.

82 UN FACTOR EN UNA ADICIÓN

(75)

Ecuaciones de la forma *ax* + *b* = *c*

Establecimiento de la forma de resolución

Resolver y comprobar ecuaciones te da la oportunidad de incrementar tu habilidad en el manejo del lenguaje algebraico, al mismo tiempo que adquieres nuevos conocimientos.

Observa atentamente el video que mostrará otro tipo de ecuaciones, así como la manera de obtener la solución y comprobarla. Al finalizar, comenta con dos compañeros(as) lo que hayas aprendido.

Lee y analiza con un compañero(a).

ECUACIONES DE LA FORMA *ax* + *b* = *c*

Para continuar con las ecuaciones, considérese el siguiente problema:

Juan tiene necesidad de adquirir tres resmas de papel y un libro de poesías para sus trabajos escolares. Pagó en la papelería $58 000 en total. El costo del libro es de $31 000; ¿cuánto pagó por cada resma de papel?

Este problema es muy sencillo, pero lo más importante es la práctica del lenguaje algebraico.

Para resolver el problema se representa en lenguaje simbólico la situación que está expresada en lenguaje común.

Precio de una resmas de papel: x
Precio de tres resmas: $3x$
Precio del libro de poesías: $31 000
Cantidad pagada en total: $58 000

Esto da origen a la ecuación:

$$3x + 31\,000 = 58\,000$$

Para resolverla, se deja en el primer miembro únicamente el término que contiene la incógnita ($3x$). Por ello se requiere eliminar el término independiente (31 000). La eliminación se realiza sumando a los dos miembros de la ecuación un mismo número, ya que así se obtiene una ecuación equivalente a la que se quiere resolver. El único número que puede eliminar a 31 000 es – 31 000, ya que 31 000 – 31 000 = 0

Por lo tanto:

$$3x + 31\,000 - 31\,000 = 58\,000 - 31\,000$$

Al realizar las operaciones indicadas, se obtiene:

$$3x = 27\,000$$

Para continuar, se requiere dejar la incógnita (x) con coeficiente + 1 (recuérdese que dicho coeficiente no se escribe). Esto se logra dividiendo los dos miembros de la ecuación entre un mismo número, ya que así se obtiene una ecuación equivalente a la que se está resolviendo. Entonces:

$$\frac{3x}{3} = \frac{27\,000}{3}$$

Al dividir resulta:

$$x = 9\,000$$

Ahora, es necesario verificar que 9 000 hace verdadera la igualdad (ecuación) que fue planteada para resolver el problema. La comprobación se realiza sustituyendo la incógnita (x) por su valor 9 000 y realizando las operaciones indicadas.

Así:

$$\begin{aligned} 3x + 31\,000 &= 58\,000 \\ 3\,(9\,000) + 31\,000 &= 58\,000 \\ 27\,000 + 31\,000 &= 58\,000 \\ 58\,000 &= 58\,000 \end{aligned}$$

Se observa que 9000 hace cierta la igualdad.

Por lo tanto, 9 000 es la raíz o solución de la ecuación. Por otra parte, 9 000 es también la solución del problema, o sea:

Una resma de papel costó $9 000

La ecuación planteada para resolver el problema ($3x + 31\,000 = 58\,000$), tiene la forma $a\,x + b = c$, porque *a, b* y *c* representan números racionales cualesquiera, que en este caso fueron sustituidos por 3, 31 000 y 58 000 respectivamente.

Invita a un compañero(a) para realizar los siguientes problemas:

1. Si en la ecuación $3x - 4 = 25$ se suma + 4 al primer miembro, ¿qué número debe sumarse al segundo miembro para obtener una ecuación equivalente?

2. Si en la ecuación $3x = 10$ se divide el primer miembro entre 3 y el segundo entre 5, ¿se obtiene una ecuación equivalente a la original? ¿por qué no?, explica. Comparte tus respuestas con otros compañeros(as).

Con el mismo equipo, comenta el procedimiento para resolver la ecuación $3.5x + 3 = -4$ y explícalo con tus propias palabras en tu cuaderno.

Revisa tus respuestas con los integrantes de otro equipo. Si detectas errores en tu trabajo, corrígelos.

Sigue trabajando con tu equipo. Resuelve las siguientes ecuaciones. Comprueba la solución mentalmente y anota la igualdad que resulte.

$$2x - 5 = 7 \qquad\qquad 3x + 2 = 16$$

Haz la comprobación de cada solución.

Presenta tus respuestas al profesor(a); si te equivocaste, rectifica y corrige.

Resuelve y comprueba algebraicamente las siguientes ecuaciones en tu cuaderno, en forma individual:

a) $5x - 3 = -13$

b) $-y + 4 = -3$

c) $3.5x + 4 = 14.5$

d) $\frac{2}{3}y - 6 = 0$

Compara tus soluciones con las de la clave que se te proporciona para esta sección. En caso de error, rectifica y corrige.

CLAVE

a) $x = -2$; b) $y = 7$; c) $x = 3$; d) $y = 9$.

83 EL VALOR DE UN DESCONOCIDO

(76) Problemas sobre ecuaciones de la forma $ax + b = c$
Resolución de problemas

La resolución de problemas es una de las aplicaciones más importantes del álgebra. El uso correcto de la notación algebraica te permitirá progresar en esta fase de tu aprendizaje de las matemáticas.

Observa con atención el video para que comprendas cómo resolver un problema por medio de una ecuación. Al terminar, comenta con dos compañeros(as) lo que hayas entendido.

Intégrate con dos compañeros(as). Analiza las siguientes ecuaciones y plantea un problema para cada una de ellas.

a) $3x - 5 = 7$ b) $y + 8 = 15$

Comenta tu trabajo con tus compañeros(as).

Con tu equipo de trabajo, resuelve y comprueba mentalmente los siguientes problemas. Anota la ecuación planteada, resuélvelos y comprueba tus resultados.

1. Antonio tenía \$850. Compró tres dulces y le sobraron \$250. ¿Cuánto pagó por cada dulce?

2. Por cuatro cuadernos y un lapicero se pagaron \$13 500; si el lapicero costó \$1 500, ¿cuánto se pagó por cada cuaderno?

3. Si al doble de la edad de María se le aumenta 4, su resultado es 30. ¿Cuál es la edad de María?

Revisa tu trabajo con un compañero(a) de otro grupo; si hay diferencia, verifica. Si descubres que te equivocaste, corrige.

En forma individual y en tu cuaderno, resuelve y comprueba algebraicamente los siguientes problemas:

1. El señor Juárez tapizó media docena de sillas y un sillón por \$420 000. Si cobró \$90 000 por el sillón, ¿cuánto recibió por cada silla?

2. La señora Marín compró 4 limpiones y pagó con un billete de \$10 000. Recibió como cambio, de \$3 000; ¿cuánto costó cada limpión?

3. Un mecánico realizó 5 afinaciones de motor y arregló un sistema de frenos, por \$310 000. Por el arreglo de los frenos cobró \$70 000. ¿Cuánto recibió por cada afinación?

Compara tus resultados con la clave: Si no coinciden, usa tu calculadora de bolsillo para rectificar.

CLAVE

1. \$55 000 por cada silla; 2. \$1 750 por cada limpión; 3. \$48 000 por cada afinación.

84 COMPRENDER MÁS QUE RECORDAR ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

(77) Repaso parcial de lo desarrollado en el núcleo
Integración de los conocimientos adquiridos

Los conocimientos adquiridos a través de varias sesiones consecutivas no deben verse como algo aislado. Seguramente hay relación entre los conceptos estudiados. ¿Lo has notado? Si no, ¿te gustaría verlo?

Observa el video. Si tratas de aprovecharlo al máximo, comprenderás mejor el contenido del núcleo que ya has visto. Cuando termine el programa, comenta con tus compañeros(as) de grupo lo que consideres más importante.

Intégrate a un equipo y realiza lo que se te indica.

1. Analiza las seis expresiones siguientes. En tu cuaderno anota, en cada caso, si se trata solamente de una igualdad, o si es una ecuación.

a) $4 + 6 = 2 \times 5$ b) $3.5 - 2 = 1 + 0.5$
c) $y - 6 = 11$ d) $6y - 1 = 11$
e) $\frac{2}{5} + x = 6.4$ f) $4 = (3 \times 2) - 2$

2. De acuerdo con lo estudiado, puede afirmarse que “toda ecuación es una igualdad”; sin embargo ¿será verdad que “toda igualdad es una ecuación?
¿Por qué?

3. Para cada una de las siguientes expresiones anota y explica en tu cuaderno la propiedad de las igualdades que se esté aplicando en cada caso.

   a) $-6 = -6$

   b) si $ab = ac$, entonces $b = c$

   c) $4x - 1 = 7$, luego $7 = 4x - 1$

   d) $a = b$ y $b = c$; luego $a = c$

   e) $4x - 3 = 23$, $4x - 3 + 3 = 23 + 3$

   f) $m + n = m + p$, luego $n = p$

   g) $3x = 27$, $\dfrac{3x}{3} = \dfrac{27}{3}$

   h) $w = w$

4. Se han confeccionado 8 vestidos con 32 m de tela; ¿cuánta tela se utilizó para cada vestido?

   Esta situación da origen a la ecuación: $8x = 32$

   Ahora, describe en tu cuaderno, dos situaciones que originen una ecuación.

5. Resuelve y comprueba mentalmente las siguientes ecuaciones. Anota la solución y la identidad que resulte al comprobarlas.

   a) $-2 + x = 2$ b) $2y - 12 = 2$

   c) $5z = 45$ d) $x - 11 = 6$

En forma individual, resuelve y comprueba, algebraicamente, los siguientes problemas en tu cuaderno.

6. José compró 5 boletas para el partido de fútbol entre las selecciones de Colombia y Paraguay y pagó $75 000. ¿Cuánto costó cada boleta?

7. El encargado de un almacén tenía 37 cajas de huevos y ayer recibió más; ahora tiene 95 cajas. ¿Cuántas recibió ayer?

8. En su clase de matemáticas, Santiago le dijo al grupo: “Si tuviera el triple del dinero que tengo, y además $48 000 tendría $156 000. ¿Cuánto tengo?

Cuando termines puedes consultar la clave. Rectifica y comprueba; puedes auxiliarte de tu calculadora de bolsillo. Si tienes errores, corrígelos.

CLAVE

1. a) I, b) I, c) E, d) E, e) E, f) I; 2. No porque algunas igualdades no tienen incógnita; 3) a) Idéntica, b) Cancelativa, c) Simétrica, d) Transitiva, e) Uniforme, f) Cancelativa, g) Uniforme, h) Idéntica o reflexiva; 4. s) Abierto b) Abierto; a) Solución: $x = 4$ comprobación: $2 = 2$; b) Solución: $y = 7$ comprobación: $2 = 2$; c) Solución: $z = 9$ comprobación: $45 = 45$; d) Solución: $x = 17$ comprobación: $6 = 6$; e) Solución: $x = -6$ comprobación: $8 = 8$; 6. $15 000; 7. 58 cajas; 8. $36 000.

85 AMISTADES QUE OCULTAN LA RESPUESTA

(78)

Ecuaciones de la forma *ax + b = cx + d*

Establecimiento del proceso de resolución

La resolución de ecuaciones resulta ya familiar para ti; en esta sesión resolverás ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$. Tienes ya elementos para llegar a la solución; ¿podrás llegar a ella o necesitas ayuda?

Observa el video y conocerás, paso a paso, el camino para llegar a la solución.

Reúnete con tu compañero(a), y efectúa una lectura comentada del texto:

ECUACIONES DE LA FORMA *ax + b = cx + d*

Existen situaciones problemáticas cuya solución puede encontrarse planteando una ecuación.

Por ejemplo:

Sandra y Josefina recibieron una gratificación al terminar su trabajo. A Sandra le entregaron 6 vales y $10 000 y Josefina recibió 4 vales y $50 000. Si los vales son de la misma denominación y las dos recibieron igual pago, ¿de qué valor son los vales?, ¿cuánto recibió de compensación cada trabajadora?

Al interpretar algebraicamente esta situación, se tiene:

Gratificación de Sandra $6x + 10\ 000$
Gratificación de Josefina $4x + 50\ 000$ donde x representa el valor de cada vale.

Como la gratificación de ambas es igual, se obtiene la ecuación:

$$6x + 10\,000 = 4x + 50\,000$$

Obsérvese que en uno y otro miembros aparecen los términos con la incógnita (x) que representa el valor de un vale y los términos independientes.

Un proceso para resolver esta ecuación puede ser.

– Reunir en el primer miembro los términos que contienen a la incógnita (x) y en el segundo miembro, los términos independientes.

  Para ello se debe identificar los términos que hay que cambiar de miembro (10 000 y $4x$) y sumar el inverso aditivo de cada uno en ambos miembros (–10 000 y $-4x$, respectivamente).

$$6x + 10\,000 = 4x + 50\,000$$

$$6x + 10\,000 - 10\,000 - 4x = 4x + 50\,000 - 10\,000 - 4x$$

– Se agrupan términos semejantes en cada miembro.

$$(6x - 4x) + (10\,000 - 10\,000) = (4x - 4x) + (50\,000 - 10\,000)$$

$$2x + 0 = 0 + 40\,000$$

– Despejar la incógnita dividiendo ambos miembros de la igualdad entre el coeficiente de la incógnita (x).

$$\frac{2x}{2} = \frac{40\,000}{2}$$

$$x = 20\,000 \qquad \text{Solución}$$

– Verificar la solución.

  a) Sustituyendo el valor de x en la ecuación original:

$$6x + 10\,000 = 4x + 50\,000$$

$$6\,(20\,000) + 10\,000 = 4\,(20\,000) + 50\,000$$

  b) Haciendo operaciones en cada miembro:

$$120\,000 + 10\,000 = 80\,000 + 50\,000$$

$$130\,000 = 130\,000$$

Como se llegó a una igualdad, la raíz o solución es correcta.

La ecuación ha sido resuelta y verificada, pero aún no se han respondido las preguntas del problema.

En este caso, como x representa el valor de los vales, la cantidad de cada uno de ellos es \$20 000 y como Sandra y Josefina recibieron lo mismo, la igualdad a la que se llegó en la verificación representa el monto de su gratificación; esto es, cada una recibió \$130 000.

Se tiene la ecuación $6x + 10\,000 = 4x + 50\,000$; en ella, 6, 10 000 y 50 000 son valores conocidos y se sustituyen con las literales *a, b, c, d,* respectivamente, para obtener la forma de la ecuación motivo de estudio: $ax + b = cx + d$

Resumiendo, se tiene que:

En el proceso para resolver las ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ es importante:

– Reunir en un miembro de la ecuación los términos con incógnita y en otro los términos independientes; para lo cual hay que sumar convenientemente los inversos aditivos necesarios.

– Agrupar términos semejantes.

– Despejar la incógnita.

– Verificar la raíz o solución.

Veamos otro ejemplo:

$$4x + 2 = 9x - 8$$

Si observas, es conveniente reunir los términos con x a la derecha; para lo cual debes sumar el inverso aditivo de $4x$ o sea $-4x$. Si a la izquierda queremos tener los términos independientes debo sumar $+8$ (inverso aditivo de -8).

$$4x - 4x + 2 + 8 = 9x - 4x - 8 + 8$$

Agrupo para reducir la expresión:

$$(4x - 4x) + (2 + 8) = (9x - 4x) + (-8 + 8)$$

$$0 + 10 = 5x + 0$$

$$10 = 5x$$

Despejo x, para lo cual debo dividir entre 5:

$$10 \div 5 = 5x \div 5$$

$$\frac{10}{5} = \frac{5x}{5}$$

$$2 = x$$

No debe olvidarse que para resolver una ecuación es importante manejar bien las propiedades de la igualdad, así como las operaciones con números racionales positivos y negativos.

Continúa trabajando con tu compañero(a) y realiza lo que se te indica:

1. Escribe brevemente cómo procedes en la solución de ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$.

2. ¿Cómo procedes para que en un miembro de la ecuación queden los términos con la variable y en el otro, los términos independientes?

Sigue trabajando con tu compañero(a) y resuelve los siguientes ejercicios:

1. Transforma las ecuaciones de tal forma que en uno de los miembros queden términos en x y en el otro, los términos independientes:

Ecuación
a) $8x + 8 = 6x + 14$
b) $10x – 9 = 7x – 15$
c) $12x – 4 = 3x +$

2. Resuelve cada una de las ecuaciones anteriores y comprueba las soluciones.

3. Observa la siguiente ecuación:

$$5x + 18 –2x – 10 = 4x – 9 + 7x – 7$$

¿Podrás resolverla? Sí, ¿cómo?; No, ¿por qué?

Si no la puedes resolver, suma en cada miembro los términos semejantes.

¿La ecuación obtenida es de la forma $ax + b = cx + d$? Resuélvela y compruébala.

Compara tu ejercicio con el de otros compañeros(as). Si tienes dudas, pregúntale a tu profesor(a).

En tu cuaderno y en forma individual resuelve y comprueba las siguientes ecuaciones:

a) $21 - 6x = 27 - 8x$ b) $11x - 4 = 8x + 14$

c) $6x + 6 + 7x + 5 = 8x + 7x + 3x + 1$

Compara las soluciones con las de la clave y, en caso de error, verifica nuevamente tu proceso.

CLAVE

a) $x = 3$; b) $x = 6$; c) $x = 2$.

86 (79) RESUÉLVELOS TÚ MISMO

Problemas sobre ecuaciones de la forma *ax + b = c + d*
Resolución de problemas

En este momento, con el manejo apropiado del lenguaje algebraico, eres capaz de plantear algunas situaciones problemáticas por medio de ecuaciones, así como de encontrar su solución.

Observa el video el cual te proporcionará elementos con los que podrás plantear ecuaciones para resolver situaciones problemáticas.

Reúnete con dos compañeros(as) para resolver el siguiente problema:

El número de videocintas que tiene Amalia es el cuádruplo del número de videocintas que posee Rosa. Si Amalia posee 3 videocintas menos y Rosa 15 más, es porque ambas tienen el mismo número de videocintas. ¿Cuántas posee cada una de ellas?

1. Determina cuáles son los datos y la incógnita del problema, así como lo que se pregunta:

   Si el número de videocintas de Rosa es x, ¿cómo representas el número de videocintas de Amalia?

Considerando lo anterior, representa en lenguaje algebraico las expresiones:

“Si Amalia posee 3 videocintas menos”

“Rosa posee 15 videocintas más"

2. Plantea la ecuación correspondiente.

3. Resuelve la ecuación, aplicando los pasos del proceso: reunir, reducir, despejar y verificar.

4. Contesta la pregunta del problema:

   Si “el número de videocintas de Rosa" = x

   y “el número de videocintas de Amalia” = $4x$

   Entonces, ¿cuántas videocintas posee Rosa y cuántas Amalia?

Escribe los pasos que seguiste para resolver el problema.

Compara tu ejercicio con el de otro equipo y verifica el proceso nuevamente; en caso de haber diferencias, corrige los errores.

En forma individual, resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno; considera el proceso ya indicado.

a) La edad de Jesús es el triple de la edad de Lalo. La edad de Jesús hace 5 años era el doble de la edad de Lalo más 10 años. ¿Qué edad tienen actualmente?

   Datos

Jesús = $3x$	$3x - 5 =$	Edad de Jesús:
Lalo = x		Edad de Lalo:

b) El número de días que trabajó Juan es 4 veces el número de días que ha trabajado Carlos. Si Juan hubiera trabajado 9 días menos y Carlos 15 días más, los dos habrían trabajado igual número de días. ¿Cuántos días trabajó cada uno?

   Datos:
   Días que trabajó Juan:

   Días que trabajó Carlos:

Compara tus resultados con los de la clave y, en caso de error, verifica tu proceso de resolución.

CLAVE

a) Jesús 45 años; Lalo 15 años; b) Juan 32 días; Carlos 8 días.

87 A SU MÍNIMA EXPRESIÓN

(80)

Expresiones con paréntesis

Simplificación de expresiones con paréntesis

En el aprendizaje del álgebra es muy frecuente el manejo de expresiones que contienen paréntesis. Para simplificarlas es necesario realizar las operaciones indicadas por el signo de agrupación.

Observa el video.

Basándote en lo visto en el programa, anota en tu cuaderno lo que entendiste acerca de la simplificación de expresiones con paréntesis.

Lee y analiza el texto *Expresiones con paréntesis*. La finalidad es que comprendas la manera de eliminar paréntesis para simplificar una ecuación.

EXPRESIONES CON PARÉNTESIS

Existen ecuaciones que originalmente contienen paréntesis, los cuales han de eliminarse para simplificarlas y después para resolverlas.

Si se tiene una ecuación como la siguiente:

$$3\,(2x + 1) = 15$$

Se observa que el paréntesis $(2x + 1)$ está precedido por el factor 3, esto quiere decir que 3 multiplica a cada uno de los sumandos del paréntesis. Si efectúas la multiplicación el paréntesis desaparece:

$$3\,(2x + 1) = 15$$

$$6x + 3 = 15$$

Una vez eliminado el paréntesis, se tiene una ecuación equivalente.

Sin embargo, hay casos en los que en una ecuación se encuentran expresiones con paréntesis afectadas de un signo negativo, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$2 - (x + 1) = 8$$

Para eliminar el paréntesis en esta ecuación, se puede establecer en el primer miembro que el binomio $(x + 1)$ se restará del minuendo 2.

$$\underbrace{\underset{\text{minuendo}}{2} \overset{\text{signo negativo}}{-} \underset{\text{sustraendo}}{\underbrace{(x + 1)}}}_{\text{1er. miembro}} = \underset{\text{2o. miembro}}{8}$$

Recuérdese que, en una sustracción de números enteros, al minuendo se le suma el simétrico del sustraendo. El signo – también puede significar “el opuesto de”.

Al eliminar el paréntesis, se procede a cambiar el signo del sustraendo, por lo que la ecuación queda:

$$2 - x - 1 = 8$$

Se reducen los términos semejantes.

$$-x + 1 = 8$$

Otra forma de llegar a esta ecuación equivalente es considerar que en la ecuación inicial

$$2 - (x + 1) = 8$$

el paréntesis $(x + 1)$ está multiplicado por – 1. **Al multiplicar por –1** se obtiene el **opuesto del término** afectado.

$$2 - 1\,(x + 1) = 8$$

Si realizas la multiplicación por – 1:

$$2 - x - 1 = 8$$

Al reducir términos semejantes

$$-x + 1 = 8$$

Para resolver la ecuación se multiplican ambos miembros de la igualdad por (–1) esto con el fin de que, en la ecuación la incógnita se represente con signo positivo.

$$(-1)\,(-x+1) = (-1)\,(8)$$

$$x - 1 = -8$$

La cual tiene la forma $ax + b = c$, y cuyo proceso de solución ya se conoce.

Con un compañero(a) analiza las siguientes ecuaciones y elimina los paréntesis; escribe la ecuación simplificada (equivalente), y después resuelve las ecuaciones en tu cuaderno.

a) $5\,(x + 2) = 20$

b) $9 + (x - 4) = 15$

c) $5 - (x + 2) = -3$

2. ¿Qué finalidad tiene eliminar paréntesis de una ecuación?

3. Piensa y escribe tres ecuaciones que tengan paréntesis y, posteriormente, elimina dichos paréntesis.

Realiza el proceso de eliminación de paréntesis de cada una de las siguientes ecuaciones y escribe el resultado en tu cuaderno.

1. $9 - (3x - 2) = 2$
2. $8 + (4x - 2) = 14$
3. $7 - (2x + 1) = x$

Compara tus resultados con la clave; corrige tus errores.

CLAVE

1. $-3x = -9$; 2. $4x = 8$; 3. $-3x = -6$

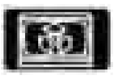
88 REDUCIR PARA SOLUCIONAR

(81)

Ecuaciones con paréntesis

Resolución de ecuaciones con paréntesis

En la sesión anterior aprendiste a eliminar paréntesis y a simplificar una ecuación. En esta sesión resolverás las ecuaciones con paréntesis, las cuales te servirán de gran apoyo en tus estudios del álgebra.



Observa en el video cómo se eliminan los paréntesis de la ecuación original y cómo se procede para obtener la solución de una ecuación.

Intégrate a un equipo de trabajo y realiza una lectura.

ECUACIONES CON PARÉNTESIS

Para resolver un problema es necesario traducir éste al lenguaje algebraico. Lo que la traducción proporciona es una ecuación. Al resolver ésta se conoce la solución del problema; por lo tanto es muy importante saber resolver ecuaciones.

Muchas veces, al plantear una ecuación que representa lo expresado en un problema es necesario usar paréntesis para indicar algunas operaciones. Naturalmente, será indispensable saber cómo se realizan las operaciones indicadas con paréntesis. Para concretar estas ideas, considérese el siguiente problema.

La suma de dos números naturales consecutivos es 27. ¿Cuáles son los números?

Para representar el enunciado del problema por medio del lenguaje algebraico, debe tenerse claro lo que son los números naturales consecutivos. Un número natural y el siguiente son consecutivos. Si se piensa en el uno, es muy fácil darse cuenta que el siguiente es dos; que el siguiente de dos es tres, etc. Pero para usar el lenguaje simbólico correctamente, lo que importa es tomar en cuenta que el siguiente de 1 se obtiene sumándole 1, o sea, es 1 + 1, y el de 2 es 2 + 1 y así sucesivamente.

Por tanto, se dice que el siguiente de un número natural cualquiera es ese mismo número natural + 1. Si se representa cualquier número natural por medio de una letra, por ejemplo x, el siguiente de x es $x + 1$. Entonces, x y $x + 1$ son dos números naturales consecutivos.

Luego:

$x + (x + 1) = 27$, expresa en lenguaje simbólico lo que está afirmándose en el enunciado del problema.

El primer paso para resolver la ecuación es suprimir el paréntesis. Como ya se sabe, $+(x+1) = x+1$, de manera que se puede escribir:

$$x + x + 1 = 27$$

Luego, sumando –1 a los dos miembros, se elimina el término independiente del primer miembro.

$$x + x + 1 - 1 = 27 - 1$$

Se reducen los términos semejantes de ambos miembros, y se obtiene:

$$2x = 26$$

Para despejar la incógnita se dividen ambos miembros de la ecuación entre 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{26}{2}$$

De donde se obtiene:

$$x = 13$$

La ecuación se comprueba sustituyendo la incógnita por su valor y realizando la operación indicada.

$$\begin{aligned} x + (x + 1) &= 27 \\ 13 + (13 + 1) &= 27 \\ 13 + 13 + 1 &= 27 \\ 27 &= 27 \end{aligned}$$

Con la obtención de la igualdad queda comprobado que 13 es la solución. Como el siguiente de 13 es 13 + 1, los dos números consecutivos son 13 y 14. Como 13 + 14 = 27, entonces queda comprobada también la solución del problema.

Ahora puedes retar tu comprensión:

Si la suma de tres números consecutivos es 24, ¿cuáles son estos números?

Completa las ecuaciones siguientes, en tu cuaderno, llenando los espacios en blanco, trabaja con un compañero(a).

1. $4 - 2\,(x + 1) = 8$

$4 \square - 2 = 8$

$4 \square - 2x - 2 \square = 8 - 4 + 2$

$-2x = 6$

$\dfrac{-2x}{\square} = \dfrac{6}{2}$

$x = \square$

2. $2\,(x + 1) + 3\,(x + 2) = 24$

$2x + 2 + \square + 6 = 24$

$2x + 2 - 2 + 3x + 6 - 6 = 24 \square - 6$

$2x + 3x = 16$

$\square = 16$

$\dfrac{5}{5} \times \dfrac{16}{\square}$

$x = \square$

Cuando termines consulta a tu maestro; si hay errores, corrígelos.

Con tu compañero(a), continúa trabajando y resuelve las siguientes ecuaciones en tu cuaderno.

1) $(x + 5) + x = 11$ 2) $5x + 10 = 7x - 5$

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as); si hay errores, corrígelos.

En tu cuaderno, resuelve y comprueba, en forma individual, las siguientes ecuaciones.

1) $3x + 20 = 2x + 28$ 2) $2\left(\dfrac{3x}{2} + 1\right) = 2\,(x + 3)$

Consulta el resultado con la clave; si tuviste errores, corrígelos.

CLAVE

1. Solución: $x = 8$; 2. Solución: $x = 4$.

89 SOLUCIONES ESCONDIDAS

(82)

Problemas de ecuaciones con paréntesis
Resolución de problemas

Las ecuaciones con paréntesis que estudiaste en la sesión anterior tienen una aplicación práctica en problemas cotidianos. Esto lo vas a comprobar al realizar las siguientes actividades.

Observa atentamente el video. Comenta, con tus compañeros(as) de grupo, si puedes aplicar lo que observaste en tu vida cotidiana.

Con un compañero(a) lee y analiza:

PROBLEMAS DE ECUACIONES CON PARÉNTESIS

Existen problemas cuya resolución implica el uso de ecuaciones con paréntesis. Estos presentan como base una incógnita para indicar con ella las relaciones que guarda con los demás datos.

En la resolución de problemas usando ecuaciones es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Leer el problema hasta comprender cuáles son los datos y los números desconocidos o incógnitas.
- Escribir los números desconocidos utilizando una sola letra.
- Formar la ecuación con base en los datos conocidos y desconocidos que son equivalentes.
- Resolver y comprobar la ecuación.
- Escribir la solución del problema para encontrar los datos desconocidos.

Véase la resolución del siguiente problema:

Entre Javier y Alex tienen \$10 000. Si Javier gasta \$4 000, el doble de lo que le queda equivale al triple de lo que tiene Alex. ¿Cuánto tiene cada uno?

Al leer el problema se observa que las incógnitas son las cantidades que tienen Javier y Alex; uno de los datos es que la suma de las dos es \$10 000. Se puede elegir como incógnita principal la cantidad que tiene Javier pues con base en ella se obtiene la de Alex. Entonces los datos del problema se representan de la siguiente manera:

Datos

$ que tiene Javier + $ que tiene Alex = $10 000

$ que tiene Javier = x

$ que tiene Alex x = 10 000 – x

Para formar la ecuación se toma en cuenta que a lo que tiene Javier se le debe restar $4 000 y duplicar esta cantidad. Además, lo anterior es igual al triple de lo que tiene Alex. Entonces la ecuación queda:

Ecuación

$$2\,(x - 4\,000) = 3\,(10\,000 - x)$$

Después se resuelve y comprueba la ecuación como se vio antes.

Invita a un compañero(a) para trabajar juntos:

1. Traduce en una ecuación el siguiente enunciado y explica cómo lo haces:

   El triple de un número más cinco equivale a este número menos dos.

2. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas. Explica los pasos que sigues.

   a) La suma de tres números es 130. El segundo es 4 unidades mayor que el menor y el tercero es 6 veces mayor que el menor. ¿Cuáles son los números?

   b) Se tienen dos números relacionados de tal forma que el segundo es 24 unidades mayor que el primero; la suma de ambos números es igual a 134. Encuentra los números.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as). Si tienes dudas pregúntale al profesor(a).

Resuelve individualmente el problema.

La base de un rectángulo mide $\frac{3}{4}$ de la longitud de su altura. Si la base aumenta 3 cm y la altura disminuye 3 cm, el área quedaría igual. ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura?

1. ¿Qué datos no conoces?

2. ¿Cómo representas la altura? ¿Cómo representas la base?

3. ¿Cómo se obtiene el área del rectángulo?

4. Anota la ecuación que corresponde, considerando que la base y la altura varían y que el área queda igual.

5. Resuelve y comprueba la ecuación.

6. Anota la solución del problema.

Coteja tus respuestas con la clave. Si tienes dudas comenta con el profesor(a).

CLAVE

1. La base y la altura; 2. Base = $\frac{3}{4}x$; Altura = x; 3. Se multiplica la base por la altura; 4. $\left(\frac{3}{4}x+3\right)(x-)=\left(\frac{3}{4}\right)(x)$; 5. $x = 12$; 6. Base = 9 cm; altura = 12 cm

90 COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

(83)

Repaso parcial de lo desarrollado en el núcleo
Integración de los conocimientos adquiridos

Durante los últimos días has estudiado las ecuaciones lineales. En esta sesión realizarás un repaso de las ecuaciones lineales, con el fin de que estés preparado para la evaluación del núcleo.

Forma un equipo de trabajo y observa el video. Comenta con tus compañeros(as) de equipo cuáles fueron los conocimientos que se repasaron en esta sesión.

Resuelve con tus compañeros(as) de equipo los ejercicios que se presentan a continuación:

1. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

   a) El doble de un número más tres equivale a este número más cinco.

   b) El doble del tercio de un número menos ocho equivale al doble de este número más cuatro.

2. Anota en lenguaje común las siguientes expresiones:

a) $3y + 6 = 5y - 4$

b) $-2m - 3 = -4m + 6$

3. Simplifica las expresiones que siguen:

a) $2(m + 4) - 3(m - 2) =$

b) $\frac{1}{4}(2x + 4) + \frac{3}{4}(12x - 8) =$

4. En tu cuaderno, resuelve y comprueba la siguiente ecuación:

a) $(x + 2)(x + 2) = (x + 3)(x + 4)$

5. Relaciona ambas columnas escribiendo el número que corresponda en cada paréntesis. Hazlo en tu cuaderno.

( ) Paso para resolver problemas.	1. Aplicar las propiedades de la igualdad.
( ) Simplificación de $-3\left(\frac{x}{3} + 8\right)$	2. $\frac{a-b}{2}$
( ) Solución de la ecuación $4x - 5 = -2x + 7$	3. $2m$
( ) Un número par cualquiera.	4. $x = 2$
( ) La semidiferencia de dos números.	5. $-x - 24$
( ) Solución de $2(x + 5) = -3(x + 10)$	6. $x = 8$
	7. $\frac{a+b}{2}$
	8. Definir los datos e incógnitas.

Compara tus resultados con los de otro equipo. Si surgen dudas, coméntalas con tu profesor(a).

Resuelve individualmente el siguiente problema:

Encuentra tres números enteros impares consecutivos cuya suma sea 45.

1. ¿Cómo representas una cantidad cualquiera?

2 ¿Cómo puede asegurarse que una cantidad sea par?

3. Si $2x$ es un número par; ¿cómo escribes el impar siguiente?
4. ¿Y los otros dos impares siguientes?
5. Anota la ecuación que resuelve el problema.
6. Resuelve y comprueba la ecuación en tu cuaderno y anota el resultado.
7. ¿Cuál es la solución del problema?

Coteja tus resultados con la clave siguiente. Si tienes dudas, pregunta a tu profesor(a).

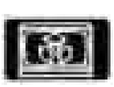
CLAVE

1. y; 2. Multiplicándola por 2; 3. $2x + 1$; 4. $2x + 3$ y $2x + 5$; 5. $(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 45$; 6. $(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 45$; 7. Primer impar $2x + 1 = 2(6) + 1 = 13$; Segundo impar $2x + 3 = 2(6) + 3 = 15$; Tercer impar $2x + 5 = 2(6) + 5 = 17$

91 (84) ¡DEMUESTRA QUE SABES!

Dominio de las ecuaciones
Evaluación personal de los avances logrados

Como ya has visto, el planteamiento de problemas por medio de una ecuación es una herramienta que te auxilia enormemente. En esta sesión te darás cuenta de lo que has aprendido sobre ella.



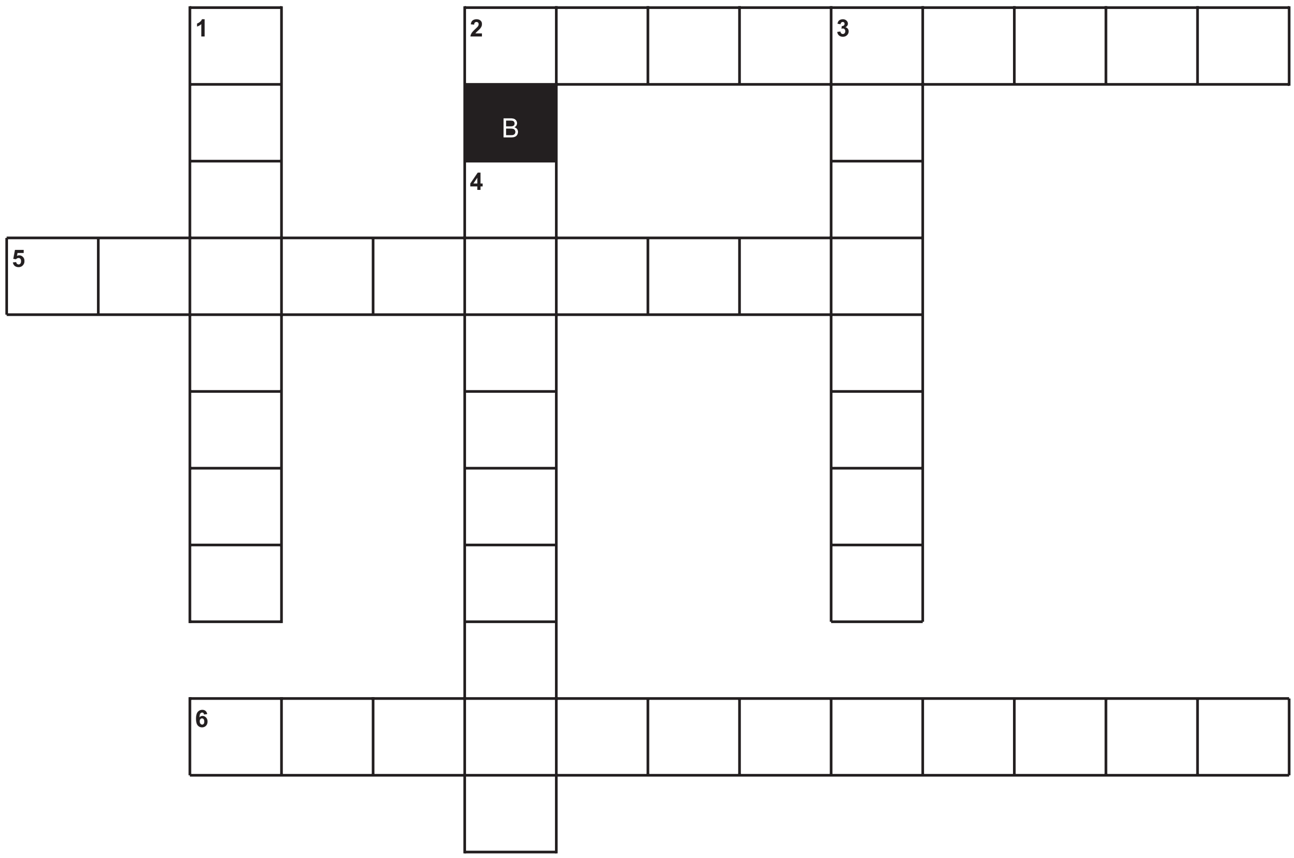
Observa el video y al mismo tiempo trabaja el siguiente ejercicio.

Realiza individualmente los ejercicios que están enseguida.

1. Resuelve el siguiente crucigrama; para ello, atiende las instrucciones del video.
2. ¿En qué orden efectuarías las siguientes acciones al resolver un problema mediante una ecuación?

   Ordena en tu cuaderno.

   a) Comprobar el resultado.



b) Encontrar la ecuación representativa del problema.

c) Leer el problema cuidadosamente.

d) Establecer datos conocidos, encontrar los desconocidos y establecer la relación existente entre ellos.

e) Buscar su solución.

3. Anota las ecuaciones que solucionen los siguientes problemas:

a) Un número multiplicado por cuatro y aumentando en seis unidades es igual al mismo número multiplicado por cinco y aumentado en dos unidades:

b) $95 000 es cinco veces el costo de un libro. ¿Cuál es el costo del libro?

4. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas. Anota el resultado.

a) Juan tiene el triple del dinero que tiene José; si Juan tiene $8 100 ¿cuánto tiene José?

b) Margarita compra dos cuadernos y paga con un billete de $10 000; le dan de cambio $3 400. ¿Cuánto costó cada cuaderno?

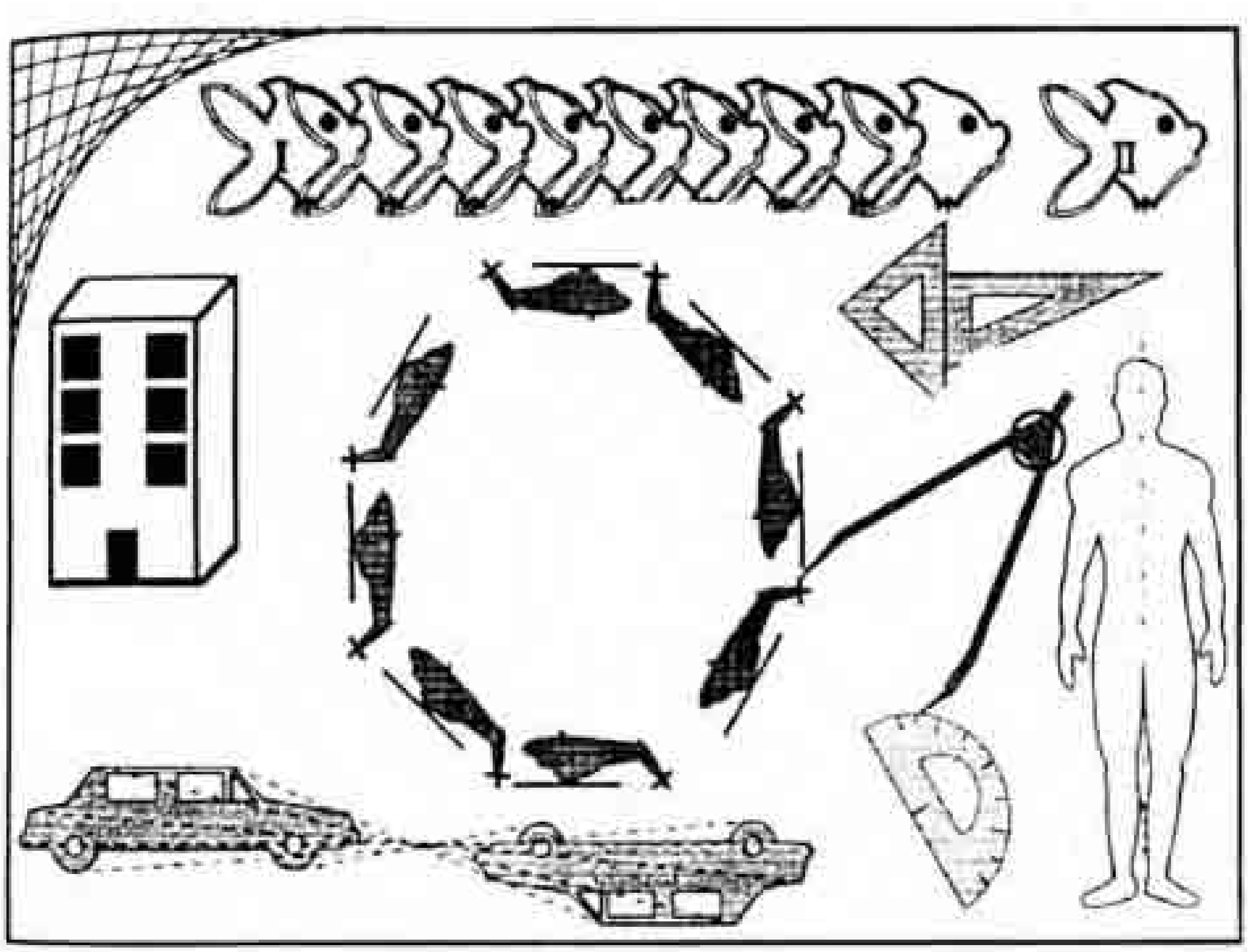
c) La edad de Toño más 45 es igual al triple de su edad más 5. ¿Cuál es la edad de Toño?

d) La suma de tres números es 90. Si el segundo es 5 unidades mayor que el primero y el tercero ocho unidades mayor que el segundo, ¿cuáles son estos tres números?

Revisa los resultados cuidadosamente. Si tuviste errores, repasa tus procedimientos y corrígelos.

Núcleo Básico 6

TRAZOS GEOMÉTRICOS



El estudio de la geometría tiene diferentes aspectos; uno de ellos es la aplicación práctica, punto de partida de los egipcios en la antigüedad. Ellos realizaron en forma empírica mediciones de gran exactitud y lograron obras maravillosas de ingeniería. Otro punto de vista es el de los griegos, que emplearon un sistema deductivo, es decir la geometría práctica y la teórica. Ambos puntos de vista son importantes.

Por lo expuesto anteriormente, en este núcleo se considera la práctica de trazos y construcciones geométricas, así como diversos conceptos relativos a las figuras geométricas, deducciones de expresiones generales y la iniciación gradual en el razonamiento deductivo.

Los trazos que se verán en este núcleo, a pesar de que son básicos, son muy importantes ya que, combinados con otros, tienen una gran aplicación, por ejemplo en la industria de la construcción, la carpintería, la pintura, la escultura, el diseño gráfico o industrial, entre otros.

Mediante los trazos geométricos se puede construir una gran variedad de figuras geométricas aplicando las escalas de ampliación y reducción; asimismo, en dichas figuras también se tienen las relaciones de perpendicularidad y paralelismo, así como las transformaciones que presenta una figura cuando se desplaza en línea recta o en forma circular.

92 DIBUJOS, DIBUJOS, DIBUJOS

(194)

Trazo de figuras geométricas
Motivación para la realización del dibujo

¿Has visto una fotografía, el diseño de alguna herramienta o juguete, alguna radiografía o una representación mayor, menor o de igual medida de algún objeto? O bien, ¿conoces pinturas donde se ha representado el cuerpo humano, objetos del medio circundante o simplemente formas geométricas? Todo ello está hecho con base en la geometría.

Observa el video donde verás por qué la geometría es la base de todo.

Comenta con un compañero(a) en qué fundamentos de la geometría se basa la elaboración de dibujos a escala.

Lee y analiza, con un compañero(a): **Trazo de figuras geométricas**. Anota en tu cuaderno, lo que consideres más importante del texto y de lo expuesto en el video.

TRAZO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Desde que el ser humano apareció en la Tierra empleó objetos que tienen una estrecha relación con las figuras geométricas que se conocen.

Se pueden citar como ejemplos las puntas de lanza, los utensilios que creó para contener el agua o los alimentos y, más adelante, cuando aparecen los metales, las formas de los adornos personales, etcétera.

Posteriormente, con las culturas egipcia y babilónica, la geometría se relaciona con la agricultura. Pero es en la cultura griega donde se convierte en una ciencia abstracta cuyos fundamentos se encuentran en la obra de Euclides llamada *Elementos*.

Más tarde, en el Renacimiento, se origina la geometría proyectiva, que empieza con los estudios en perspectiva de artistas como Durero (pintor alemán) y Leonardo Da Vinci (pintor italiano). Sin embargo, son Descartes y Pascal, quienes se consideraron como fundadores de dicha geometría.

En la actualidad, las formas geométricas y sus principios se usan en los dibujos a escala de construcciones, maquinarias, decorados, etc.

Así aparece el dibujo, primero como una necesidad de representar lo que existe en el medio circundante y, más adelante para representar lo que imaginaba y después reproducía.

Ambas formas dan origen a tres tipos de dibujos; a saber:

a) Dibujo de igual tamaño que el objeto que representa.

b) Dibujo de tamaño menor que el objeto que representa.

c) Dibujo de tamaño mayor que el objeto que representa.

Además se establece una proporción entre las dimensiones del objeto original y su representación (cuando ésta no es de igual tamaño que el original), y dicha proporción da origen a lo que se conoce como escala.

Así, los dibujos a escala son representaciones proporcionales del objeto original, y la relación entre sus dimensiones se llama razón de proporcionalidad.

Se pueden mencionar como ejemplos de dibujos a escala los realizados por los arquitectos para la construcción de casas, edificios, etc., para la construcción de maquetas que muestran desarrollos urbanos, turísticos, industriales; los hechos por los biólogos al observar en el microscopio tejidos humanos, células; los realizados por los geógrafos: continentes, países, estados; los llevados a cabo por diseñadores de maniquíes, juguetes, etcétera.

Con un compañero(a), comenta lo anotado en tu cuaderno, y expón tu idea sobre la necesidad del dibujo a escala.

Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas posibilidades hay de reproducir un objeto por medio de un dibujo y cuáles son?

b) ¿Cómo se llama la proporción que se establece entre el dibujo y el objeto original?

c) Menciona algunas cosas donde se aplique este tipo de dibujo.

CLAVE

a) Tres. Escala natural, escala de ampliación, escala de reducción. b) Razón de proporcionalidad. c) Fotografía, maquetas, planos para la construcción, diseño de herramientas, diseño de muebles, esculturas, maniquíes.

93 PEQUEÑO, IGUAL O MAYOR

(105)

Escalas
Clasificación de las escalas

¿Has visto el dibujo de un microorganismo? Recuerdas los mapas de países y continentes? ¿Has observado los planos de una casa, hospital u otra construcción? ¿Son del mismo tamaño que las cosas que representan? ¿Sabes cómo se traza ese tipo de dibujos.

Observa atentamente el video donde encontrarás respuesta a las preguntas anteriores.

Invita a un compañero(a) para leer y analizar el siguiente texto:

ESCALAS

Dibujar lo que observa ha sido una costumbre del ser humano desde que apareció en el planeta. Con el paso del tiempo, también se vio en la necesidad de dibujar aquello que él mismo podía crear.

En la actualidad, se requiere del dibujo para muchas actividades que el ser humano realiza. Así se tiene que el dibujo industrial, el arquitectónico, el de mapas y varios más son parte del trabajo cotidiano; pero, ¿qué sucede con lo dibujos y el tamaño original de lo que representan?

Puesto que no siempre se puede representar un objeto en su tamaño original, algunas veces es necesario dibujar agrandado y otras reducido; al resultado de este procedimiento se le conoce con el nombre de dibujo a escala.

Para realizar un dibujo a escala se establece una razón entre las medidas del dibujo y las del objeto real por lo que se tienen tres tipos de escalas.

Escala natural. Cuando el dibujo tiene las mismas dimensiones que el objeto que representa.

Escala de ampliación. Cuando el dibujo es mayor que el objeto que representa.

Escala de reducción. Cuando el dibujo es menor que el objeto que representa.

Veamos con un ejemplo cómo se establece la escala:

El dibujo representa un tablero que en la realidad mide: 300 cm de largo (3 m) y 150 cm de alto (1.5 m).

El dibujo mide 6 cm de largo y 3 cm de ancho. Es decir 6 cm en el dibujo representan 300 cm de la realidad, o bien 3 cm del dibujo representan 150 cm de la realidad.

Nos preguntamos: 1 cm del dibujo, ¿cuántos cm de la realidad representa?

6 cm representan 300 cm
1 cm representa 50 cm

A esta razón simplificada la llamamos **escala del dibujo**. Es realmente una razón de proporcionalidad, la cual se escribe:

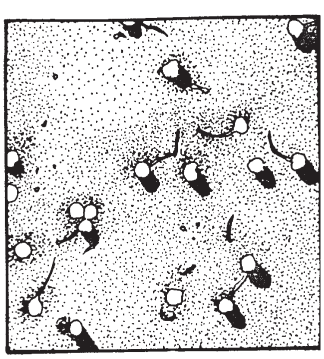
$$1:50 \quad \text{o} \quad \frac{1}{50}$$

y se lee: uno a cincuenta.

Es decir una unidad de medida usada en el dibujo representa 50 de esa misma unidad de medida de la realidad.

Dicho de otra forma, cada centímetro lineal del dibujo presenta 50 centímetros lineales del tablero. A esta escala se le conoce como **escala de reducción**.

Si se observara el tablero se podría constatar que éste y su dibujo tienen la misma forma, pero sus dimensiones son de diferente medida, por lo que se les conoce como **figuras semejantes.**



El dibujo representa bacteriófagos (virus que destruyen ciertas bacterias). La escala es 55 000: 1 ó $\frac{55\,000}{1}$

Dicho de otra forma, el dibujo de cada virus es una ampliación del real en 55 000 unidades. A este tipo de escala se le conoce como escala de ampliación.

Por otra parte, se tiene que existen razones como 2:5 (dos es a cinco), 8:12 (ocho es a doce), etc., los cuales se utilizan cuando así se requiere y, si se desea, se pueden simplificar de la siguiente manera:

Se dividen ambos elementos de la razón entre el más pequeño de ellos.

$2 \div 2 = 1 \qquad 5 \div 2 = 2.5$

$8 \div 8 = 1 \qquad 12 \div 8 = 1.5$

Se establece la nueva razón 1:2.5 para la primera y 1:1.5, para la segunda, razones con las cuales es más fácil trabajar.

De todo lo anterior, se puede afirmar que escala es la razón de proporcionalidad que hay entre dos figuras semejantes y se puede observar claramente en fotografías, juguetes, esculturas, maquetas, etc.

Con un compañero(a) trabaja en tu cuaderno:

a) Busca una representación en la cual se use una escala de ampliación. Explica cómo se establece y en qué consiste la escala.

b) Usa una fotografía tuya o de alguien de la familia. Encuentra cuál sería la escala de la foto. Podrías usar la estatura real y la de la fotografía. ¿Es esta una escala de ampliación o de reducción?

c) ¿En qué caso tendríamos una representación a escala natural? Explica.

Compara tu trabajo con el de otros compañeros(as).

Individualmente, realiza el siguiente ejercicio.

1. En un mapa la escala es 1: 500 000 y dos ciudades en él están a una distancia de 8 cm. ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

2. Pedro hace un plano de su salón de clase, que mide 7 m de largo y 4.5 de ancho. El rectángulo que lo representa mide 14 cm de largo y 9 cm de ancho. ¿Cuál escala anotará Pedro en su dibujo?

CLAVE

1. 40 km, 2. 1:50

94 UNO A UNO

(106) Escala natural
Aplicación de la escala natural

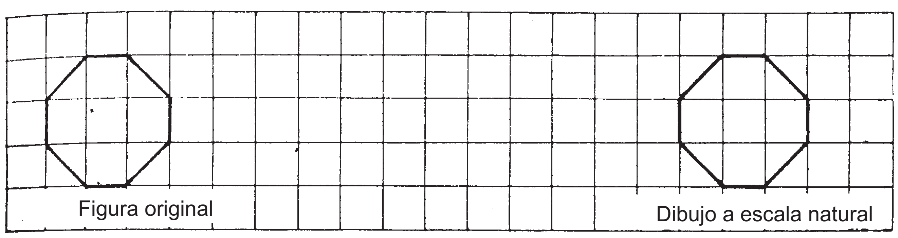
“La escala de la sabiduría tiene sus peldaños hechos de números”.

¿Hasta qué número llegará esta escala? ¿Será una escala de uno a uno?

Observa atentamente el video y establece la escala de tu aprendizaje.

Realiza la lectura:

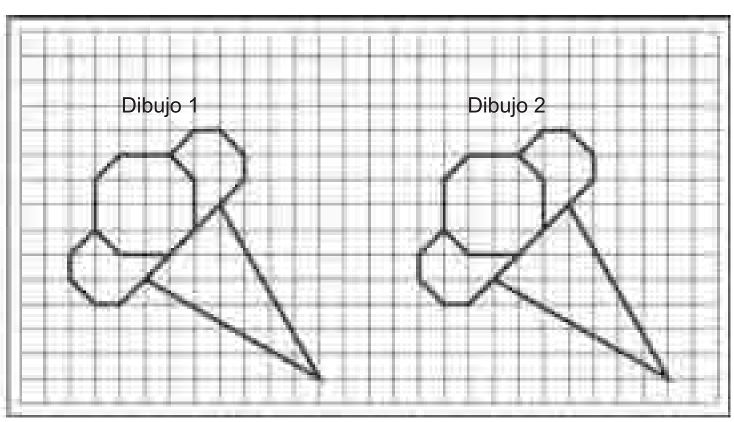
ESCALA NATURAL



El dibujo muestra una figura original y su representación a escala natural, es decir que la dimensión de cada uno de sus lados tiene la misma medida que la figura original.

La razón de proporcionalidad es uno a uno 1:1. Las figuras además de tener la misma forma son congruentes.

Escala natural es aquella en que el dibujo tiene el mismo tamaño del objeto original.



Nuevamente, el segundo dibujo es una reproducción del primero con las mismas dimensiones de éste, o sea, la escala a la que está hecho es uno a uno (1 :1) y, por tanto, los dos dibujos son congruentes.

Figuras congruentes son aquellas que tienen la misma forma e igual tamaño.

De lo anterior puede decirse que un dibujo hecho a escala natural (1:1, 2:2, etc.) es congruente con el original.

Este tipo de escala es poco usual, pero algunos ejemplos son los maniquíes para exhibir ropa, o los utilizados en medicina, de ciertas funciones y enfermedades, las reproducciones en serie de cualquier objeto, etcétera.

Con un compañero(a), contesta las siguientes preguntas.

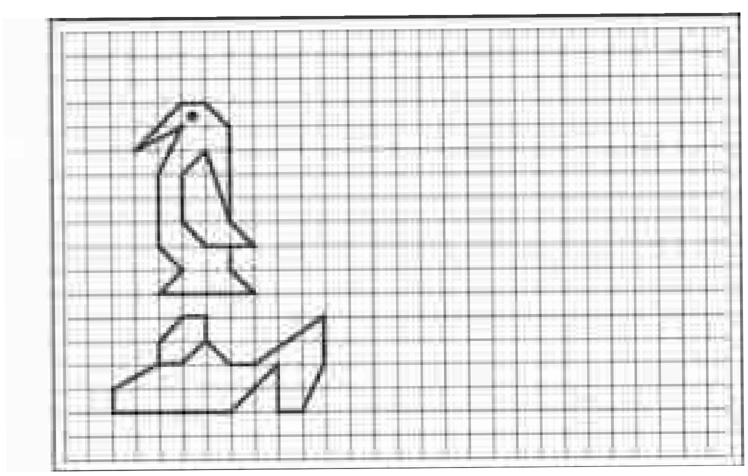
a) ¿Qué es la razón de proporcionalidad?

b) ¿Por qué la escala 1:1 es igual que las escalas 2:2, 3:3, 4:4, etcétera?

c) ¿Cómo se les llama a las escalas anteriores?

Lee tus respuestas al grupo; si es necesario, completa lo escrito en tu cuaderno.

Reproduce, en escala natural, las figuras que se te presentan.



Muestra tus figuras al profesor(a), y corrige si es necesario.

Contesta, individualmente y en forma breve, las siguientes preguntas:

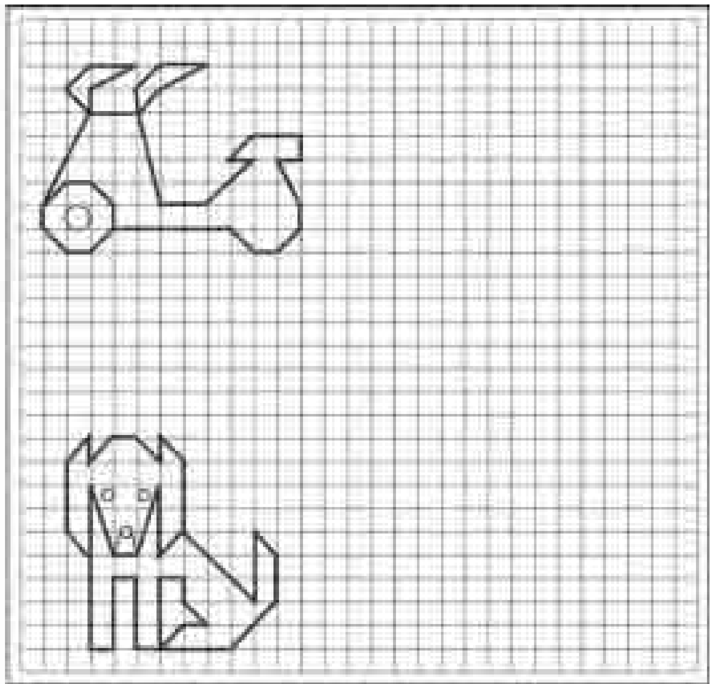
a) ¿Qué entiendes por escala natural?

b) ¿Qué características tienen dos figuras congruentes?

c) ¿Cómo se llama la razón que se establece al hacer una figura a escala?

Compara tus respuestas con la clave; si tienes dudas, consulta al profesor(a).

Traza, a escala natural, los dibujos que a continuación aparecen.



CLAVE

a) Es aquella donde el dibujo tiene las mismas dimensiones que el objeto dibujado.; b) Tienen la misma forma y las mismas dimensiones.; c) Razón de proporcionalidad.

95 UNO ES A VARIOS

(107)

Escala de ampliación

Aplicación de la escala de ampliación

¿Has observado objetos a través de una lupa? La lupa ayuda a que cada detalle del objeto se vea con mayor precisión pues amplía su tamaño a la vista.

Lee, junto con un compañero(a) y analiza:

ESCALA DE AMPLIACIÓN

El hacer un dibujo al tamaño real de las cosas no siempre facilita su observación o estudio y es por eso que se hace de él, para una mejor apreciación, un dibujo de mayor o menor tamaño, guardando la proporción de sus lados, esto es: la escala.

En biología, por ejemplo, se usan modelos gráficos de la célula en una escala mayor al tamaño original, pues de esa forma su estudio se hace más comprensible.

Cuando se realiza la amplificación de una fotografía, lo que se desea es una foto mayor que la primera, en la cual se puedan apreciar los detalles que en la de menor tamaño no se perciben.

Para la amplificación de un dibujo debe indicarse en primer lugar a qué escala se desea. Si se señala, por ejemplo:

Escala 2:1 (se lee “dos es a uno”)

En esta razón de proporcionalidad se observa con facilidad que cada segmento del dibujo a escala será el doble del primero. Esta escala también se puede indicar como $\frac{2}{1}$.

Obsérvese para ello la figura siguiente:

Figura original

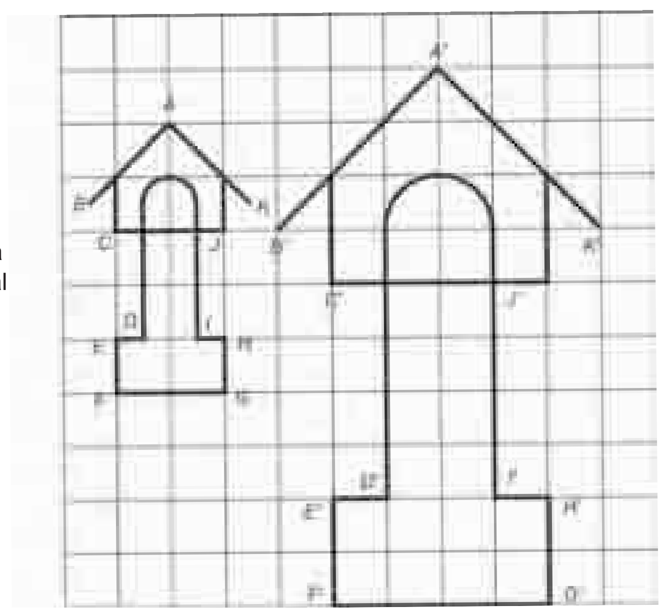


Figura hecha a escala 2:1

En la escala 2:1 se establece entre los segmentos una relación tal que cada segmento del segundo dibujo es el doble del primero. Obsérvese por ejemplo:

El segmento *FG* es de dos unidades, el segmento *F’G’* es de cuatro unidades, en el dibujo hecho a escala.

El segmento *AB* es una diagonal que mide un cuadro y medio por lo que el segmento *A’B’* mide tres cuadros y será también diagonal.

Los demás segmentos son semejantes a los anteriores, por lo que pueden establecerse las mismas relaciones.

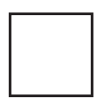
La figura anterior fue hecha a escala 2:1 (dos es a uno) por lo que, como ya se mencionó, los segmentos de la figura a escala son el doble del tamaño de los primeros.

Escala de amplificación es la reproducción de un objeto o figura en tamaño mayor del que tiene el objeto o figura original; dicha reproducción puede ser otro objeto o su dibujo.

Es muy importante analizar: ¿qué ocurre con el área de una figura ampliada?

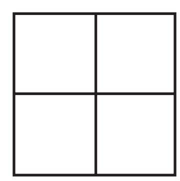
El caso más sencillo de analizar es reproducir el cuadrado de lado 1 unidad en escala 2:1

Figura original



Lado: 1 unidad
Área: $1 \times 1 = 1$ unidad cuadrada

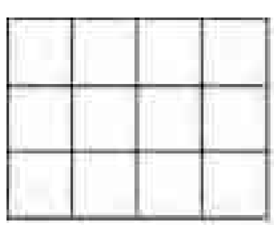
Figura ampliada; escala 2:1

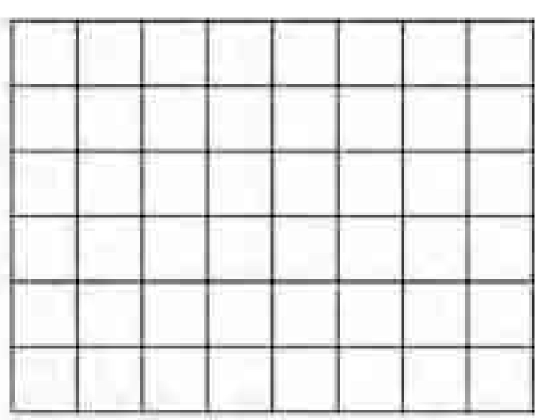


Lado: 2 unidades
Área: $2 \times 2 = 4$ unidades cuadradas

Por lo cual el área de una figura con escala 2:1 se cuadruplicará en relación con la figura original.

Observa el rectángulo de área 12 u^2, y su ampliación en escala 2:1.





ESCALA 2:1

El rectángulo ampliado tiene un área de 48 u^2.

$$48\ u^2 = 4 \times 12\ u^2$$

El rectángulo en escala 2 : 1, tiene sus lados del doble de longitud y su área es cuatro veces mayor que el original.

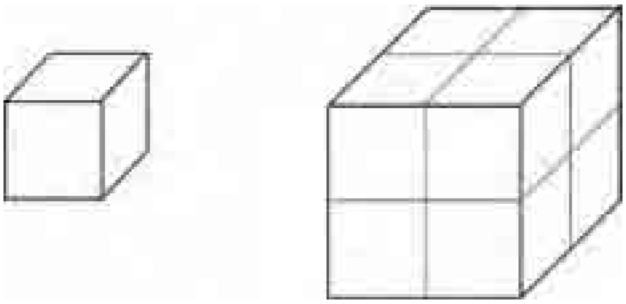
Si la escala es 3 : 1 (tres es a uno), cada segmento del segundo dibujo será el triple del primero, como en este ejemplo.

El primer dibujo tiene 3 unidades cuadradas del área, el segundo 27.

El área se ha hecho 9 veces mayor.

También se pueden hacer cuerpos a escala.

El dibujo muestra un cubo de lado 1 u, y otro a escala 2 :1

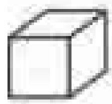


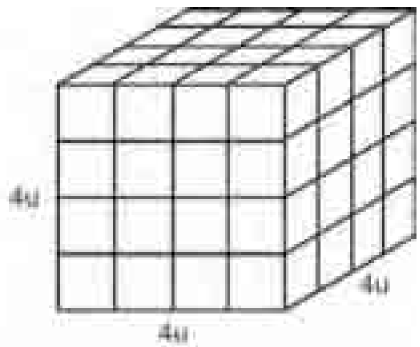
En el cubo a escala 2 :1, el lado se ha duplicado. El área de cada cara se ha cuadruplicado y, ¿qué ha ocurrido con el volumen?

$$V = 2 \times 2 \times 2 = 8\ u^3$$

Por lo tanto el volumen de un cuerpo cuya escala es 2:1; será ocho veces mayor que el primero.

La siguiente situación muestra un cubo ampliado a escala 4 : 1





En el cuerpo ampliado a escala 4 : 1, el lado se ha hecho 4 veces mayor; el área de cada cara se ha hecho $4^2 = 16$ veces mayor; el volumen se ha hecho $4^3 = 64$ veces mayor.

Los ejemplos considerados nos permiten sacar las siguientes conclusiones:

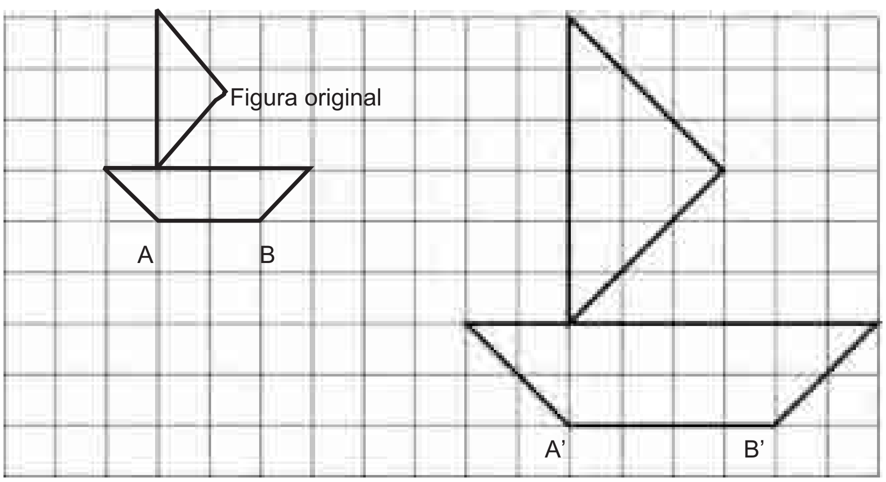
La relación entre los segmentos de una figura y su reproducción a escala de ampliación es igual a la razón proporcional empleada.

La relación entre el área de una figura y su reproducción a escala de ampliación es igual al cuadrado de la razón proporcional empleada.

La relación entre el volumen de un cuerpo y su reproducción a escala de ampliación es igual al cubo de la razón proporcional empleada.

¿Qué ocurre cuando se tiene una figura y su ampliación para conocer la escala?

Para indicar la proporción que guarda una figura con respecto a otra, basta localizar dos lados semejantes.



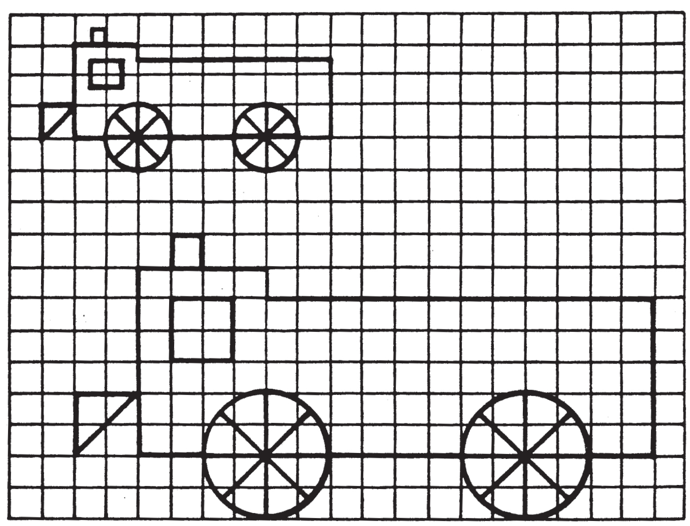
El segmento *A'B*' corresponde a $\overline{AB}$ en la figura original. Si se desea conocer la escala a la que fue hecha la segunda figura en relación con la primera, se anota como primer número la medida de $\overline{A'B'}$ y como segundo la de $\overline{AB}$, de donde resulta la escala:

4:2, y simplificando, 2:1

Es importante destacar que al reproducir una figura o elaborar su dibujo a escala de ampliación, los ángulos conservan su medida.

Ve el programa televisivo, donde observarás cómo se puede amplificar un dibujo. Comenta junto con tu grupo, qué nuevos aportes y aclaraciones has hecho al ver el programa.

Forma un equipo con un compañero(a) y, guiándote por el dibujo, resuelve las siguientes preguntas. Toma un cuadrado como unidad de medida. Trabaja en tu cuaderno.



1. El ancho del tren más grande, ¿cuántas unidades tiene? El ancho del pequeño ¿cuántas unidades tiene?

2. La chimenea del tren de abajo tiene ___________ unidades de altura y el de arriba _______________________________.

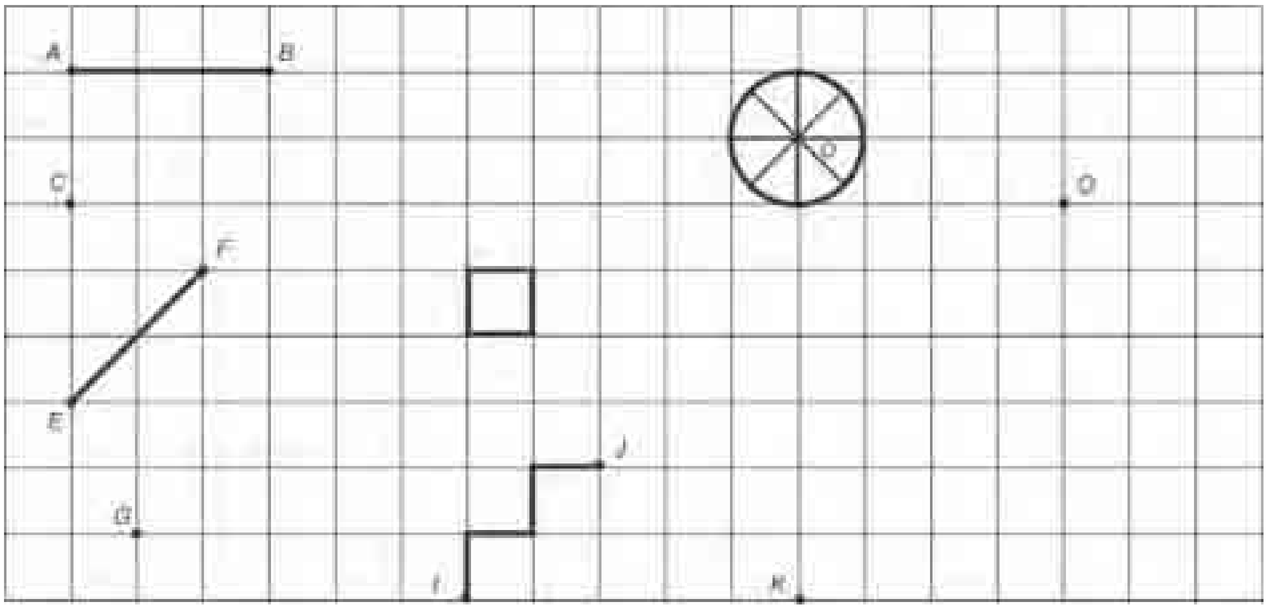
3. Por lo cual se puede afirmar que la escala a la que fue hecho el tren más grande en relación con el pequeño es de ___________ pues la dimensión de sus segmentos es _______________________________ veces la del tren pequeño.

4. En cambio, si se mide el área de la ventana en el tren de abajo sabremos que es de ______________________ u^2, mientras que el de arriba es de ____________ u^2.

Con eso se observa que en un dibujo hecho a una escala 2:1 el área que ocupa es ______________veces mayor que el original del cual fue hecho.

Lee en voz alta tus respuestas. Comenta las diferencias y corrige si es necesario.

Lee cada uno de los siguientes enunciados y haz en la cuadrícula de tu cuaderno lo que se señala.



1. A partir del punto *C* dibuja horizontalmente el segmento $\overline{AB}$ en escala 2:1 y forma el segmento $\overline{CD}$.

2. A partir del punto *G*, reproduce el segmento $\overline{EF}$ en escala 3:1 y forma el segmento $\overline{GH}$ paralelo a $\overline{EF}$.

3. Dibuja a escala 2:1 el círculo *O* con centro en *O*'.

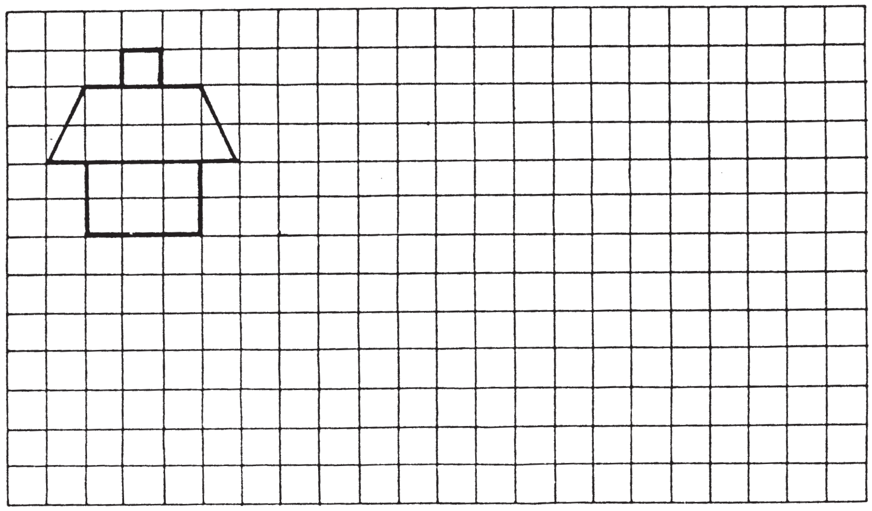
4. Dibuja la escalara *IJ* a escala 3:1, a partir del punto *K*, y forma la escalera *KL*.

5. Reproduce el cuadro en escala 3 : 1.

Compara tus trazos con los de tus compañeros(as), y observa si hay diferencias. En caso necesario, corrige.

De manera individual, reproduce en tu cuaderno, en escala 2:1 el siguiente dibujo, y a continuación responde:

1. ¿Cuántas unidades tiene la base del dibujo que obtuviste de la casa? ¿Cuántas unidades tiene la original?



2. La altura de la casa en tu reproducción, ¿cuántas unidades tiene? y la de la original, ¿cuántas?

3. Cuántas veces más largos son los segmentos de la reproducción que los del dibujo original? Entonces, ¿cuál es la escala de la reproducción?

4. El área de la chimenea, en la reproducción es:
   El área de la chimenea en la figura original es:

5. Qué relación hay entonces entre el área de la reproducción y el área de la figura original?

6. Si la escala 2 : 1 se aplica a un cuerpo, ¿cuántas veces aumentará el volumen de la reproducción?

Observa la clave adjunta y compárala con tus respuestas. Si tienes errores, analízalos y corrige.

CLAVE

1) 6, 3; 2) 8, 4; 3) 2:1 o $\frac{1}{2}$; 4) 4, 1; 5) cuatro veces mayor, 6) ocho.

96 VARIOS SON A UNO

Escala de reducción

(108) Aplicación de la escala de reducción

Cuando observas un pájaro que vuela en el cielo, su tamaño se muestra varias veces menor que el que tiene realmente. Esto es algo parecido a lo que ocurre con la escala de reducción.

Observa con atención el video en donde conocerás las aplicaciones que tienen las escalas de reducción. Comenta en tu grupo cómo se hace una escala de reducción.

Lee en grupo, el texto **Escala de reducción**, y discute en tu grupo cómo resulta un dibujo hecho a esta escala y cuál es su diferencia cuando se realiza con una escala de ampliación.

ESCALA DE REDUCCIÓN

El tamaño de los objetos que están cerca no se percibe igual que cuando se van alejando, pues la distancia en aumento hace que se vean cada vez más pequeños.

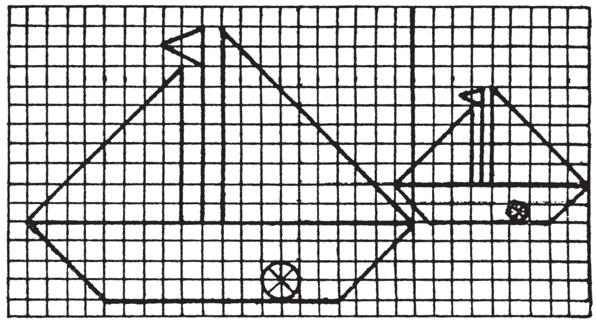
La fotografía de una persona en una cédula o documento es como un dibujo reducido que conserva la proporción en sus formas; esto es, la fotografía es como el dibujo hecho a escala de reducción de una persona.

Escala de reducción es la reproducción o dibujo de una figura u objeto en tamaño menor del que tiene la figura u objeto original.

Para hacer una figura a escala de reducción debe observarse, como en el caso de la ampliación, la escala a la que se desea reproducir y observar la razón proporcional de dicha escala: Si la escala es 1:2 (uno es a dos) o $\frac{1}{2}$, esto indica que la longitud de los segmentos en la reproducción serán a la mitad de la figura original.

Una escala de reducción reproduce un objeto real o un dibujo de dicho objeto.

Véanse los siguientes dibujos:



Tomando al barco grande como figura original, la escala a la que está hecho el otro es 1:2. Obsérvese lo siguiente:

a) La base del barco original mide 12 unidades y en la reproducción 6, puesto que la escala señala $\frac{1}{2}$ del original.

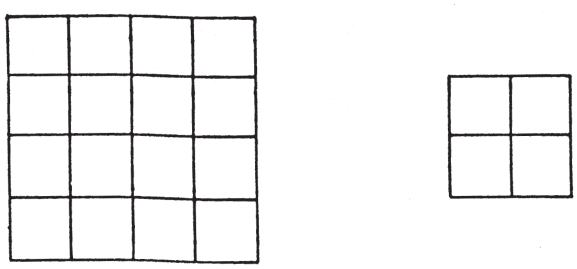
b) La vela menor tiene 8 unidades de alto en el original y 4 en la reproducción.

c) El asta tiene 10 unidades en el original y 5 en la reproducción.

d) El largo del barco original es de 20 unidades y en la reproducción de 10.

En la reproducción 1 : 2, para conocer cada longitud se toma la mitad de la figura original.

Con el área ocurre lo contrario que en la escala de ampliación.



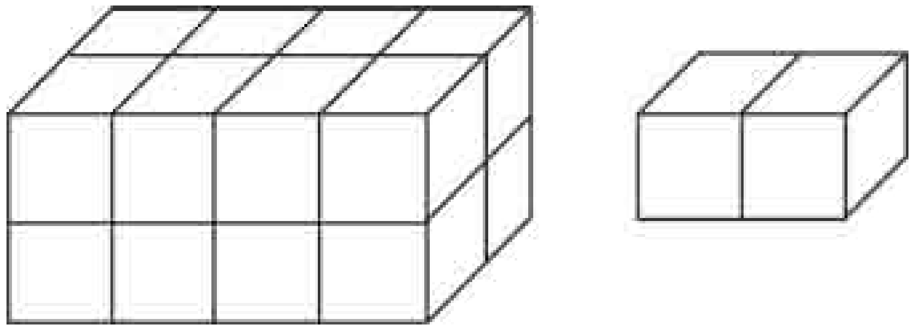
Por cada unidad en la base de la figura original se toma la mitad en la reproducción; por cada unidad de la altura en la original se toma la mitad en la reproducción, o sea:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}\right]^2$$
$$= \frac{1}{4}$$

Por lo que se puede deducir que el área de una figura a escala 1:2 es igual a una cuarta parte de la original.

Si el área de una figura es de 24 cm^2, su dibujo a escala 1:2 tendrá un área de 6 cm^2.

También en el volumen ocurre lo contrario que en la escala de ampliación.



En los cuerpos anteriores el primero es el objeto original y el segundo su reproducción a escala 1:2, se puede observar que el primero tiene un volumen de 16 u^3 y el segundo 2 u^3; o sea que el volumen del segundo es la octava parte del primero. Esto se puede obtener fácilmente elevando al cubo la razón proporcional a la que fue reproducido.

$$\left[\frac{1}{2}\right]^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{8}$$

Con estos ejemplos, se puede concluir lo siguiente:

La relación entre los segmentos de una figura y su reproducción a escala de reducción es igual a la razón proporcional empleada.

Por ejemplo:

Si la escala a la que se construye una figura es 1:3 ó $\frac{1}{3}$, la longitud de sus segmentos variará según la razón de proporcionalidad; esto es, la reproducción tendrá segmentos cuya longitud sea la tercera parte del original.

La relación entre el área de una figura y su reproducción a escala de reducción es igual al cuadrado de la razón proporcional utilizada.

Así, si la escala a la que se construye una figura es 1:4 o $\frac{1}{4}$ su área variará en relación con la original.

$$\left[\frac{1}{4}\right]^2 = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{16}$$

Por lo tanto, la reproducción tendrá un área de $\frac{1}{16}$ de acuerdo con la figura original.

La relación entre el volumen de un cuerpo y su reproducción a escala de reducción es igual al cubo de la razón proporcional empleada.

Ejemplo:

Si la escala a la que se construye un cuerpo es de 1:5 ó $\frac{1}{5}$, su volumen variará en relación con el original.

$$\left[\frac{1}{5}\right]^3 = \frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{125}$$

Por lo tanto, la reproducción tendrá un volumen de $\frac{1}{125}$ en relación con la figura original.

Las escalas de reducción son empleadas en campos como el dibujo, la arquitectura, el diseño y muchos otros. Actualmente existen diseños a escala en los que se aprecian bellas piezas hechas en miniatura.

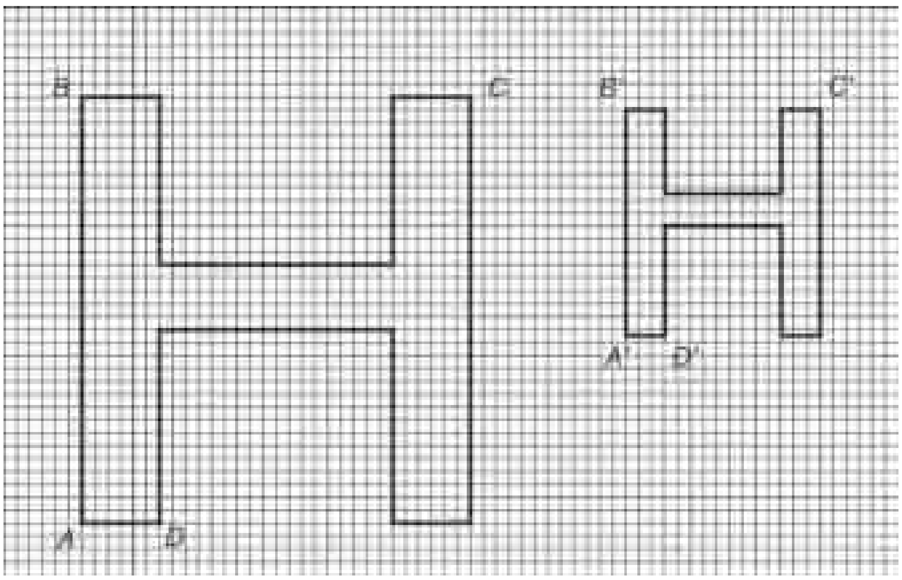
Las razones aquí empleadas no son las únicas ya que, de acuerdo con las necesidades, se puede utilizar la razón que se considere más adecuada para realizar un dibujo o la reproducción de un objeto: dichas razones pueden ser:

1:5	2:3
1:10	2:15
1:26	7:25
1:50	etcétera
1:100	

Un ejemplo claro de la utilización de las escalas de reducción son los mapas de ciudades, estados, países, etc., en donde inclusive algunos indican la razón que se utiliza para realizar dicho dibujo.

Observa las siguientes figuras y contesta en tu cuaderno las preguntas junto con un compañeros(as).

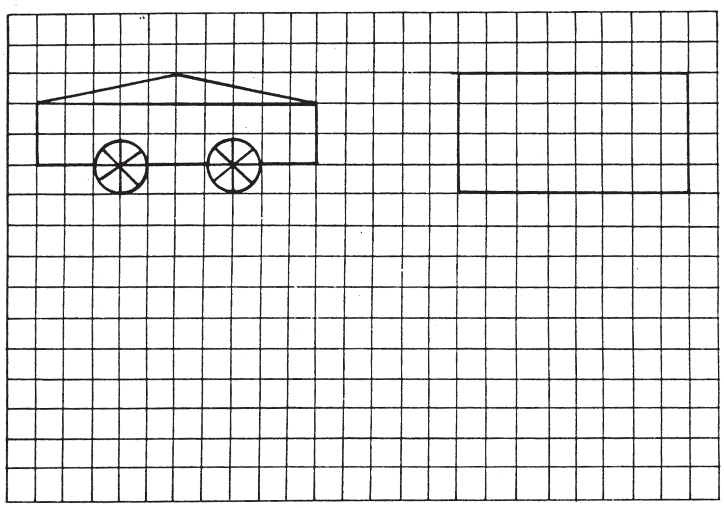
Toma, como unidad de medida, un cuadro.



1. ¿ Cuánto mide el segmento $\overline{A'B'}$?
2. ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?
3. ¿Cuánto mide $\overline{A'B'}$?
4. ¿Cuánto mide $\overline{AD}$ en la figura original?
5. Observa estas dos medidas y di, cuál es la escala a la que fue hecha la segunda figura.
6. Tomando cada cuadro como unidad de superficie, ¿cuál es el área de la figura a escala 1 : 2?
7. ¿Cuál es el área de la figura original?
8. ¿Cuál es la relación del área de la figura original y la de la reproducción 1 : 2?
9. ¿Cómo puedes encontrar, sin contar los cuadros de una y otra figura, este resultado?
10. ¿Cómo encuentras el volumen que conserva un cuerpo a escala de acuerdo con el original?

Comenta con tu grupo las respuestas. Discútelas y corrige si es necesario.

Realiza debajo de cada figura su reproducción a escala 1 : 2 y 1 : 4, respectivamente. Usa la cuadrícula de tu cuaderno.



Observa las reproducciones, hechas por otros compañeros(as); compáralas con las tuyas; comenta tus resultados con el profesor(a) y corrige si es necesario.

En forma individual, contesta las preguntas:

1. En una escala de reducción ¿cómo resulta la figura, en relación con el tamaño de la figura original?

2. Si una figura se reproduce a escala 1:5, ¿cómo es cada segmento de la reproducción en relación con el segmento original correspondiente?

3. Si la longitud de un segmento es 60 cm, en un dibujo a escala 1 : 3, la representación de este segmento, ¿cuánto medirá?

4. Si el área de una figura es de 64 cm^2, al reproducirla a escala 1 : 4, ¿cuál será su área?

5. El volumen de un cuerpo a escala 1:2 cuyo original tiene 128 cm^2, ¿qué volumen tendrá?

Compara tus resultados con la clave; analiza tus respuestas y corrige.

CLAVE

1. más pequeña o menor; 2. $\frac{1}{5}$, una quinta parte; 3. 20 cm; 4. 4 cm^2, $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$; 5. 16 cm^3.

97 OTRO PUNTO DE VISTA

Simetría axial

(109) Conocimiento de la simetría axial

Existen a nuestro alrededor muchos objetos que establecen una **relación** muy armoniosa consigo mismos: la **de simetría**.

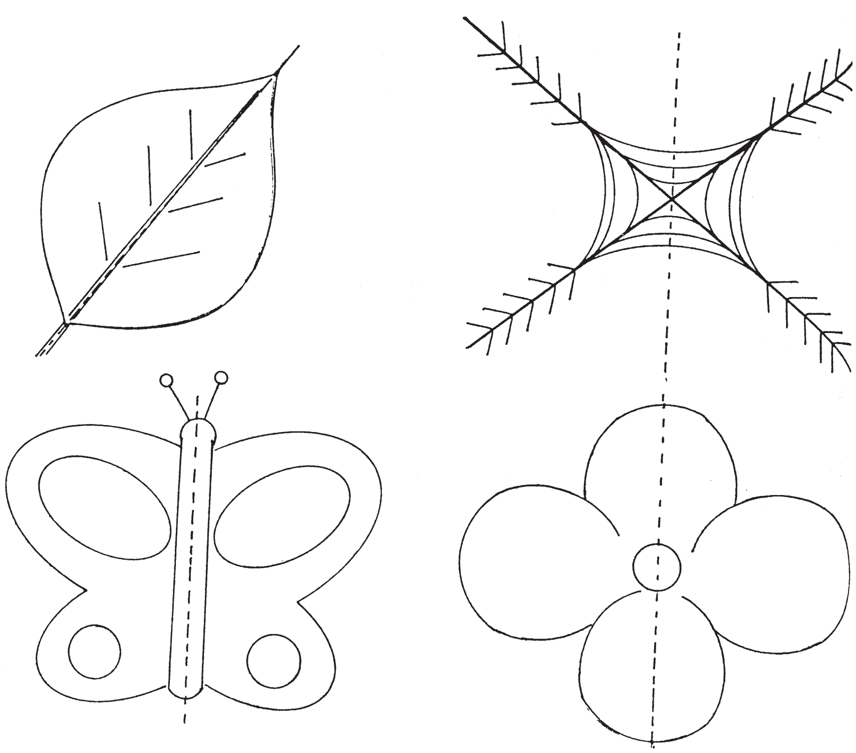
Observa el video, donde verás que existen muchas figuras simétricas y otras que no lo son. Comenta en tu grupo, qué objetos a tu alrededor tienen esa simetría.

Lee en equipo, el texto **Simetría axial**, y comenta con tu grupo cómo puedes saber si una figura es simétrica o no lo es.

SIMETRÍA AXIAL

Muchas de las formas que existen en el mundo tienen una relación de armonía y correspondencia consigo mismas o con otras: la simetría. Pero, ¿qué es la simetría?

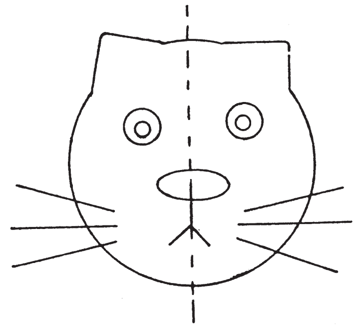
Las siguientes formas proporcionan una idea de lo que es la simetría.



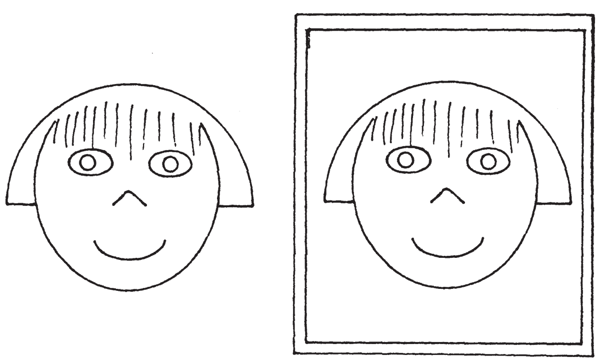
Y muchas otras, naturales y artificiales, tienen esa relación que da equilibrio a figuras y cuerpos.

Si las figuras anteriores se calcan y doblan por la línea punteada, se observa que sus puntos coinciden, uno a uno, de un lado y otro del doblez; a esto es a lo que se llama **congruencia** y, cuando se presenta con respecto a una línea recibe el nombre de **simetría axial**.

Una figura es simétrica si existe congruencia en sus dos mitades al tomar como referencia una línea que recibe el nombre de **eje de simetría**.



Pero también dos figuras iguales son simétricas respecto a un eje, si al unir un punto de una figura con el correspondiente de la otra, la línea es perpendicular a dicho eje. Esto se aprecia al ver reflejada una imagen en un espejo.

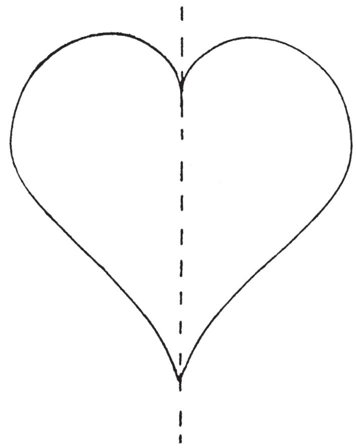
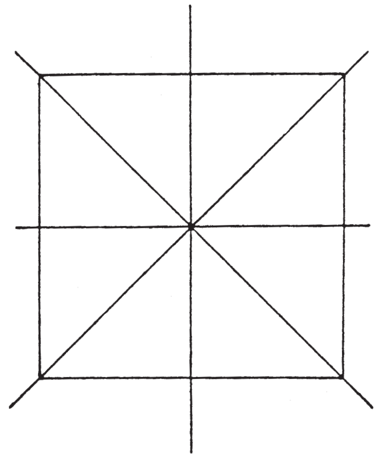
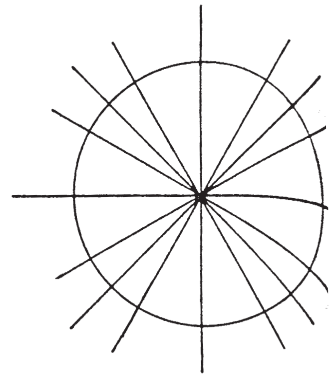


De esa forma se puede concluir que:

Simetría axial es la congruencia de partes, líneas o puntos, uno a uno y a distancias iguales de una línea que recibe el nombre de **eje de simetría**.

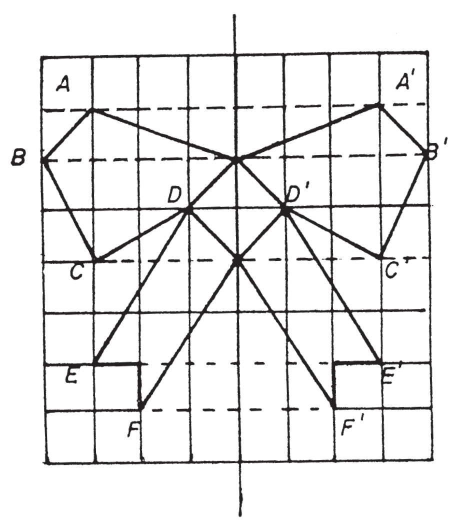
Las figuras que no tienen eje de simetría reciben el nombre de asimétricas.

Las figuras simétricas pueden tener uno, dos, tres, cuatro o más ejes de simetría. Por ejemplo, el círculo tiene un número infinito de ejes de simetría, ya que cualquier recta que pase por su centro lo divide en dos partes congruentes.

Los puntos de figuras simétricas pueden relacionarse uno a uno. Obsérvese la siguiente figura. A cada punto del lado izquierdo, con respecto al eje de simetría, le corresponde un punto a la misma distancia pero del lado derecho, de donde se obtienen los puntos A y A'B y B', C y C', etc., esos puntos reciben el nombre de **puntos homólogos**.

A los puntos que se corresponden entre sí en dos figuras congruentes se les llama homólogos.



Al unirse tales puntos se obtienen rectas perpendiculares al eje de simetría y paralelas entre sí.

De esa forma, midiendo la distancia de cada punto al eje de simetría y marcándolo del lado contrario a éste, es posible reproducir un dibujo hasta tener una figura simétrica.

Contesta en tu cuaderno junto con un compañero(a), a las siguientes preguntas:

1. ¿ Qué entiendes por simetría axial?

2. ¿Qué es la congruencia en las figuras simétricas?

3. ¿Qué nombre recibe la línea que divide a una figura en dos partes congruentes?

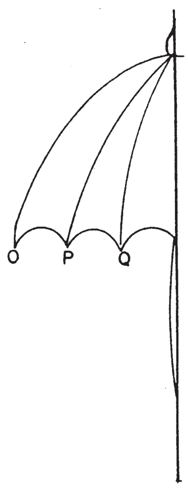
4. ¿Cómo puedes saber si una figura es simétrica?

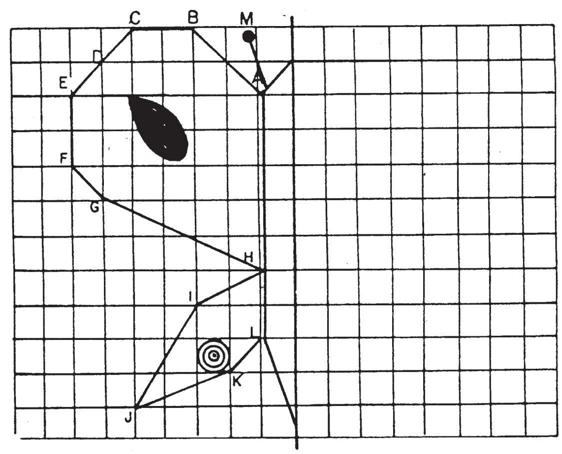
5. ¿Cuántos ejes de simetría tiene el cuadrado?

Discute con el grupo tus respuestas. Detecta si tuviste errores y corrígelos.

Forma un equipo y realiza los siguientes ejercicios, en tu cuaderno.

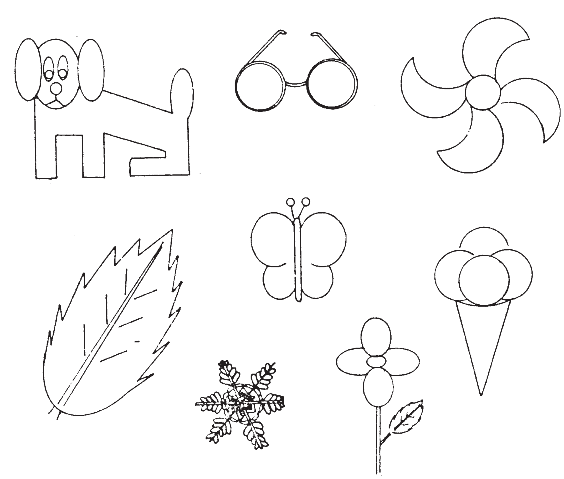
Haz dibujos simétricos de acuerdo con el eje de simetría de cada una de las siguientes figuras, señalando los puntos homólogos. Una vez terminados coloréalos.





¿Cuáles son los puntos homólogos?

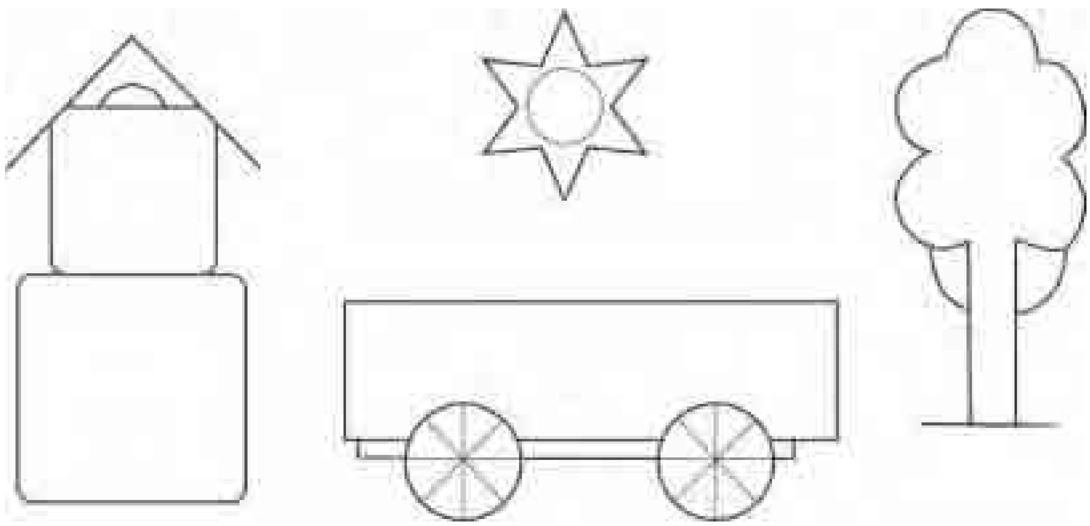
Reproduce los dibujos en tu cuaderno y señala los que sean simétricos. Marca sus ejes de simetría.



Compara tus resultados con los de otros compañeros(as). Si hay diferencias, coméntalas y corrígelas en caso necesario.

De manera individual, reproduce en tu cuaderno los dibujos y:

1. Encuentra todos los ejes de simetría que tengan cada una de las siguientes figuras:



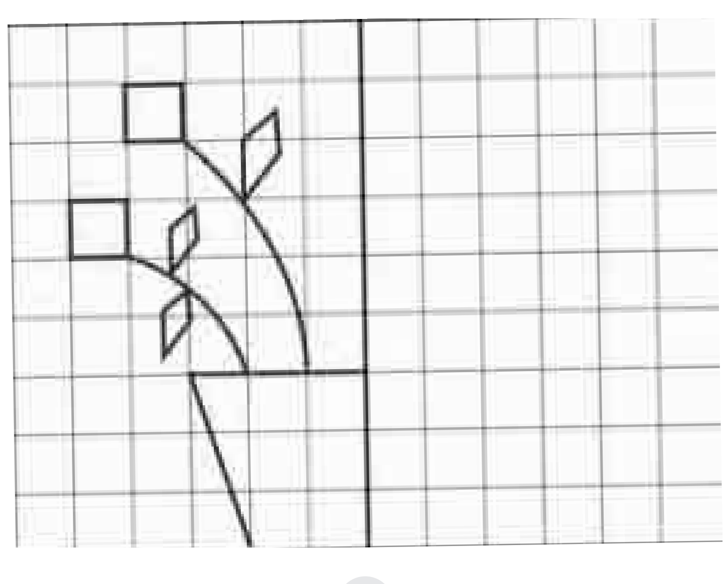
   a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene el árbol?

   b) ¿Cuántos la casa?

   c) ¿Cuántos la carreta?

   d) ¿Cuántos la estrella?

2. En tu cuaderno, haz este dibujo y encuentra los puntos homólogos de la figura y traza las líneas para que sea una figura simétrica.



Compara tus trazos con los de tus compañeros(as). Si tienes dudas, coméntalas con el profesor.

CLAVE

a) 1 eje de simetría; b) 1 eje de simetría; c) 1 eje de simetría; d) 6 ejes de simetría.

98 EXCLUSIVAS AXIALES

(110)

Propiedades de la simetría axial

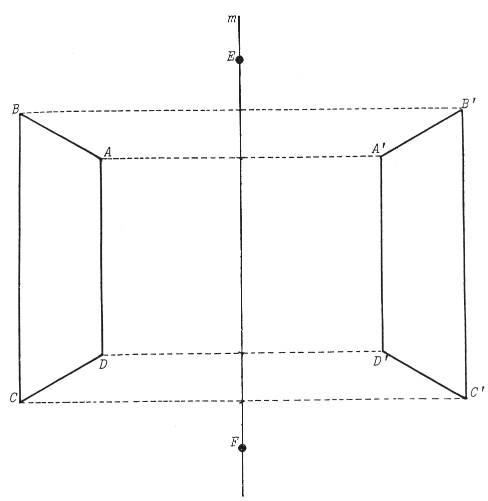
Conocimiento de las propiedades de la simetría axial

Cuando dos figuras geométricas son simétricas con respecto a un eje, se tiene la impresión de que la figura original está reflejada en un espejo. La simetría axial, tan común, tiene varias propiedades que es conveniente tomar en cuenta para comprender mejor cómo puede realizarse la transformación de una figura original en su homóloga.

Lee y analiza, con un compañero(a):

PROPIEDADES DE LA SIMETRÍA AXIAL

Si se observa con atención en la naturaleza, encuentras muchas formas que dan la idea de lo que es la simetría con respecto a un eje. Esto ha propiciado que la humanidad haya creado muchos modelos en los que aparece la simetría axial. Esta simetría tiene aplicaciones en dibujo, decoración, pintura, diseño gráfico, arquitectura, etc. En consecuencia, es conveniente considerar cuáles son las características de las figuras simétricas con respecto a un eje. Véase el siguiente ejemplo.



a) Los puntos *A* y *A*' , *C* y *C*', etc., se encuentran a la misma distancia (equidistan), del eje de simetría *m*.

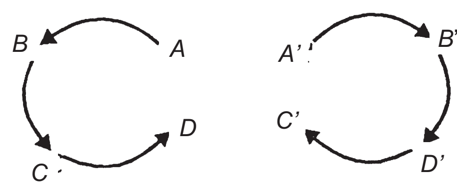
b) Los segmentos de recta que unen a las parejas de puntos homólogos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, etc., son perpendiculares al eje de simetría *m*.

c) Los segmentos que se trazaron para obtener pares de puntos homólogos, $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$, etc., son paralelos.

d) Los segmentos de recta que son simétricos, $\overline{AD}$, y $\overline{A'D'}$, $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, etc., son congruentes.

e) Los ángulos simétricos *ABC* y *A'B'C'*, *BCD* y *B'C'D'*, etc., son congruentes.

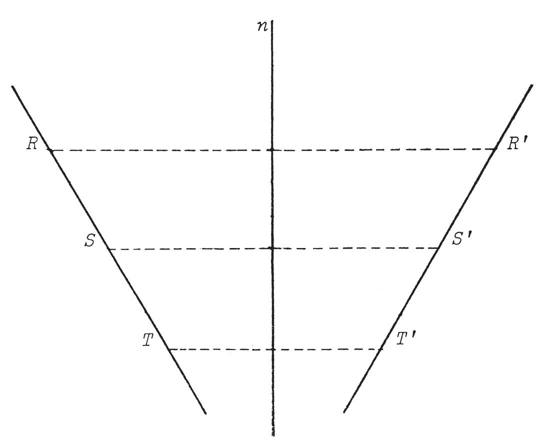
f) El orden en que están situados los puntos de la figura original, es opuesto al de su homóloga.



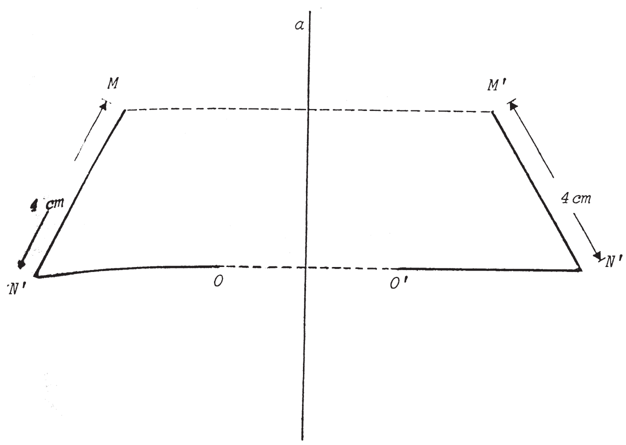
Estas propiedades pueden verificarse si reproduces el dibujo del ejemplo y con ayuda de una escuadra verificas. También puedes hacer dobleces.

Lo que se ha apreciado en este ejemplo, queda resumido en las **propiedades de la simetría axial**, que se describen a continuación.

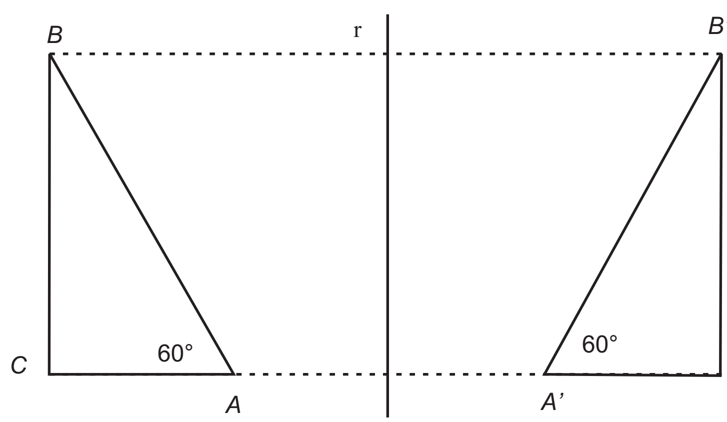
1. **Conserva colinealidad.** Si tres puntos *R*, *S*, *T*, son colineales (están en la misma línea) sus homólogos también son colineales. Es decir, si un cierto número de puntos representan una recta, sus homólogos representarán una recta, como se muestra a continuación.



2. **Conserva la distancia.** Si dos puntos *M* y *N*, están a una distancia de 4 cm, entre sus homólogos *M’* y *N’* habrá esa misma distancia, como se ve a continuación.



3. **Conserva ángulos.** Si entre dos segmentos de recta está comprendido un ángulo de 60º, el ángulo comprendido entre sus homólogos, también tiene una amplitud de 60º, como se ve en la siguiente ilustración.



4. **No conserva orientación.** La simetría axial muestra a la figura original como si se reflejara en un espejo. Es decir, cambia izquierda por derecha y derecha por izquierda como puede verse en todos los ejemplos anteriores.

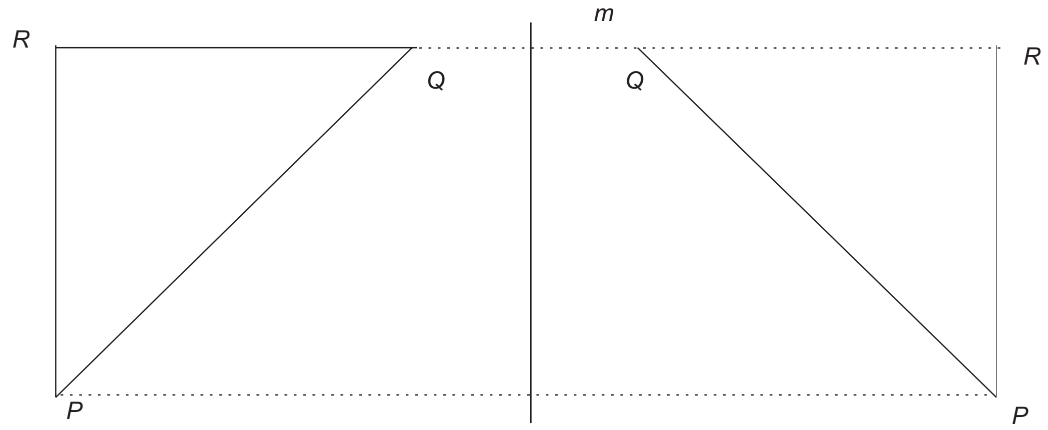
Observa atentamente el video en el cual se describen las características principales de las figuras simétricas con respecto a un eje; conocerlas te permitirá realizar con mayor facilidad las transformaciones que requieras. Al finalizar el programa, comenta con un compañero(a) lo que hayas entendido, y contesta en tu cuaderno:

1. Si un punto se encuentra a 1 cm del eje de simetría, ¿a qué distancia del citado eje se encuentra su homólogo?

2. El segmento de recta $\overline{MN}$ es simétrico al segmento $\overline{M'N'}$, con respecto al eje. Ahora bien, si $\overline{MN}$ mide 8 cm, ¿cuánto mide $\overline{M'N'}$?

3. Si dos figuras son simétricas con respecto a un eje, y en la figura original hay un ángulo de 80º, ¿cuánto mide ese mismo ángulo en la figura homóloga?

Con tus compañeros(as) observa el siguiente dibujo de dos figuras simétricas con respecto al eje *m*, y contesta en tu cuaderno:



1. De los puntos *Q* y *Q'*, ¿cuál está a mayor distancia del eje de simetría?

2. ¿Cómo son los puntos *Q*, *Q'* y *P*, *P'* con respecto al eje *m*?

3. ¿Cómo son entre sí los segmentos de recta que se trazaron para unir los puntos homólogos *Q* y *Q'* y *P* y *P'*?

4. ¿Cómo son los ángulos *P R Q* y *P' R' Q'*.

5. ¿Cómo es la medida del segmento *PQ* con respecto a la del segmento *P' Q'*?

Revisa tu trabajo con tus compañeros(as). Si tuviste fallas, corrígelas.

Continúa trabajando con tus compañeros(as): recorta de una revista figuras simétricas. Verifica en ellas las propiedades que estudiaste en esta sesión.

Comparte tus trabajos con el grupo y el profesor(a).

En forma individual trabaja en tu cuaderno; relaciona las dos columnas, colocando el número correcto dentro de los paréntesis respectivos.

1. Conserva colinealidad	( )	Cambia izquierda por derecha y derecha por izquierda.
2. No conserva orientación	( )	Equidistantes del eje de simetría.

3. Conserva la distancia ( ) Congruentes.

4. Los ángulos simétricos son ( ) Dos segmentos homólogos tienen la misma longitud.

5. Puntos homólogos ( ) Si una serie de puntos conforma una recta, los puntos homólogos conformarán también una recta.

Compara tus respuestas con la clave de esta sección, que aparece enseguida, Si tienes errores, corrígelos.

CLAVE

(2), (5), (4), (3), (1).

99 TRAZOS SOBRE SIMETRÍA AXIAL

(111)

Problemas sobre simetría axial

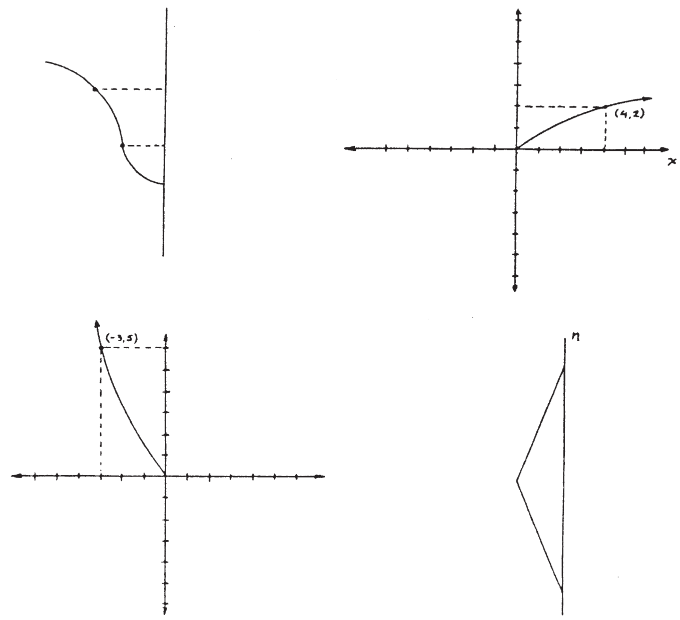
Resolución de problemas sobre simetría axial

Cuando se requiere dar orden a un espacio visual, la simetría ha sido considerada como uno de los recursos más adecuados. El proceso que ordena las formas alrededor de un eje se conoce como simetría axial. Ahora, usarás tus conocimientos al respecto.

Observa el video. Verás cómo se realizan algunos ejercicios y se resuelven problemas muy sencillos por medio de dicha simetría. Al terminar, comenta en forma breve, con dos compañeros(as), el contenido del programa.

Intégrate a un equipo de trabajo. Considera que la simetría axial existe en una misma figura si hay correspondencia entre sus dos mitades; realiza lo que se te indica.

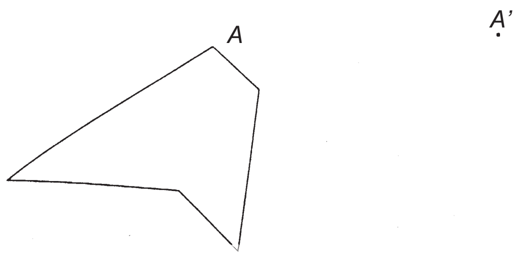
Completa correctamente en tu cuaderno cada una de las siguientes figuras, para que sean simétricas con respecto a un eje.



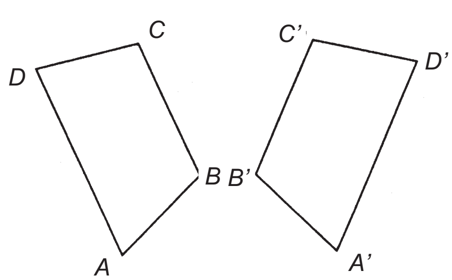
Muestra tus figuras a dos integrantes de otro equipo. Si cometiste errores, corrígelos.

Con el mismo equipo, realiza lo que se indica en cada caso. Haz los dibujos en tu cuaderno.

1. En el siguiente dibujo aparece una figura, y el punto *A* es uno de sus vértices. También aparece el homólogo de ese punto, que es *A'* . Encuentra el eje de simetría y la figura simétrica correspondiente.



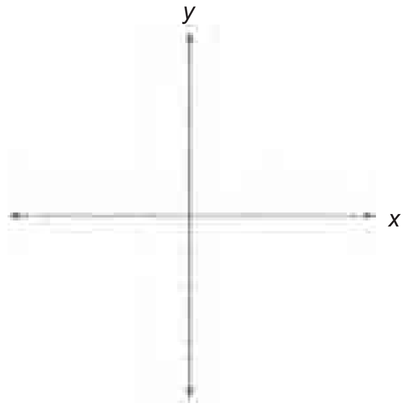
2. Las siguientes figuras son simétricas con respecto a un eje *n*, que no aparece en el dibujo. Encuentra la posición de dicho eje y trázalo.



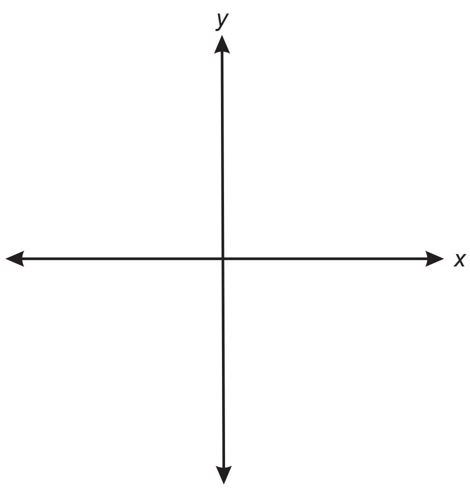
Revisa tu trabajo, junto con un integrante de otro equipo. Si te equivocaste, corrige.

Individualmente, realiza lo que se te pide.

1. En un sistema de ejes coordenados, como el de la figura, localiza estos puntos: *A* (7,4), *B* (6,9), *C* (2,6) y *D* (5, 1). Une con segmentos de recta los cuatro puntos. Traza una figura simétrica a la que obtuviste, tomando como eje de simetría el eje de las ordenadas.

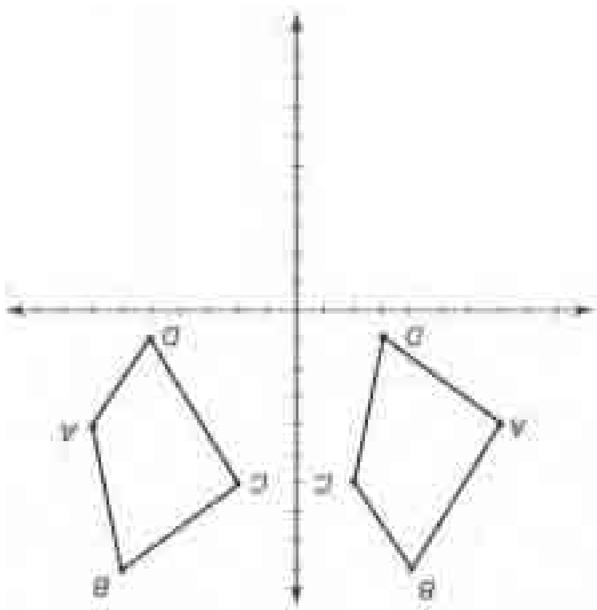


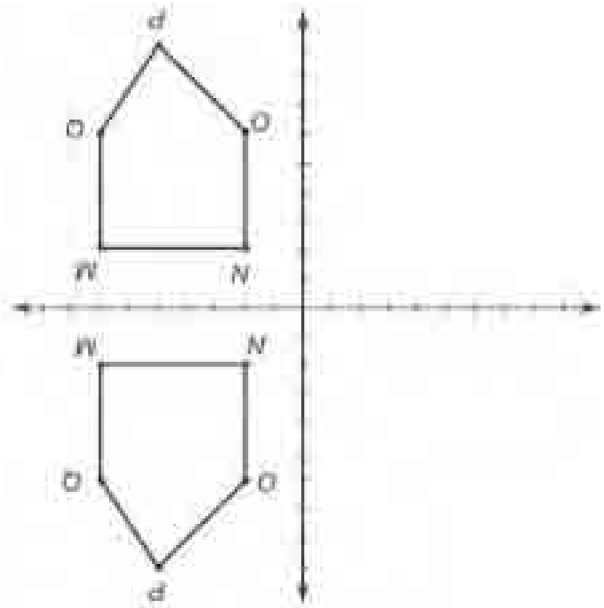
2. Localiza en el plano cartesiano dibujado en tu cuaderno, los puntos siguientes: *M* (7,–2), *N* (2,–2), *O* (2,–6), *P* (5,–9) y *Q* (7,–6). Une los cinco puntos. Traza una figura simétrica a la que obtuviste, tomando como eje de simetría el eje de las abscisas.



Compara tus trazos con los de la clave de esta sección, que aparece enseguida. Si tienes errores, corrígelos.

CLAVE





100 SIGUIENDO LAS LÍNEAS

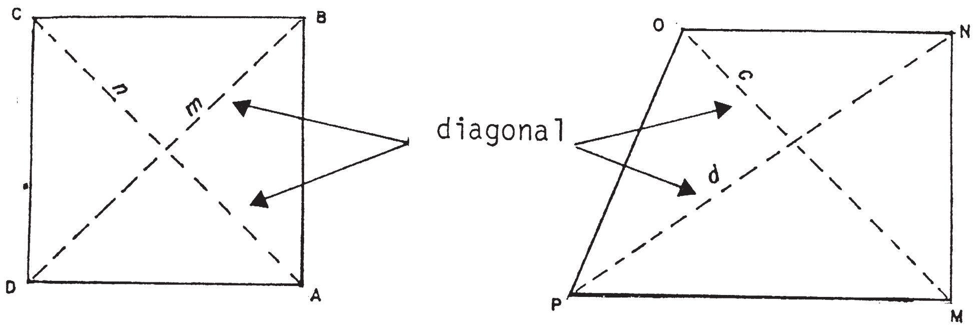
(112)

Perpendiculares, paralelas y secantes en el plano
Localización de líneas en el plano

En el medio en que te desenvuelves cotidianamente existen muchas formas geométricas. En ellas se encuentran segmentos de recta. ¿Cómo son esas rectas entre sí? ¿Qué nombres reciben de acuerdo con sus características?

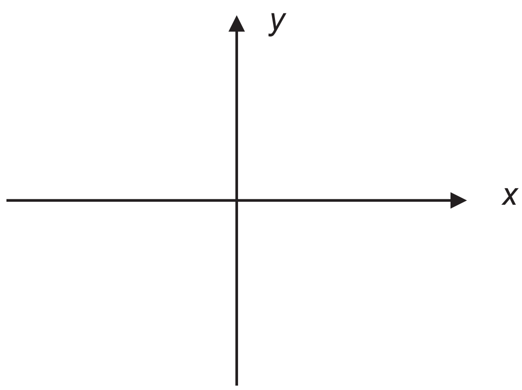
Observa el video. Verás diferentes rectas y conocerás los nombres que se les dan, según sus características. Cuando termines reúnete con dos compañeros(as), y comenta lo que hayas aprendido.

Lee y comenta con un compañero(a): **perpendiculares, paralelas y secantes e**n el plano. Es interesante encontrar relaciones entre rectas que podemos representar sobre un plano. Por ejemplo observa las diagonales dibujadas en estos cuadriláteros.



Cuando dos rectas se cortan en un punto, reciben el nombre específico de **secantes**.

Si se observan los ejes coordenados, puede notarse que también se intersecan, pero formando cuatro ángulos rectos. Si esto sucede, se les llama rectas **perpendiculares**.

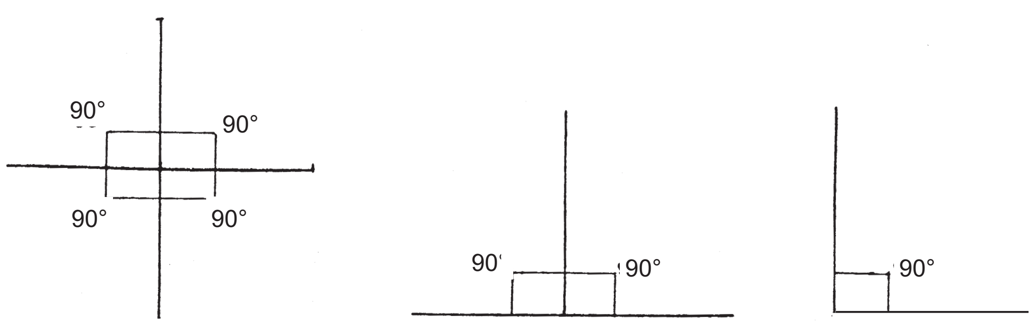


En general:

Dos rectas que se cortan, formando 4 ángulos rectos, se llaman perpendiculares.

También una semirrecta puede ser perpendicular a una recta y forma 2 ángulos rectos.

Por otra parte, se afirma que los lados de un ángulo recto son perpendiculares. Esto se ilustra enseguida.



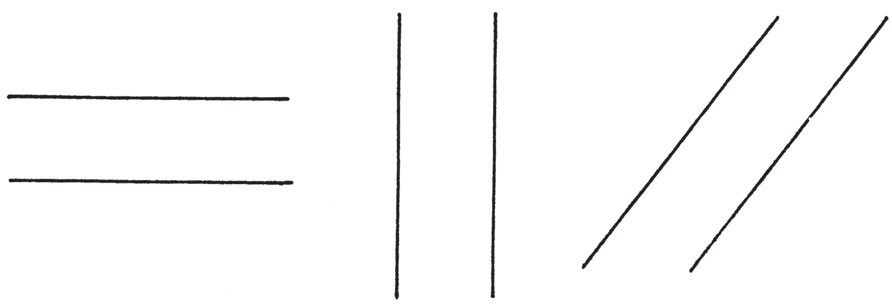
En las diferentes construcciones que existen en las poblaciones, se encuentran figuras cuyos ángulos son rectos, es decir, con lados perpendiculares.

También existen en el plano rectas que no se intersecan ni coinciden en algún punto; cuando estas rectas, por más que se prolonguen en ambos sentidos, no se intersecan, se les denomina **paralelas**.

Es decir:

Dos rectas situadas en un mismo plano y que no se cortan, son paralelas.

En algunas figuras geométricas, como el rectángulo y el rombo, los lados opuestos son paralelos. Estas rectas se ven así:



Las secantes, perpendiculares y paralelas son rectas que se manejan con mucha frecuencia durante el aprendizaje de la geometría. Conocerlas e identificarlas es conveniente para comprender temas posteriores.

Con un compañero(a), observa tu salón de clases y los objetos que están dentro de él. Busca ejemplos de rectas que sean:

a) Secantes.

b) Perpendiculares.

c) Paralelas.

Con tu compañero(a). Haz varios dibujos de objetos en tu cuaderno. Identifica en ellos:

a) Rectas.

b) Secantes.

c) Perpendiculares.

d) Paralelas.

Responde: Dos rectas perpendiculares, ¿son también secantes? Dos rectas paralelas, ¿pueden ser secantes? ¿por qué?

En forma individual, selecciona la respuesta correcta para cada una de las siguientes preguntas y en tu cuaderno anota dentro de los paréntesis de la derecha:

1. Dos rectas situadas en un mismo plano y que no se cortan, son. . . . . ( )

a) Perpendiculares b) Secantes.
c) Paralelas d) Afines

2. En un ángulo recto, sus lados son. . . . . ( )

a) Perpendiculares b) Secantes
c) Paralelos d) Oblicuos

3. Dos rectas que se cortan en un punto, se llaman . . . . ( )

a) Perpendiculares b) Secantes
b) Paralelas d) Verticales

4. Las dos diagonales de un cuadrilátero se intersectan, tal como lo hacen las rectas . . . . ( )

a) Paralelas b) Perpendiculares
c) Tangentes d) Secantes

5. Dos rectas que se cortan formando 4 ángulos rectos se llaman . . . . ( )

a) Horizontales b) Paralelas
b) Perpendiculares d) Secantes

Compara para tus respuestas con la clave de esta sección, que se da enseguida. Si te equivocaste, corrige.

CLAVE

1. (c); 2. (a); 3. (b); 4. (d); 5. (c).s

101 **(113)**

RELACIONES LINEALES

Perpendicularidad y paralelismo
Establecimiento de la relación entre perpendicularidad y paralelismo

¿Sabías que las rectas perpendiculares y paralelas están a tu alrededor? ¡Claro! Únicamente observa los contornos del tablero, las paredes del salón, el techo con respecto al piso, las ventanas, tus libros, etcétera.

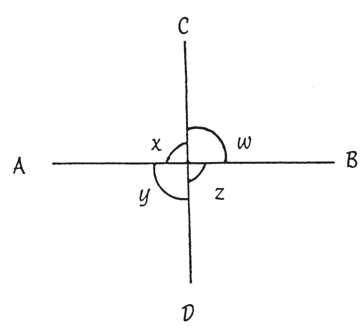
Para que sepas con precisión cuáles son esas rectas, observa con atención el programa televisivo y, posteriormente, realiza comentarios al respecto con tus compañeros(as).

Lee con un compañero(a) el texto siguiente. Usa las escuadras y el compás y haz en tu cuaderno las construcciones sugeridas en el texto.

PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

Para efectuar dibujos en ingeniería y arquitectura se emplean diferentes instrumentos geométricos; en esta sesión únicamente se emplearán el juego de escuadras y el compás, debido a que se verán trazos elementales como son las rectas perpendiculares y las rectas paralelas.

Ejemplo:



En la figura se observa que dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman ángulos rectos. El símbolo para representar la perpendicularidad es $\perp$.

También se observa que $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$; asimismo los ángulos, *w, x, y* y *z* son rectos, ya que miden 90°; lo anterior se expresa de la siguiente forma:

$$\overline{CD} \perp \overline{AB}$$

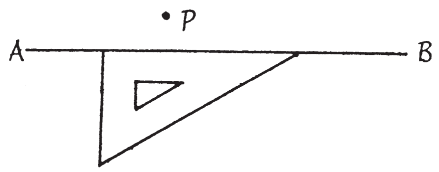
$$\measuredangle w = \measuredangle x = \measuredangle y = \measuredangle z = 90°$$

En lo que se refiere a rectas perpendiculares se tienen los siguientes casos que son los más comunes.

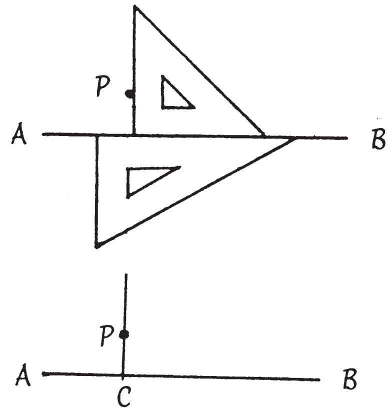
Hazlo en tu cuaderno:

1. Trazo de una perpendicular a partir de un punto *P* exterior a una recta, empleando únicamente escuadras.

   Dados $\overline{AB}$ y un punto *P*, se coloca una escuadra de manera que una de sus orillas coincida con la recta dada.

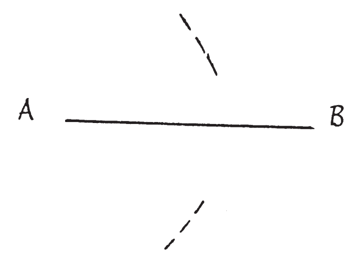
   Se coloca la otra escuadra sobre la que ya se tiene, de manera que formen un ángulo recto, y se traza una línea del punto *P* al segmento *AB*, la cual corta a $\overline{AB}$ en el punto *C*, obteniéndose la perpendicular *CP*.

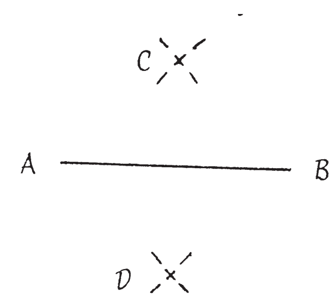
   Por lo que se tiene que $\overline{CP} \perp \overline{AB}$.

2. Para trazar una perpendicular por el punto medio de un segmento de recta, practica el siguiente procedimiento:

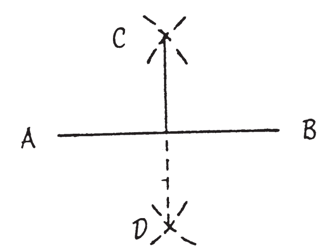
   Dado $\overline{AB}$, se hace centro en el punto *A* y con una abertura del compás mayor a la mitad de $\overline{AB}$, se trazan dos arcos: arriba y abajo de $\overline{AB}$.



Se hace centro en *B* y con la misma abertura del compás se trazan otros dos arcos de manera que se corten con los anteriores y se formen los puntos *C* y *D*.



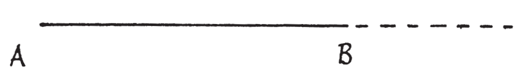
Se unen los puntos *C* y *D*, con lo cual se tiene la perpendicular que corta: a $\overline{AB}$ en el punto *E*.



En la figura se observa que $\overline{CE} \perp \overline{AB}$.

3. Trazo de una perpendicular a un segmento de recta dado, en uno de sus extremos, con ayuda del compás.

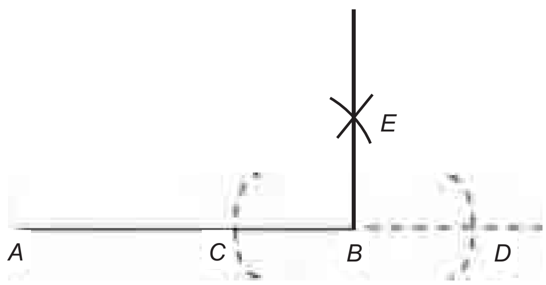
   El $\overline{AB}$ se prolonga con línea discontinua.



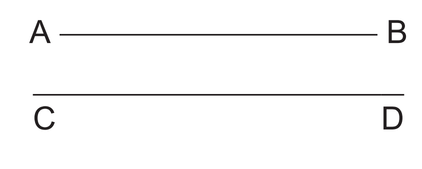
Se hace centro en *B* y con una abertura cualquiera del compás se trazan arcos a ambos lados sobre la línea, obteniéndose los puntos *C* y *D*.

Con centro en el punto *C* y una abertura del compás mayor que $\overline{BC}$, se traza un arco arriba de $\overline{AB}$; posteriormente, con la misma abertura del compás, se hace centro en el punto *D* y se traza otro arco para formar el punto *E*; al unir éste con el punto *B*, se tiene que $\overline{EB} \perp \overline{AB}$.

Obsérvese la siguiente figura:



$\overline{CD}$ es paralela a $\overline{AB}$, o bien, $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{CD}$; la forma de representar el paralelismo es



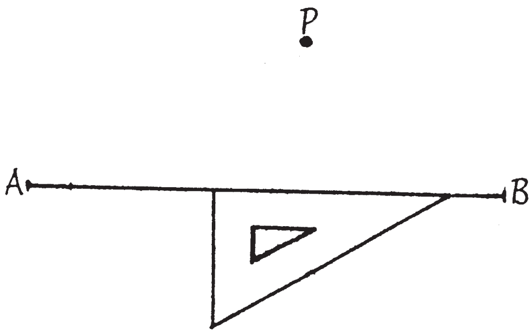
por medio del símbolo $\parallel$; entonces, lo anterior se expresa como:

$$\overline{CD} \parallel \overline{AB} \text{ o } \overline{AB} \parallel \overline{CD}$$

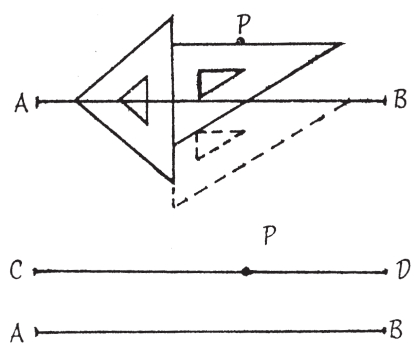
Los procedimientos para trazar rectas paralelas que se explican a continuación le sirven como guía para que lo reproduzcas en tu cuaderno.

1. Trazo de una paralela que pasa por un punto exterior a un segmento de recta empleando únicamente escuadras.

   Dado el $\overline{AB}$ y un punto *P*, se coloca una escuadra de manera que uno de los lados que forma el ángulo recto quede sobre dicho segmento.

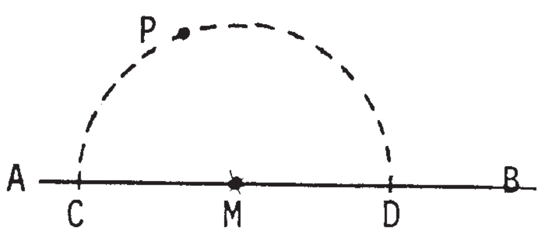


Se coloca la otra escuadra en el lado izquierdo de la primera de tal manera que los filos de contacto formen un ángulo recto; de esta forma la primera se podrá deslizar verticalmente. En su deslizamiento se hace coincidir con el punto *P*, y se traza el $\overline{CD}$ que resulta paralelo a $\overline{AB}$.

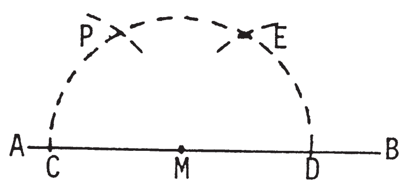


2. Trazo de una paralela a otra recta, que pase por un punto dado, empleando compás.

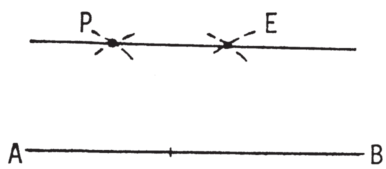
   Dado $\overline{AB}$ y el punto *P* se toma como centro cualquier punto (*M*) de $\overline{AB}$ y se traza un semiarco que pase por *P* y corte a $\overline{AB}$ en los puntos *C* y *D*.



El punto *C* se toma como punto de apoyo y con el compás se toma la distancia que hay de éste al punto *P*; con la misma abertura del compás se hace centro en el punto *D* y se traza un arco que corte al semiarco, obteniendo el punto *E*.



Se une el punto *P* con el *E*, y se obtiene $\overline{EP}$, el cual es paralelo a $\overline{AB}$; esto es:
$\overline{AB} \parallel \overline{PE}$



De lo arriba mostrado, se tiene que:

Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman ángulos rectos. Dos rectas son paralelas cuando al prolongarse no tienen ningún punto en común.

Trabaja con dos compañeros(as) y, posteriormente, explica con tus propias palabras lo siguiente:

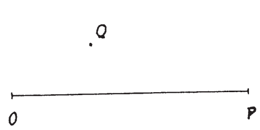
a) ¿Cómo trazarías una perpendicular a una recta cualquiera, sin usar compás?

b) ¿Cómo trazarías una paralela a una recta cualquiera, sin usar compás?

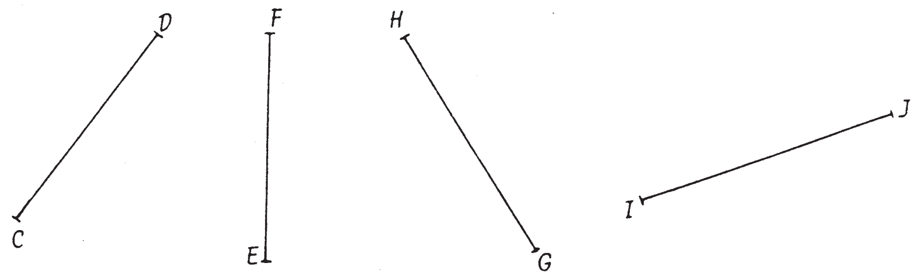
c) ¿Cómo trazarías una perpendicular que pase por el punto medio de una recta?

Comenta tus respuestas con tus compañeros(as).

Sigue con tus compañeros(as) y traza una perpendicular a $\overline{OP}$, de manera que pase por el punto *Q*; auxíliate con el compás y las escuadras. Haz las construcciones en tu cuaderno.



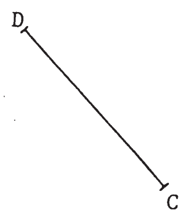
Auxíliate con tus escuadras únicamente, y traza perpendiculares a $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, así como paralelas a $\overline{GH}$ y $\overline{IJ}$, por cada uno de los puntos que se tienen para cada caso.



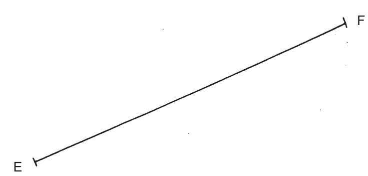
Compara tu trabajo con el que han hecho tus compañeros(as).

En forma individual, resuelve lo que se pide en cada caso. Haz las construcciones en tu cuaderno.

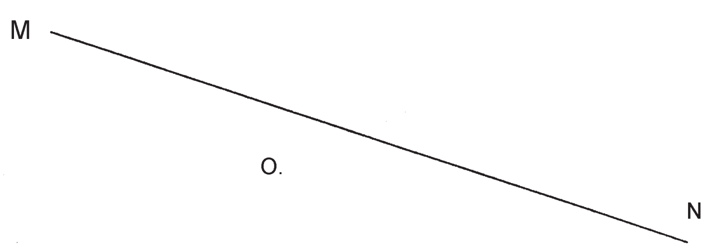
1. Traza una perpendicular al $\overline{CD}$ en el extremo *D*, utilizando compás y escuadras.



2. Traza una paralela al $\overline{EF}$, utilizando compás y escuadras.

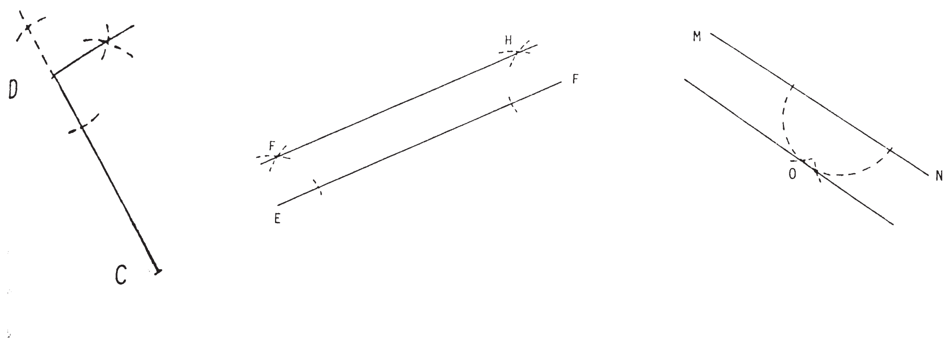


3. Traza una paralela al segmento $\overline{MN}$, de manera que pase por el punto *O*; emplea el compás y escuadras.



Compara tus resultados con los de otro compañero(a) y con la clave.

CLAVE



102 MUDANZA EN GEOMETRÍA

Traslación de puntos, líneas y figuras

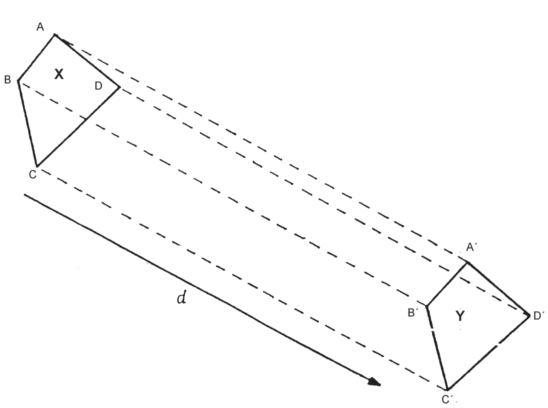
(114) Conocimiento de la traslación de figuras

Siempre que un cuerpo se desplaza en cualquier dirección, cambia de posición y, si lo hace en línea recta, esto indica que se trata de una traslación. En esta sesión se verá cómo los puntos, los segmentos de recta y las figuras tienden a cambiar de posición siguiendo ciertas condiciones. Para saber cuáles son éstas, observa el video, ya que en él hallarás información que te permitirá comprender mejor el tema.

Lee y analiza el siguiente texto:

TRASLACIÓN DE LÍNEAS, PUNTOS Y FIGURAS

Una traslación de una figura en el plano es un deslizamiento. Parece como si se “empujara” de un lugar a otro, sin permitirle girar.



La figura *Y* es la traslación de la figura *X*.

De las figuras se observa que:

1. Cada punto de la figura *X* tiene su imagen correspondiente en la *Y*.

2. Si se miden las distancias que hay entre los vértices correspondientes a las figuras, se aprecia que tienen las mismas medidas, por lo que los segmentos que unen puntos homólogos son congruentes.

3. Los lados de la figura *X* son paralelos a los de la figura *Y* por lo que, en una traslación, a los lados de una figura que están colocados en el mismo orden y corresponden exactamente con los de la otra, se les llama lados homólogos en este caso se tiene que:

   $\overline{AB}$ es homólogo a $\overline{A'B'}$

   $\overline{AD}$ es homólogo a $\overline{A'D'}$

   $\overline{BC}$ es homólogo a $\overline{B'C'}$

   $\overline{CD}$ es homólogo a $\overline{C'D'}$

   Lo cual indica que dos segmentos homólogos por traslación son paralelos.

4. Si se miden los lados y ángulos de las figuras *X* y *Y* y se comparan entre sí resultará que tienen las mismas medidas, con lo cual se concluye que dos figuras homólogas por traslación son congruentes; esto se expresa simbólicamente como:

   $$\text{Figura } X = \text{Figura } Y$$

5. La directriz *d* indica el sentido, la dirección y la amplitud de la traslación; por ello se observa que la distancia que existe entre cada punto y su homólogo es la misma e igual que la longitud de la directriz.

Comprueba cómo en el ejemplo del dibujo, la amplitud de la traslación *d* es de 10 cm. Mide los segmentos que unen puntos homólogos. ¿Qué observas? Con las escuadras también podrás comprobar que los lados de la figura original y sus correspondientes en la figura trasladada son paralelos.

Con base en lo expuesto hasta el momento, se afirma que:

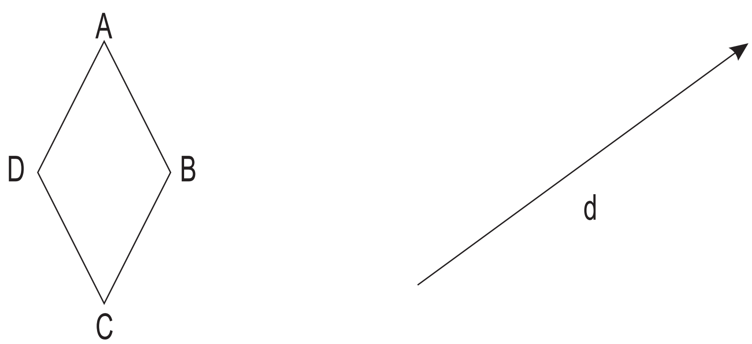
La traslación de una figura cualquiera está determinada por la directriz, la cual indica la dirección, el sentido y la amplitud de la traslación, que es la distancia hasta la que se trasladará la figura inicial.

Forma un equipo de trabajo y contesta lo siguiente en tu cuaderno:

1. Escribe qué entiendes por traslación.
2. ¿Qué es la directriz?
3. ¿Qué entiendes por figuras homólogas?
4. ¿Cómo son las distancias que existen entre los puntos homólogos de dos figuras?

Sigue en tu equipo de trabajo, y en tu cuaderno haz un dibujo de una figura como la siguiente.

Traza una recta como *d*, que hará de directriz.



Traza paralelas a *d*, desde cada uno de los vértices *A, B, C*, y *D*, sobre las paralelas y a partir de cada vértices mide distancias iguales a la longitud de *d*.

Une los vértices trasladados; ¿qué figura obtienes? ¿Cómo es esta figura en relación con la figura original?

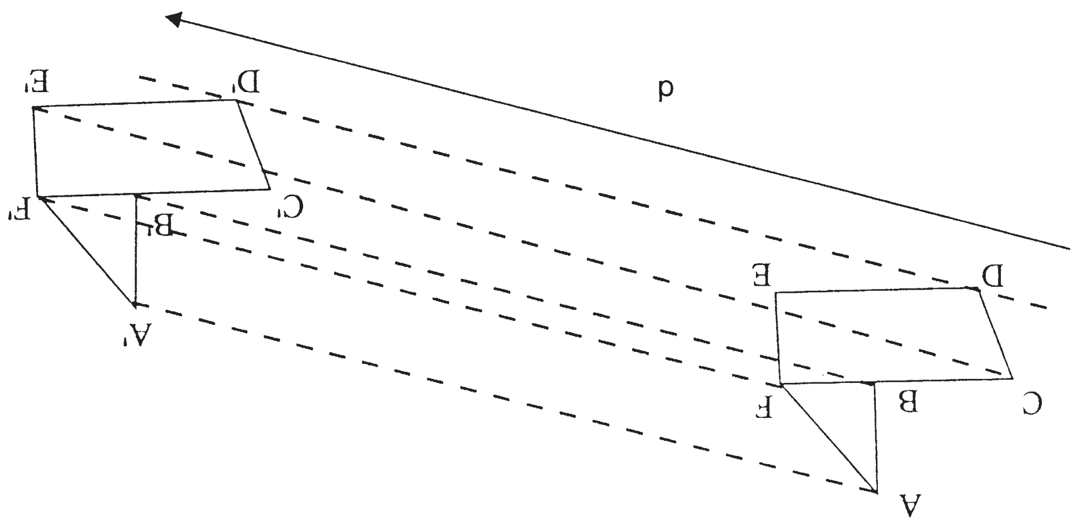
Explica la manera de obtener la traslación de una figura cuando se tiene la directriz y la amplitud de la traslación.

Compara tu trabajo con el realizado por otros compañeros(as).

En forma individual, realiza la traslación de la figura trazada a continuación; para ello, considera la directriz *d*, y la amplitud de la traslación. Hazlo en tu cuaderno.

Coteja tus respuestas con las de otro compañero(a), y consulta la clave.

CLAVE



103 DOBLE CRUCERO

(115)

Ángulos formados por paralelas y una secante
Conocimiento de los ángulos formados

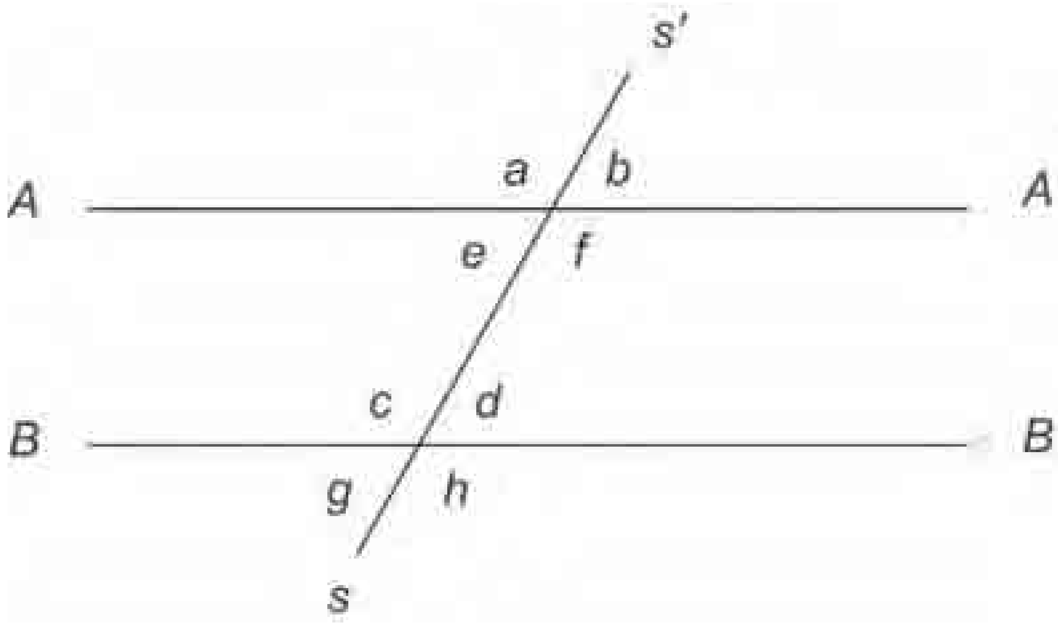
Cuando una secante corta a dos rectas paralelas, se forman determinados ángulos, los cuales tienen características propias; ¿quieres saber cuáles son dichas características?

Observa con atención el video, ya que en él encontrarás información que te permitirá comprender mejor el tema.

Lee y analiza, con un compañero(a), el siguiente texto.

ÁNGULOS FORMADOS POR PARALELAS Y UNA SECANTE

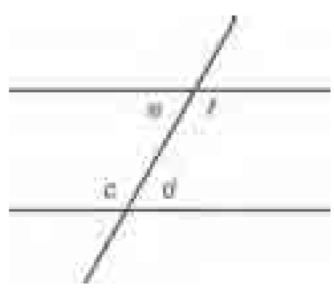
Una vez que ya se conocen las rectas paralelas y la recta secante, se estudiarán ahora los ángulos que se forman cuando una secante corta a las rectas paralelas, situación que ilustra la siguiente figura.



De la figura se tiene que: $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$, en donde $\overline{SS'}$ es la secante.

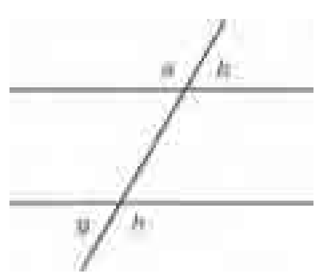
Al cortar la secante a las rectas paralelas se forman ocho ángulos, los cuales se representan por letras minúsculas; éstos se identifican por parejas de acuerdo con su posición, en la siguiente forma:

1. **Ángulos colaterales internos:** son los ángulos que se encuentran del mismo lado de la secante y dentro de las paralelas.



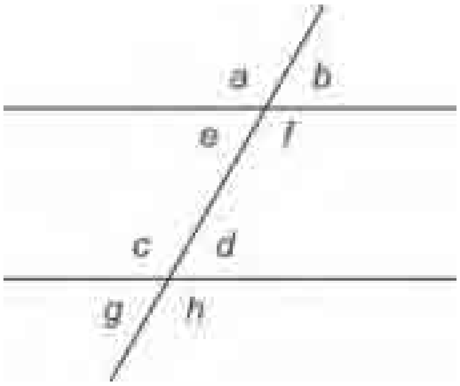
Los ángulos colaterales internos son: $\angle c$ y $\angle e$ de un lado y $\angle d$ y $\angle f$ del otro.

2. **Ángulos colaterales externos:** son los ángulos que se encuentran del mismo lado de la secante y fuera de las paralelas.



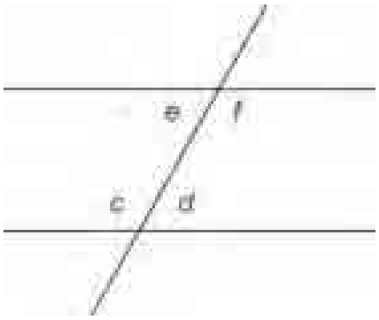
Los ángulos colaterales externos son: $\angle a$ y $\angle g$; de un lado y $\angle b$ y $\angle h$ del otro.

3. **Ángulos correspondientes:** son los ángulos que se encuentran en un mismo lado de la secante, formando parejas, uno interno y otro externo.



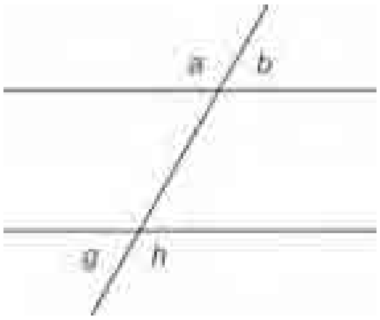
Los ángulos correspondientes son: $\angle a$ y $\angle c$; $\angle e$ y $\angle g$; $\angle b$ y $\angle d$; $\angle f$ y $\angle h$.

4. **Ángulos alternos internos:** son los ángulos interiores que se encuentran a uno y otro lado de la secante.



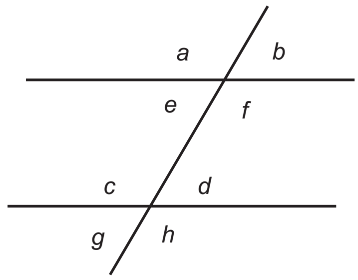
Los ángulos alternos internos son: $\angle e$ y $\angle d$; $\angle c$ y $\angle f$

5. **Ángulos alternos externos:** son los ángulos exteriores que se encuentran a uno y otro lado de la secante.



Los ángulos alternos externos son: $\angle a$ y $\angle h$; $\angle b$ y $\angle g$.

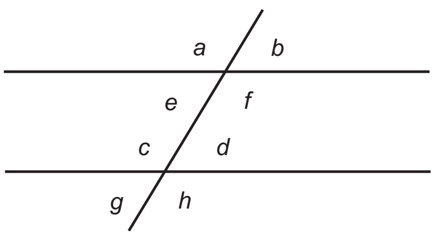
6. **Ángulos opuestos por el vértice:** son aquellos que tienen en común el mismo vértice y se oponen uno al otro.



Los ángulos opuestos por el vértice son: $\angle a$ y $\angle f$, $\angle b$ y $\angle e$, $\angle c$; $\angle h$ y $\angle d$ y $\angle g$.

La relación que tienen entre sí los ángulos vistos es la siguiente:

1. Los ángulos colaterales son **suplementarios**, esto es, al sumarse dan por resultado 180°.

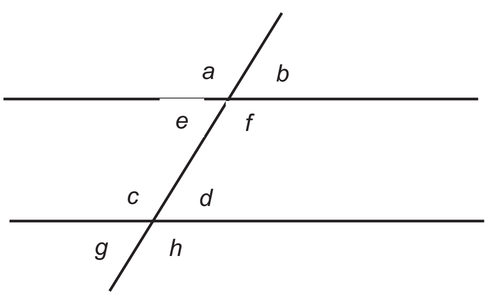


$\measuredangle a + \measuredangle g = 180°$
$\measuredangle c + \measuredangle e = 180°$

$\measuredangle b + \measuredangle h = 180°$

$\measuredangle d + \measuredangle f = 180°$

2. Los ángulos correspondientes tienen igual medida, por lo que son congruentes.



$\measuredangle a = \measuredangle c$ por lo que $\measuredangle a \cong \measuredangle c$
$\measuredangle e = \measuredangle g$ por lo que $\measuredangle e \cong \measuredangle g$

$\measuredangle b = \measuredangle d$ por lo que $\measuredangle b \cong \measuredangle d$

$\measuredangle f = \measuredangle h$ por lo que $\measuredangle f \cong \measuredangle h$

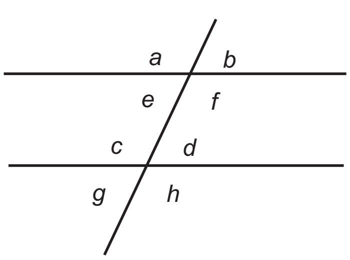
3. Los ángulos alternos tienen igual medida, por lo que son congruentes

$\measuredangle e = \measuredangle d$ por lo que $\measuredangle e \cong \measuredangle d$

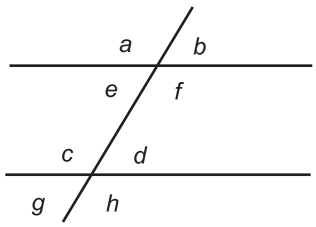
$\measuredangle c = \measuredangle f$ por lo que $\measuredangle c \cong \measuredangle f$

$\measuredangle a = \measuredangle h$ por lo que $\measuredangle a \cong \measuredangle h$

$\measuredangle b = \measuredangle g$ por lo que $\measuredangle b \cong \measuredangle g$



4. Los ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida, por lo que son congruentes.



$\measuredangle a = \measuredangle f$ por lo que $\measuredangle a \cong \measuredangle f$

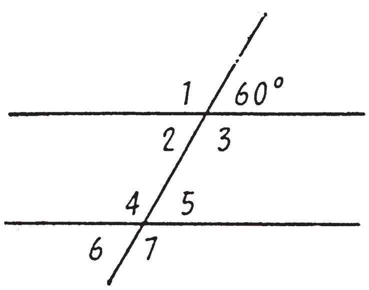
$\measuredangle b = \measuredangle e$ por lo que $\measuredangle b \cong \measuredangle e$

$\measuredangle c = \measuredangle h$ por lo que $\measuredangle c \cong \measuredangle h$

$\measuredangle d = \measuredangle g$ por lo que $\measuredangle d \cong \measuredangle g$

Una vez mostrada la relación que existe entre los ángulos, ahora se verá cómo se aplica dicha relación en un ejercicio.

Si al cortar dos rectas paralelas una secante forma un ángulo de 60° con la primera de ellas, determinar la medida de los otros ángulos.



Como el $\measuredangle 1$ es suplementario de 60°, entonces:

$$\measuredangle 1 + 60^{\circ} = 180$$

$$\measuredangle 1 = 180^{\circ} - 60^{\circ}$$

$$\measuredangle 1 = 120^{\circ}$$

El $\measuredangle 3$ es opuesto por el vértice al de 120°, por lo que tienen igual medida.

$$\measuredangle 3 = 120^{\circ}$$

El $\measuredangle 2$ = es opuesto por el vértice al de 60°, por lo que tienen igual medida.

$$\measuredangle 2 = 60^{\circ}$$

Los ángulos colaterales son suplementarios.

Los ángulos colaterales son: $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 6$, $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 4$, $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 5$

Si $\measuredangle 1 = 120°$, entonces $\measuredangle 6 = 60°$

Si $\measuredangle 2 = 60°$, entonces $\measuredangle 4 = 120°$

Si $\measuredangle 3 = 120°$, entonces $\measuredangle 5 = 60°$

El $\measuredangle 7$ es suplementario de 60°, entonces $\measuredangle 7 = 120°$

Los ángulos alternos son congruentes.

Los ángulos alternos son: $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 4$; $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 5$; $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 7$.

Si $\measuredangle 3 = 120°$, entonces $\measuredangle 4 = 120°$

Si $\measuredangle 2 = 60°$, entonces $\measuredangle 5 = 60°$.

Si $\measuredangle 1 = 120°$, entonces $\measuredangle 7 = 120°$

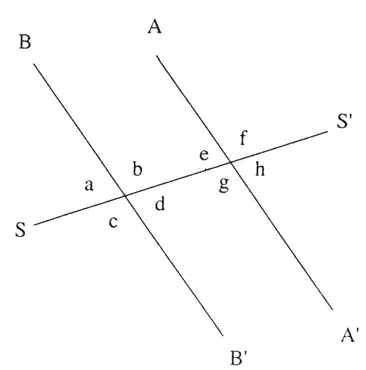
Como el $\measuredangle 6$ es alterno de 60°, entonces $\measuredangle 6 = 60°$

De lo anterior se cumple que:

Cuando una secante corta a dos rectas paralelas se forman ángulos colaterales, correspondientes y alternos, de donde los ángulos correspondientes y alternos son congruentes, mientras que los colaterales son suplementarios.

Únete con otros dos compañeros(as), y contesta lo que se pide en cada caso.

Dada la figura:



a) ¿Cuáles son los ángulos alternos externos?

b) Los ángulos < *a* y < *h*; y < *c* y < *h* ¿qué nombre reciben? Y qué relación hay entre cada pareja de ellos?

c) Los ángulos < *c* y < *h*, ¿cómo se llaman? y, ¿cómo se relacionan?

d) ¿Cuáles son los ángulos colaterales internos?

e) ¿Qué relación existe entre < *c* y < *d*?

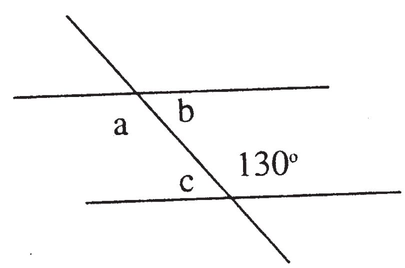
f) Los ángulos correspondientes y alternos, ¿qué característica presentan?

g) Escribe qué ángulos son suplementarios.

Lee ante el grupo tus respuestas y escucha las de tus compañeros(as) con lo cual puedes corregir o complementar las tuyas si es necesario.

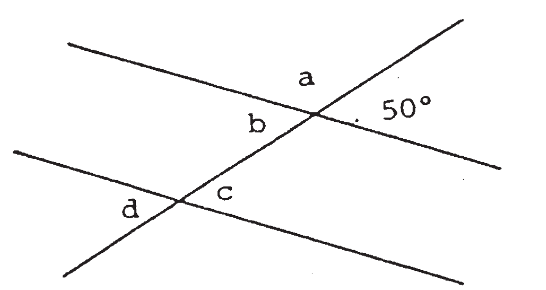
Sigue con tus compañeros(as), y completa lo que se pide a continuación.

1. Si se tiene la siguiente figura:



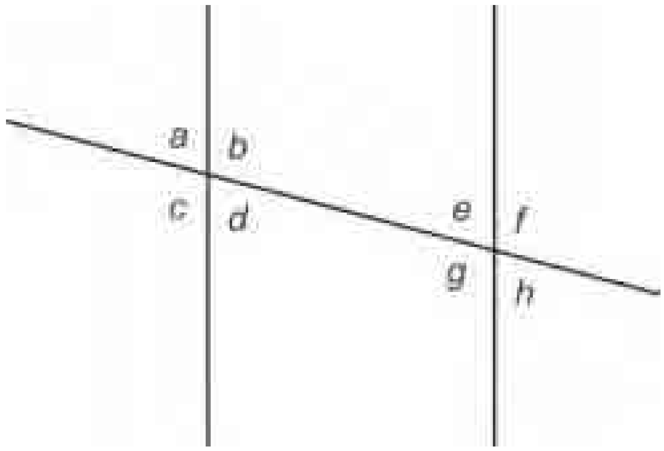
Determina la medida de los ángulos < *a*, < *b* y < *c*.

2. Si se tiene la siguiente figura:



Determina la medida de los ángulos < *a*, < *b*, < *c* y < *d*.

3. Haz una figura como la siguiente; colorea de un mismo color los ángulos que midan lo mismo.



Muestra tu trabajo a otros compañeros(as).

En forma individual, resuelve lo que se pide a continuación.

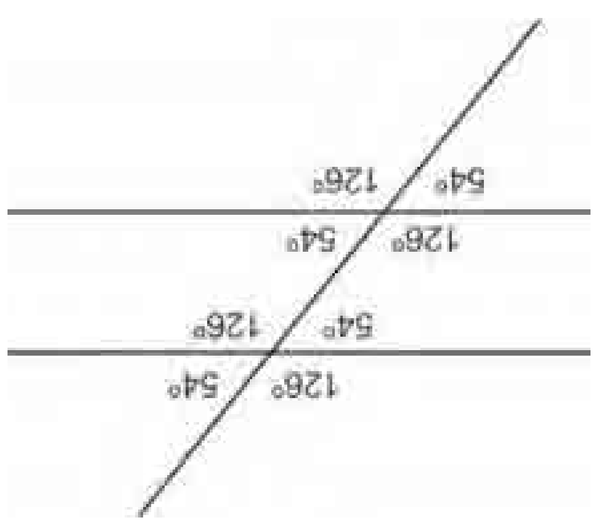
1. Traza una secante a 2 paralelas de manera que se forme un ángulo de 54°; para ello auxíliate del transportador.

2. Determina el valor de los ángulos restantes.

3. Comprueba las medidas de los ángulos que obtuviste; emplea el transportador.

   Compara tus respuestas con las de otro compañero(a); si éstas no coinciden, recurre a la clave.

CLAVE



104 FIGURAS EN GIRA

Rotación de puntos, líneas y figuras

(116) Conocimiento de la rotación de figuras

Si al ir a la feria has observado desde lejos el juego mecánico conocido como “los caballitos” o carrusel, porque en un caballito se encontraba uno de tus primos, habrás notado que éste va a ir ocupando diferentes posiciones en su trayectoria de rotación. En esta sesión se te explicará cómo ocurre la transformación o rotación de una figura con respecto a un centro de giro.

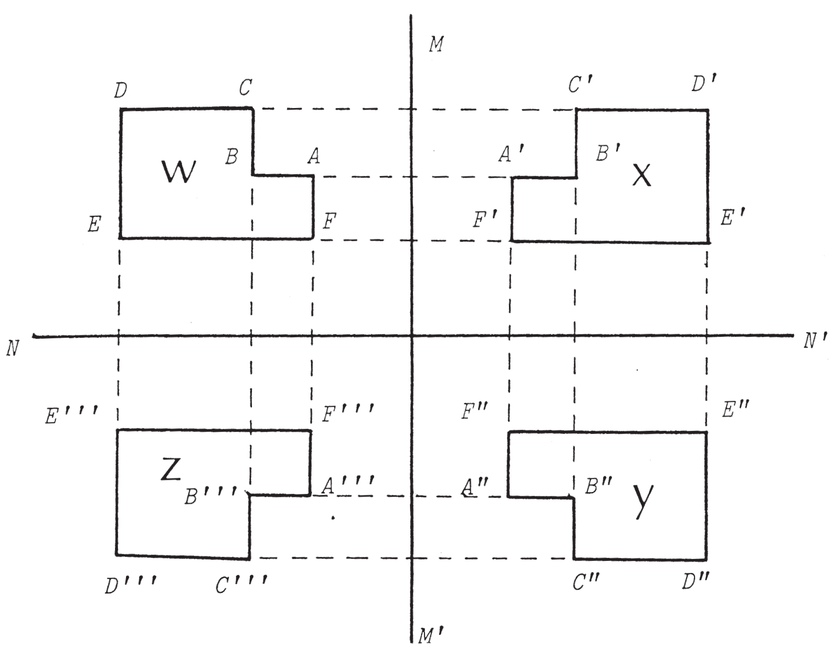
Observa el video; después, comenta con tus compañeros(as) la forma de efectuar la rotación de una figura.

Para aclarar los conceptos que has aprendido, lee y analiza, junto con un compañero(a).

ROTACIÓN DE PUNTOS, LÍNEAS Y FIGURAS

Primeramente se estudiará la rotación con base en simétricas axiales sucesivas; después se verá un procedimiento más directo.

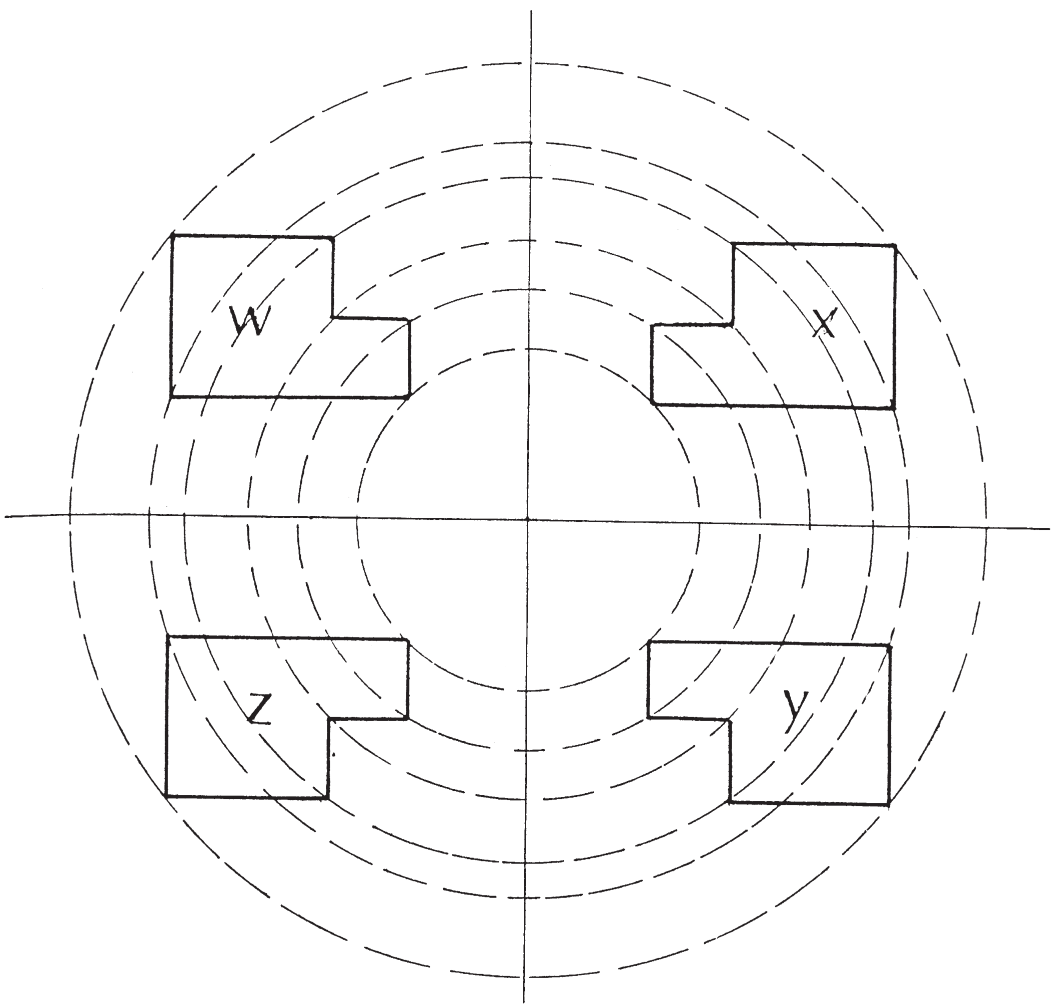
Ejemplo:



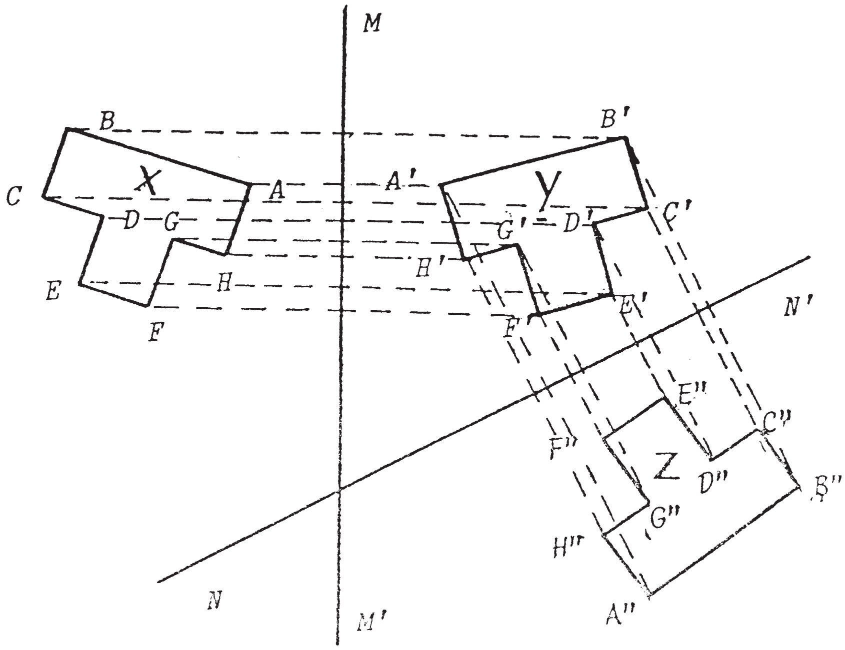
Obsérvese que la figura *X* es simétrica a *W* con respecto al eje *MM'* ; posteriormente, la figura *y* se obtiene de la simetría de la figura *X* con respecto al eje *NN'*. Por último, la figura *Z* se puede obtener por simetría tanto de la figura *y* como de la figura *W*, tomando como referencia al eje *MM'* o al *NN'*, respectivamente.

También se observa que los ejes son perpendiculares entre sí; si con un compás se toma como centro el punto en que se intersecan los ejes de simetría y se abre con una abertura hasta *a* cada uno de los vértices de la figura *W* y se trazan círculos, se observa que cada vértice de cada figura coincide con el círculo trazado. Asimismo se observa que las figuras *W* y *Y*, así como *X* y *Z*, **son congruentes por rotación**; esto siempre se cumple si el giro se hace en el mismo sentido.

También se observa que las figuras *W* y *X*, *W* y *Z, X* y *Y*, y *Y* y *Z* **son congruentes por simetría.**



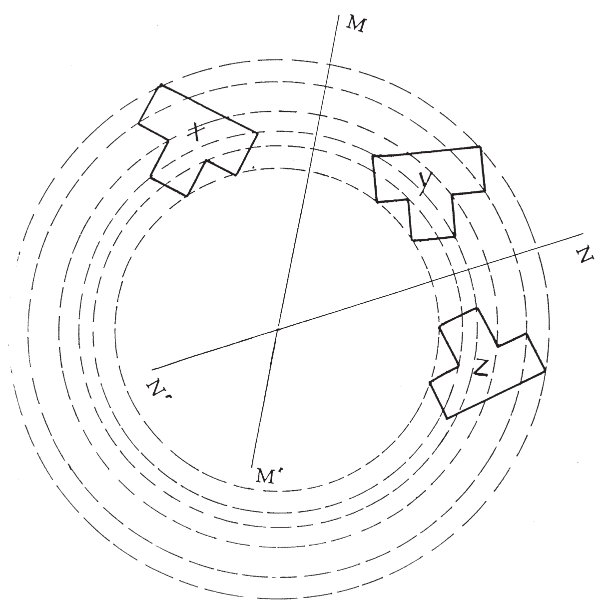
Si se tiene la siguiente figura:



En la figura se observa que:

Para obtener la transformación *Y*, se traza una perpendicular del vértice a la recta *MM'*, la cual se toma como guía para trazar paralelas a ella a partir de los otros vértices de la figura. La figura *X* no es simétrica axialmente con la figura *Y* porque la orientación de los puntos no cambia.

La distancia que hay de cada punto o vértice al punto donde se cortan los ejes, la simetría es siempre igual: si se toma como centro el punto donde se cortan los ejes y se trazan círculos a partir de cada vértice de la figura *X*, se observa que éstas coinciden con los vértices de las figuras *Y, Z;* esto es:



También se observa que las figuras *X* y *Y*, y *Y* y *Z* son congruentes por simetría mientras que las figuras *X* y *Z* son congruentes por rotación.

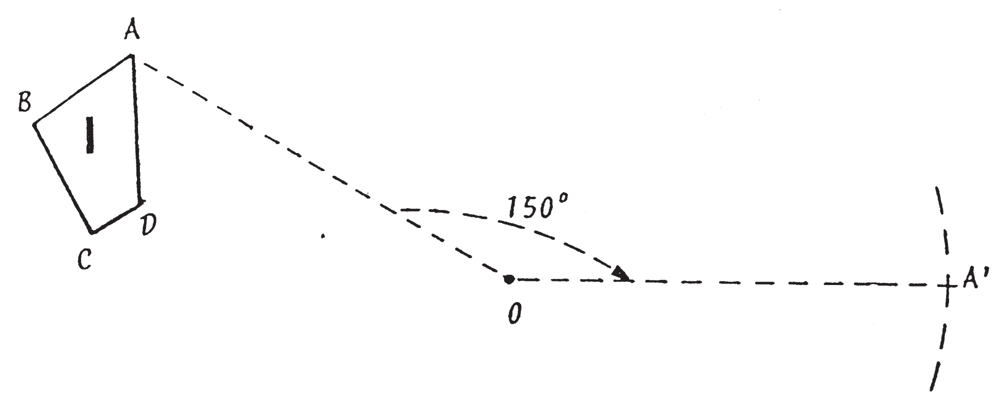
A continuación se verá la rotación de una figura sin usar ejes de simetría, esto con base en un ángulo de giro o amplitud de rotación, indicando el número de grados que se requieren para efectuar la rotación.

Ejemplo:

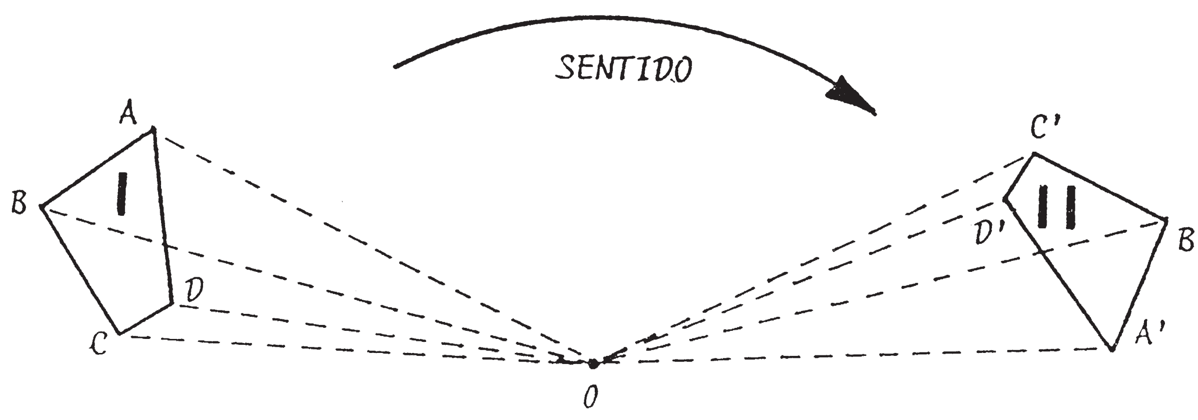
Partiendo de la figura I se va a obtener su rotación teniendo como centro 0, hasta un ángulo de 150°.

Para obtener la rotación se elige un punto cualquiera, que se considerará como centro de giro (0); se traza el segmento de recta *A0*, se toma como referencia para medir 150° con el transportador y se traza el ángulo.

Con el compás se hace centro en 0, se toma la distancia *A0* y se traza un arco que; corte el ángulo trazado, con lo que se obtiene el punto *A'*.



Para efectuar la rotación de los otros vértices se sigue el mismo procedimiento que para el vértice *A*, con lo cuál se obtiene la figura II, que es la rotación de la figura I.



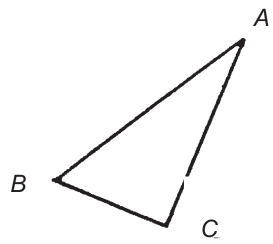
Con base en todo lo expuesto, se tiene que:

La rotación o transformación de cualquier figura se efectúa por medio de una amplitud de giro, tomando como centro de giro o de rotación un punto cualquiera.

Con un compañero(a), escribe la manera de realizar la rotación de una figura cualquiera.

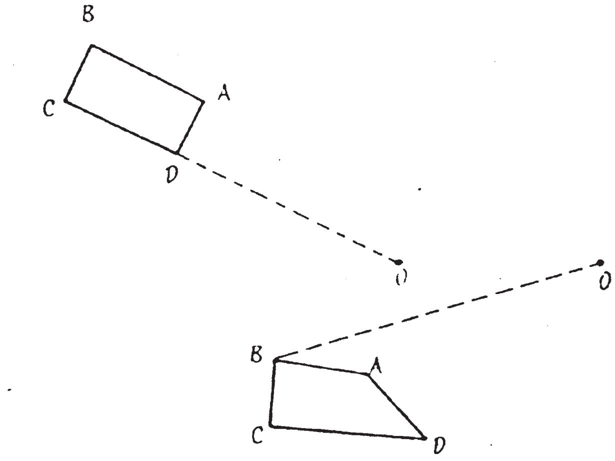
Comparte tu respuesta con el grupo, si es necesario, compleméntala.

Sigue con tu compañero(a) de trabajo, y obtén la rotación del triángulo *ABC*, si el ángulo de giro es de 140° y se tiene el centro de giro *O*.



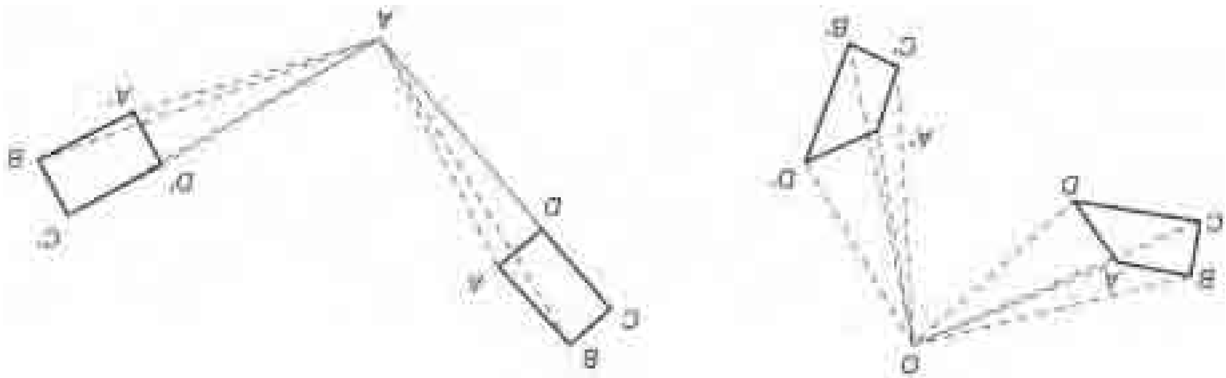
Compara tu dibujo con los de otros compañeros(as); si tienes errores, revisa tus procedimientos

En forma individual, realiza rotaciones de las figuras, a 80º. Hazlo en tu cuaderno.



Compara tus dibujos con los de otro compañero(a); en caso de que tengas duda, consulta la clave.

CLAVE



105 FRENTE A FRENTE

(117)

Simetría central

Conocimiento de la simetría central

Generalmente las simetrías son empleadas en diseño gráfico, en arquitectura, en expresiones artísticas, etc. En esta sesión se verá la simetría central de una figura de manera sencilla.

Observa el video, ya que te mostrará información que te permitirá comprender mejor el tema.

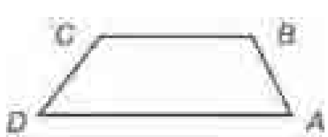
Lee y analiza, con un compañero(a).

SIMETRÍA CENTRAL

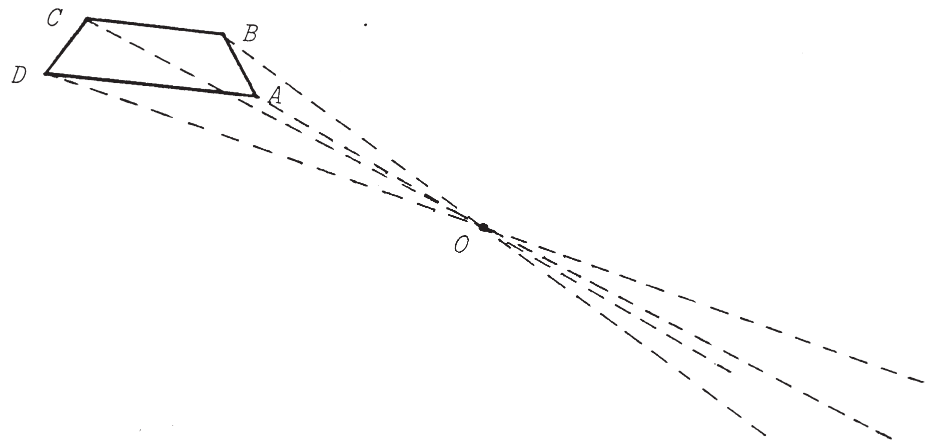
La simetría central es una variante de la rotación, y se efectúa a 180º respecto a un punto 0, llamado punto medio o centro de rotación.

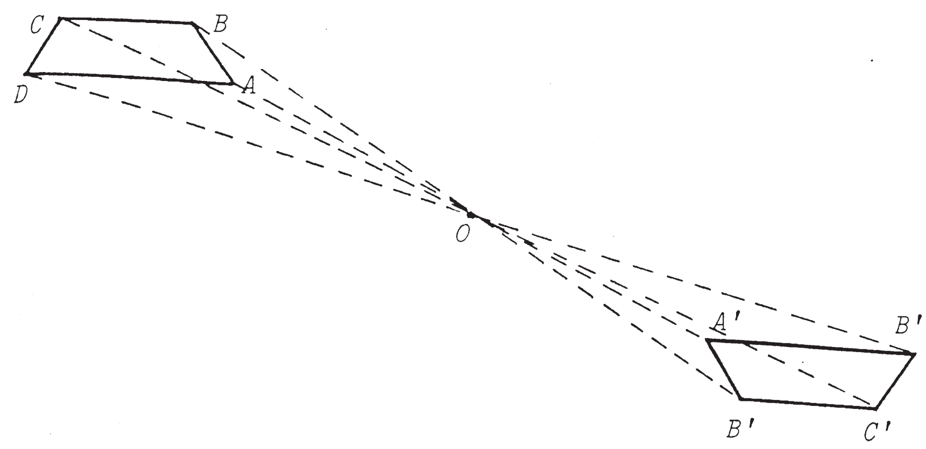
Sigue el procedimiento realizando los dibujos en tu cuaderno.

1. Dada la figura, se marca el punto 0 en forma arbitraria.

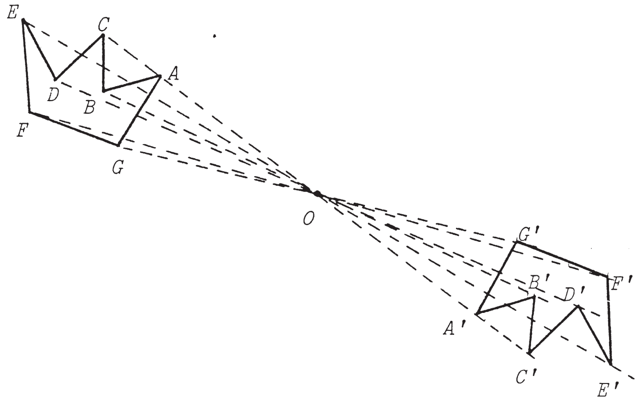


2. Con ayuda de las escuadras se trazan segmentos de recta a partir de cada vértice y se hacen pasar por el punto 0.





Obsérvese la simetría central de la siguiente figura:



Si se toman las medidas de cada uno de los vértices de la figura *A B C D E F G* al punto 0, se observará que son iguales a las de los puntos *A' B' C' D' F' G'* con respecto al mismo centro; asimismo, si se comparan los ángulos de ambas figuras sus medidas serán las mismas.

De lo anterior, se tiene que:

Una rotación de 180° recibe el nombre de **simetría central**.

Únete con otro compañero(a) y reflexiona sobre la forma de realizar la simetría central de una figura cualquiera y escríbela.

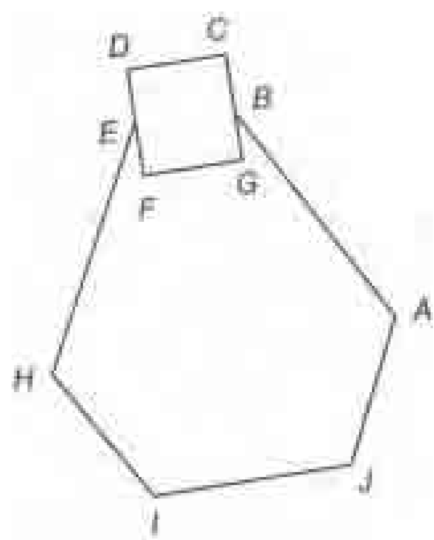
Sigue trabajando con tu compañero(a) y en tu cuaderno realiza la rotación a 180º con base en el punto *P*, de la figura siguiente:

1. Mide el segmento $\overline{HI}$ y el segmento $\overline{H'I'}$ ¿qué medida obtuviste? ¿esto qué indica?

2. Con el transportador mide el ángulo que se forma con $\overline{IJ}$ y $\overline{JA}$; ahora mide el ángulo que se forma con $\overline{I'J}$ y $\overline{J'A'}$; ¿cómo son? ¿ésto qué indica?

3. ¿Cuál es el sentido del giro?

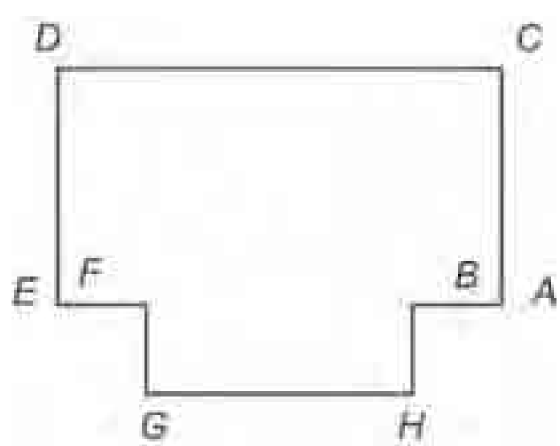
4. Mide la distancia de *D* a *P* y la de *P* a *D'*; ¿cómo son?



5. Con base en las preguntas anteriores, ¿cómo son las figuras?

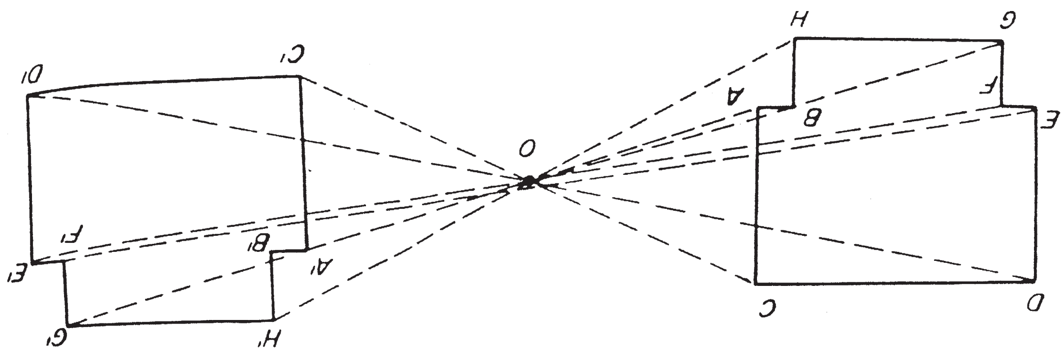
Compara tus respuestas con las de tus compañeros(as); en caso de que sean diferentes, consulta con tu profesor(a).

En forma individual, aplica la simetría central a la siguiente figura:



Coteja tu simetría central con la de otros compañeros(as); en caso existir error, corrige.

CLAVE



203

106 (118) TRAZO DEL DOBLE

Reflexión de una figura con respecto a un punto
Trazo de una figura geométrica respecto a un centro

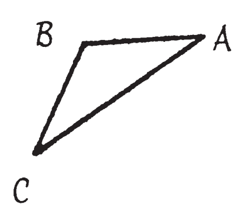
Siempre que un cuerpo sigue una trayectoria circular va a estar cambiando de posición con respecto a la que tenía; a la trayectoria que describe este cuerpo se le llama rotación. Para conocer la forma de efectuar la rotación de una figura geométrica, observa el video, y posteriormente comenta cuál fue la idea principal de éste.

Con un compañero(a), lee, analiza y haz tus propias construcciones en tu cuaderno.

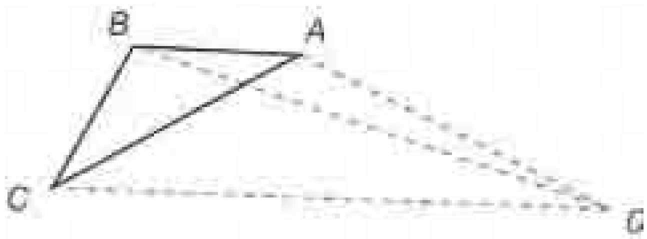
REFLEXIÓN DE UNA FIGURA CON RESPECTO A UN PUNTO

Ya que se estudió la forma de obtener la rotación de una figura, se verá a continuación el procedimiento más directo para llevarla a cabo, el cual es el siguiente:

1. Dada la figura, se elige un punto cualquiera (0) al cual se le llama centro de giro o de rotación.

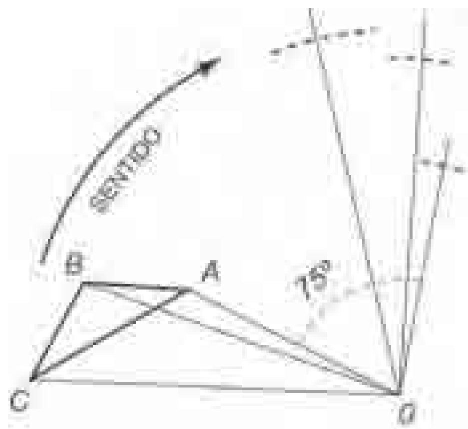


2. Se une cada uno de los vértices con el punto 0, teniéndose $\overline{A0}$, $\overline{B0}$ y $\overline{C0}$.

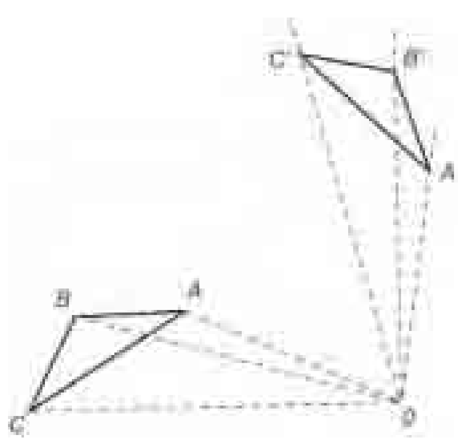


3. Para trazar el ángulo de rotación se debe considerar el sentido en el cual se efectúe el giro, ésto es, si es en el sentido de las manecillas del reloj, el sentido será negativo; si el sentido es contrario a las manecillas del reloj, éste será positivo .

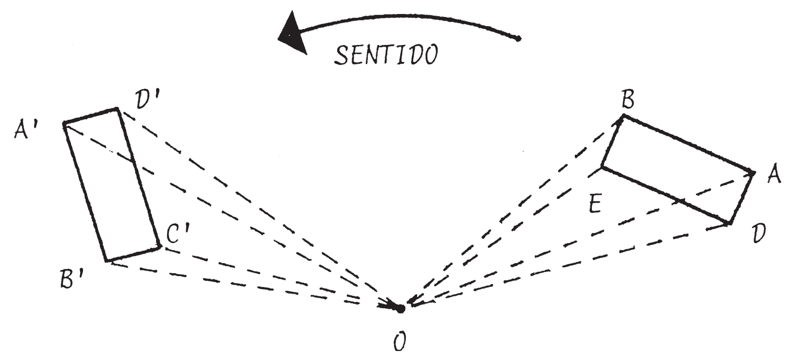
   Para este caso se elige un ángulo de 75°, en sentido negativo; se toma como base $\overline{A0}$ y con ayuda del transportador se mide el ángulo de 75°, esto es, en el sentido de las manecillas del reloj –; este procedimiento también se aplica para $\overline{B0}$ y $\overline{C0}$.



4. Ya que se tienen los ángulos trazados, se toma la distancia que hay de 0 al vértice *A* y, haciendo centro en 0, se obtiene el punto *A'* ; este procedimiento se sigue con los vértices *B* y *C* para obtener los puntos *B'* y *C'* ; se unen los puntos y se obtiene la transformación o rotación de la figura *ABC*.



Obsérvese el siguiente caso: la figura *A B C D* se debe rotar 130°, en sentido positivo.



En las figuras se observa:

1. Una rotación es la transformación que hace corresponder dos puntos del mismo plano.

2. La rotación queda determinada por el centro de rotación en el ángulo de giro y por el sentido del ángulo.

3. Los segmentos que unen pares de puntos homólogos con el centro de rotación, son congruentes.

4. Las figuras homólogas por rotación conservan las medidas de sus lados y de sus ángulos, por lo que son congruentes.

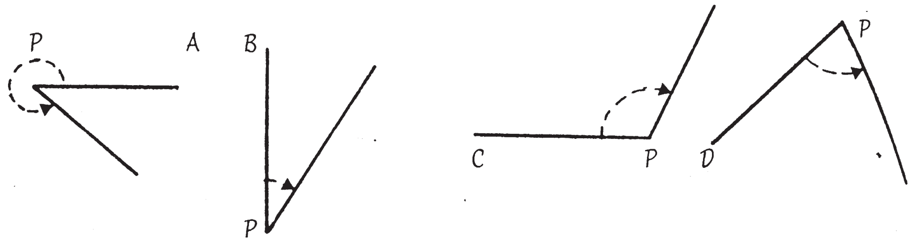
Con base en lo anterior, se tiene que:

Para realizar la rotación de un punto, un segmento de recta o una figura, se necesita un centro de rotación, el ángulo de giro y el sentido de rotación.

Junto con un compañero(a), elijan una figura para efectuar una rotación. Escriban el procedimiento empleado a medida que van efectuando el trabajo. No olviden atender a preguntas como:

¿Qué es centro de rotación?
¿Por qué es importante determinar un ángulo de rotación?

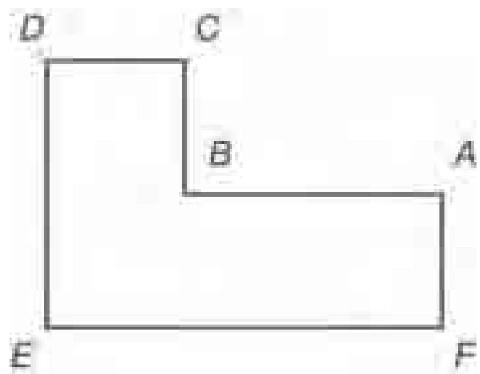
Haz los dibujos en tu cuaderno y escribe cuál es el sentido de los siguientes ángulos con respecto a $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ y $\overline{DP}$.



Compara tu trabajo con el de otros compañeros(as).

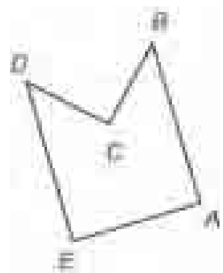
Sigue con tu compañero(a), y realiza lo que se pide en cada caso.

Efectúa la rotación de la figura que se tiene, si el ángulo de rotación es de 145º con respecto a *P*.



. *P*

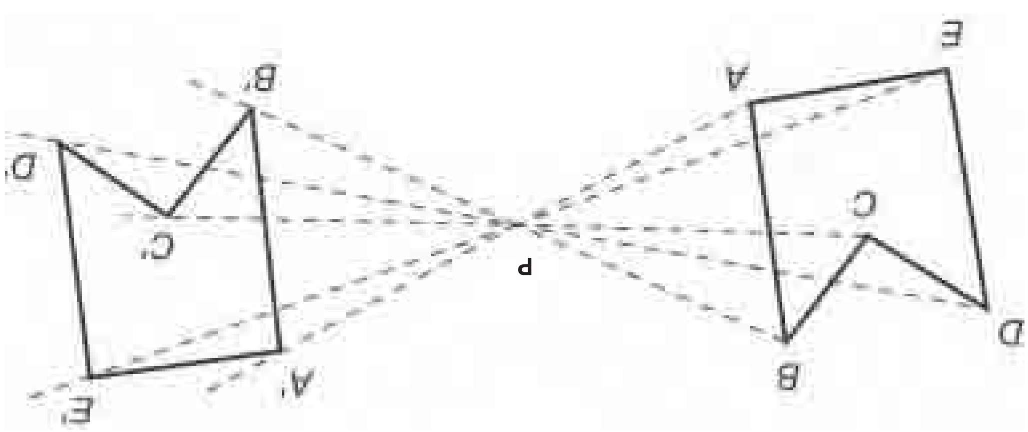
En forma individual, obtén la rotación de la figura *A B C D E*, si el ángulo de giro es de 180º con respecto al punto *P*.



. *P*

Compara tu dibujo con el de otro compañero(a); si existen dudas, consulta la clave.

CLAVE



107 COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

(119) Repaso parcial de lo desarrollado hasta el momento
Integración de los conocimientos adquiridos

Las formas geométricas que has estado estudiando se encuentran en la naturaleza y en muchos objetos o aparatos que ha construido el ser humano.

Para que repases lo estudiado en este núcleo, analizarás muchas cosas que existen en tu entorno y que tú puedes ver cotidianamente. Obsérvalas ahora, teniendo en mente tus conocimientos de geometría.

No olvides que la comprensión que hayas alcanzado es base para el buen aprendizaje.

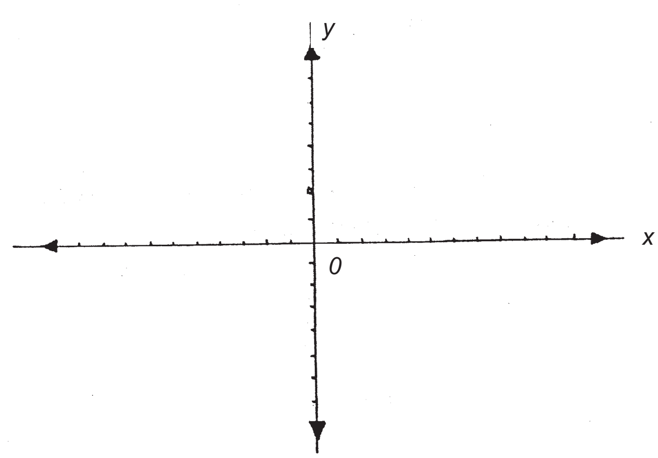
Observa con mucha atención el video.

Encontrarás información suficiente para aplicar los conocimientos adquiridos.

Intégrate a un equipo, con el objeto de comentar y realizar lo siguiente.

1. Localiza en el plano cartesiano los puntos correspondientes a las coordenadas que se te dan. Únelos y traza la figura simétrica a la que obtengas, tomando como eje de simetría el eje de las ordenadas.

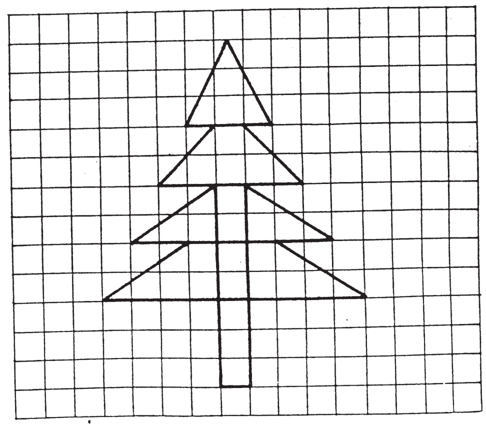
A (–2, 4)	*D* (–9,1)	*G* (–7, –2)	*J* (–1, 1)
B (–1,1)	*E* (–11, –2)	*H* (–5, 0)	*K* (–1, –3)
C (–5, 3)	*F* (–8, 0)	*I* (–4,–2)	*L* (0 – 5)



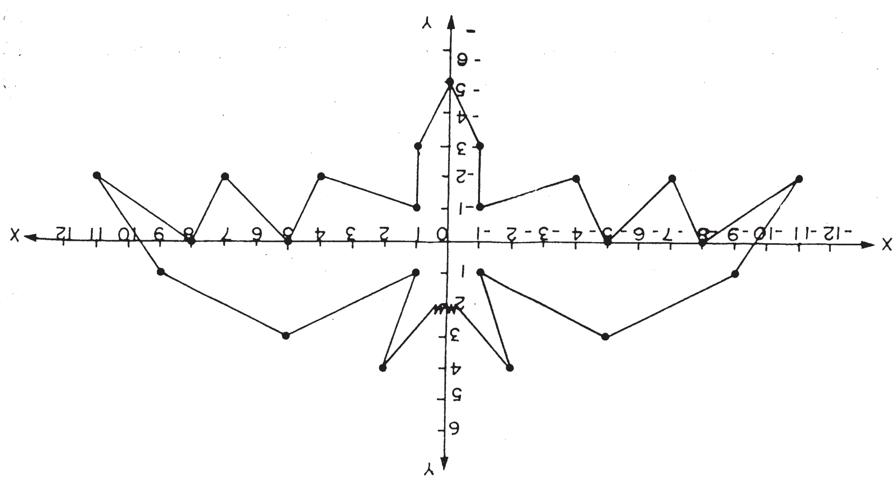
Intercambia el trabajo con algún compañero(a) de otro grupo para que compruebes tus aciertos y corrijas tus errores.

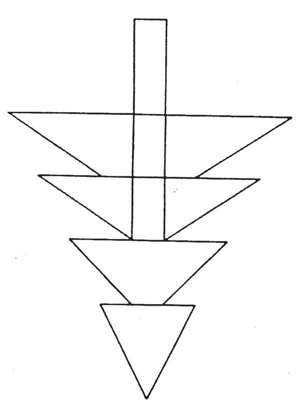
Realiza individualmente lo que se pide.

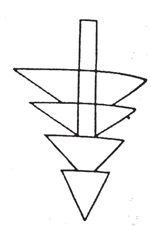
2. En tu cuaderno reproduce en escala 2 :1 el siguiente dibujo:



CLAVE







108 ¿CUERPO CON PICOS?

(120) Construcción de un cubo
Trazo y armado de un cubo

En los aparadores de las tiendas se ven cajas aún sin armar, que están preparadas para facilitar el embalaje de productos que requieren cuidado especial; también existen modelos de dados hechos en papel que tienen la forma de esas cajas; ¿te gustaría aprender a construir una caja?

En esta sesión recordarás cómo trazar y armar un cuerpo geométrico denominado cubo.

Observa el video, comenta por qué es importante conocer a fondo un cubo.

Con un compañero(a) lee y comenta.

CONSTRUCCIÓN DE UN CUBO

En la fachada de una escuela de la antigua Grecia se leía la siguiente frase: “Que no entre quien no sepa geometría". Esto se ha cumplido a través de los años y de los siglos, ya que el ser humano aplica la geometría día a día, en todos los ámbitos.

Un ejemplo de ello es la tendencia hacia el cubismo en las artes plásticas, que hace su aparición a principios del siglo XX en París.

El cubismo se manifiesta en la representación de los objetos bajo formas geométricas y uno de sus iniciadores fue Pablo Ruiz Picasso, pintor español (1881-1973).

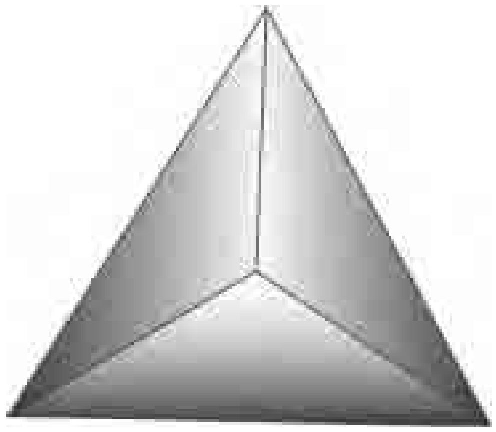
Desde la época de mayor esplendor de Grecia, hubo interés por cuerpos con características semejantes a las del cubo.

Platón, filósofo griego (428-349 a.C.), llegó a establecer que había cinco poliedros regulares, que son:

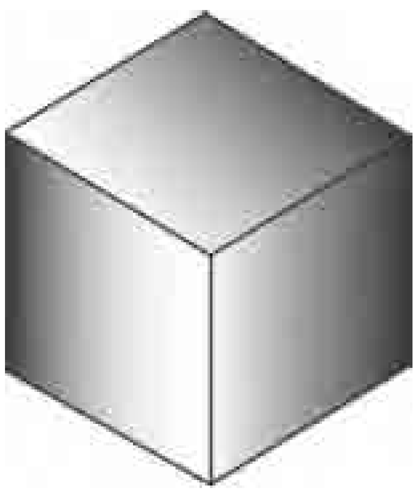
Arlequín (1915) Picasso*

* Diccionario Enciclopédico Grijalbo, Barcelona, Grijalbo, 1991, p. 532.

1. El **tetraedro**. Constituido por cuatro caras, cada una en forma de triángulo equilátero.

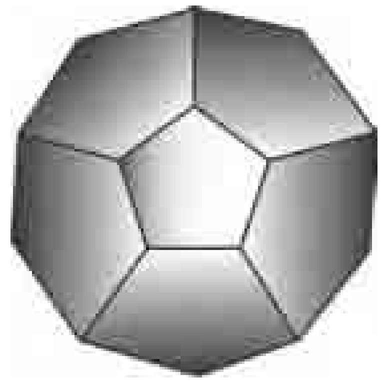


2. El **cubo** o **hexaedro**. Tiene seis caras, cada una de ellas forma un cuadrado.

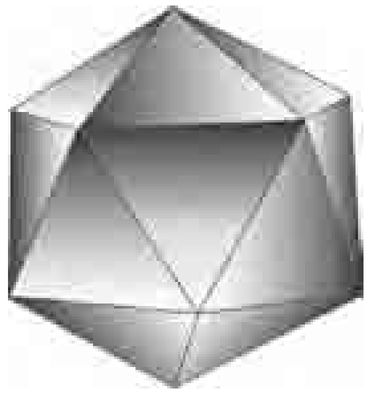


3. El **octaedro**. Tiene ocho caras, cada una en forma de triángulo equilátero.

4. El **dodecaedro**. Presenta doce caras que son pentágonos regulares.



5. El **icosaedro**. Formado por veinte caras que son triángulos equiláteros.

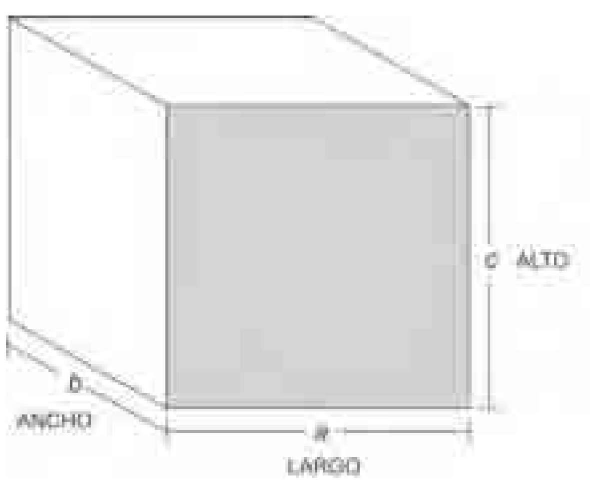


Como puede observarse, el cubo es un poliedro regular porque todas sus caras son iguales. Pero también se le considera como un prisma regular ya que sus aristas y ángulos son congruentes entre sí.

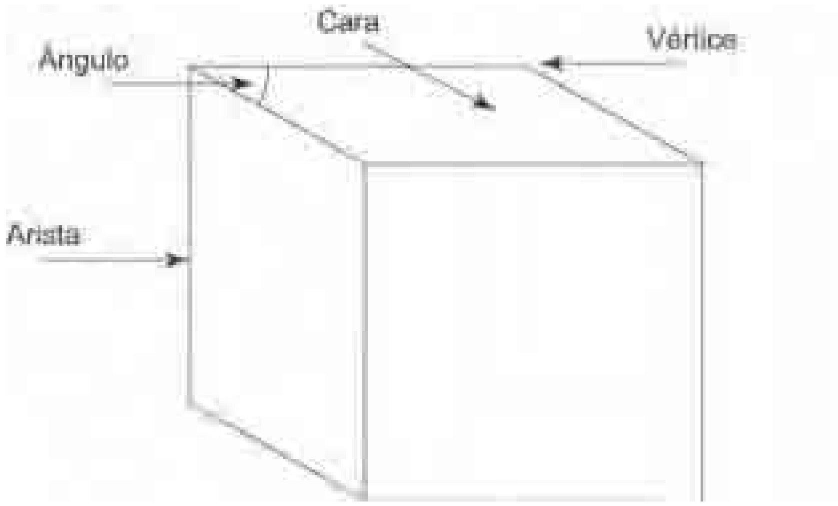
A continuación se procede a analizar el cubo en cuanto a sus dimensiones y partes:

Las tres dimensiones del cubo son:

a) largo b) ancho c) alto



Las partes de un cubo son:



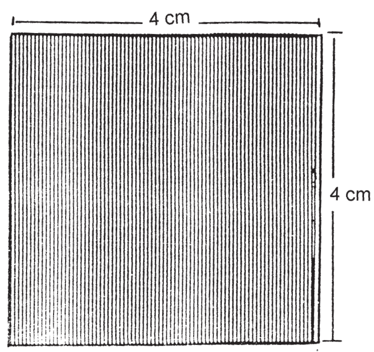
Caras, aristas, vértices y ángulos.

El número y características de cada una de sus partes son:

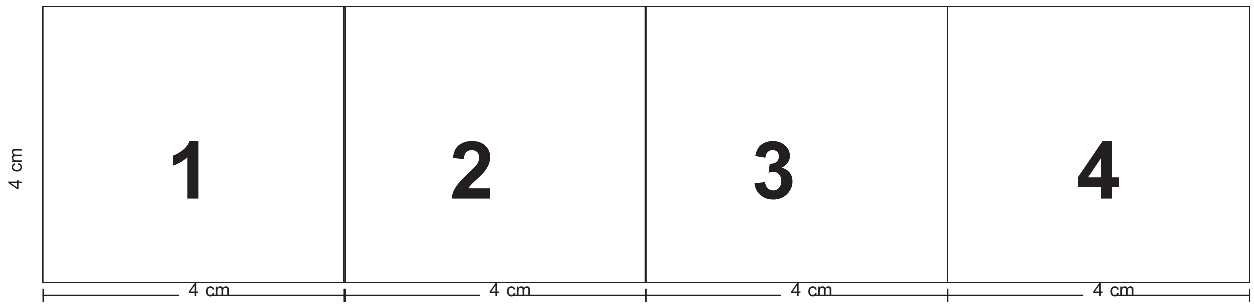
Caras:	Seis cuadrados congruentes.
Aristas:	Doce
Vértices:	Ocho
Ángulos:	24 (ángulos rectos)

A continuación se describen los pasos para trazar el cubo; síguelos y construye tu cubo.

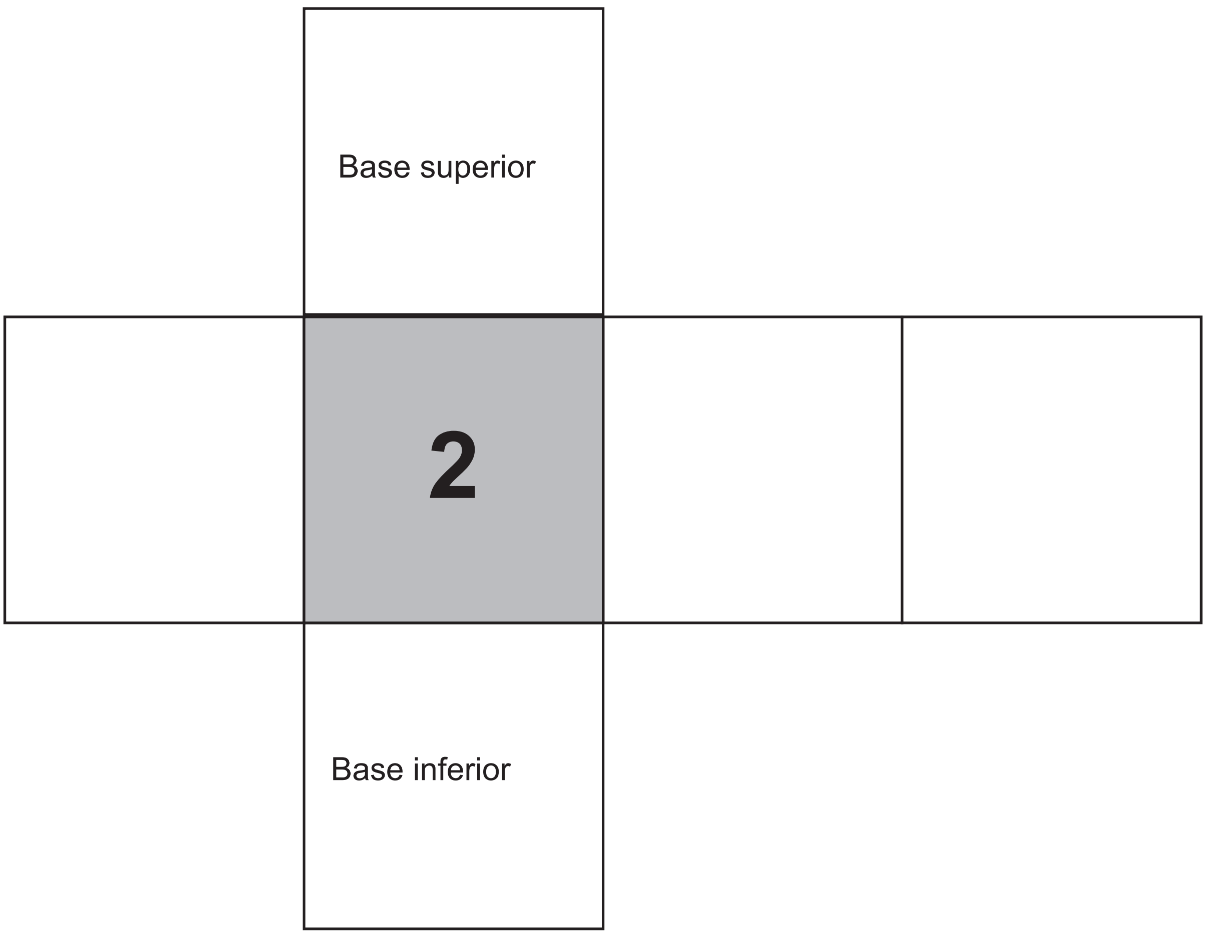
1. Se elabora la plantilla de un cuadrado (en el modelo, cada lado mide 4 cm).



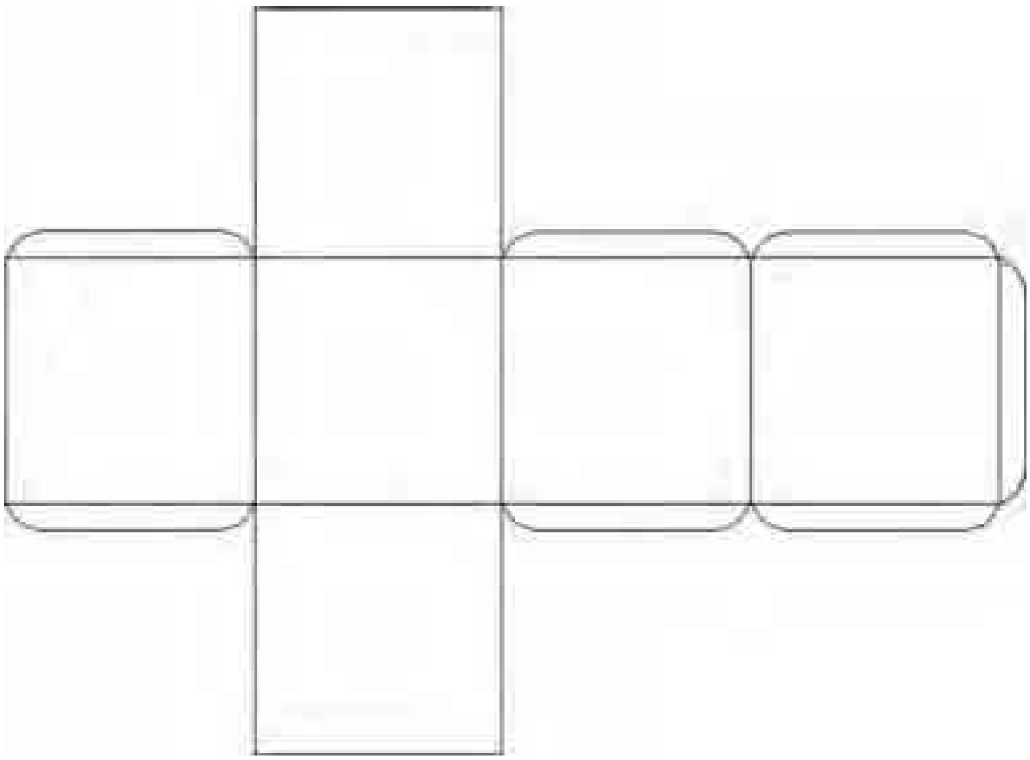
2. Se copia la plantilla sobre un papel grueso (cartulina), cuatro veces, de tal manera que queden alineados los cuadros.



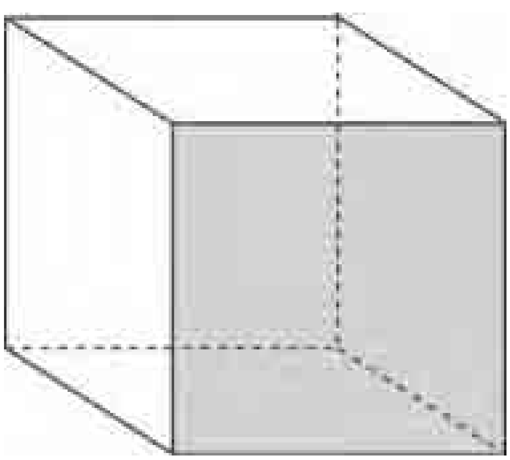
3. Una vez realizado lo anterior, se procede a copiar la plantilla abajo y arriba del cuadro 2, para tener las bases (inferior y superior) del cubo.



4. Posteriormente se procede a dibujar las pestañas, que servirán para unir las 6 caras dibujadas; el trazo del cubo queda de la siguiente manera:



5. Por último, se procede a recortar el modelo del cubo y se arma éste; el cubo queda así:



El trazado y armado del cubo sirve para familiarizarse con las relaciones que existen entre las diversas partes de ese cuerpo, que resulta muy especial por ser congruentes sus caras.

Este conocimiento servirá de base para entender la estructura de otros sólidos geométricos con características parecidas.

Con tu compañero(a) contesta en tu cuaderno.

1. ¿Cuántos poliedros regulares identificó Platón?

2. .¿Con qué otro nombre se conoce al cubo?

3. ¿El cubo es un poliedro regular? (Sí) (No) ¿Por qué?

4. Con tus propias palabras, define cómo es el cubo:
   ¿Cuántas caras tiene?, ¿cómo son?
   ¿Cuántas aristas tiene? ¿cómo son estas entre sí?

Individualmente, traza y construye un hexaedro de 10 cm; utiliza cartulina, cartoncillo u otro material similar que exista a bajo costo en tu comunidad.

Muestra tu trabajo a tus compañeros(as) y al profesor(a).

109 (121) ¿PARA QUÉ?

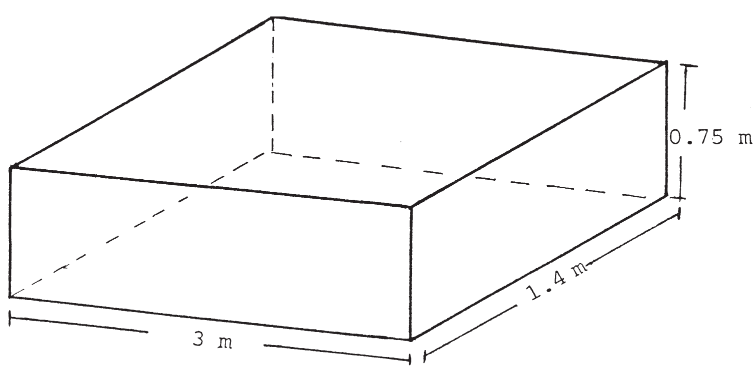
Paralelepípedos
Trazo y armado de paralelepípedos

El paralelepípedo es un cuerpo con forma tridimensional. Por lo tanto tiene volumen, ya que ocupa un espacio real. El volumen de cualquier objeto puede percibirse de muchas maneras; una de ellas consiste en obtener la sensación de volumen por medio de un dibujo, representando las tres dimensiones en un plano. Por esta razón puedes trazar y armar un paralelepípedo. ¿Lo has intentado? ¿Quieres saber cómo se realiza?

Observa atentamente el video. Por medio de él conocerás el procedimiento para desarrollar el trazo de un paralelepípedo y cómo se arma para lograr construirlo. Cuando termines reúnete con tus compañeros(as) a intercambiar ideas al respecto.

Lee, analiza y haz las construcciones necesarias.

PARALELEPÍPEDOS



Este dibujo corresponde a un sólido geométrico que se conoce con el nombre de paralelepípedo. Entonces:

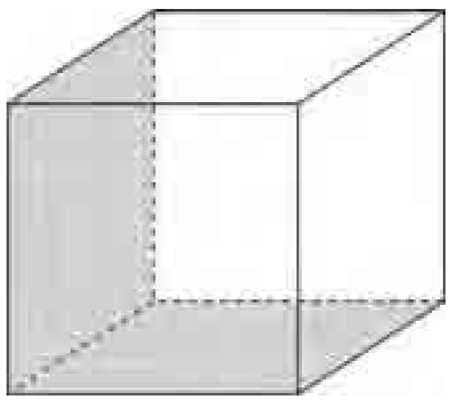
Paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos.

Es conveniente recordar que los paralelogramos son figuras cuyos lados opuestos son paralelos, como en el cuadrado, rectángulo, rombo y romboide. La mayoría de las cajas son ejemplos claros y sencillos de la forma que tiene un paralelepípedo.

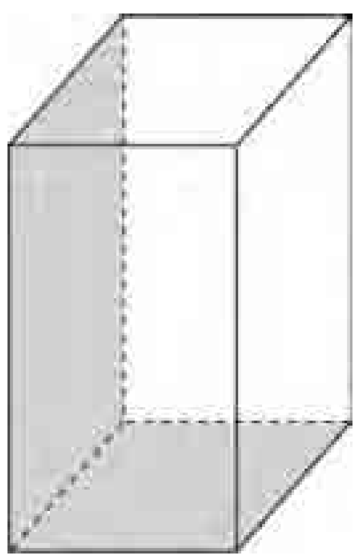
Los paralelepípedos tienen seis caras. Dos de ellas pueden considerarse como bases y cuatro, las caras laterales.

En el dibujo que se presentó anteriormente, las seis caras son rectángulos. Pero no siempre es así. También hay paralelepípedos en los que:

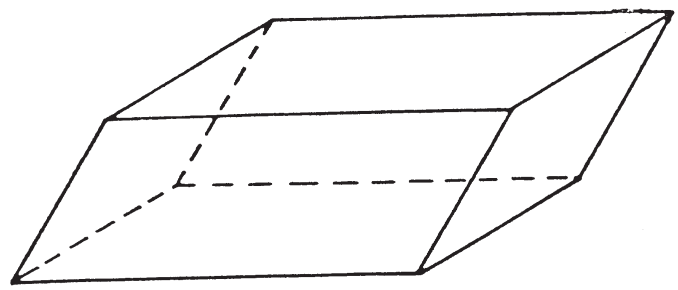
a) Las seis caras son cuadrados.



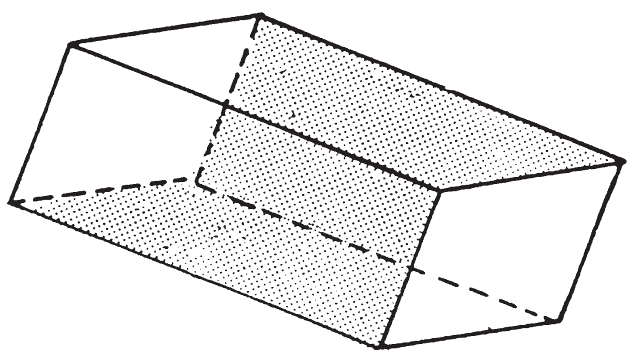
b) Dos caras son cuadrados y cuatro son rectángulos.



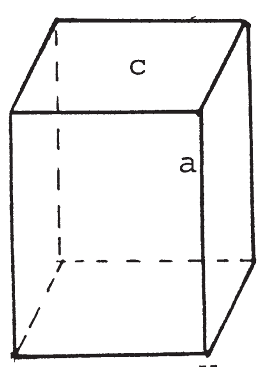
c) Las seis caras son rombos o romboides.



d) Dos caras son rombos o romboides y cuatro son rectángulos.



También es importante considerar que todo paralelepípedo tiene doce aristas (intersección de dos caras) y 8 vértices (intersección de dos aristas). En la siguiente figura, se señala con ***a*** una de las aristas, con ***v*** uno de los vértices y con ***c*** una cara.



Volviendo a la situación planteada originalmente, se aprecia que el paralelepípedo tiene 3 dimensiones, que son **largo, ancho** y alto (**grosor**, profundidad).

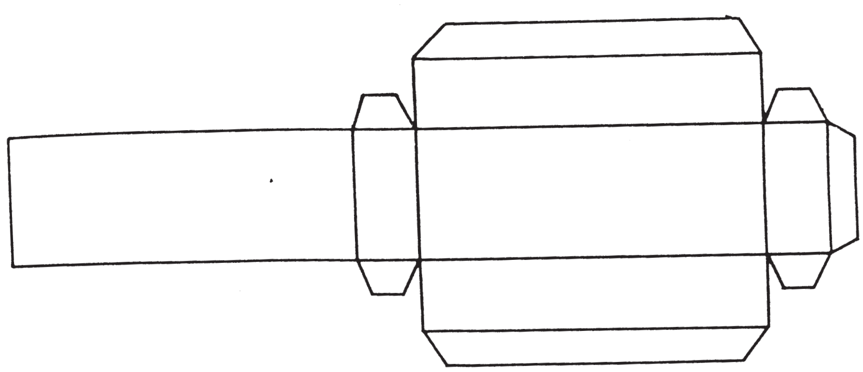
Si se desea calcular el volumen del sólido representado inicialmente, se multiplica largo, por ancho y profundidad:

$$3m \times 1.4m \times 0.75\ m = 3.15m^3$$

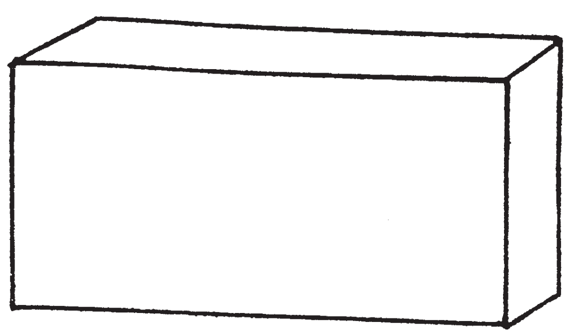
Ahora bien, se ha dicho que una caja, objeto usado con mucha frecuencia en la vida diaria, generalmente tiene la forma de un paralelepípedo.

Como consecuencia, es muy común que se requiera trazar y armar paralelepípedos (cajas), pues sus usos son múltiples.

A continuación se presenta el desarrollo de un paralelepípedo: se trata de un dibujo plano que sirve de base para la figura tridimensional requerida, si se recorta y se pega adecuadamente.



Hay que considerar que las pestañas que se encuentran con los bordes, sirven para pegar la figura. Una vez armado, el paralelepípedo se ve así:

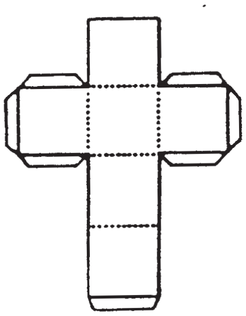


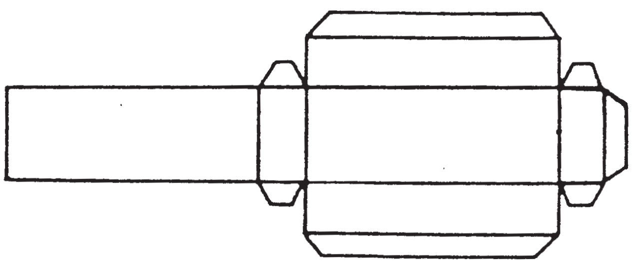
La industria elabora grandes cantidades de cajas para empacar mercancías. Por lo tanto, es necesario diseñar el desarrollo de muchos paralelepípedos y armarlos, para estar al día en la demanda por parte de los compradores de este tipo de objetos. Por esta razón puede concluirse que resulta útil saber trazar y armar paralelepípedos.

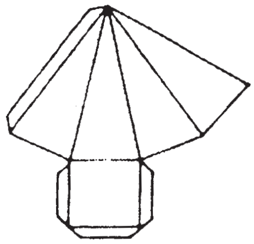
Intégrate a un equipo de trabajo y relaciona ambas columnas, colocando dentro de los paréntesis la letra que corresponda, hazlo en tu cuaderno.

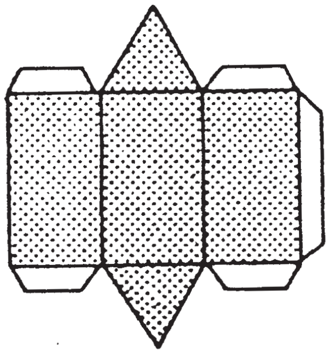
a) Es un paralelogramo.	( ) seis
b) Tiene seis caras.	( ) intersección de dos caras
c) Número de vértices de un paralelepípedo.	( ) una caja
d) Objeto que la mayoría de las veces tiene forma de paralelepípedo.	( ) ocho
e) Arista	( ) paralelepípedo
	( ) rombo

Con el mismo equipo, observa detenidamente los siguientes dibujos de figuras que son desarrollos del trazo de sólidos geométricos, para que decidas los que correspondan a paralelepípedos. Haz los modelos y constrúyelos.









Muestra tu trabajo a tus compañeros(as).

Continúa con el trabajo de equipo. En tu cuaderno dibuja objetos diferentes que tengan forma de paralelepípedos.

Compara tus dibujos con los de tus compañeros(as).

110 RADIOGRAFÍA DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

(122)

Trazo de cuerpos geométricos
Representación de las partes de un dibujo

Cuando observas el dibujo de un cuerpo geométrico aprecias que el trazo de las diferentes líneas no es uniforme. Esto se debe a que cada tipo de línea representa algo en particular, es decir, tiene un significado específico.

Observa el video. Te darás cuenta de la forma en que se utilizan diferentes tipos de líneas en la construcción de cuerpos geométricos, al finalizar, intercambia ideas con tu compañero(a) más próximo.

Con un compañero(a), lee y analiza.

TRAZO DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Trazar cuerpos geométricos es algo que se realiza con mucha frecuencia. Por lo tanto, es necesario saber cuáles son los lineamientos para realizar los trazos de las diferentes partes que los integran, de tal manera que se entienda con claridad lo que se está representando con cada tipo de línea utilizada.

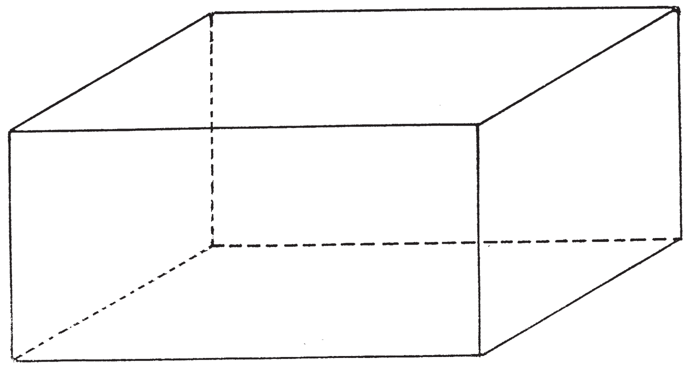
Enseguida se representan los diferentes tipos de líneas que son empleadas en el trazo de cuerpos geométricos.

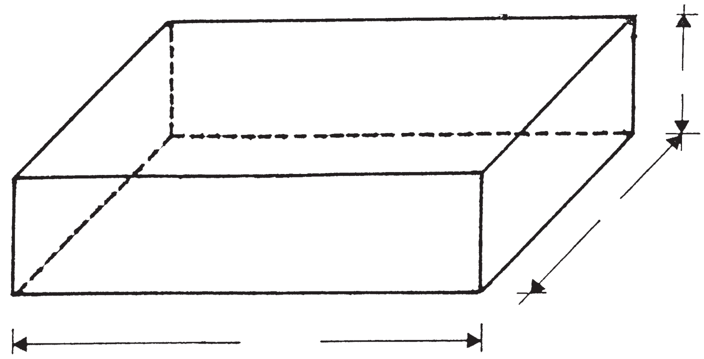
La de arriba es una línea gruesa que se usa para los contornos y las arista visibles.

La línea formada por pequeños segmentos de recta, se utiliza para representar aristas ocultas.

Esto se muestra en el dibujo de la siguiente figura tridimensional.

Para indicar las dimensiones (acotamientos) de los dibujos realizados, se utilizan líneas continuas más finas, como se aprecia en el ejemplo que sigue.

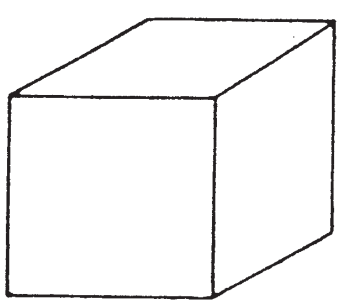


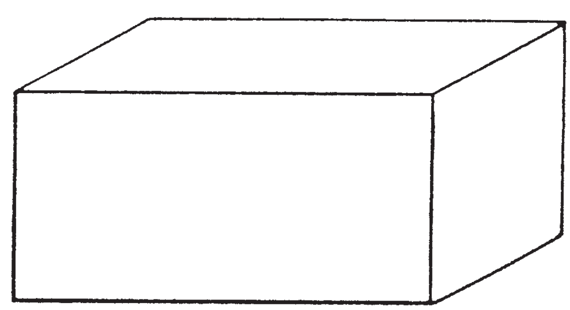


El conocimiento de las líneas aquí presentadas, y su correcta aplicación en el trazo de cuerpos geométricos, contribuye a que se pueda realizar con mayor detalle el estudio de las características principales de los sólidos geométricos.

Intégrate a un equipo de trabajo y explica el tipo de líneas que se utilizan para dibujar sólidos.

Con el mismo equipo de trabajo, realiza dibujos como estos en tu cuaderno, utiliza la línea formada por pequeños segmentos de recta, para señalar las aristas ocultas de los cuerpos geométricos.





Revisa tu trabajo, junto con los integrantes de otro equipo. Si te equivocaste corrige.

111 LO QUE NO SE VE

(123)

Vistas de un cubo

Trazo de la vista de un cubo

Dibujar un objeto te puede servir para analizarlo por todos sus lados. Es importante conocer la manera específica de hacerlo porque, al representar en un plano una figura tridimensional de la manera como la vemos en la realidad, resulta que algunas de sus partes no se ven.

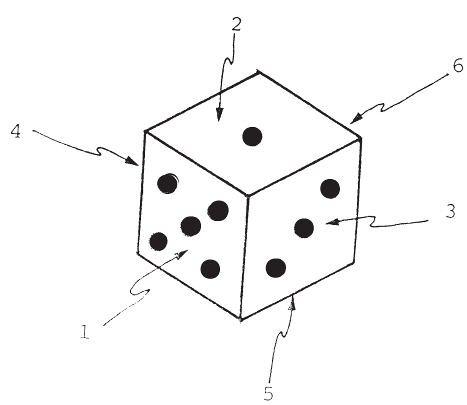
Observa el video. Te darás cuenta del procedimiento que se utiliza para trazar las vistas de un cubo, y así representar por medio del dibujo incluso lo que no se ve. Cuando finalices comenta con dos compañeros(as) lo que hayas entendido.

Con un compañero(a), lee y analiza:

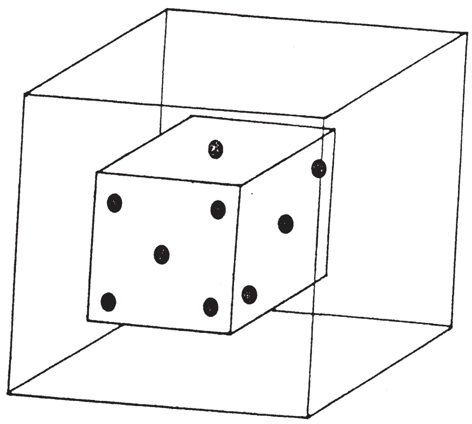
VISTAS DE UN CUBO

Cuando un objeto está dibujado, algunas de sus partes se encuentran ocultas. Sin embargo, puede ser necesario analizarlo por todos sus lados, como si se tuviera en la mano y se le pudiera mover libremente. Para tal fin, existe un procedimiento muy práctico que se conoce con el nombre de "vistas".

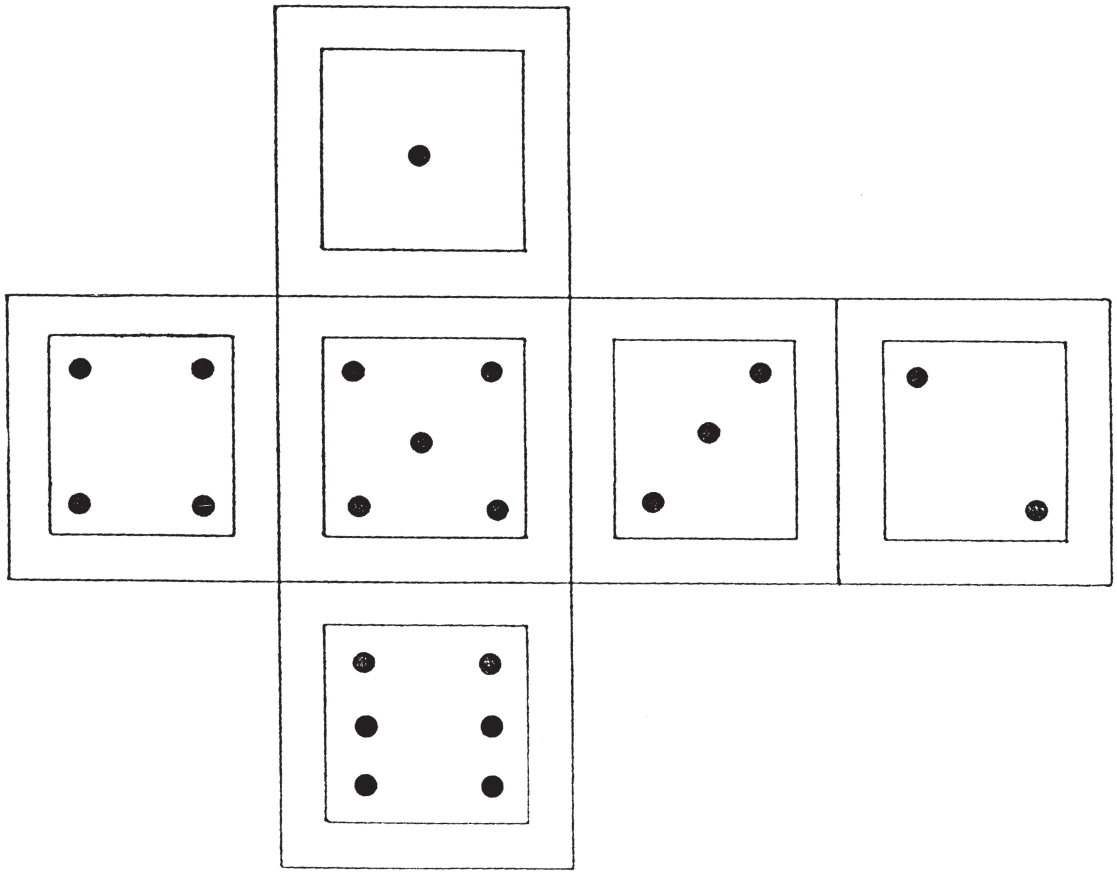
Cuando se requiere representar un cuerpo geométrico mediante sus diferentes vistas, conviene escoger una de ellas, que recibe el nombre de vista frontal. Lo usual es que el cuerpo se observe en direcciones que forman ángulos rectos, con respecto a la vista frontal. De esta manera puede saberse cuáles son sus vistas. A continuación, con un dado se ilustra este procedimiento:



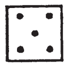
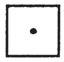
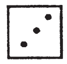
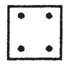
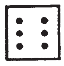
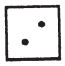
Imagínate que existe una caja de cristal transparente. La caja tiene forma de cubo y dentro de ella está el dado, de tal manera que pueden verse sus caras a través de la caja mencionada.



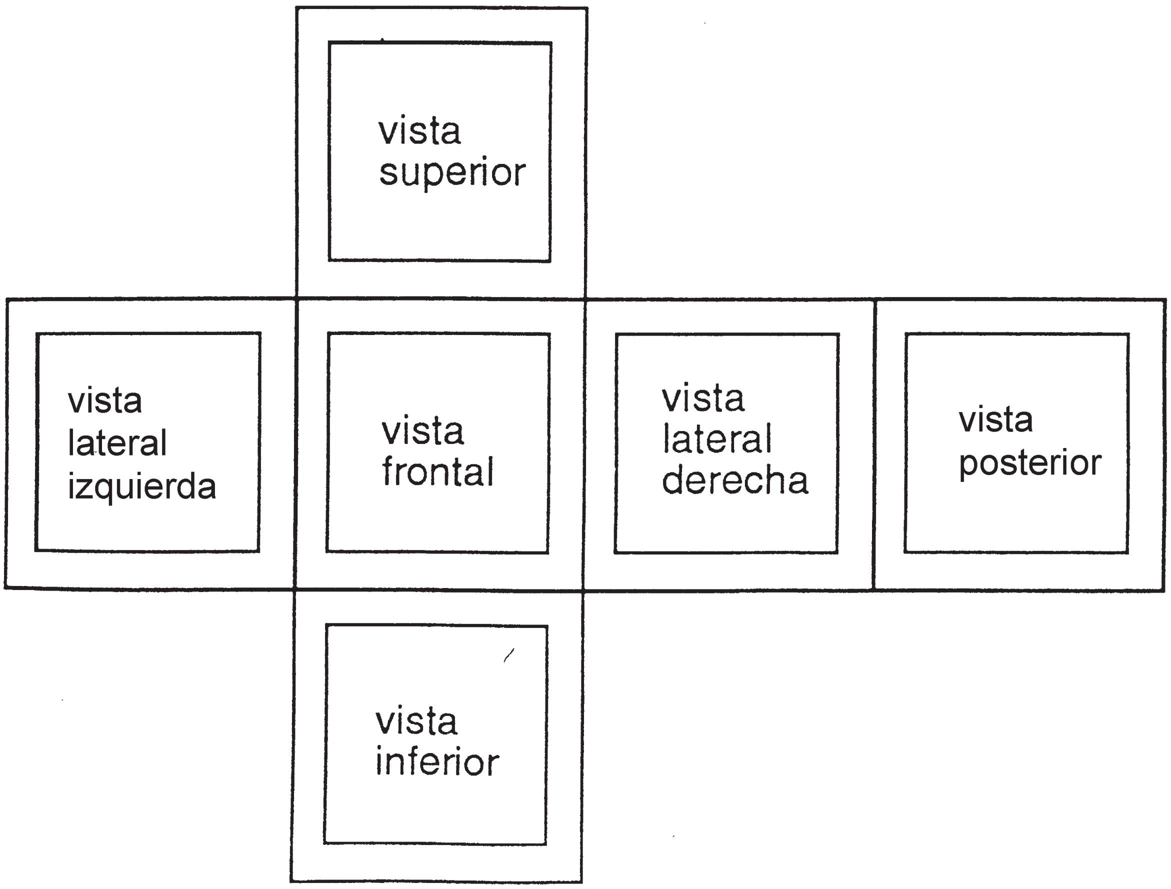
Imagínate que en cada una de las seis paredes interiores de la caja pudiera quedar impresa, como sobre papel fotográfico, una cara distinta del dado, de acuerdo con su respectiva posición. Supóngase también que la caja pudiera desarmarse de la manera como quedaría trazado en un plano el desarrollo de un cubo. Las vistas del dado se observarían de la siguiente manera:



Las vistas tienen nombres específicos, que son los siguientes:

1. Vista frontal 
2. Vista superior 
6. Vista lateral derecha 
7. Vista lateral izquierda 
8. Vista inferior 
9. Vista posterior 

Enseguida se presenta un esquema con la posición relativa de las seis vistas.



La representación de las vistas del cubo es sencilla, porque todas sus caras son iguales; no obstante, si el ejemplo se estudia con atención, servirá para entender cómo se representan las vistas de otros cuerpos geométricos en los cuales hay variación en las dimensiones.

Contesta en tu cuaderno, según hayas aprendido de la lectura.

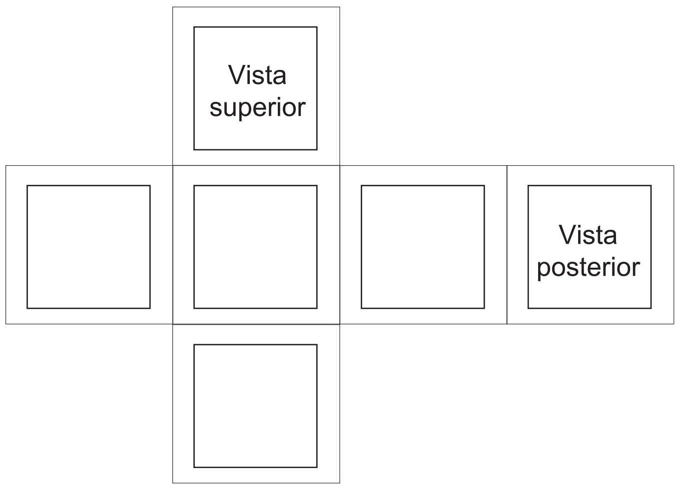
1. ¿Cuál es el nombre del procedimiento que se emplea para analizar un objeto por todos sus lados por medio del dibujo?

2. ¿Cuál es la vista que se escoge para iniciar la representación de un cuerpo geométrico por medio de sus vistas?

3. ¿Cuántas vistas se emplean para representar el dibujo de un cuerpo geométrico?

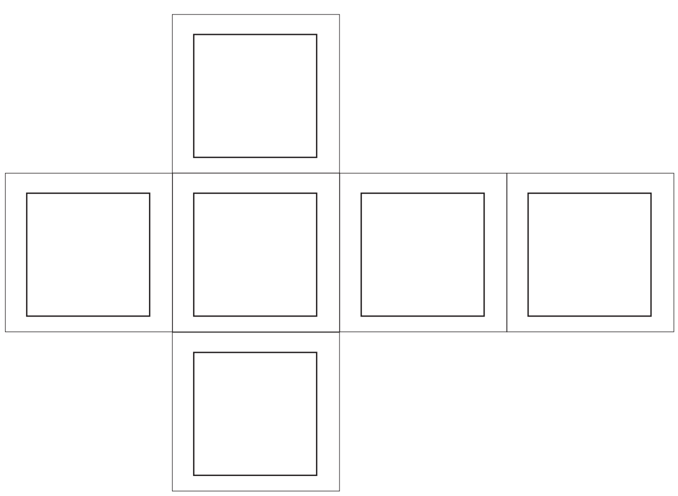
Muestra tus respuestas a un compañero(a).

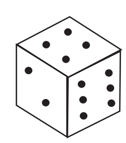
Con un compañero(a), dibuja el esquema y anota qué vista se coloca en cada cuadro vacío.



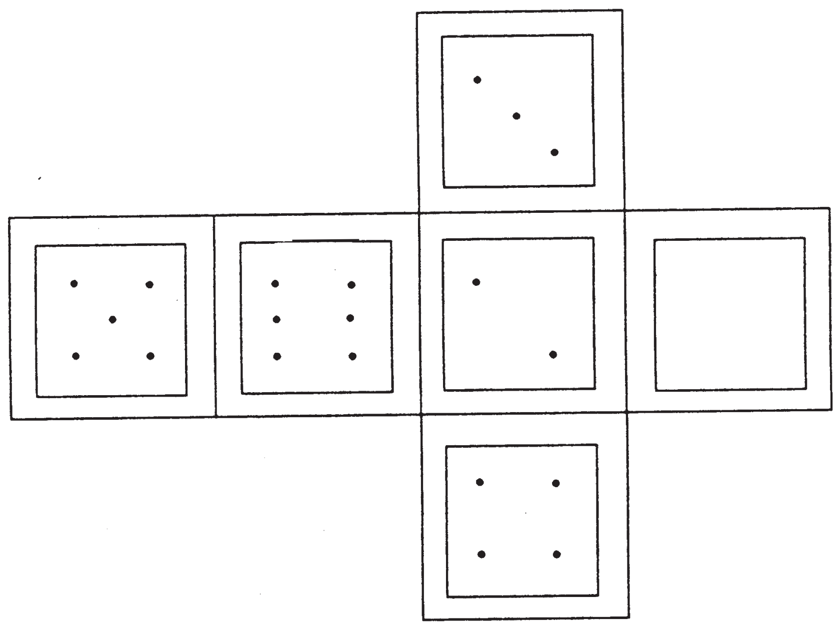
Individualmente, dibuja el esquema en blanco para colocar las seis vistas del dado que aparece a continuación.

Compara tus vistas con las de la clave que se da a continuación. Si tienes errores corrígelos.





CLAVE



112 VARIOS PUNTOS DE VISTA

Vista de un paralelepípedo

(124) Trazo de las vistas de un paralelepípedo

En este momento que estás dentro de tu salón de clase, ¿podrás decir si el salón es un paralelepípedo? ¿Serías capaz de dibujar una a una las paredes de tu salón, así como el techo y el piso del mismo?

Observa el video, en el cual descubrirás lo sencillo que es determinar las vistas de un paralelepípedo y el trazo de éstas.

Lee con un compañero(a); pon especial atención en los criterios para determinar la vista frontal, las parejas de vistas congruentes, las dimensiones de cada una de las vistas y la relación que guardan entre sí.

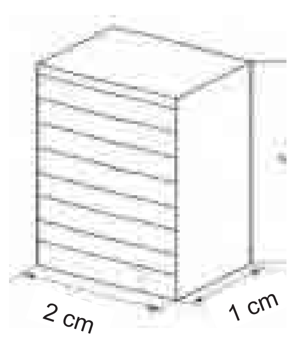
VISTAS DE UN PARALELEPÍPEDO

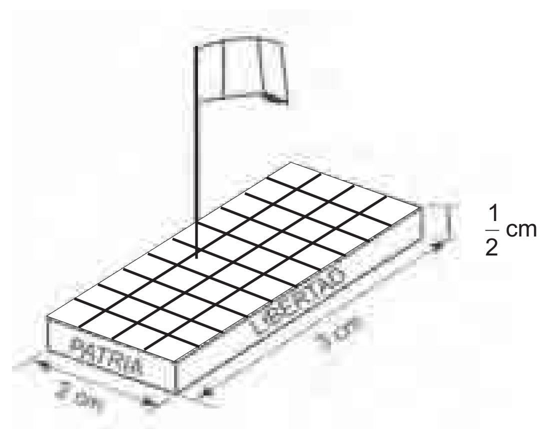
El procedimiento de las “vistas” de un objeto o cuerpo fue la solución adecuada al problema que tenían los inventores o científicos cuando solicitaban al técnico que construyera el objeto que ellos habían ideado. Como no siempre era comprendida la idea en todos sus detalles, las “vistas” proporcionarían la ayuda necesaria para obtener la descripción exacta y detallada del objeto o cuerpo.

Las vistas de un paralelepípedo corresponderán a cada una de sus seis caras. En el caso de los paralelepípedos en donde no todas sus caras son congruentes es importante considerar lo siguiente:

La vista frontal debe proporcionar la mayor información posible por ser la que mejor identifica al cuerpo u objeto (en este caso al paralelepípedo); además, debe considerar la posición normal de éste.

La vista frontal es la más importante y debe ser la base para trazar las otras vistas. De su elección adecuada depende el número de vistas necesarias para definir el objeto sin ambigüedad.



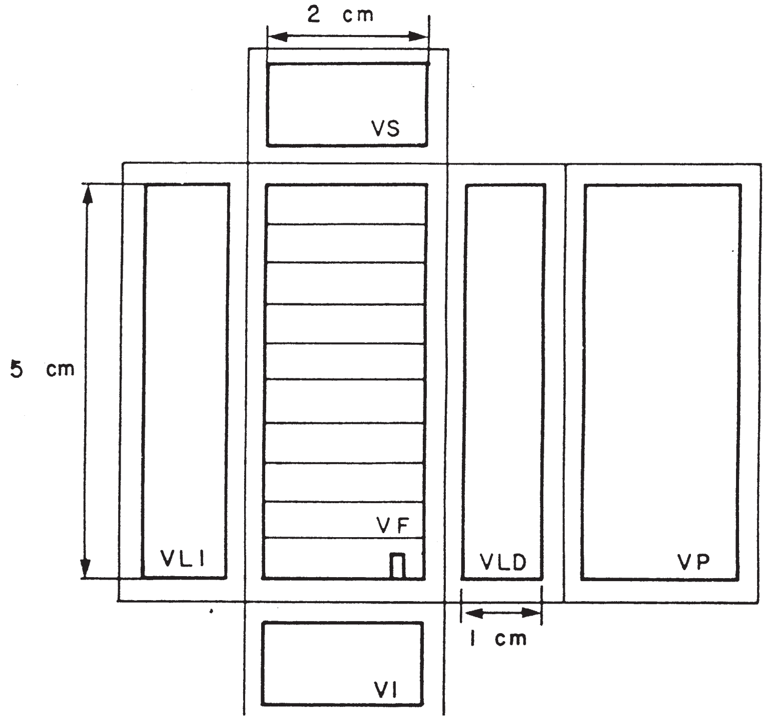


El dibujo anterior muestra dos ejemplos de paralelepípedos: el edificio de diez pisos y la plataforma cuya base es un rectángulo.

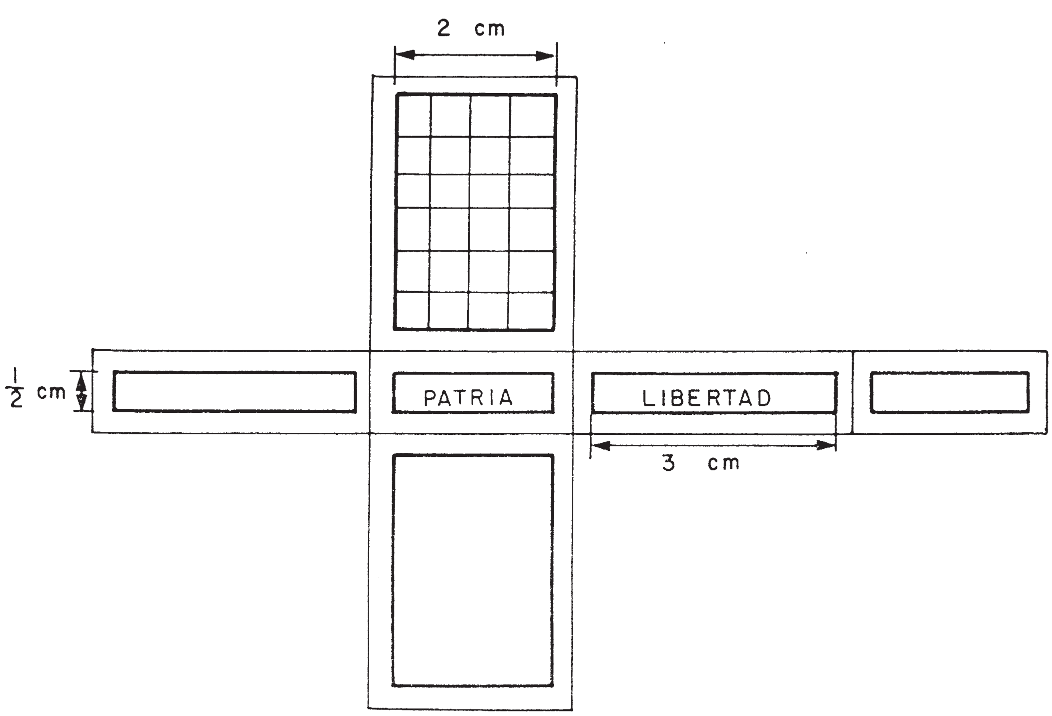
Imaginando que la reproducción a escala del edificio y la plataforma están suspendidas cada una dentro de una caja de cristal, en cuyas paredes quedan impresas las caras de esas reproducciones, se ilustran las vistas de éstas respetando el trazo del desarrollo del paralelepípedo.

Obsérvense las vistas del edificio considerando su frente como la vista frontal (*VF*) y la vista superior (*VS*), la vista lateral derecha (*VLD*), la vista lateral izquierda (*VLI*), la vista inferior (*VI*) y la vista posterior (*VP*).

Nótese que las dimensiones de las vistas coinciden con las del dibujo del edificio.



Enseguida se ilustran las vistas de la plataforma, considerando como la vista frontal la cara con la leyenda Patria.



Al observar las vistas de los paralelepípedos anteriores, se nota que existen pares de vistas congruentes que son:

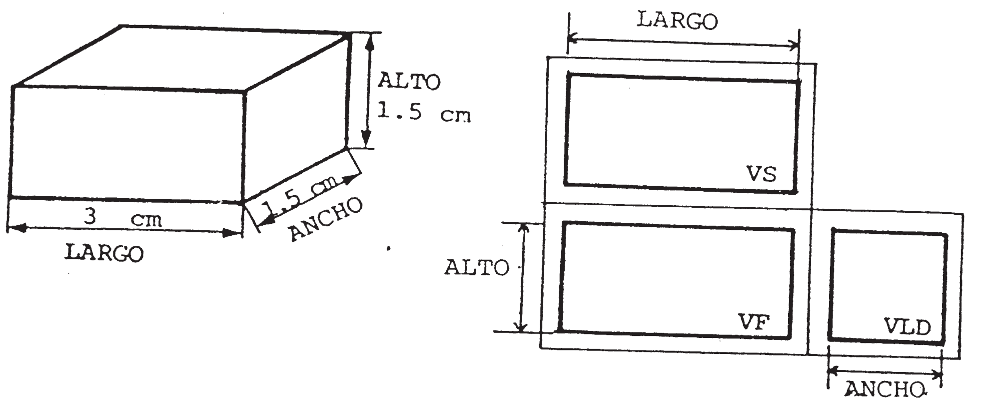
Vista frontal con vista posterior

Vista superior con vista inferior

Vista lateral derecha con vista lateral izquierda

Es por esta razón que se puede determinar el paralelepípedo con sólo 3 vistas: la frontal, la superior y la lateral derecha.

Véase el siguiente ejemplo:



RELACIÓN DE DIMENSIONES ENTRE VISTAS

Todas las vistas aportan datos que deben coincidir entre sí; por ejemplo: la *VF* y la *VLD* tienen el mismo alto; la *VF* y la *VS* tienen el mismo largo, y la *VS* y la *VLD* tienen el mismo ancho.

Los ejercicios prácticos que se hagan para determinar las vistas de un cuerpo permitirán el desarrollo de la imaginación espacial, útil en la resolución de problemas geométricos.

Continúa trabajando con tu compañero(a), usa tu cuaderno y:

1. Escribe dos características que debe tener la vista frontal.

2. Escribe cómo son las dimensiones del dibujo del paralelepípedo con respecto a cada una de las dimensiones de las vistas.

3. Escribe el nombre de la vista que es congruente con cada una de las que se dan.

    a. Vista frontal.

b. Vista superior.

c. Vista lateral derecha.

¿Por qué son congruentes entre sí cada una de las tres parejas anteriores?

4. ¿Es necesario, en el caso de los paralelepípedos, trazar sus seis vistas? ¿Por qué?

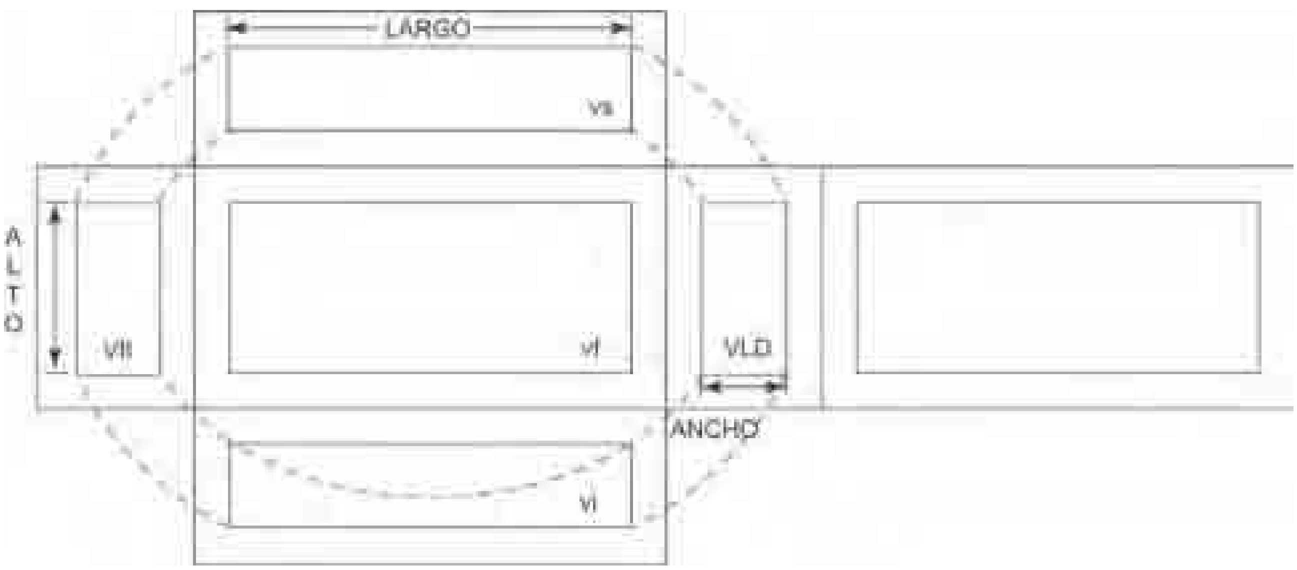
5. ¿Cuáles son los datos que deben coincidir en las vistas?

Compara tu ejercicio con el de otros compañeros(as).

Sigue trabajando con tu compañero(as), para efectuar el siguiente ejercicio.

Consigan una caja, como las de cereal, gelatina, etc. Haz un dibujo de ella, señala los distintivos en las caras y las dimensiones necesarias. Haz el dibujo de las vistas con sus dimensiones.

Observa y mide el largo, ancho y alto de las siguientes vistas de un paralelepípedo.



a) ¿Cómo es el alto de *VLI, VF, VLD* y *VP*? ¿Cuánto mide?

b) En *VS, VF* y *VI*, ¿cuánto mide el largo?

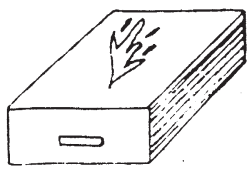
c) En *VS, VLI, VI* y *VLD*, ¿cómo es el ancho?

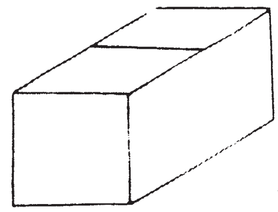
d) El largo, el ancho y el alto de cada vista, ¿cómo deben ser?

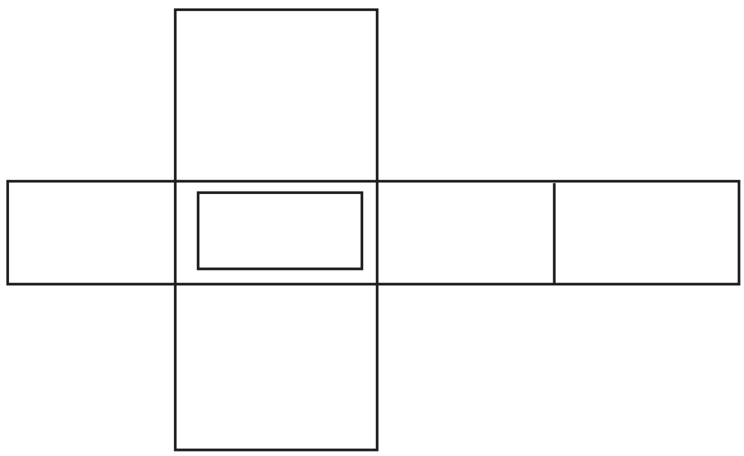
Compara tu ejercicio con el de otros compañeros(as) y corrige los errores.

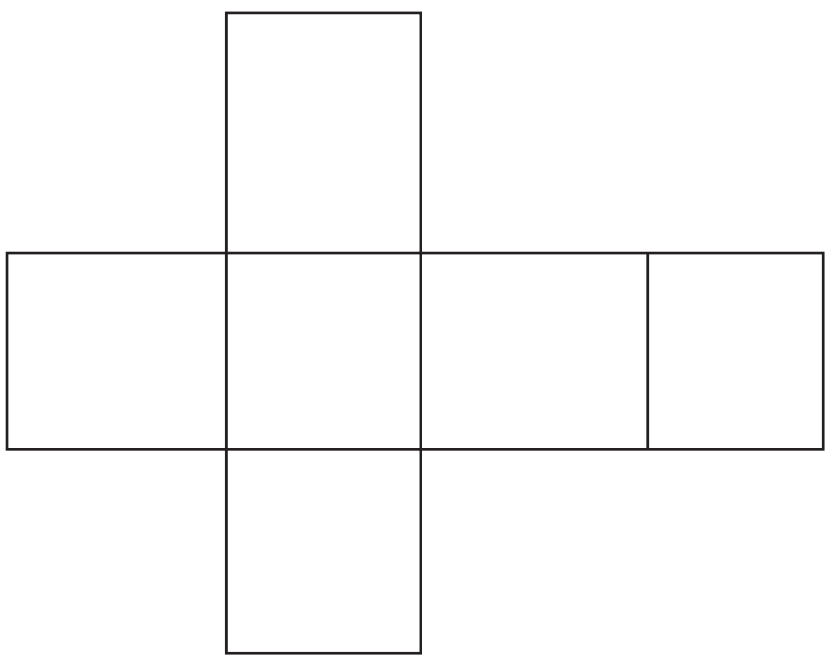
En forma individual, efectúa lo que se te pide.

Traza las vistas de cada paralelepípedo.



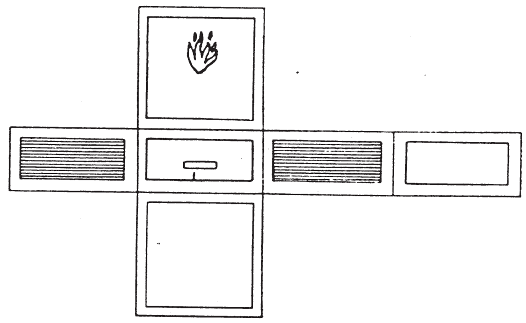


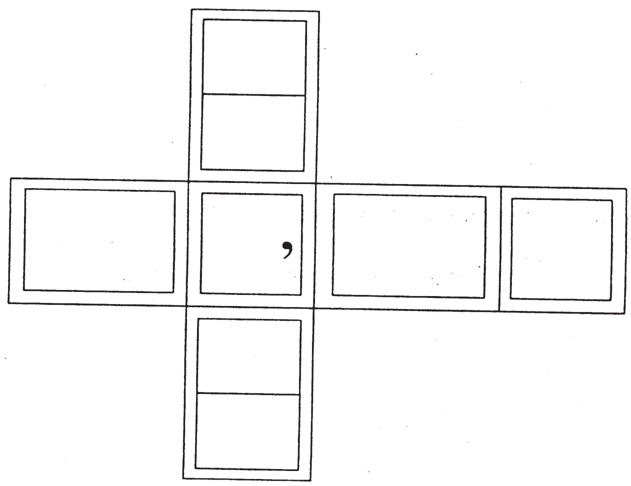




Verifica que el largo, el ancho y el alto de las vistas se correspondan entre sí. Compara tus trazos con la clave que se da.

CLAVE





113 EL LADO OCULTO DE UN CUERPO

(125)

Vistas de cuerpos compuestos

Trazo de las vistas de cuerpos compuestos

Generalmente al dar referencias sobre una casa, edificio o escuela, se mencionan las características de su fachada; ésta corresponde a la vista de la misma que tenemos en mente, incluso las postales de algunas construcciones muestran principalmente la vista de su parte frontal. Sin embargo, ¿sabrías tú decir, por ejemplo, cómo es la vista superior de tu escuela o de la alcaldía de tu localidad?

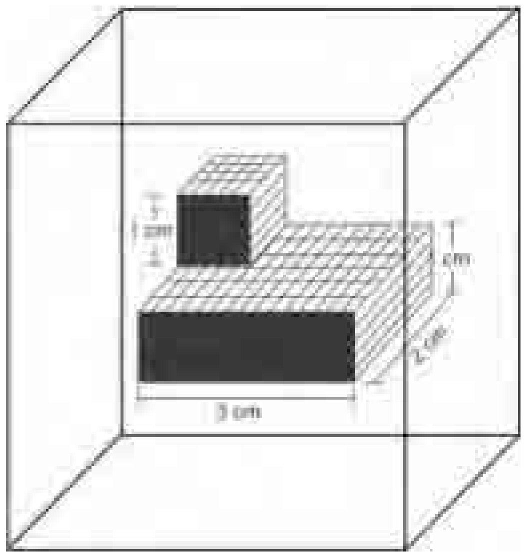
Observa el video, pues a través de él se te mostrará el trazo de las vistas de cuerpos compuestos por paralelepípedos.

Efectúa una lectura del texto **Vistas de cuerpos compuestos**; invita a un compañero(a) para trabajar.

VISTAS DE CUERPOS COMPUESTOS

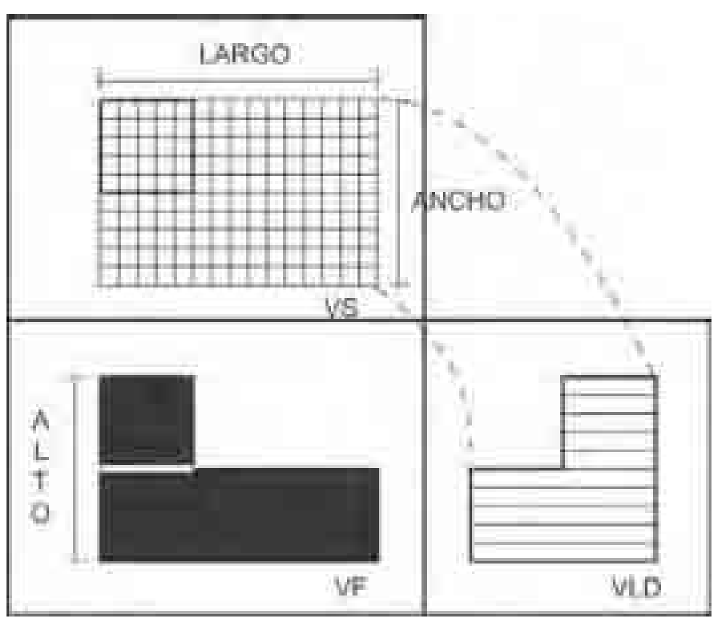
El uso del procedimiento de las vistas sigue siendo útil para la construcción de diversos objetos. Así, por ejemplo, es usado por los diseñadores de figuras de cera quienes, a partir de una serie de fotografías de un personaje famoso, hacen una réplica del cuerpo de éste.

Trazo de un cuerpo compuesto por paralelepípedos.



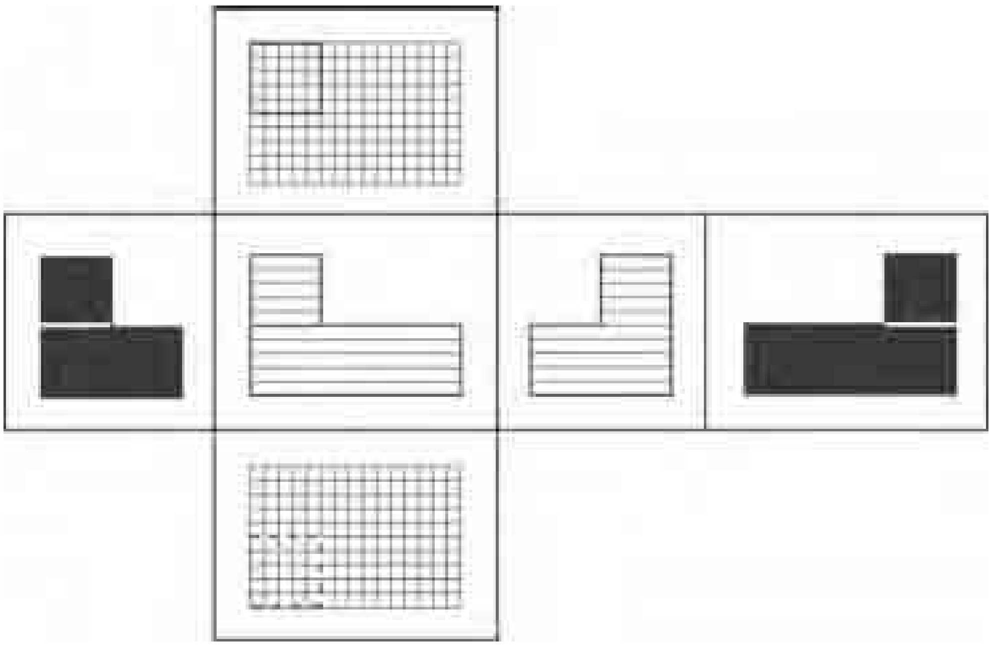
Obsérvese la figura que representa un cuerpo compuesto por un cubo y un paralelepípedo de caras rectangulares, imaginariamente suspendido dentro de una caja de cristal y en cuyas paredes se proyectarán las diferentes vistas del cuerpo.

Considérese como vista frontal la parte sombreada; entonces, la vista lateral derecha será la parte rayada y la vista superior será la cuadriculada.



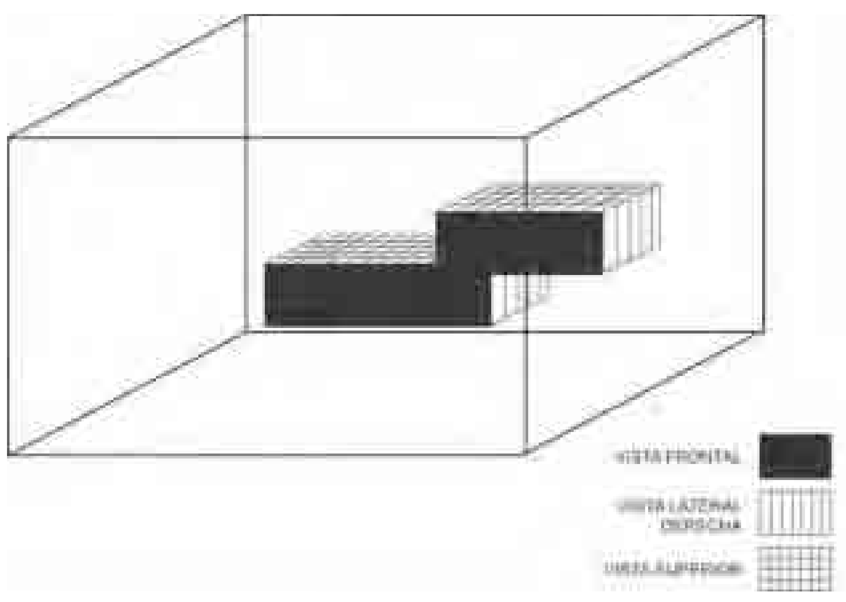
Véase en el trazo de estas tres vistas, que el largo, el ancho y el alto del cuerpo compuesto coinciden respectivamente en cada una de las vistas.

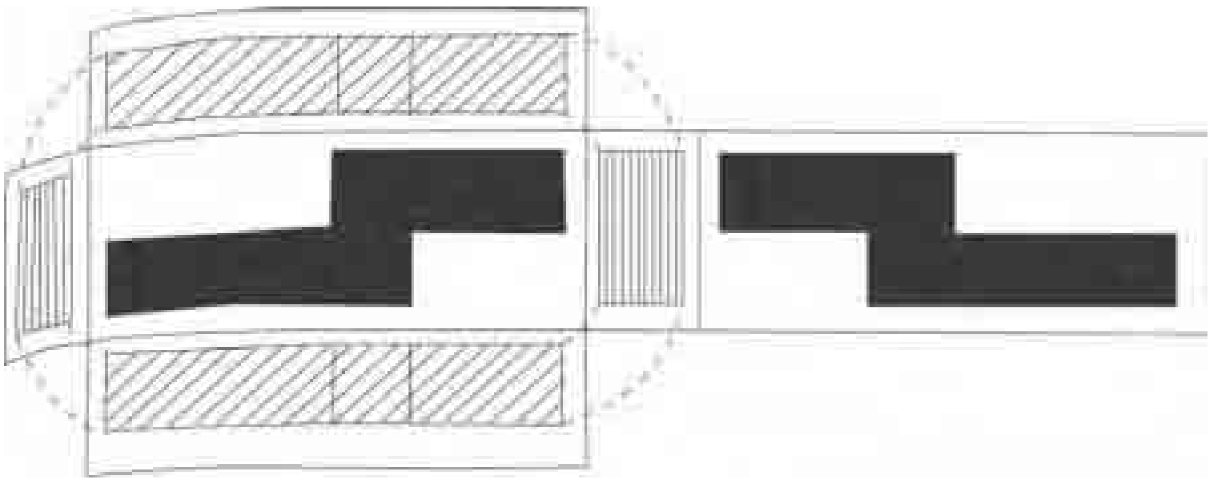
Completando el trazo de las seis vistas del cuerpo y considerando el desarrollo del paralelepípedo, se tiene:



Con las seis vistas del cuerpo compuesto se observa que las parejas de vistas congruentes entre sí son además simétricas (*VF* con *VP*, *VLD* con *VLI*, *VS* con *VI*).

Siguiendo el procedimiento ya conocido, se trazaron las vistas del dibujo del siguiente cuerpo, compuesto por dos paralelepípedos. Obsérvese bien:





En el trazo de las vistas de cuerpos compuestos por paralelepípedos, el largo en *VS, VF y VI* es el mismo; el ancho en *VLD, VS, VLI* y *VI* es igual, y el alto en *VLI, VF, VLD* y *VP* coincide. Además, las parejas congruentes y simétricas son: *VF* con *VP, V S* con *VI* y *VLD* con *VLI*.

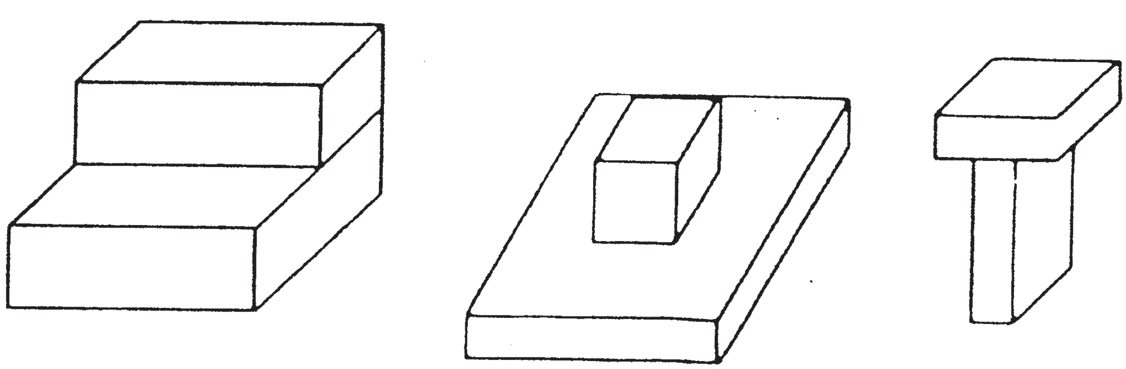
Observa las relaciones que se dan entre las dimensiones del dibujo y sus vistas, así como las relaciones existentes entre las vistas.

Reúnete con tu compañero(a), y escribe un resumen del procedimiento que se sigue para trazar las vistas del dibujo de un cuerpo compuesto y las relaciones que se dan entre las vistas.

Compara tu resumen con el de otro equipo; compleméntalo si es necesario.

Continúa trabajando con tu compañero(a), y resuelve el siguiente ejercicio:

1. En cada uno de los siguientes dibujos de cuerpos compuestos, sombrea la vista frontal , pon líneas paralelas a la vista lateral derecha y cuadricula la vista superior .



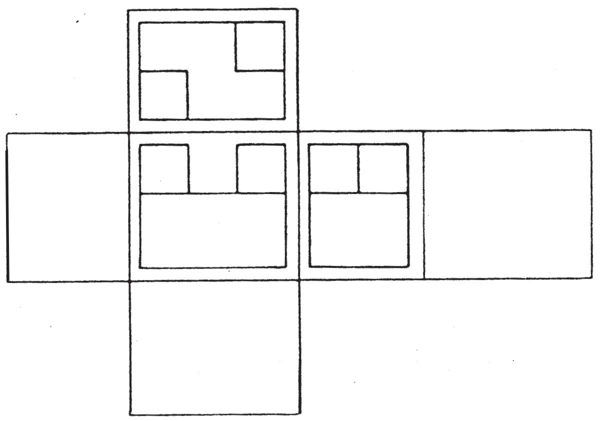
2. Considerando los cuerpos compuestos anteriores, dibuja la vista que se indica para cada uno de ellos.

a) Vista frontal.

b) Vista lateral derecha.

c) Vista superior.

3. Completa las seis vistas que corresponden a un cuerpo compuesto, considerando las parejas de vistas congruentes y simétricas entre sí; haz tus dibujos en el cuaderno.

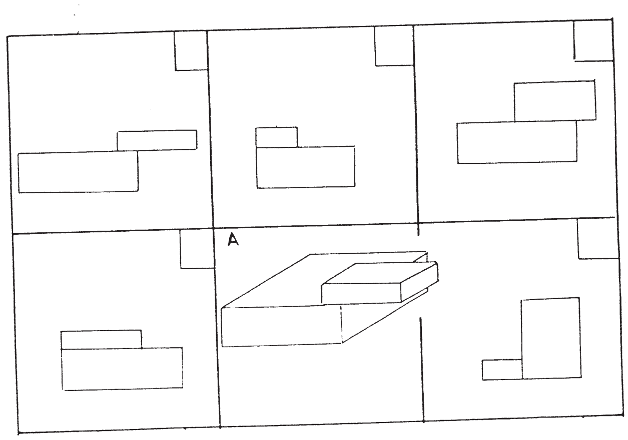


4. En tu cuaderno dibuja el cuerpo compuesto cuyas vistas acabas de trazar.

Compara tus respuestas con la clave que se proporciona; en caso de que el dibujo que trazaste sea diferente, dibuja sus vistas y anota cuál es la diferencia.

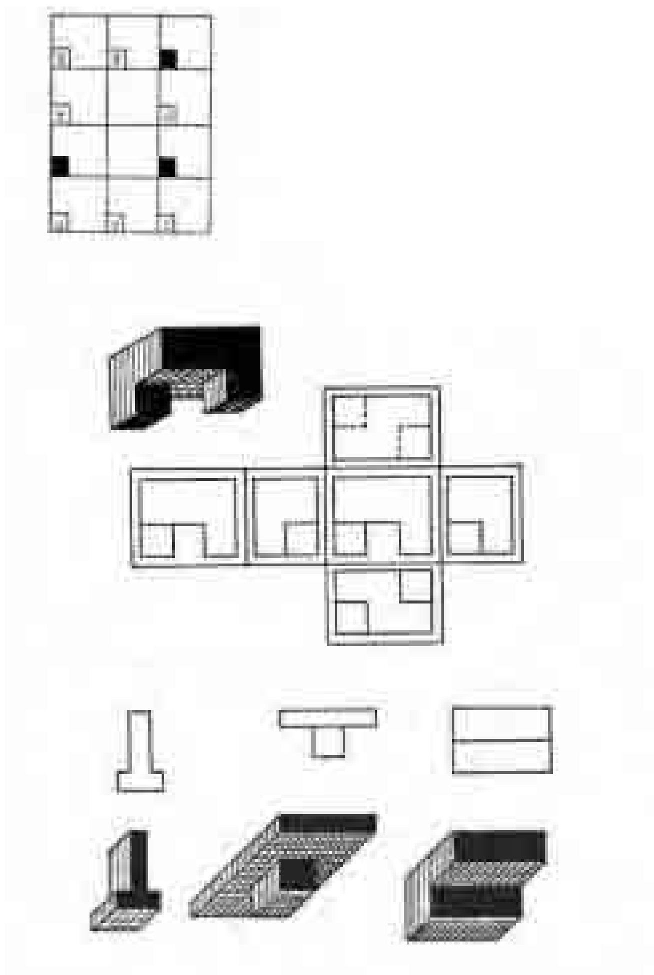
En forma individual, resuelve el siguiente ejercicio en tu cuaderno.

Considerando los dibujos A y B, escribe en el recuadro de cada casilla la letra A o la letra B si corresponde a una vista del dibujo A o B. Oscurece las casillas que no corresponden con ninguna.



Compara tus respuestas con la clave que se da.

CLAVE



114 CUERPO CON VARIAS CARAS

(126)

Trazo del isométrico de un cubo

Construcción del isométrico respectivo

Si miras a tu alrededor, te darás cuenta de que estás rodeado por diferentes objetos, de los cuales puedes ver su isométrico; esto dependerá del ángulo desde el cual lo veas.

¿Deseas saber cuál es el isométrico de un cubo y la forma de obtenerlo?

Observa el video y posteriormente comenta con tus compañeros(as) cuál fue la idea principal del programa.

Lee el texto **Trazo del isométrico de un cubo**, y posteriormente enumera en tu cuaderno algunos cuerpos que están en isométrico dentro del salón de clase.

TRAZO DEL ISOMÉTRICO DE UN CUBO

En la arquitectura, en la pintura, en la fotografía, en el diseño gráfico e industrial el dibujo en perspectiva es muy utilizado.

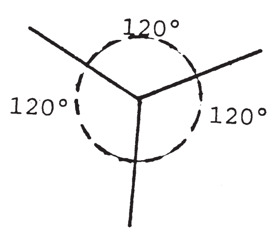
El dibujo en perspectiva es un arte que sirve para representar sobre un plano los objetos tal cual se ven, esto es con base en diferentes ángulos de inclinación respecto a la horizontal.

Dentro del dibujo existen ciertos tipos de proyecciones para representar un objeto determinado; en esta ocasión se estudiará la más usual, que es la proyección axonométrica, pero antes es necesario saber qué es una proyección.

Proyectar es trasladar los puntos y líneas de un objeto sobre un plano, siguiendo una dirección rectilínea. Las líneas proyectantes pueden ser perpendiculares u oblicuas o inclinadas entre sí respecto al plano.

La proyección axonométrica es un sistema de representación tridimensional; esto indica que el dibujo se presenta en tercera dimensión, o que se tiene el largo, el alto y el ancho del objeto.

La importancia de este tipo de proyecciones radica en que permite mostrar los objetos con mayor claridad y precisión. La proyección axonométrica más común es la **perspectiva isométrica o el isométrico**; ésta se basa en tres ejes con los cuales se forman ángulos de 120°, esto es:



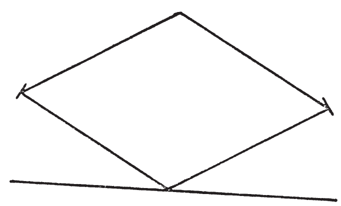
Para que un objeto esté dibujado en rigurosa perspectiva isométrica, todas sus medidas se deben reducir multiplicándolas por un coeficiente de reducción, cuyo valor es de 0.82; de ahí la razón de que se llame isométrica:

Isos = igual; *metrón* = medida, esto es, iguales medidas. También pueden tomarse las medidas reales del objeto, con lo cual se sigue respetando la perspectiva isométrica, en este caso se emplearán las medidas reales del objeto.

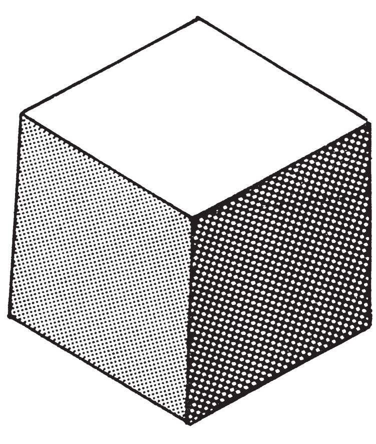
A continuación se verá el procedimiento para trazar el isométrico de un cubo:

Primero. Si se desea trazar un cubo cuyas aristas miden 3 cm, se toma como referencia un punto en la horizontal, al cual se le llama vértice; se trazan dos rectas, una a 30° y otra a 150° (o a 30°, en sentido positivo) a partir del vértice.

Segundo. Sobre las rectas se marca la medida de la arista del cubo, en este caso 3 cm, y se trazan paralelas a ellas que pasen por dichas marcas, con lo cual se obtiene la vista superior.

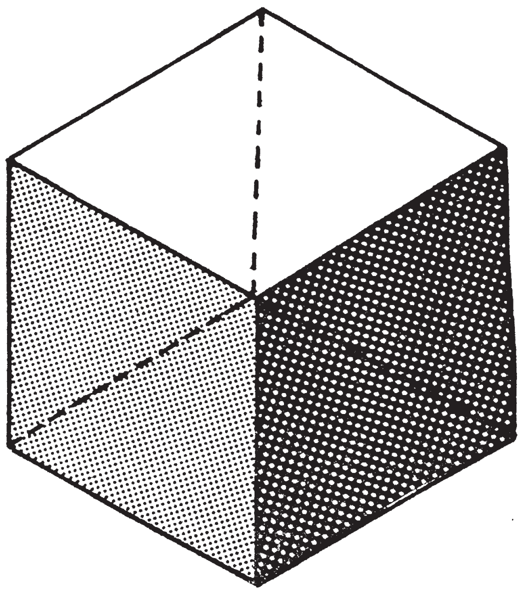


Tercero. Se trazan líneas verticales por cada vértice y se marca lo alto, en este caso también son 3 cm; se unen estas marcas y se obtienen las aristas del cubo y con ello su isométrico.



Obsérvese que se tienen ángulos de 120° con respecto a los tres ejes.

Una vez que se tiene el isométrico, se pueden marcar las aristas ocultas, esto es:



Con base en lo anterior, se tiene que:

> La perspectiva más empleada en dibujo es la isométrica, con la cual se puede ver con mayor claridad la forma de un objeto dibujado, debido a que se tiene en un sistema tridimensional; esto indica que en el dibujo se representa el largo, el alto y el ancho del cuerpo.

Junto con otro compañero(a) contesta lo que se pide a continuación, en tu cuaderno.

1. ¿Para qué sirve el dibujo en perspectiva?
2. ¿Qué entiendes por proyectar?
3. ¿Qué entiendes por sistema de representación tridimensional o en tercera dimensión?
4. La perspectiva isométrica, ¿a qué tipo de proyección corresponde?
5. ¿Qué ángulo tienen entre sí los ejes en una perspectiva isométrica?
6. ¿Qué significa la palabra isométrico?
7. Describe, con tus propias palabras, el procedimiento para trazar el isométrico de un cubo.

Comparte con el grupo tus respuestas, compleméntalas en caso de ser necesario.

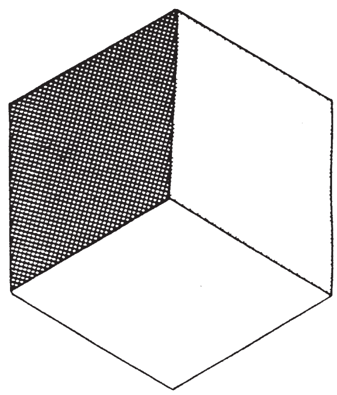
Sigue trabajando con tu compañero(a); en tu cuaderno traza la perspectiva isométrica de un cubo cuyas aristas miden 2 cm.

Compara tu dibujo con el de otras parejas; si tienes errores, revisa tu procedimiento.

En forma individual, traza en tu cuaderno el isométrico de un cubo cuyas aristas miden 4 cm.

Una vez que hayas terminado, compara tu dibujo con los de otros compañeros(as); si éstos son diferentes, consulta la clave.

CLAVE



115 (127) LAS MEJORES CARAS DE UN CUERPO

Trazo del isométrico de un paralelepípedo

Construcción del isométrico respectivo

¿Has observado una caja de fósforos? Esta se caracteriza por tener largo, ancho y alto; esta caja es un paralelepípedo. Si la ves de frente, sólo apreciarás el largo y el alto pero si la empiezas a girar verás el ancho de ella, con lo cual se tendrá el isométrico de dicha caja de fósforos.

Observa el video; en él verás la forma de trazar el isométrico de un paralelepípedo.

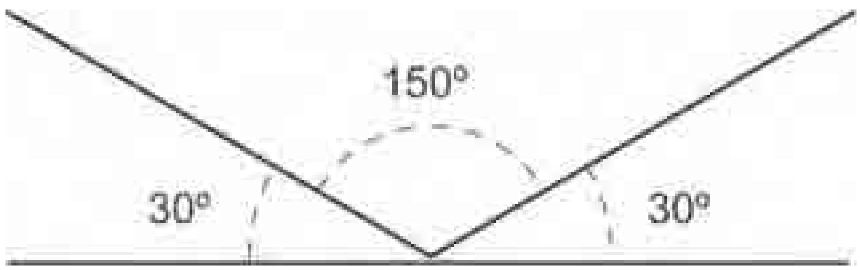
Lee y analiza el texto **Trazo del isométrico de un paralelepípedo** y comenta con tus compañeros(as) las dudas que te hayan surgido.

TRAZO DEL ISOMÉTRICO DE UN PARALELEPÍPEDO

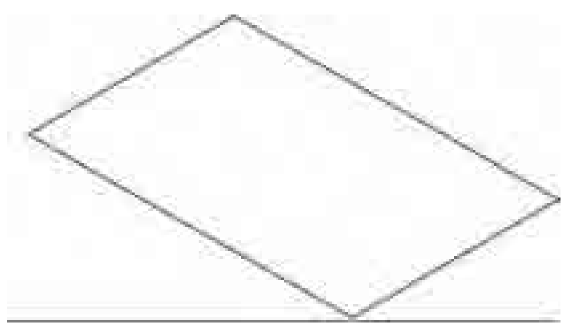
Una vez visto el procedimiento para trazar el isométrico de un cubo, se estudiará el trazo del de un paralelepípedo, que es muy similar; para ello se deben proporcionar las medidas del largo, el alto y el ancho.

Si se desea trazar un paralelepípedo cuyas dimensiones son 6 cm de largo, 3 cm de alto y 4 cm de ancho, el procedimiento es el siguiente:

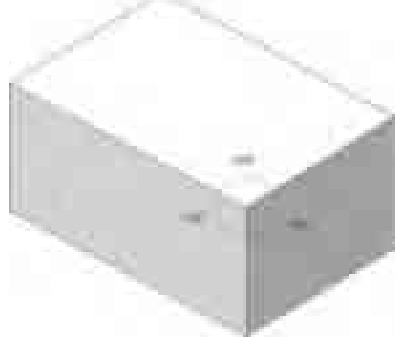
Primero. Se toma un punto de referencia de la horizontal, llamado vértice; se trazan dos rectas, una a 30° y otra a 150° a partir de dicho vértice.



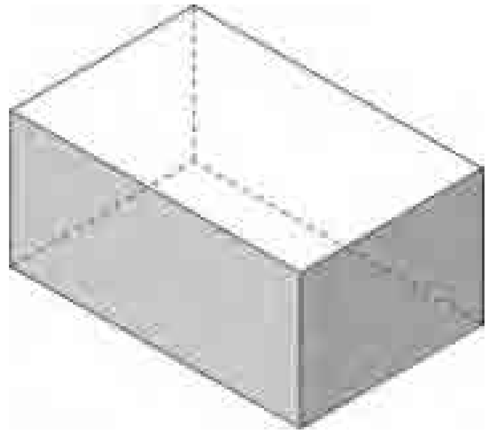
Segundo. Sobre la recta que forma el ángulo de 150° se marca el largo y en la que forma el ángulo de 30°, el ancho; se trazan paralelas a éstas que pasen por dichas marcas, con lo cual se obtiene la vista superior.



Tercero. Se trazan líneas verticales a partir de cada vértice y se marca el alto; se unen dichas marcas y se obtienen las aristas del paralelepípedo, y con ello su isométrico.



Si se desea trazar las aristas ocultas, se trazan paralelas a las aristas de la vista frontal en la vista posterior y otra paralela a la vista frontal, esto es:



Con base en lo anterior, se tiene que:

El isométrico de un paralelepípedo se determina en función de sus tres dimensiones, que son el largo, el alto y el ancho.

Con un compañero(a) trabaja el siguiente ejercicio:

Traza el isométrico de un paralelepípedo cuyas dimensiones son 5 cm de largo, 2 cm de alto y 3 cm de ancho; sigue las indicaciones.

1. Traza las rectas que formen ángulos de 30° y 150°.

2. Mide el largo y el ancho, respectivamente, sobre dicha recta y traza las paralelas correspondientes.

3. Obtén el isométrico de dicho paralelepípedo.

Compara tu dibujo con el de otros compañeros(as); en caso de que sean diferentes revisa tu procedimiento.

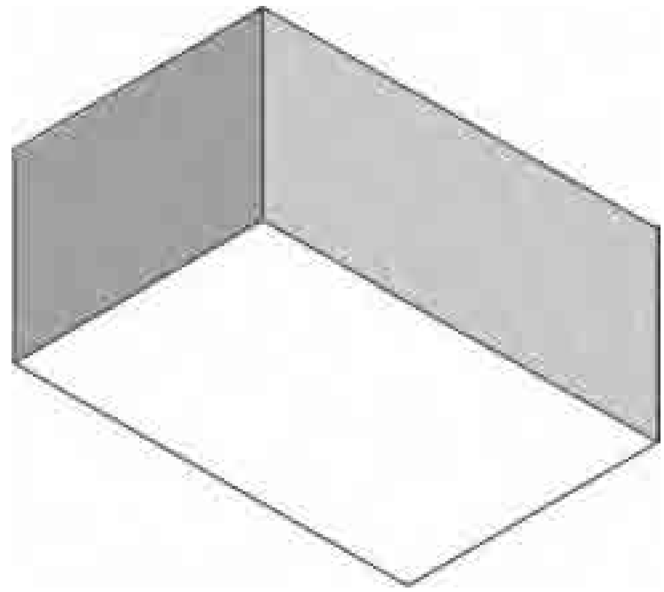
Continúa con tu compañero(a), y en tu cuaderno traza el isométrico de un paralelepípedo que tenga 8 cm y de largo y 5 cm de alto.

Coteja tu dibujo con el de tus compañeros(as) y en caso de ser diferente consulta la clave.

En forma individual, traza en tu cuaderno el isométrico de un paralelepípedo cuyo largo sea de 4.5 cm, el alto y el ancho de 3 cm.

Compara tu dibujo con los de otros compañeros(as); en caso de ser diferentes, consulta la clave.

CLAVE



116 COMPRENDER, ANTES QUE RECORDAR ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

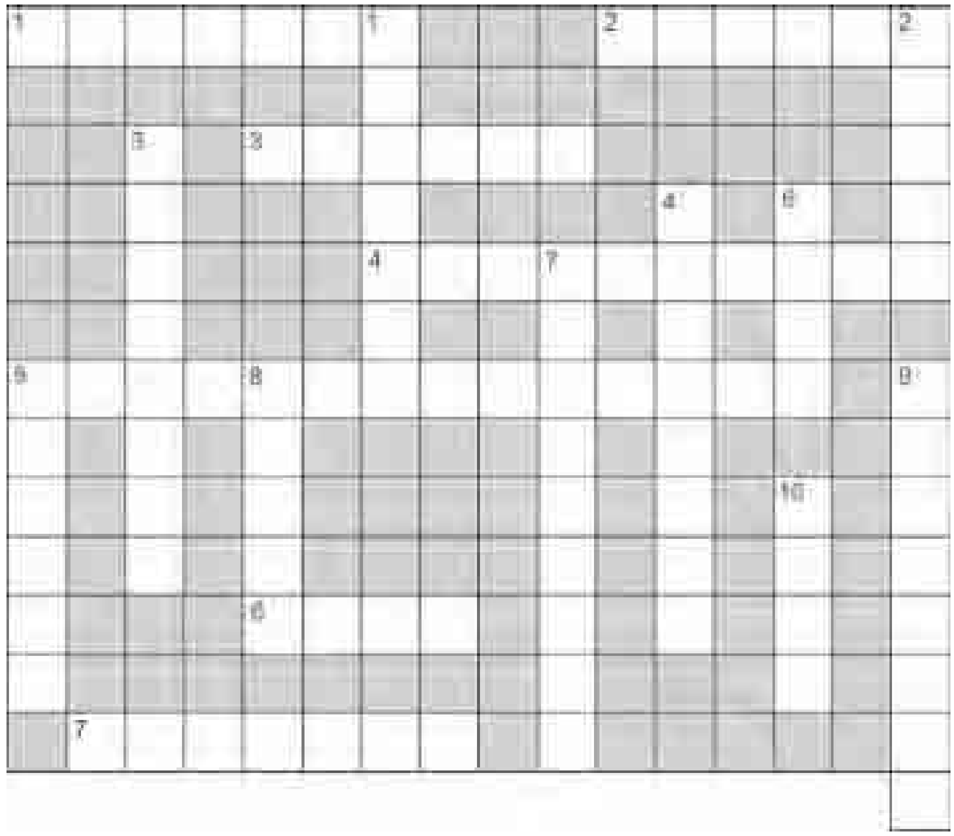
(128)

Repaso parcial de lo desarrollado en el núcleo
Integración de los conocimientos

Has recapacitado sobre el título de esta sesión. ¿Cómo llegas a dominar un conocimiento? ¿De qué te sirve repasar lo visto anteriormente?

Ve con atención el video, y recuerda algunas cosas que te servirán más adelante.

Con un compañero(a) resuelve el siguiente crucigrama, en tu cuaderno.



VERTICALES

1. Es cualquiera de las dos vistas que están a los dos lados de la frontal.
2. Es la dimensión que denota profundidad.
3. En un paralelepípedo, vista que es congruente con la inferior.
4. Vista que se localiza debajo de la frontal.
5. Cuerpo cuyas bases son polígonos regulares y sus caras laterales son paralelogramos.
6. Cuerpo formado por seis caras cuadrangulares.
7. Forma que tienen las caras del tetraedro.
8. Dimensión que denota longitud de una figura o cuerpo.
9. Forma que tienen las caras del cubo.
10. Número de vistas para representar un cuerpo geométrico.

HORIZONTALES

1. Es la vista más importante de un cuerpo.
2. Es la intersección de dos caras.
3. Es la mayor longitud perpendicular a la base que tiene un cuerpo o figura.
4. Forma que pueden tener las caras de un paralelepípedo.
5. Es el prisma cuyas bases son paralelogramos.
6. Número de caras que tiene un octaedro.
7. Es la intersección de dos aristas.

Compara, con otra pareja tus respuestas; si tienes dudas, consulta a tu profesor(a).

Tú solo, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué otro nombre se le da al cubo?

b) ¿Cuántas caras tiene el cubo y qué forma tienen?

c) ¿A qué se le llama arista?

d) ¿Qué entiendes por paralelepípedo?

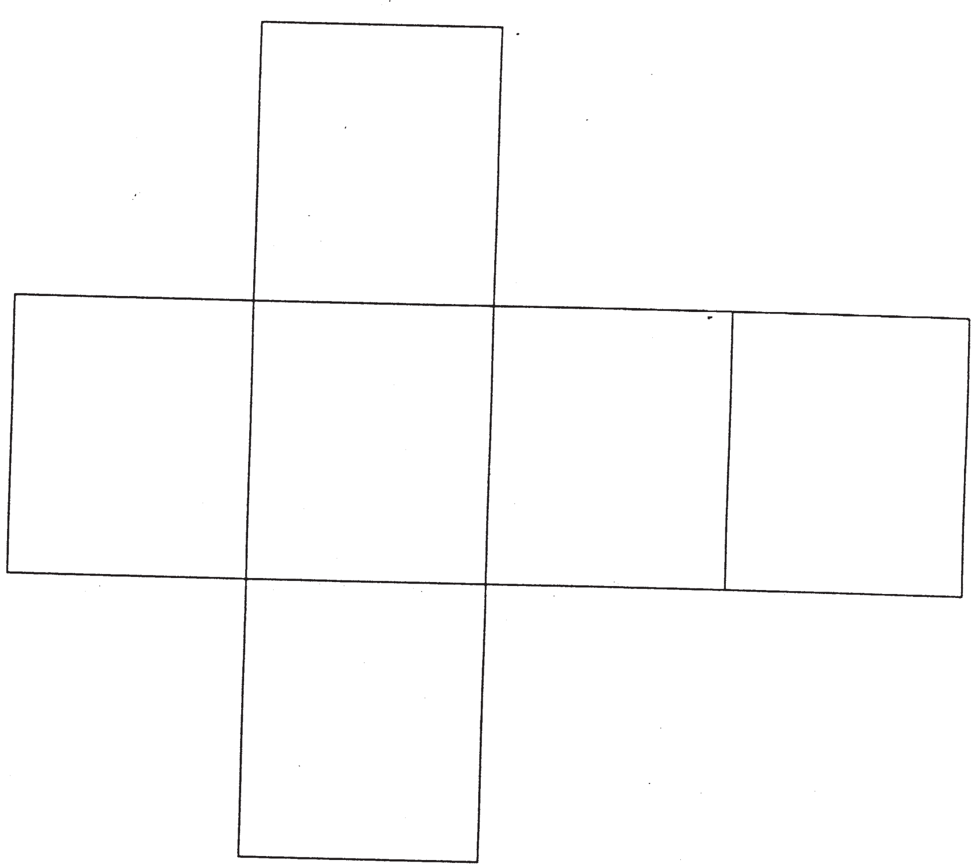
e) ¿Qué tipo de línea se usa para representar las caras ocultas de un cuerpo geométrico?

f) ¿Qué vista es la más importante en un cuerpo?

g) ¿Qué vista es congruente con la vista inferior de un paralelepípedo?

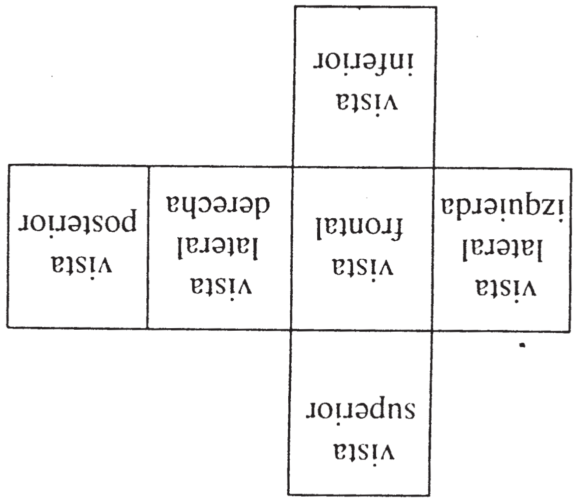
h) ¿Cuáles vistas es necesario trazar siempre?

Anota en cada cuadro la vista que representa. Hazlo en tu cuaderno.



Compara tus respuestas con la clave, en el momento en que tu profesor(a) lo indique.

CLAVE



a) Hexaedro; b) Seis; tienen forma de cuadrados; c) Es la intersección de dos caras; d) Es el prisma cuyas bases son paralelogramos; e) Línea formada por pequeños segmentos de recta, llamada también línea punteada; f) Vista frontal; g) Vista frontal; h) Vista superior; h) Vista frontal, superior y lateral derecho.

117 (129) ¡DEMUESTRA QUE SABES!

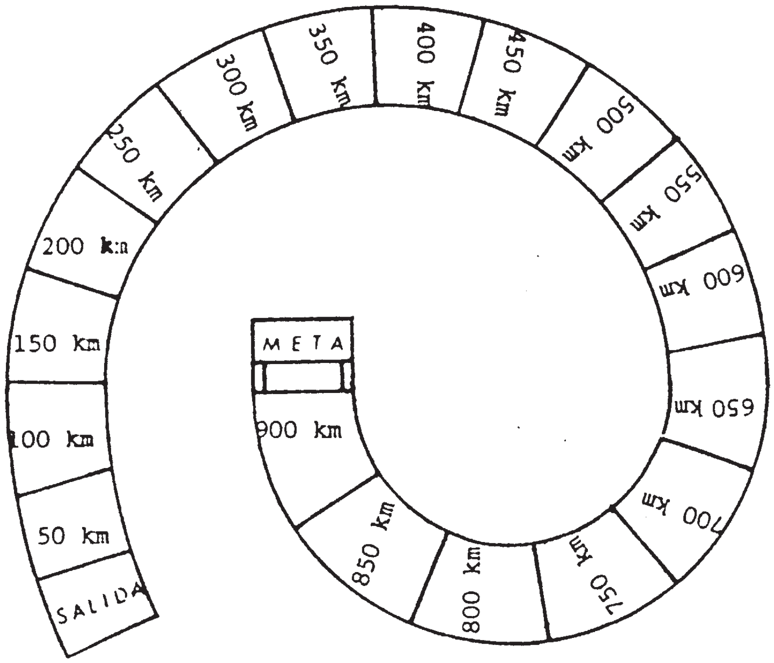
Tu conocimiento entre líneas
Demostración de lo aprendido

Para reproducir figuras u objetos es muy útil el dibujo; éste te ayuda a representar formas por medio de la reproducción, que dan la idea de las figuras originales y te ayudan en su estudio.

En esta sesión aplicarás tus conocimientos en ejercicios sencillos que te permitirán comprobar tus logros en el núcleo.

Y ahora: ¡Demuestra que sabes!

Observa el video y realiza, según sus indicaciones, el siguiente ejercicio.



1.
2.
3.
4.
5.
6.

¿Llegaste a la meta? ¡Felicidades! ¿No? Entonces, ¿quién avanzó más, tú o la ignorancia? Continúa con los ejercicios siguientes:

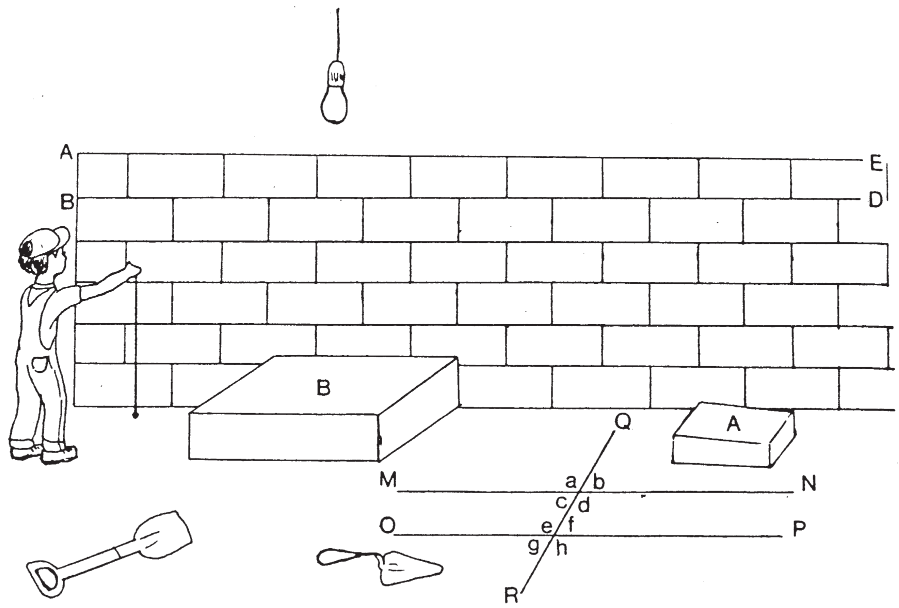
Resuelve en forma individual, los ejercicios siguientes. Lee con atención cada una de las preguntas.

EVALUACIÓN DEL NÚCLEO 6

NOMBRE DEL ALUMNO ____

NÚMERO DE ACIERTOS __________________ EVALUACIÓN __________________

1. A tu alrededor puedes observar muchas líneas, figuras y cuerpos geométricos. Observa el siguiente dibujo, y completa las cuestiones, en tu cuaderno.



a) La plomada del albañil y la línea del piso forman dos ángulos rectos, por lo que a esas líneas se les llama

b) Se puede ver que $\overline{AE}$ es paralelo con

c) ¿Qué cuerpos en el dibujo tienen forma de un paralelepípedo?

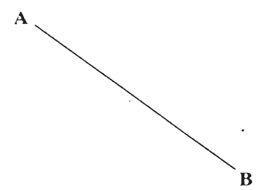
d) Si observas el cuerpo *A* y el *B* se puede afirmar que son proporcionales? ¿Cómo encontrarás la escala y cómo los relacionarás?

e) La varilla $\overline{MN}$ es paralela con $\overline{OP}$; ¿cuál es la varilla secante que las corta?

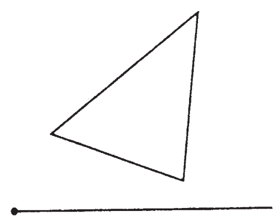
f) ¿Si el ángulo *E* mide 110º, cuánto miden los ángulos *F* y *H*?

2. Realiza en tu cuaderno los trazos que a continuación se indican.

a) Traza una perpendicular a $\overline{AB}$ que pase por el punto *P*.



b) Obtén la traslación de la siguiente figura cuya amplitud de traslación es de 5 cm.



3. Contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuáles son las propiedades de la simetría axial?

   b) ¿Cómo son los ángulos en figuras homólogas?

   c) ¿Cómo se le llama a la razón entre un dibujo reproducido y su original?

   d) ¿Cuáles son las vistas de un paralelepípedo?

   Revista tus respuestas. El maestro(a) te indicará la forma de revisar tu cuestionario.

118 ARMANDO LAS PIEZAS II

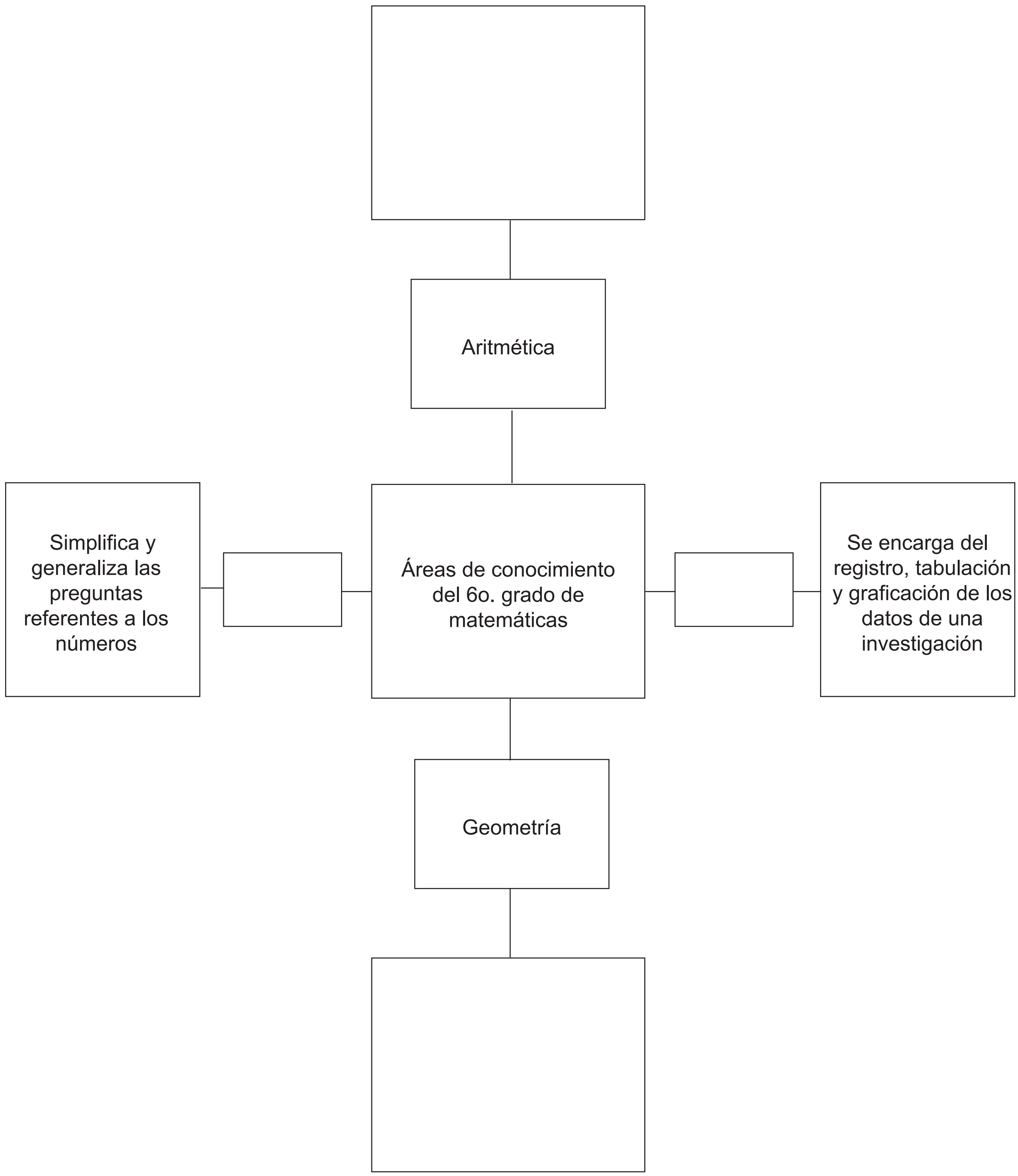
(130)

Panorámica de lo aprendido
Integración de los seis primeros núcleos

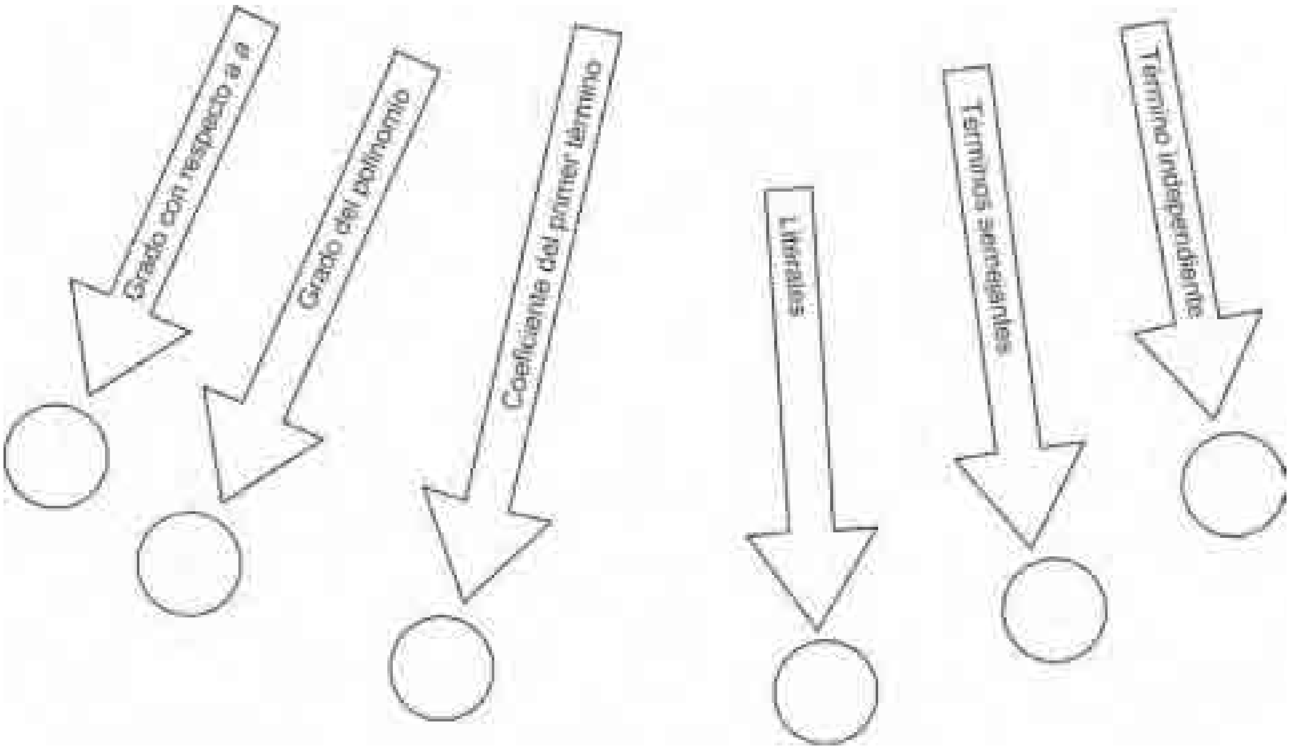
En estos meses has manejado conocimientos de aritmética y álgebra, que te van a ser de gran utilidad a lo largo de tu vida escolar. Ese estudio ha sido gradual y gracias a él, ahora puedes entender y resolver problemas que antes no eras capaz de solucionar. Hoy harás una revisión de esos conocimientos. ¿Estás listo?

Observa el video.

Reúnete con un compañero(a), para que completes los siguientes cuadros, en tu cuaderno.

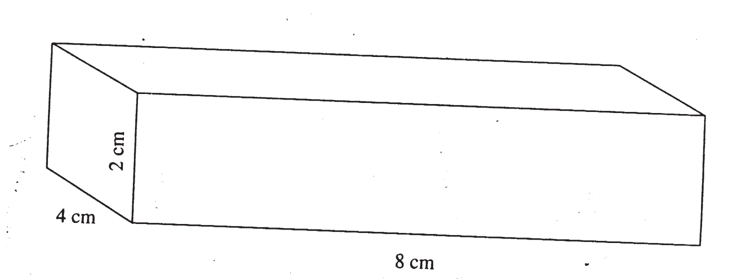


En la expresión $4a^3\ x^2 + 3a^2x - 3a\ 3ax^2 - 2a + 7$ se localizan los siguientes elementos.



Haz una síntesis del tipo de escalas que estudiaste.

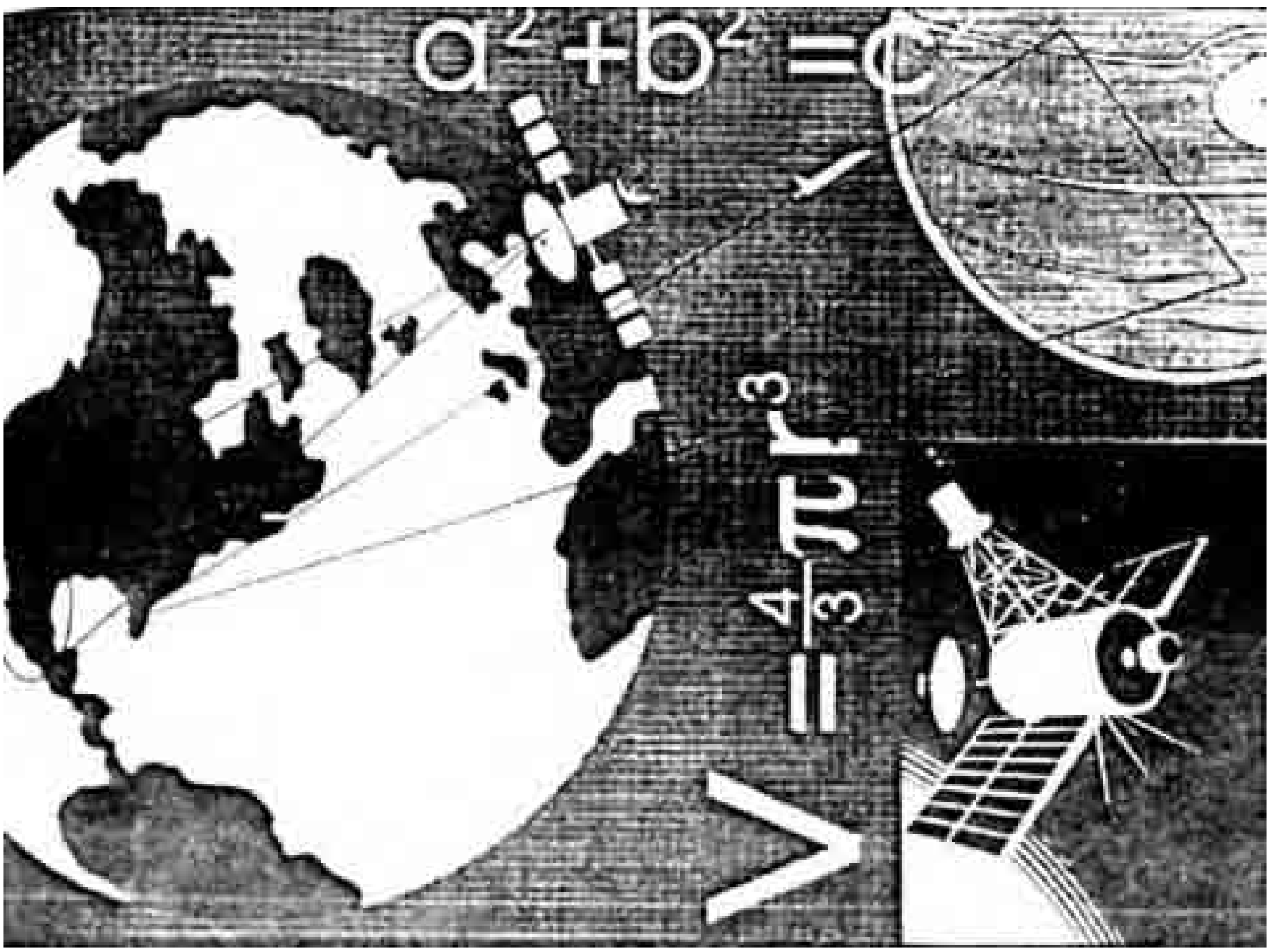
Dibuja las vistas del siguiente paralelepípedo.



Comenta en el grupo tus respuestas. Si es necesario, corrige.

Núcleo Básico 7

ÁREAS



En este núcleo estudiarás diversas mediciones de magnitudes en figuras y cuerpos, como áreas y volúmenes. Estos conocimientos tienen múltiples aplicaciones en la vida cotidiana: superficies de terrenos, volúmenes de vasijas, de pozos, bodegas, etc.

Además de los temas anteriores, conocerás un enunciado matemático fundamental: el teorema de Pitágoras y sus múltiples aplicaciones.

119 MISMO TAMAÑO, DIFERENTE FORMA

(131)

Equivalencia de áreas

Trazo y cálculo de áreas equivalentes

Al ver las figuras de tu alrededor, puedes observar formas muy variadas; en ocasiones te será difícil determinar cuáles de ellas tienen áreas iguales, pues no siempre formas diferentes determinan áreas diferentes.

Observa el video en el que recordarás qué es el área de una figura. Comenta en tu grupo cuándo se dice que las figuras son equivalentes, en el área.

Lee, con un compañero(a), el tema **Equivalencia de áreas**.

Discute en tu grupo, qué unidades se utilizan para medir el área de una figura.

EQUIVALENCIA DE ÁREAS

El terreno de una casa, una hoja de papel, una figura en una pared y muchas otras, poseen una magnitud que puede ser medida: lo extenso de su superficie. La medida de la extensión de una superficie se denomina área.

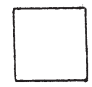
Área es la medida de la extensión de una superficie.

Para obtener el área se puede utilizar como unidad de medida el **metro cuadrado.**

Un patrón del metro cuadrado puede ser un cuadrado que tiene un metro de longitud por cada lado.

Las unidades son abstractas, mientras que los patrones son concretos.

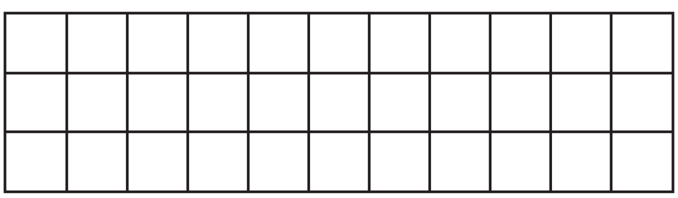
Para medir áreas mayores se utilizan múltiplos del metro cuadrado: dam^2, hm^2 y km^2; y, para áreas más pequeñas los submúltiplos: dm^2, cm^2 y mm^2. Ejemplos.

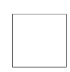


Cuadrado cuya área es un centímetro cuadrado o cm^2 Su lado mide 1 cm

Cuadrado cuya área es 1 dm^2. Su lado mide 1 dm.

Al calcular el área de una figura por recubrimiento lo que se busca es el número de veces que un patrón de unidad de medida está contenido en la figura.



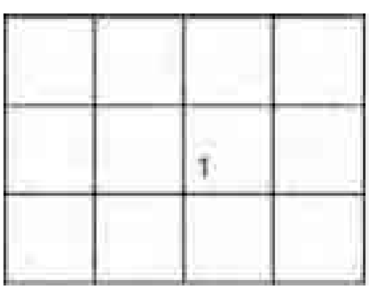


Patrón que tiene una unidad de área.

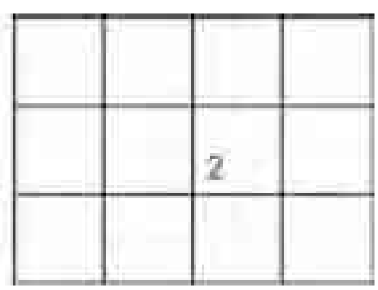
Al contar los cuadros que forman la figura anterior, (44) se puede afirmar que el área es de 44 cuadrados es decir de cuarenta y cuatro unidades cuadradas:

$$44u^2$$

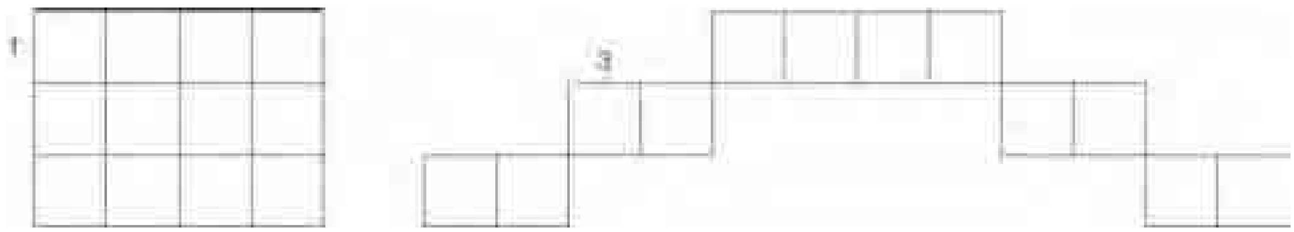
Si dos figuras son iguales en forma y tamaño, tendrán la misma área.



$A_1 = A_2$



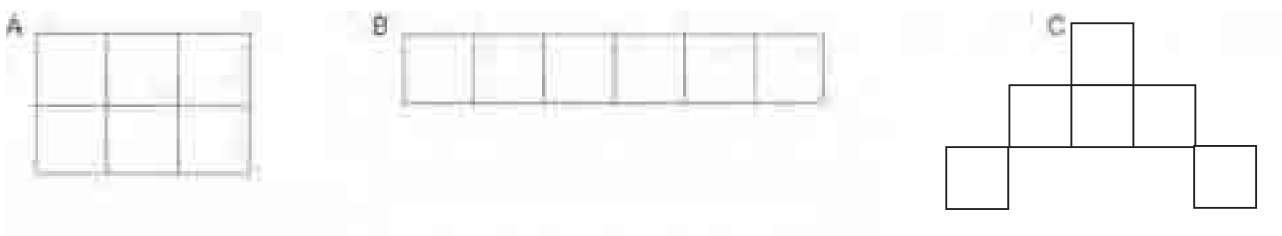
Si una de esas figuras se descompone y se transforma en otra figura, se obtiene una figura equivalente en área.



Se puede afirmar entonces que 1 y 3 son figuras equivalentes en área, pues sus áreas son iguales aunque sus formas sean diferentes; por lo tanto se tiene que:

$$A_1 = A_3$$

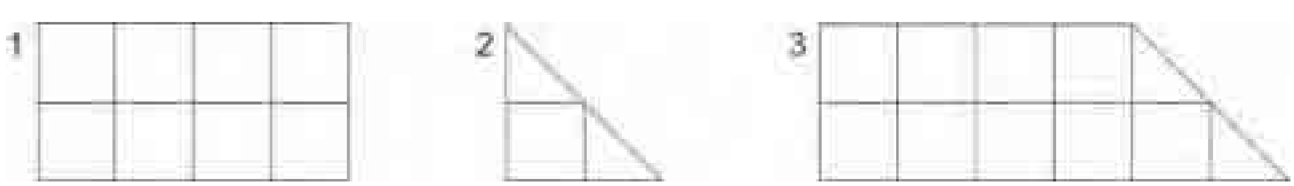
De esta forma, una figura puede descomponerse y obtenerse una figura equivalente en área.



Las figuras A, B y C son equivalentes en área, ya que al contar el número de unidades cuadradas que forman el área de cada una de ellas, el resultado es el mismo.

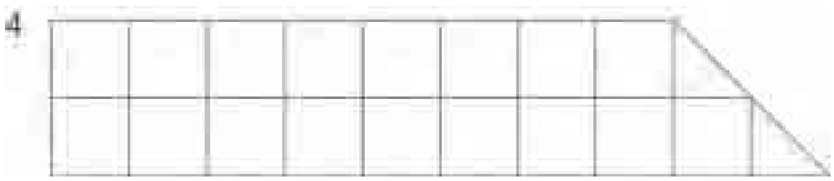
$$\text{área } A = 6u^2 \qquad \text{área } B = 6u^2 \qquad \text{área } C = 6u^2$$

Además, entre las áreas pueden establecerse relaciones de adición y sustracción. Se tienen las figuras:



$A_1 = 8\ cm^2$ $A_2 = 2\ cm^2$ $A_3 = 10\ cm^2$

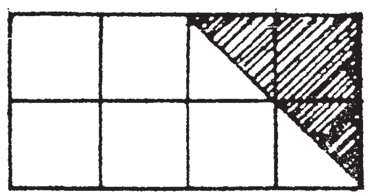
Puede sumarse el área de la figura 1 con el área de la figura 3, obteniéndose la figura 4.



$$A_1 + A_3 = A_4$$

$$8\ cm^2 + 10\ cm^2 = 18\ cm^2$$

También se puede restar un área de otra, por ejemplo:



$$A_1 - A_2 = A_5$$

$$8\ cm^2 - 2\ cm^2 = 6\ cm^2$$

Así, conociendo el área de figuras y estableciendo relaciones entre ellas, es posible deducir nuevos valores, lo cual puede ayudar a resolver otros problemas.

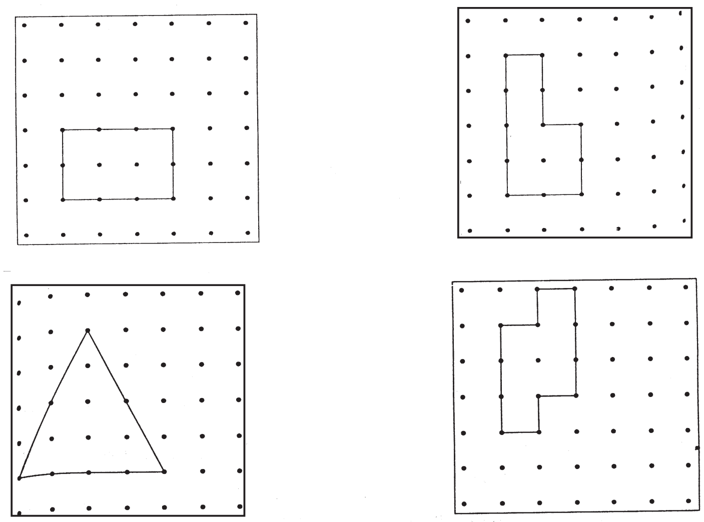
Junto con un compañero(a), realiza en tu cuaderno un resumen. Toma como base las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo relacionas los conceptos de superficie y área?
2. ¿Qué unidades conoces para medir el área de una figura?
3. ¿Qué sucede con el área de una figura si se descompone y transforma en otra?

Comparte tus ideas con el grupo.

Para esta sesión debes tener el geoplano (tabla cuadriculada donde en cada vértice hay un clavo). En él formarás todas las figuras diferentes que desees con un área previamente indicada, auxiliándote de resortes o hilos. Por ejemplo, si se quiere obtener una figura con 6 u^2 de área, las siguientes son algunas opciones.

Si no tienes geoplano puedes usar papel cuadriculado.



Si cuentas el número de unidades cuadradas que hay en cada esquema, observarás que en todos es 6, no importando su forma.

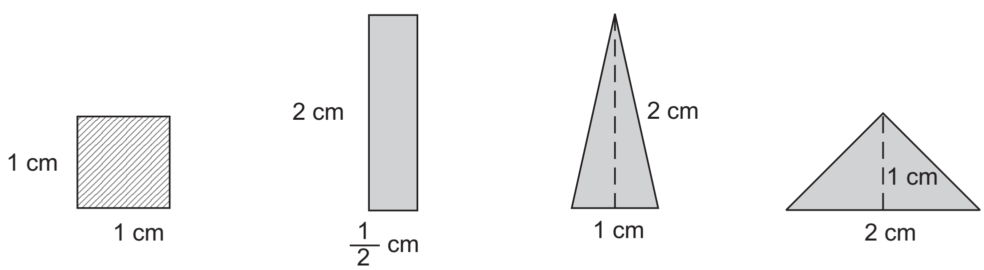
1. Forma en tu geoplano una figura con área de 8 unidades cuadradas y discute en grupo las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuántas figuras diferentes obtuvieron en el grupo?

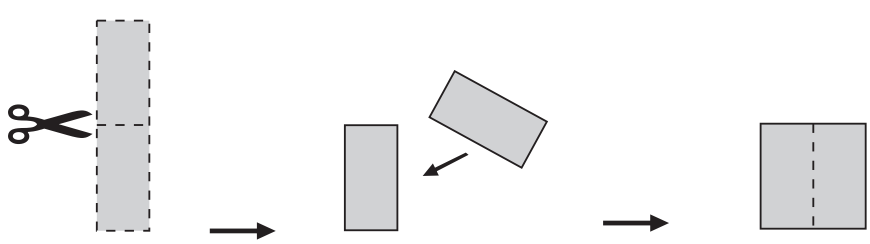
   b) ¿Habrá otras figuras que tengan esa misma área?

   c) ¿En qué son equivalentes las figuras que has construido?

2. Observa las siguientes figuras.



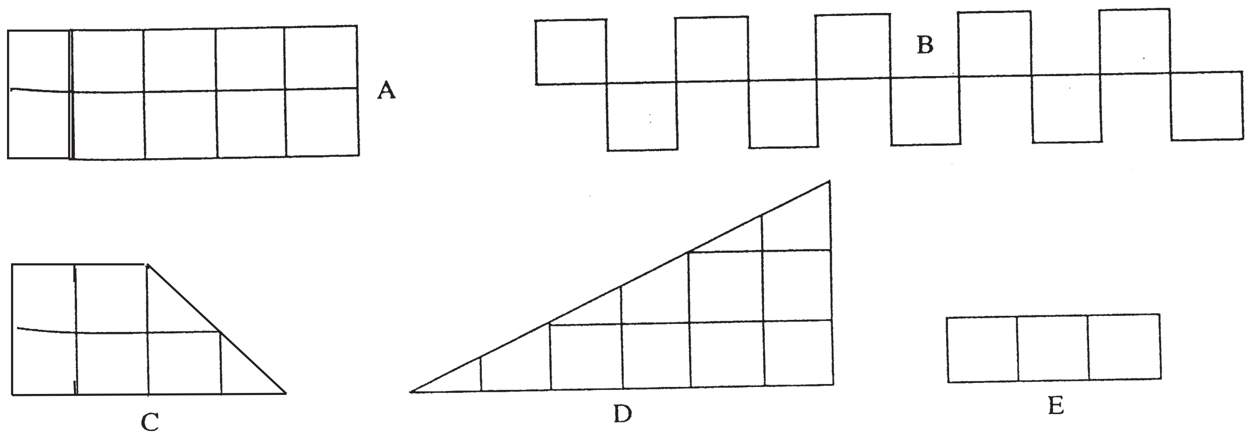
Haz modelos, en papel, de cada una; con cada una de las que no tienen forma cuadrada, haz rompecabezas de manera que te permitan armar cuadros, por ejemplo.



¿Cuál es entonces el área de cada una de las figuras originales?

¿Podrías considerar cada una de esas fichas como patrones del cm^2? ¿Por qué?

Observa las siguientes figuras y trabaja en tu cuaderno.



1. Calcula el área de *A*, de *B*, de *C*, de *D* y de *E*.

2. ¿Cuáles de las figuras son equivalentes en área?

3. Encuentra dos de estas figuras, tales que, al sumar sus áreas la suma sea el área de otra de dichas figuras.

4. Encuentra una figura cuya área sea equivalente a la diferencia de áreas de otras dos.

Revisa tus resultados y compáralos con la clave; si hay diferencia, analiza nuevamente el ejercicio. Corrige si es necesario.

CLAVE

1. $A(A) = 10\ u^2$, $A(B) = 10\ u^2$, $A(C) = 6\ u^2$, $A(D) = 9\ u^2$, $A(E) = 3\ u^2$. 2. $A(A) = A(B)$. 3. $A(C) + A(E) = A(D)$. 4. $A(D) - A(E) = A(C)$.

120

(132)

ESPACIOS PARALELOS

Áreas de paralelogramos
Justificación de la fórmula correspondiente

Si quieres poner mosaico en la sala de tu casa, lo que debes hacer es realizar algunas medidas para calcular el área que ésta tiene, y así comprar la cantidad que necesitas; pero, ¿sabrías cómo realizar el cálculo?

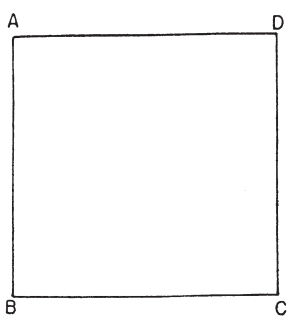
Observa el video y después busca en tu salón de clases figuras que sean paralelogramos.

Reúnete con un compañero(a), lee y analiza el texto **Áreas de paralelogramos**. Comenta en tu grupo lo que has aprendido.

ÁREAS DE PARALELOGRAMOS

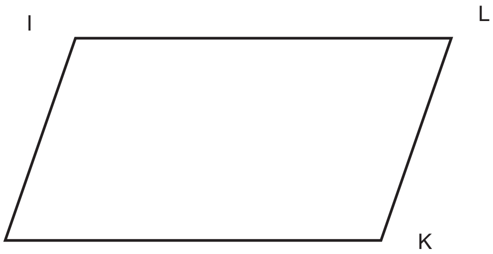
Las figuras geométricas reciben diferentes nombres de acuerdo con el número de lados que tengan. Aquellas que están limitadas por cuatro lados, reciben el nombre de cuadriláteros. Modelo de ellos son el tablero, la hoja de un libro o un cuaderno, por ejemplo.

Cuadriláteros como el cuadrado (con cuatro lados y cuatro ángulos congruentes), el rectángulo (con cuatro ángulos rectos), el romboide (sin ángulos consecutivos ni lados consecutivos congruentes) y el rombo (con cuatro lados congruentes) son paralelogramos, ya que tienen dos pares de lados paralelo

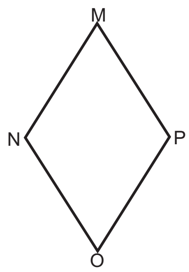


El cuadrado es un paralelogramo ya que:
$\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DC}$ y
$\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

El rectángulo es paralelogramo ya que:
$\overline{EH}$ es paralelo a $\overline{FG}$ y
$\overline{EF}$ es paralelo a $\overline{HG}$

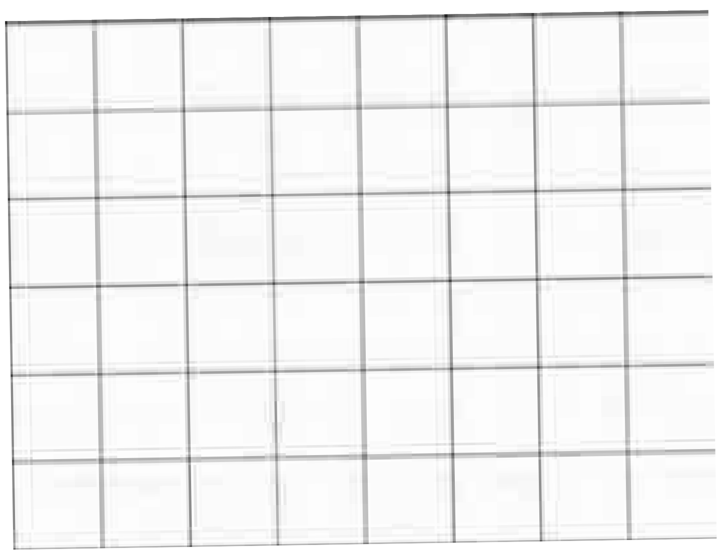


El romboide es un paralelogramo ya que:
$\overline{IL}$ es paralelo a $\overline{JK}$
e $\overline{IJ}$ es paralelo a $\overline{LK}$.



El rombo es un paralelogramo ya que:
$\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{PO}$
y $\overline{NO}$ es paralelo a $\overline{MP}$.

Si se desea conocer el área de un rectángulo se puede recurrir a cubrir la superficie con la unidad de medida. Si es, por ejemplo el cm^2.



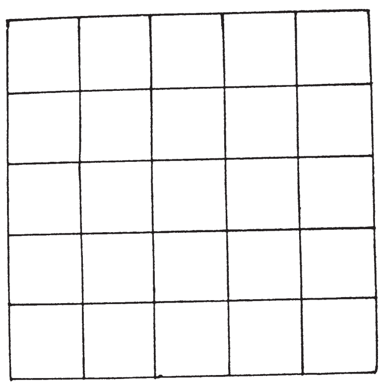
Se puede observar que la medida de la base es de 8 cm y la altura de 6 cm; el producto de esas dos longitudes es 48 cm^2, que es el mismo número de centímetros cuadrados que resultaron al realizar la cuadrícula.

$$8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$$

Una forma general para obtener el área de un rectángulo es hallar el producto de la base por su altura: $A = b \cdot h$, donde A es el área, b es la base y h es la altura.

$$A_{\square} = b \cdot h$$

El cuadrado es una forma especial de rectángulo porque tiene sus cuatro ángulos rectos; por lo tanto, al cubrir su superficie con unidades cuadradas, estas tendrán la misma relación con la medida de sus lados.



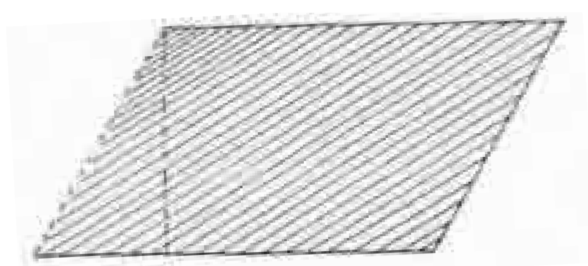
lado $\times$ lado = área

$3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}^2$

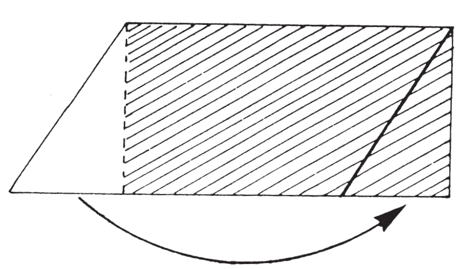
Se puede observar que el área de este tipo de figuras es el resultado de multiplicar la base por la altura, que en este caso es de la misma longitud.

$$A = \ell \times \ell$$
$$A_{\square} = \ell^2$$

El romboide, como ya se señaló, tiene sus ángulos consecutivos desiguales.

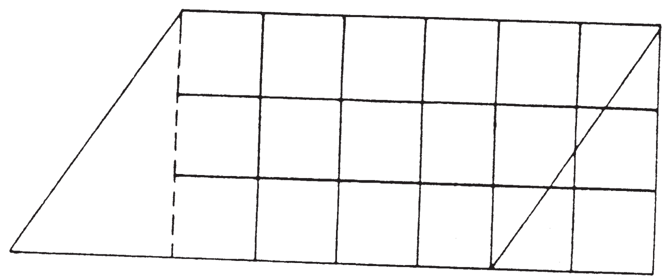


Al señalarse la altura del romboide se forma un triángulo que, al trasladarlo al extremo derecho, forma un rectángulo cuya base y altura se conservan.



De ello se puede concluir que para calcular el área de un romboide, se utiliza la misma fórmula del rectángulo.

$$A = b \cdot h$$



$$A = 6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$$
$$A = 18 \text{ cm}^2$$

La fórmula para calcular el área del rectángulo sirve de base para deducir de ella las fórmulas del área de otras figuras y resolver así problemas más variados.

Para calcular el área de un rombo se utiliza una fórmula especial que se verá más adelante.

Contesta junto con tu compañero(a) las siguientes preguntas en tu cuaderno:

a) ¿Qué es un paralelogramo?

b) ¿A cuáles cuadriláteros puedes llamar paralelogramos?

c) ¿Por qué un cuadrado es un rectángulo?

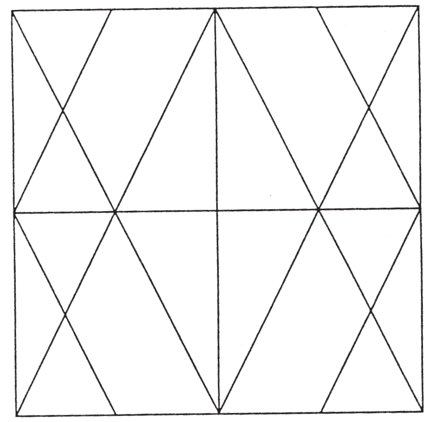
d) ¿Es todo rectángulo un cuadrado? ¿Por qué?

e) ¿Podrás considerar al cuadrado como un rombo? ¿Por qué?

Comenta tus respuestas en el grupo, si tienes dudas pregúntale a tu profesor(a).

Realiza los siguientes ejercicios en equipo.

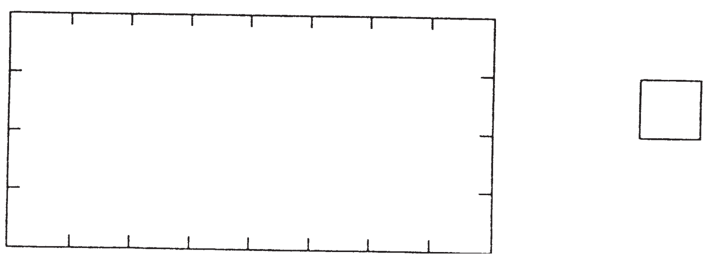
1. Observa con cuidado la figura siguiente, realízala en tu cuaderno, y localiza los paralelogramos escondidos. Dibuja con azul el perímetro de los cuadrados, el de los rectángulos con rojo, el de los romboides con amarillo y el de los rombos con verde.



a) ¿Cómo reconocer un paralelogramo?

b) ¿Cómo calcular el área de un rectángulo? ¿De un cuadrado? ¿De un romboide?

2. En tu cuaderno cuadricula la siguiente figura, de acuerdo con la unidad señalada, y contesta las preguntas.



a) ¿Cuántos cuadrados resultaron en el rectángulo?

b) ¿Qué medida tiene su base?

c) ¿Cuántas unidades tiene de altura?

d) ¿Qué relación encuentras entre su área y las medidas de su base y altura?

e) ¿Cómo encontrarías su área sin cuadricular su superficie?

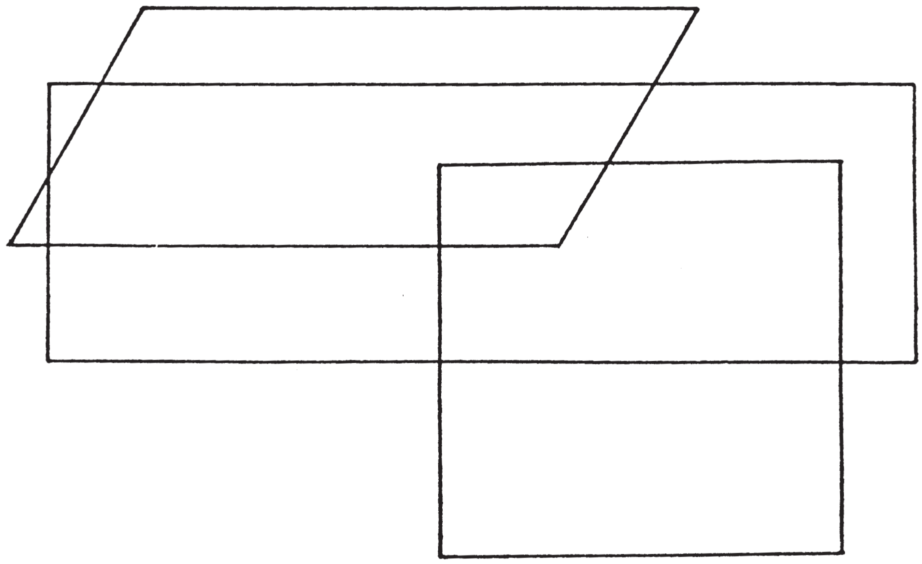
f) ¿ Cuántas unidades tiene la base?

g) ¿Cuántas de altura?

h) Utiliza la expresión generalizada para calcular el área de la figura sin tener que cuadricularla.

Compara con tus compañeros(as) los resultados obtenidos. De haber diferencias, verifica y corrige si es necesario.

Realiza de manera individual, el siguiente ejercicio. Localiza en el dibujo de abajo un cuadrado, un rectángulo y un romboide. Mide cada uno de ellos y encuentra su base y su altura. También calcula su área.



1. ¿Qué datos necesitas para calcular el área de un paralelogramo?
2. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo en el dibujo anterior?
3. ¿Cuál es su área?
4. ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado?
5. ¿Cuál es su área?
6. ¿Cuánto miden la base y la altura del romboide?
7. ¿Cuál es su área?

Compara tus resultados con la clave adjunta. Si hay diferencias, realiza nuevamente las operaciones, y corrige.

CLAVE

1) Base y altura. 2) $A = b.h$, 3) 11 cm y 3,5 cm, 4) 38.5 cm^2, 5.5 cm, 6) 25 cm^2, 7) 7 cm y 3 cm, 8) 21 cm^2.

121 ESPACIO ENTRE TRES

Área del triángulo
Justificación de la fórmula correspondiente

¿Qué figura está limitada por tres líneas y tiene tres ángulos y tres vértices? Exacto, es un triángulo. En esta sesión obtendrás áreas de triángulos.

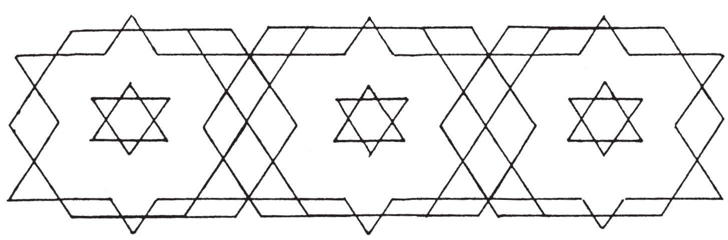
Observa el video. Comenta con tus compañeros(as) de grupo de dónde se obtiene el área de los triángulos.

Con un compañero(a) de grupo, lee el texto:

ÁREA DEL TRIÁNGULO

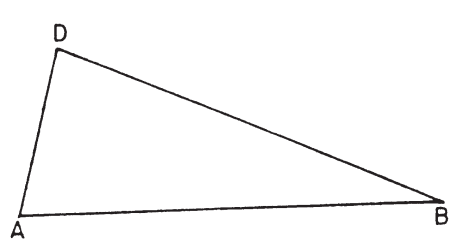
Los triángulos son figuras planas que están limitadas por tres segmentos de línea; ellos se pueden encontrar en infinidad de lugares: diseños gráficos, arquitectónicos, etc.

Un ejemplo es la siguiente composición:

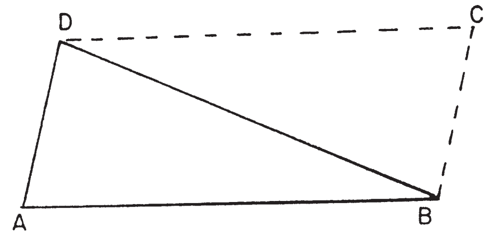


Por ser una figura cuyo uso es muy común es fundamental conocer todas sus características. A continuación se establece la forma de obtener el área de un triángulo cualquiera.

Sea el triángulo *A B D*.



Con línea discontinua se traza un segmento paralelo a $\overline{AD}$ a partir de B y otro paralelo a $\overline{AB}$ que pase por D; esto es:



Se observa que la figura $A\ B\ C\ D$ es un paralelogramo y que además se tienen dos triángulos, siendo éstos $\Delta\ ABD$ y ΔBCD, en donde:

$$\Delta \text{ ABD} \cong \Delta \text{ BCD}$$

También se observa que:

Área $ABCD$ = área $\Delta\ ABD$ + área $\Delta\ BCD$

Considerando que $\Delta\ ABD \cong \Delta\ BCD$, entonces: área $ABCD$ = 2 (área $\Delta\ ABD$)

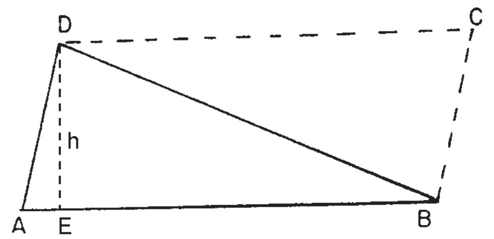
Se aplican las propiedades de la igualdad para obtener el área del triángulo; se tiene que:

$$2 \text{ (área } \Delta \text{ ABD) = área ABCD}$$

$$2\,\frac{(\text{área } \Delta\ ABD)}{2} = \frac{\text{área } ABCD}{2}$$

$$\text{área } \Delta\ ABD = \frac{1}{2}\,(\text{área } ABCD)$$

Ahora se traza una perpendicular a $\overline{AB}$ a partir del vértice D, la cual será $\overline{ED}$.



Esta es la altura del triángulo ABD.

En la figura se observa que la base (b) tanto del Δ *ABD* como del paralelogramo *ABCD* es $\overline{AB}$ y la altura (h) para ambos es $\overline{ED}$.

El área del paralelogramo *ABCD* es: base $\times$ altura.

Sustituyendo las igualdades: base = *AB* y altura = *ED* en el área de *ABCD*; la expresión que resulta es:

$$\text{Área } ABCD = (\text{AB})\ (\text{ED})$$

Ahora, sustituyendo en la expresión:

$$\text{Área } \Delta\, ABD = \frac{1}{2}\,(\text{área } ABCD)$$

queda:

$$\text{Área } \Delta\, ABD = \frac{1}{2}\,(\text{AB})\ (\text{ED})$$

Como $\overline{AB}$ es la base y $\overline{ED}$ es la altura, al sustituir se tiene la expresión:

$$\text{Área } \Delta\, ABD = \frac{1}{2}\,(\text{base})\ (\text{altura})$$

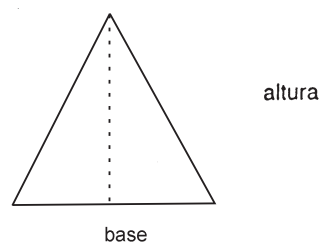
Simbólicamente, la fórmula para calcular el área del triángulo es:

$$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

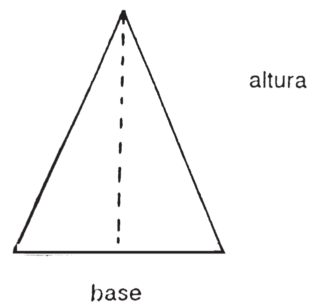
Entonces, para obtener el área de un triángulo cualquiera el primer paso será tomar un lado como base de la figura, enseguida encontrar la altura que corresponde a ese lado; esto se logra trazando la perpendicular a la base que pasa por el vértice del ángulo contrario.

Obsérvese que en los siguientes triángulos todas las bases correspondientes están trazadas dentro del triángulo. Pero no siempre sucede lo mismo; puede ser que la altura se trace fuera del triángulo o que ésta sea un lado del mismo, cuando se trata de un triángulo rectángulo, por ejemplo:

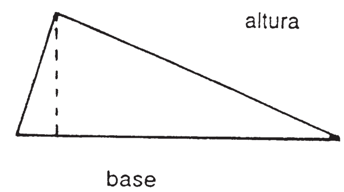
Equilátero



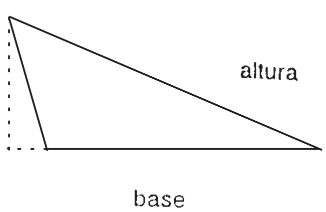
Isósceles



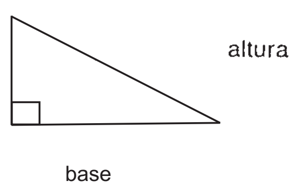
Escaleno



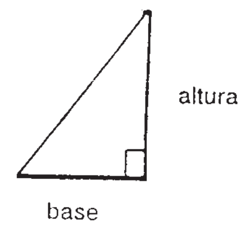
Obtusángulo



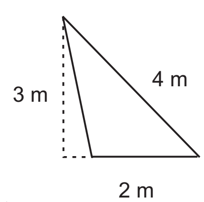
Triángulos



rectángulos



Véase ahora la aplicación de la fórmula al hallar el área del siguiente triángulo:

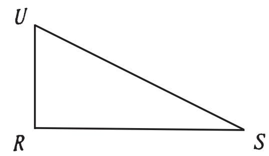


Tomando como base el lado de 2 cm, se tiene que la altura trazada es de 3 m.

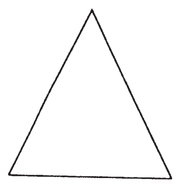
Una vez definidos los lados se determina el área; esto es:

Datos	**Fórmula**	**Resultado**
base = 2 m	$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$	
altura = 3 m	$A = \dfrac{(2\ \text{m})\ (3\ \text{m})}{2}$	$A = 3\ \text{m}^2$
	$A = \dfrac{6\ \text{m}^2}{2}$	
	$A = 3\ \text{m}^2$	

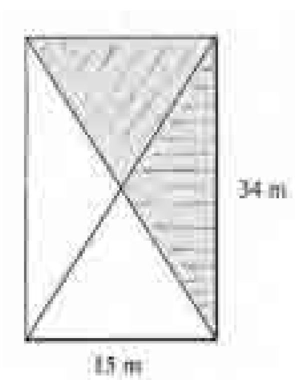
Realiza con un compañero(a) los siguientes ejercicios:

1. 

Para hallar el área del siguiente triángulo, has un modelo en papel del rectángulo que completarías con trazos auxiliares. ¿Cómo relaciones el área del rectángulo con la del triángulo? ¿Qué medidas necesitas hacer?

2. 

Explica cómo hallar el área del siguiente triángulo. Has el modelo del paralelogramo que te permite comprobar tu procedimiento.

3. 

En la siguiente figura se observan varios triángulos, encuentra y compara las áreas de los triángulos señalados.

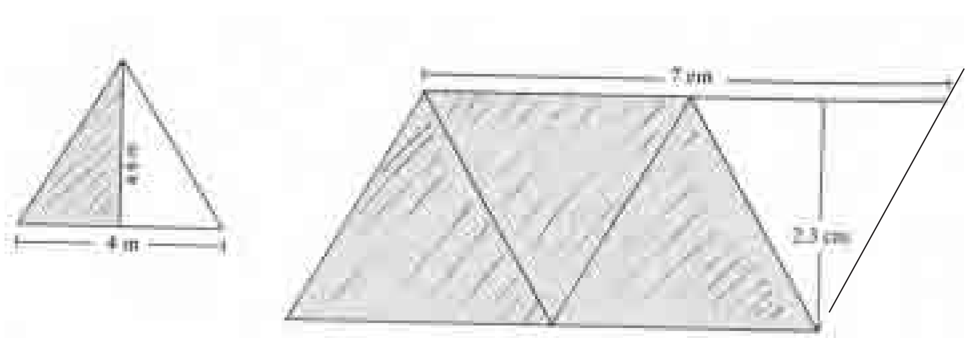
a) Mediante cálculo numérico.

b) Mediante comprobación con modelos hechos con papel.

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as); si surgen dudas, pregunta a tu profesor(a).

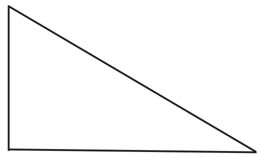
Resuelve individualmente los siguientes ejercicios:

1. Encuentra el área de la parte sombreada utilizando la fórmula del triángulo.



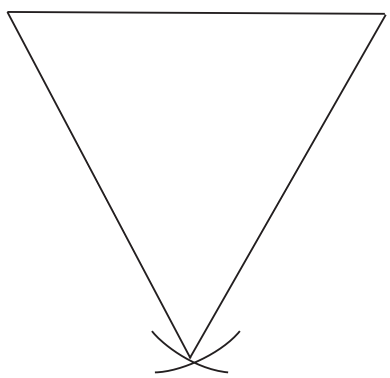
2. Traza un triángulo equilátero cuyos lados midan 3.5 cm; halla la altura y el área.

3. Mide el triángulo rectángulo dibujado y encuentra su área.



Coteja tus resultados con la clave. Si hallas discrepancias, pregunta a tu profesor(a).

CLAVE



1. a) = $\frac{2 \times 4.6}{2}$ = 4.6 m^2 b) A = 3. $\frac{3.5 \times 2.3}{2}$ = 12.1 cm^2

2. base $\pm$ 3.5 cm, altura = 3 cm

$A = \frac{3.5 \times 3}{2}$

$A = 5.25\ cm^2$

3. base = 4 cm, altura = 2.4 cm

$A = \frac{2.4 \times 4}{2}$

$A = 4.8\ cm^2$

122 RESUÉLVELOS TÚ MISMO

Problemas sobre el cálculo de áreas de paralelogramos y triángulos

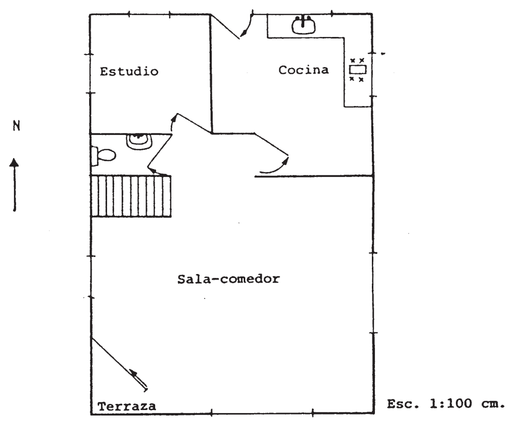
(134) Resolución de problemas

En esta sesión aplicarás lo que aprendiste sobre el área de triángulos y paralelogramos, al resolver problemas cotidianos.

Observa el video. Comenta con tus compañeros(as) del grupo en dónde puedes aplicar tus conocimientos sobre la obtención del área de triángulos y paralelogramos.

Con un compañero(a) resuelve los siguientes ejercicios:

1. Mide el plano de la planta baja de esta casa y obtén el área de las habitaciones: cocina, estudio, baño, sala-comedor y terraza.



2. Una compañía de bienes raíces ofrece a la venta un terreno triangular bien ubicado, cuyos lados tienen las siguientes dimensiones: 15 m, 18 m y 34 m. Calcula el área del terreno (dibújalo a una escala de 1: 1 000 cm)

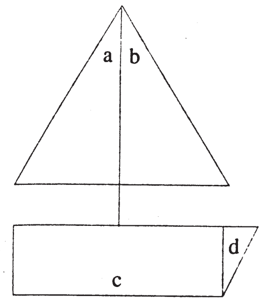
   ¿Se formó un triángulo? ¿Qué resultó?

   ¿Por qué crees que la compañía fue demandada por fraude?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as). Si surgen dudas, coméntalas con el grupo.

Resuelve, individualmente, los siguientes ejercicios:

1. Mide con tu regla, y calcula el área de las figuras que componen el siguiente dibujo:



Áreas:

a), b), c) y *d)*

2. Se tiene un terreno rectangular que mide 15 m de frente por 22 de fondo. Se quiere saber la superficie que se va a construir si el dueño desea dejar un área de 180 m^2 para áreas verdes y estacionamiento.

3. Calcula mentalmente la dimensión faltante en las siguientes áreas:

a) ¿Cuánto mide de frente un terreno rectangular cuya área es igual a 96 m^2 y de fondo mide 12 m?

b) Se tiene un terreno triangular cuya área es de 40 m^2. Si el lado que se toma de base mide 5 m, ¿cuánto mide su altura?

c) El área de un terreno cuadrangular es de 100 m^2; ¿cuánto miden sus lados?

Coteja tus resultados con la clave; si tienes dudas, pregunta a tu profesor(a).

CLAVE

1. a) y b) A = 1.87 cm^2, c) A = 3 = cm^2, d) A = 0.25 cm^2; 2. 150 m^2 de construcción; 3. a) 8 m, b) 16 m, c) 10 m.

123 (135) UNA DE CAL Y OTRA DE ARENA

Área del trapecio y del rombo

Al mirar las diferentes formas que componen un paisaje, podemos darnos cuenta que las formas de la naturaleza son caprichosas, pero las creadas por el ser humano, en su mayoría son geométricas.

Observa el video en donde encontrarás algunas de esas figuras y la deducción de las fórmulas para obtener su área. Comenta con tu profesor(a), la utilidad de las fórmulas para obtener el área del trapecio y del rombo.

Efectúa en grupo una lectura comentada del texto **Área del trapecio y del rombo.** Es importante que distingas las partes de cada figura, para que las relaciones con la deducción de la fórmula.

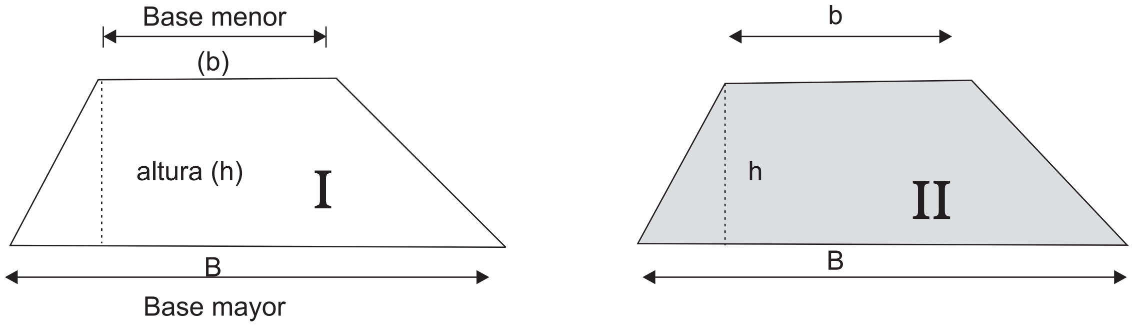
ÁREA DEL TRAPECIO Y DEL ROMBO

El conocimiento de la fórmula para obtener el área del triángulo y del romboide pueden aplicarse para deducir la fórmula del área de otros polígonos, como el trapecio y el rombo.

Fórmula del área del trapecio

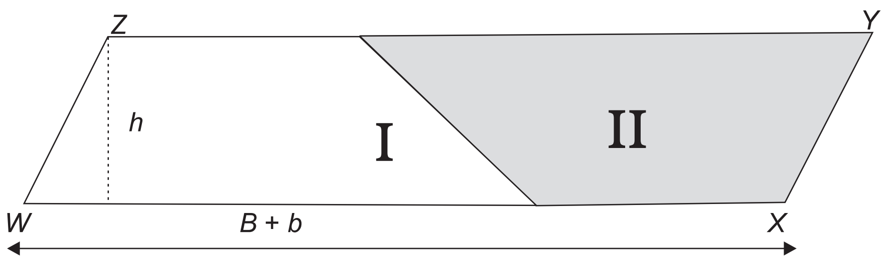
El trapecio es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos denominados base mayor (*B*) y base menor (*b*).

Nótese las dimensiones del trapecio I y del trapecio II.



Los dos trapecios son congruentes, pues sus medidas son iguales.

Obsérvese que, al unir los dos trapecios, como se muestra a continuación, se forma el romboide *WXYX*.



Como se sabe, el área del romboide se obtiene multiplicando la base por la altura; en la figura, la base del romboide *WXYZ* es igual a la base mayor más la base menor ($B + b$).

Por lo tanto, al sustituir se tiene que:

Área del romboide *WXYZ* = (base mayor + base menor) $\times$ altura.

Como el romboide *WXYZ* está formado por el trapecio I y el trapecio II, que son congruentes, entonces el área de uno de ellos es la mitad del área del romboide *WXYZ*.

$$\text{Área del trapecio} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$$

Por lo tanto:

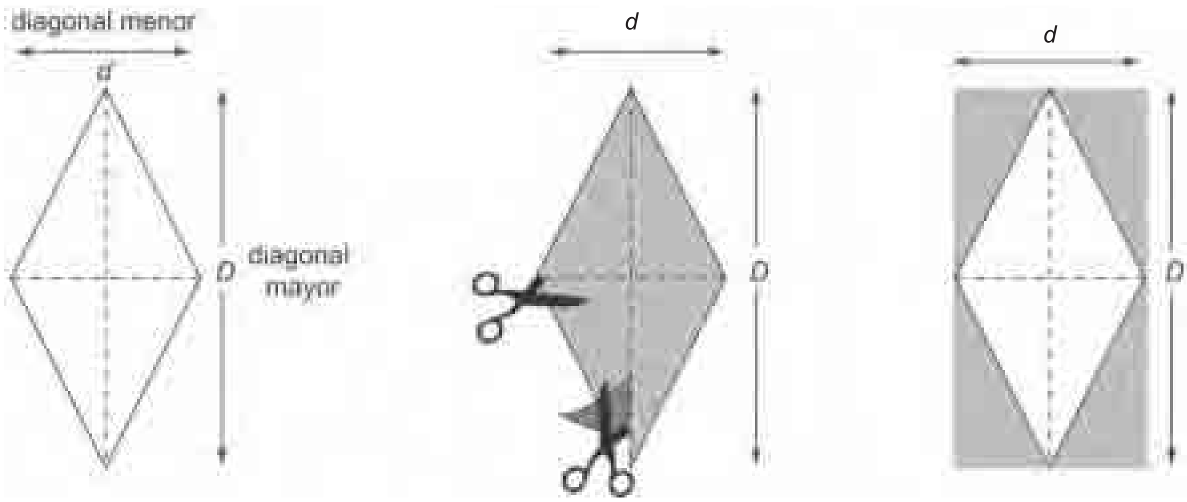
El área del trapecio es igual a la mitad del producto de la suma de sus bases y la altura: $A = \dfrac{(B + b)\,h}{2}$

Área del rombo

Para deducir la fórmula del área del rombo se debe tener presente el área del rectángulo, en la que se multiplica la medida de la base por la altura, o sea:

$$A = b \bullet h$$

Obsérvense las siguientes figuras:



Si se tienen dos rombos congruentes, se recorta uno de ellos y se acomodan sus partes, se obtiene un rectángulo.

Esto significa que el área del rombo corresponde a la mitad del área del rectángulo, en donde la base y la altura se relacionan con las diagonales del rombo. Es decir:

$$\text{Área del rombo} = \frac{\text{Área del rectángulo}}{2}$$

$$\text{Área del rombo} = \frac{\text{Base} \times \text{altura}}{2}$$

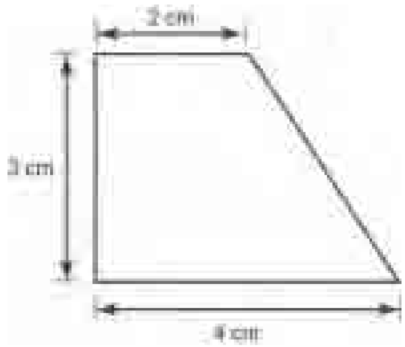
$$\text{Área del rombo} = \frac{\text{Diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$

$$A = \frac{Dd}{2}$$

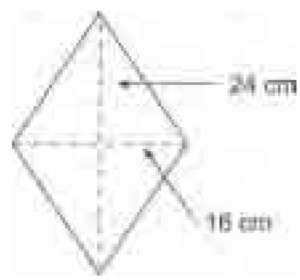
La expresión anterior representa la fórmula para calcular el área del rombo.

Reúnete con un compañero(a), para realizar el siguiente ejercicio.

a) Haz la comprobación de la expresión general para calcular el área de esta figura. Recorta modelos de ella para comprobar la deducción que se te pide.



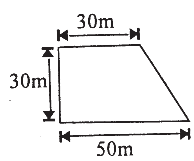
b) Halla el área del rombo de la figura. Recorta modelos del rombo para comprobar la expresión general que te permite hallar el área.

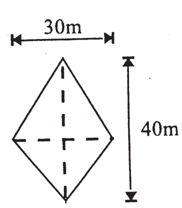


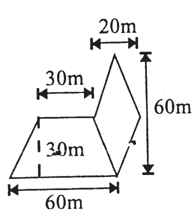
Con un compañero(a) encuentra el área de las figuras. Para cada una explica el procedimiento y la expresión general que uses.

Compara tu trabajo con el de otros compañeros(as); si tienes dudas consulta con tu profesor(a).

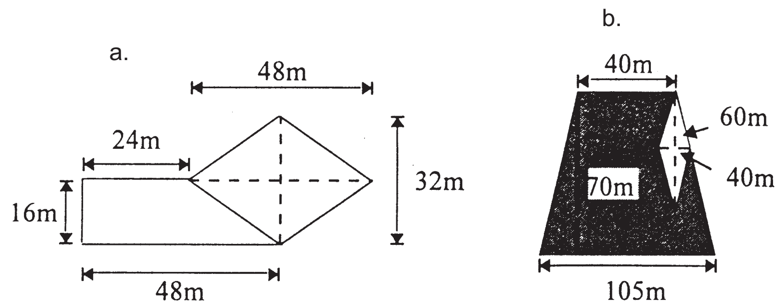
Figuras







Explica el procedimiento, las expresiones generales y los datos que usas para obtener el área de las figuras a y b.



¿Terminaste? Compara tus respuestas con la clave. Si no coinciden, encuentra el error y corrígelo.

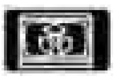
CLAVE

Datos	Fórmula	Sustitución	Resultado
a) B = 48m	$A = \frac{(B+b)h}{2} + \frac{D \cdot d}{2}$	$A = \frac{(48+24)16}{2} + \frac{48(32)}{2}$	A = 1344m
b = 24m			
h = 16m			
D = 48m			
d = 32m			

124 UNA PARA TODOS

Área de polígonos regulares
(136) Justificación de la fórmula

La naturaleza en ocasiones nos presenta polígonos regulares, por ejemplo, las celdillas de un panal de abejas; ¿sabes qué forma tienen?

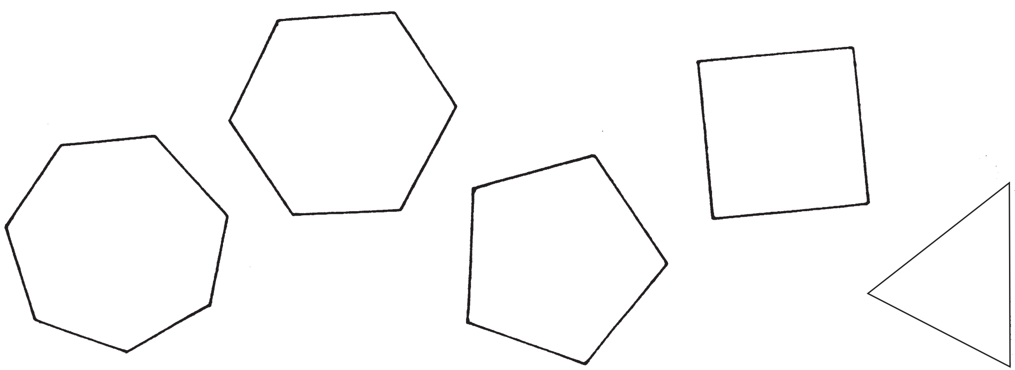


Observa el video en el que se menciona cuáles son los polígonos regulares y cómo se obtiene la fórmula para calcular su área.

Lee y analiza con un compañero(a) el siguiente texto.

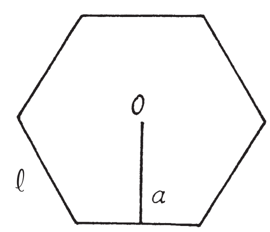
ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES

Los polígonos regulares son aquellos que tienen lados y ángulos de igual medida, por ejemplo.

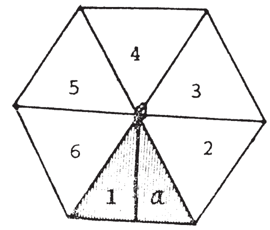


A continuación se deducirá la fórmula para obtener el área del polígono de cinco o más lados ya que las fórmulas para calcular las áreas del triángulo y del cuadrado han sido ya deducidas.

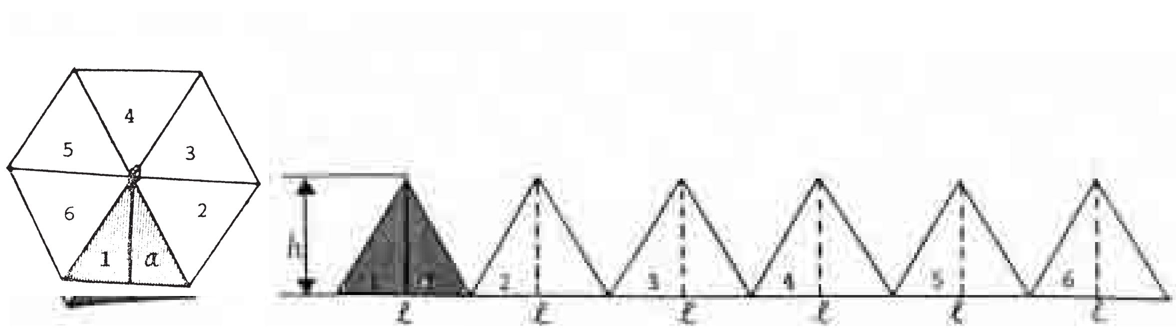
En el siguiente polígono regular se ha denotado su centro como *O*, su apotema *a* y un lado ℓ. Apotema es la perpendicular que va del centro al punto medio de cualquiera de los lados del polígono.



Obsérvese que al unir con segmentos el centro del polígono regular con los vértices del mismo, se determinan en él tantos triángulos congruentes como lados tenga el polígono.



Si se recortan los triángulos del hexágono regular, se observa que la apotema es igual a la altura de cada triángulo y sus lados son las bases de los triángulos.



Como el área del triángulo se obtiene con la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$, sustituyendo la base (b) por el lado (ℓ) y la altura (h) por el apotema (a), se tiene:

$$A = \frac{\ell \cdot a}{2}$$

Como el hexágono tiene 6 triángulos congruentes, entonces su área se obtiene con la siguiente fórmula:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2}$$

Pero en la fórmula $6\ \ell$, representa el perímetro (P) del hexágono regular.

Por lo tanto, sustituyendo en la fórmula $6\ \ell \times P$, se tiene que:

$$A = \frac{\ell \cdot a}{2}$$

En forma análoga se puede deducir la fórmula para calcular el área de otros polígonos regulares y en general concluimos que:

Una expresión general para calcular el área de cualquier polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro y la apotema.

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

Con un compañero(a) trabaja:

1. ¿Qué es un polígono regular? ¿Cuál es el más sencillo?

2. ¿A qué se llama apotema en un polígono regular?

3. Cuando analizaste un polígono de cinco o más lados, éste se dividió en triángulos; ¿por qué crees que este procedimiento es favorable para encontrar el área del polígono?

4. ¿Por qué crees que este procedimiento no fue usado en el cálculo del área del triángulo equilátero y del cuadrado?

5. ¿Qué relación hay entre el número de lados de un polígono regular y el número de triángulos que se forman al trazar los segmentos que unen el centro con los vértices del polígono?

6. Al unir el centro de un polígono con cada uno de sus vértices mediante segmentos, se forman triángulos. ¿Cómo son el apotema y la altura de dichos triángulos?

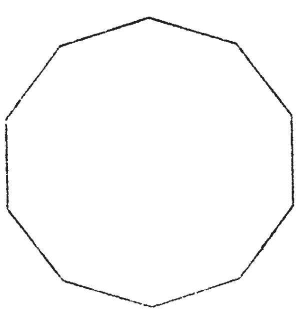
7. En la fórmula $A = \frac{P \cdot a}{2}$, ¿qué representan la P y la a?

8. ¿Cómo se obtiene el perímetro de un polígono regular?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as) y corrige en caso necesario.

Resuelve con tu compañero(a) los siguientes ejercicios.

1. Obtén el área de la siguiente figura. Explica tu procedimiento y cómo usas una expresión general.



Datos
a = 19 mm
ℓ = 12 mm

2. ¿Cuál es el área de un octágono regular que tiene por lado 15 cm y de apotema 18 cm? Explica cómo procedes.

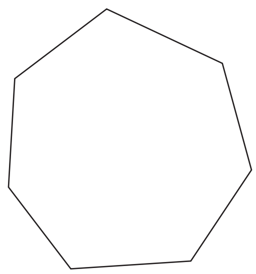
Compara tus respuestas con las de tus compañeros(as).

En forma individual resuelve:

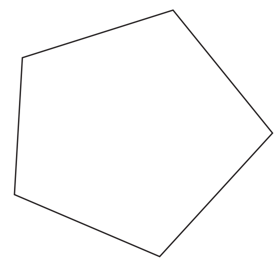
a) Área del heptágono regular, si su apotema mide 17.5 cm y su lado 18 cm.

b) Área del pentágono regular, si su apotema mide 3.4 cm y su lado 5 cm.

a)

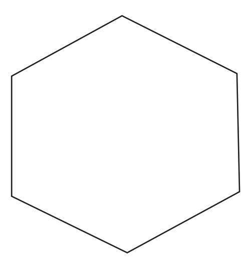


b)



c) Se desea colocar azulejo en el piso de una fuente que tiene la forma de un hexágono regular, con 3.60 m de lado y 3.10 m de apotema. ¿Cuántos metros cuadrados de azulejo se necesitan para cubrir el piso?

¿Cuántos metros cuadrados de azulejo se necesitan para cubrir el piso?



Compara tus resultados con los que se dan en la clave; en caso de error revisa tu procedimiento para corregir.

CLAVE

a) 1 102.5 cm^2, b) 42.5 cm^2, c) 33.48 m^2.

125 UN POCO DE TODO

(137)

Problemas sobre cálculo de áreas de trapecios, rombos y polígonos regulares
Resolución de problemas

La aplicación de lo aprendido es la mejor forma de evitar que se olvide y, en esta sesión, tendrás que hacer gala de tu capacidad de comprensión para resolver situaciones problemáticas.

Observa con atención el video que te recordará algunos puntos importantes para el desarrollo de esta sesión.

Con tres compañeros(as) resuelve los siguientes problemas. Analízalos bien.

a) Si el área de un rombo es 210 m^2 y la diagonal menor mide 14 m, ¿cuánto mide la diagonal mayor? Haz el dibujo para que te sirva de referencia.

   Explica la expresión general que usas para resolver el área del rombo.

b) Calcula el área de un heptágono regular que mide 9 dm de lado y 10 dm de apotema. Realiza el dibujo para que te apoyes en él. Explica los valores que usas en la expresión general.

c) Se tiene un trapecio cuya base mayor mide 15 cm, su base menor mide 10 cm y su altura mide 5 cm. Calcula el área del trapecio. Dibuja el trapecio que te servirá de referencia y señala la base mayor, la base menor y la altura.

   Explica el procedimiento que emplees.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as), si tienes duda, consulta con tu profesor(a).

Ahora en forma individual, resuelve los siguientes problemas.

a) Se desea alfombrar el piso de una oficina de forma trapezoidal cuyas medidas son: base mayor = 6 m, base menor = 5 m, altura = 4 m. Si el metro cuadrado de alfombra cuesta $35 000, ¿cuánto costará alfombrar la oficina? Ayúdate haciendo el dibujo que represente el problema.

   ¿Cómo procedes para calcular el área de un trapecio?

   ¿Cuánto mide la superficie de la oficina?

   ¿Qué operación debes hacer para calcular el costo de la alfombra?

¿Cuál es el costo total?

b) Se quiere saber cuántos metros cuadrados de azulejos se necesitan para cubrir el fondo de una fuente de forma hexagonal, que mide de lado 100 cm y de apotema 95 cm. Haz el dibujo.

   ¿Cuánto mide el área del fondo de la fuente?

   ¿Cuál es su equivalencia en metros cuadrados?

   ¿Cuántos metros cuadrados de azulejos se deberán comprar?

   ¿Si se redondeara esta cantidad, cuántos metros cuadrados tendrían que comprarse? ¿Por qué?

c) Calcular el área de un terreno en forma romboidal cuya diagonal mayor mide 3.2 m y su diagonal menor mide 2.5 m. Realiza el dibujo, para que tengas una referencia.

Compara tus respuestas con la clave, cuando el profesor(a) lo indique.

CLAVE

a) $A = \frac{B+b}{2}(h)$; 22 m^2; multiplicar el área del piso por el costo de cada metro cuadrado de alfombra; $770 000; b) 28 500 cm^2; 2.85 m^2; 3 m^2, porque si se redondeara a 2 m^2 faltaría una parte por cubrir; c) 4 m^2.

126 BUSCA LA FÓRMULA

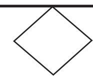
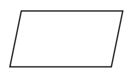
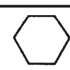
(138)

Uso de expresiones generales para cálculos de áreas de figuras compuestas

En matemáticas existen muchas fórmulas para facilitar el trabajo, donde éstas tienen aplicación pero lo importante es saber cuándo y cómo utilizarlas.

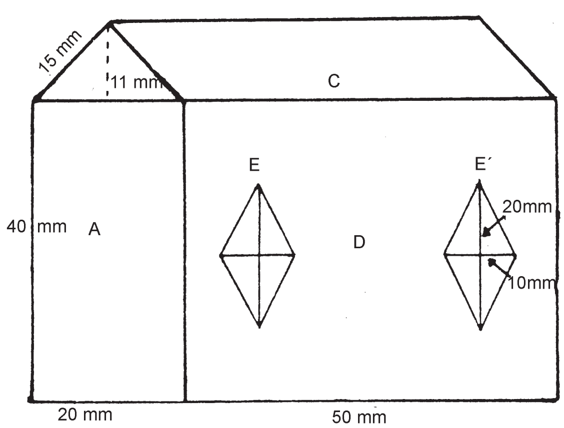
Observa atentamente el video que te explicará la manera de elaborar un formulario, además de cómo usarlo. Usa el cuadro que aparece en la sección de aplicación del aprendizaje.

Llena el siguiente cuadro en tu cuaderno de acuerdo con la información que se te dio en el video.

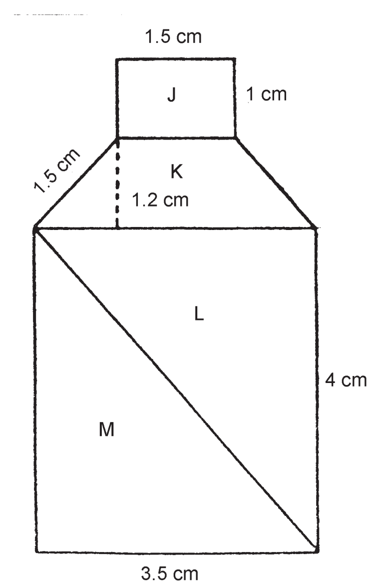
Nombre	Figura	Fórmula
		
		
		
		
		
		
		

Calcula en tu cuaderno, individualmente, el área total de las siguientes figuras compuestas.

a) Considera las ventanas como huecos en la superficie.



¿Cuál es el área de *A*? ¿Cuál es el área de *B*? , ¿Cuál es el área de *C*? ¿Cuál es el área de *E*+ *E’*? ¿Cuál es el área de *D*? ¿Cuál es el área de toda la figura?



¿Cuál es el área de J?
¿Cuál es el área de K?
¿Cuál es el área de L?
¿Cuál es el área de M?
¿Cuál es el área de J + K?
¿Cuál es el área de L + M?
¿Cuál es el área total de la figura?

Compara tus respuestas con la clave.

CLAVE

a) 800 mm^2, 110 mm^2, 550 mm^2, 200 mm^2, 1 800 mm^2, 3 260 mm^2. b) 1.5 cm^2, 3 cm^2, 7 cm^2, 2 cm^2, 4.5 cm^2, 14 cm^2, 18.5 cm^2.

127 ¿TRES CUADRADOS EN UN TRIÁNGULO?

(139)

Teorema de Pitágoras
Demostración del teorema de Pitágoras

¿Alguna vez has analizado las ventajas que te reportan los conocimientos matemáticos adquiridos en el aula?

Si te dedicaras sólo al comercio, las operaciones aritméticas te serían de gran utilidad; si realizaras estudios sobre construcción, la geometría y el álgebra serían fundamentales; si te dedicaras a la siembra, sería necesario realizar cálculos para obtener mejores cosechas, etcétera.

Observa el video que te mostrará algo que es de gran aplicación práctica.

Lee con un compañero(a) el texto **Teorema de Pitágoras** y enúncialo en tu cuaderno como lo hayas entendido.

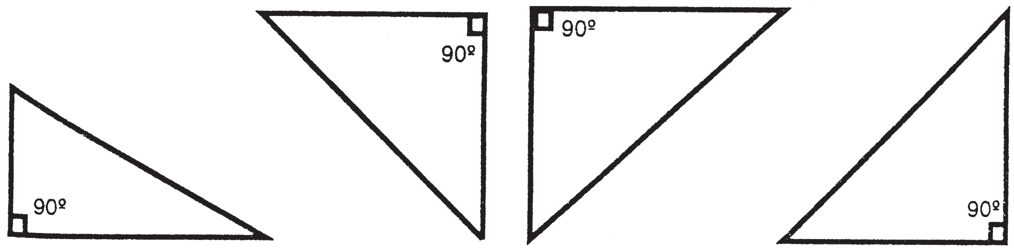
TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras fue un filósofo y matemático griego que nació en la isla de Samos en el siglo IV a.C.

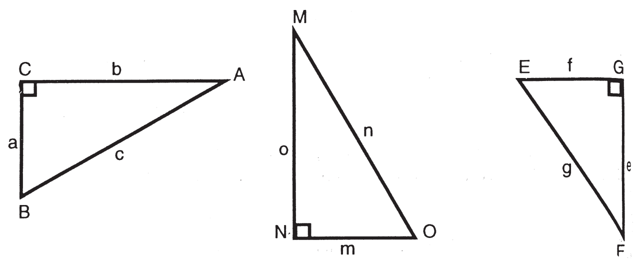
Se dice que desarrolló grandes conocimientos en aritmética y geometría, los cuales han sido fundamentales para las matemáticas. A él se le atribuye, entre otros aportes, el teorema que lleva su nombre y del cual haremos una comprobación para comprenderlo.

Para empezar precisemos algunos términos.

Triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto.



En un triángulo rectángulo, a los lados que forman el ángulo recto se les conoce como **catetos** y al segmento que los une se le llama **hipotenusa**. Estos tres lados se identifican con letras minúsculas que corresponden a la mayúscula que determina los vértices opuestos a ellos.

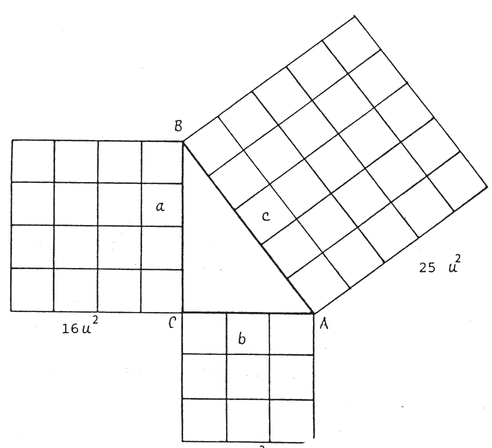


Así, en los triángulos arriba dibujados, los lados se localizan como se indica a continuación:

Para el triángulo *ABC*: *a* y *b* son catetos y *c* es hipotenusa.
Para el triángulo *MNO*: *m* y *o* son catetos y *n* es hipotenusa.
Para el triángulo *EFG*: *e* y *f* son catetos y *g* es hipotenusa.

Veamos ahora qué establece el teorema:

Dado el triángulo rectángulo *ABC*, cuyas medidas son: catetos 3 u y 4 u; hipotenusa 5 u, se han construido los cuadrados correspondientes a cada lado del triángulo.

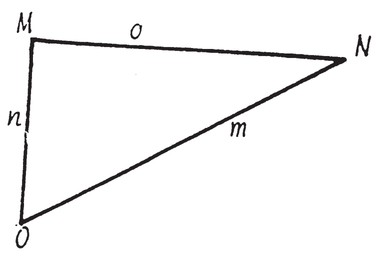


Como puede observarse, los cuadrados construidos sobre los catetos miden de área 9 u^2 y 16 u^2, respectivamente; si se suman las áreas de ambos cuadrados se tienen 25 u^2, que es el mismo valor que tiene el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Lo que, en forma algebraica, se representa como:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

En forma general se dice:

“La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”.



Para el triángulo *MNO*, el teorema quedará enunciado algebraicamente como sigue:

$$o^2 + n^2 = m^2$$

Lee en voz alta tu interpretación y escucha las de tus compañeros(as). Compara y corrige si es necesario.

Con un compañero(a) realiza, en tu cuaderno, lo que se indica.

a) Traza un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 6 cm y 8 cm.

b) ¿Cuánto mide la hipotenusa?

c) Traza el cuadrado sobre cada lado del triángulo y divídelo en cuadrados de un centímetro por lado.

d) ¿Cuántos centímetros cuadrados resultan en el cuadrado construido sobre el cateto de 6 cm?

e) ¿Cuántos centímetros cuadrados resultan en el cuadrado construido sobre la hipotenusa?

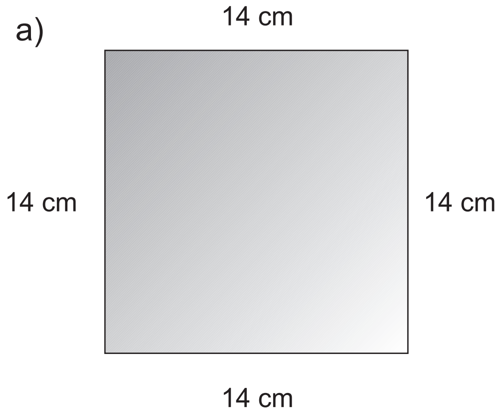
f) Suma el número de centímetros cuadrados de cada cuadrado construido sobre los catetos y compara el resultado con el número obtenido en el cuadrado construido sobre la hipotenusa. ¿Cómo resultan ambas cantidades?

Con un compañero(a) haz un rompecabezas que te permita verificar el teorema de Pitágoras:

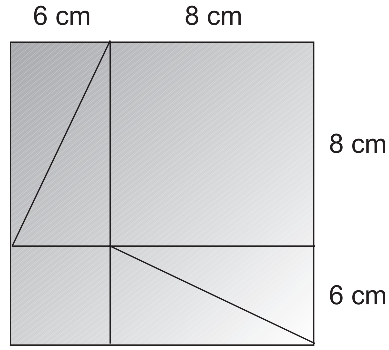
a) Construye un cuadrado de lado 14 cm y recórtalo. Lo mantendrás como base. Coloréalo.

b) Sobre otro cuadrado de lado 14 cm haz los siguientes trazos y recorta las piezas que señala el dibujo.

a)

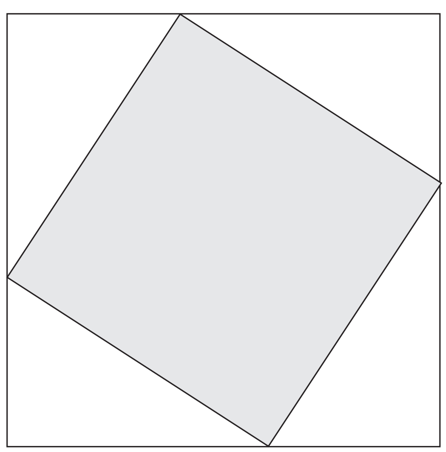


b)



Tu rompecabezas está compuesto por:
Un cuadrado de 6 cm de lado.
Un cuadrado de 8 cm de lado.
Cuatro triángulos rectángulos de catetos 6 y 8 cm.
¿Cuánto mide la hipotenusa de estos triángulos?

c) Retira los dos cuadrados y sobre tu cuadrado base coloca los triángulos como indica el dibujo:



¿Qué figura enmarcan los triángulos sobre el cuadrado base? ¿Cuánto mide el lado de esa figura?

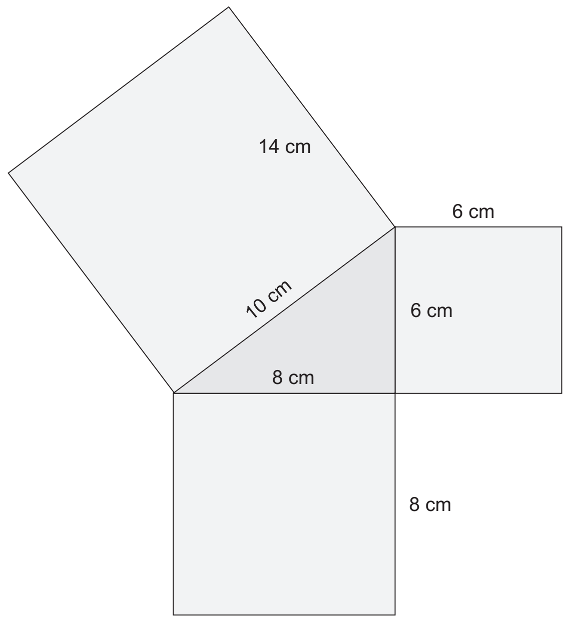
Analiza que al retirar los dos cuadrados y colocar los cuatro triángulos, el área de la figura del centro es equivalente a la suma de los dos cuadrados retirados.

¡La figura también es un cuadrado!

d) Relaciona las áreas de los cuadrados.

Área cuadrado (6 cm de lado) + Área cuadrado (8 cm de lado) = Área cuadrado (de 10 cm de lado).

e) Relaciona las dimensiones de los cuadrados del rompecabezas y del cuadrado interior, enmarcado por los triángulos, con las dimensiones de uno de los triángulos.



Has verificado el teorema de Pitágoras para el triángulo de catetos 8 cm y 6 cm y de hipotenusa 10 cm.

¿Puedes elaborar otros rompecabezas para cualquier cuadrado de lado $a + b$.

1. Individualmente contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

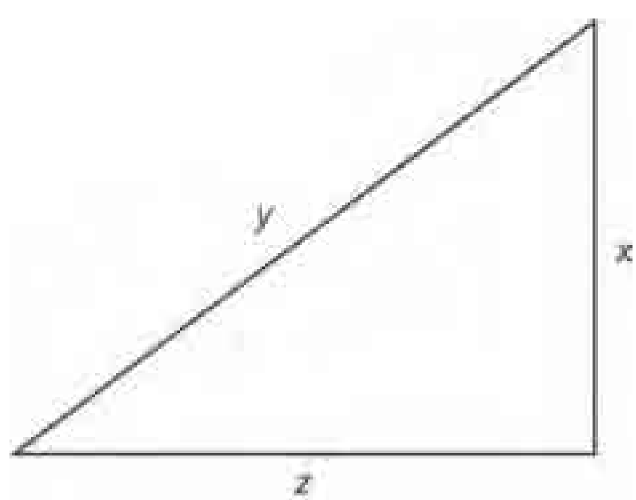
   a) ¿Cuál es la característica fundamental que tiene un triángulo rectángulo?

   b) ¿Cómo se llaman los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo?

   c) ¿Cómo se llama la línea que une a dichos lados?

   d) Enuncia el teorema de Pitágoras como lo hayas entendido.

2. De acuerdo con el triángulo;. enuncia algebraicamente el teorema de Pitágoras.



Compara tus respuestas con la clave.

CLAVE

1. a) Tiene un ángulo recto; b) Catetos; c) Hipotenusa; d) La suma de los cuadrados de los catetos, es igual al cuadrado de la hipotenusa. 2. $X^2 + z^2 = y^2$.

128 RESUÉLVELOS TÚ MISMO

(140) Problemas sobre el teorema de Pitágoras

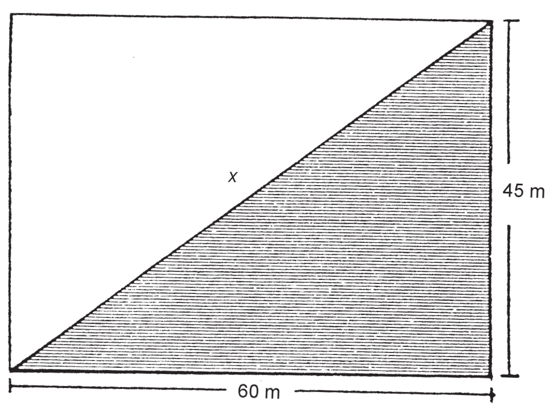
Resolución de problemas

Muchos problemas se pueden resolver si se conoce y se aplica correctamente el teorema de Pitágoras. Como es sabido, este teorema se refiere a los triángulos rectángulos y a las relaciones que existen entre las dimensiones de sus lados.

Observa el video. En él verás cómo se procede para aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de diversos problemas. Cuando termines, reúnete con un compañero(a), y comenta el contenido del mismo.

Intégrate a un equipo, y resuelve el siguiente problema. Para hacerlo, irás contestando cada pregunta que se te formule, hasta que llegues a la solución. Puedes usar tu calculadora para realizar las operaciones.

Calcula las medidas de la diagonal de un terreno rectangular que mide 60 m de largo y 45 m de ancho.



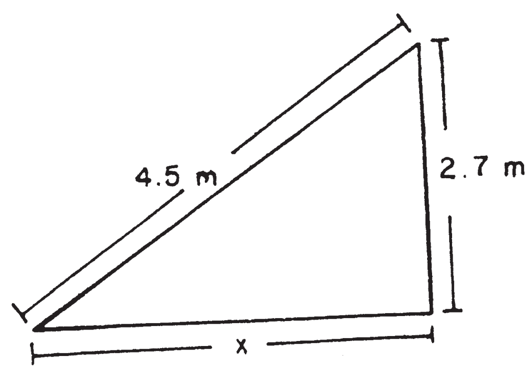
La diagonal del rectángulo, ¿es un cateto, o es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se ha formado?

¿Cuál es el cuadrado de la hipotenusa? Con el dato anterior, ¿cómo calculas el valor de *x*? (usa la calculadora).

Compara tus respuestas con las de tus compañeros(as), si es necesario corrige.

Con el mismo equipo, resuelve los siguientes problemas aplicando el teorema de Pitágoras. Usa tu calculadora para realizar las operaciones.

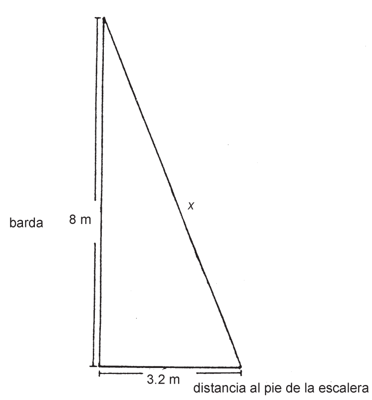
Se va a colocar un cable de alambre para fijar un poste de concreto. El cable tiene una longitud de 4.5 m. ¿A qué distancia del poste deberá asegurarse el cable si el poste mide 2.7 m?



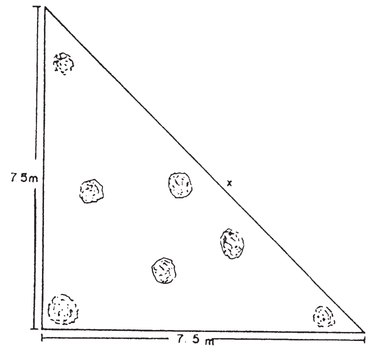
Revisa tu resultado con los integrantes de otro equipo. Si hay errores corrige.

En forma individual resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas empleando tus conocimientos relativos al teorema de Pitágoras. Usa calculadora para realizar las operaciones.

1. Encuentra la longitud de una escalera que está recargada en una barda de 8 m de altura, sabiendo que la distancia desde el pie de la escalera hasta la barda es de 3.2 m.



2. Se va a cercar con 4 líneas de alambre un jardín de forma triangular. Los catetos del triángulo miden 7.5 m cada uno. ¿Qué cantidad de alambre se requerirá?



Consulta la clave de esta sección, que se te da a continuación. Si tienes errores, corrígelos.

CLAVE

1. Longitud de la escalera: 8.6 m; 2. Hipotenusa: 10.6 m. Cantidad de alambre: 102.4 m.

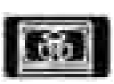
129 TODO CABE EN UN JARRITO

(141)

Polígonos regulares en el plano

Recubrimiento del plano por polígonos regulares

Si miras detenidamente, encontrarás muchos planos que están recubiertos por polígonos regulares. ¿Has pensado cómo se procede para recubrir un plano con esa clase de polígonos? ¿Has visto cómo se hace?



Observa el video y podrás apreciar diversas actividades del quehacer humano en las que se requiere recubrir un plano con polígonos regulares. Cuando termines, reúnete con dos compañeros(as) e intercambia ideas al respecto.

Participa en una lectura comentada del texto.

POLÍGONOS REGULARES EN EL PLANO

Los polígonos regulares tienen gran aplicación en diferentes creaciones del ser humano; por ejemplo, al recubrir con mosaicos un piso o una pared, al confeccionar una vidriera o un tapete, etc. Es conveniente recordar que un polígono es regular cuando sus lados y sus ángulos son congruentes, como ocurre con el triángulo equilátero, el cuadrado y los polígonos de cinco o más lados que cumplan con estas condiciones. Para concretar ideas, considérese la siguiente situación.

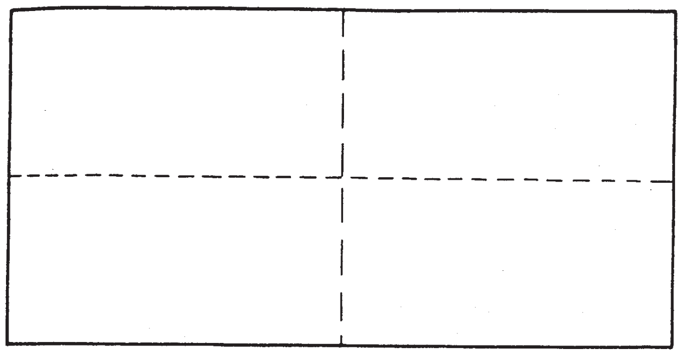
Una persona desea cubrir con baldosa el piso de la sala de su casa, que mide 6 m de largo y 3 m de ancho. Por tal motivo, acude a la única persona de su localidad que fabrica y coloca ese material y le pide que diseñe algo que resulte atractivo y mejore el aspecto del citado lugar.

¿Cómo procederá el fabricante para realizar este diseño?

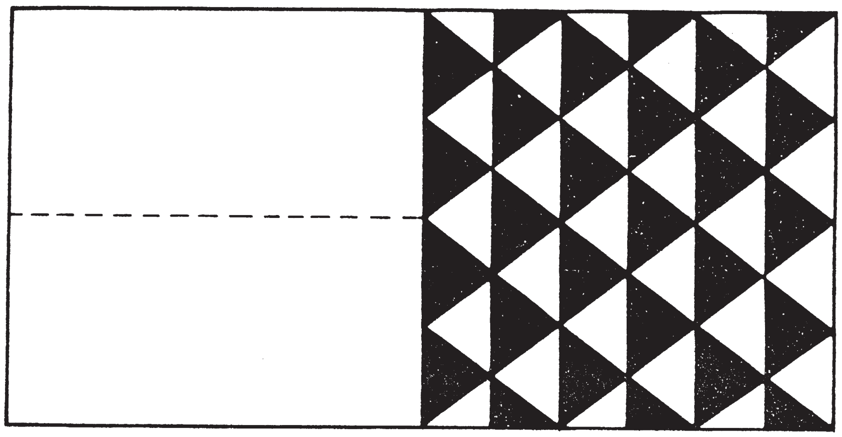
Hay que considerar que el piso es un plano y que lo menos complicado es cubrirlo con polígonos regulares.

En primer lugar, elige un triángulo equilátero para realizar el diseño.

Traza un rectángulo, en el cual el largo es el doble del ancho, y enseguida dibuja los ejes coordenados, como lo muestra el dibujo.



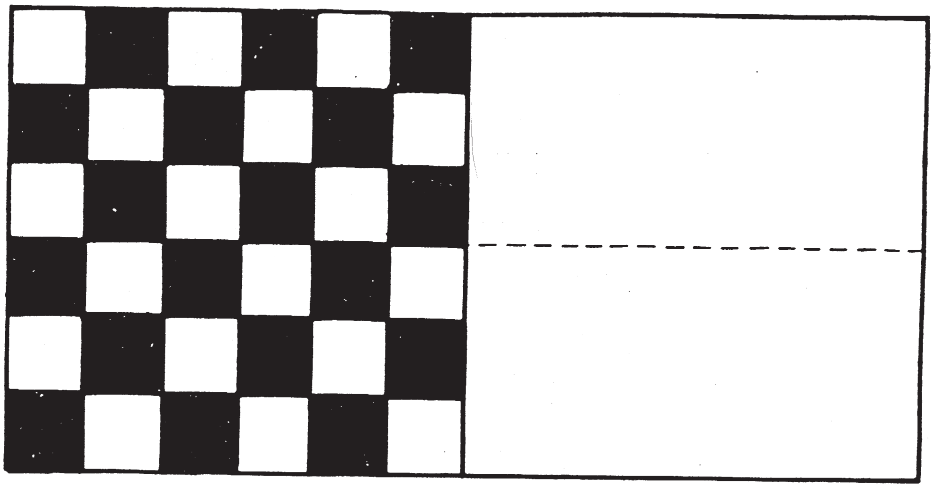
Una vez que tienes el modelo, empieza a dibujar los triángulos equiláteros, a partir del eje vertical hacia la derecha, hasta llegar al límite marcado.



De la misma manera procede para la otra parte del rectángulo. Aquí se puede apreciar que para cubrir el plano de que se trate, algunos triángulos pueden quedar incompletos, como en este caso, en que varios están divididos por la mitad.

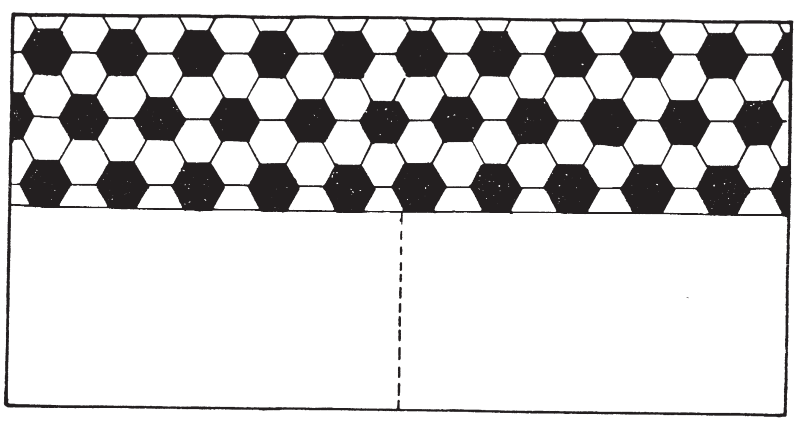
Al fabricante le interesa que su cliente tenga de dónde escoger y, por lo mismo, elabora otro diseño en el que utiliza cuadrados. Nuevamente dibuja su modelo.

Con los ejes coordenados empieza a colocar las figuras del eje vertical hacia la izquierda, hasta llegar al límite del plano.



La parte derecha del plano la cubre en la misma forma.

Posteriormente decide crear un tercer diseño con hexágonos, para lo cual traza otra vez su modelo y empieza colocando las figuras, del eje horizontal hacia arriba, como se muestra a continuación.



En la misma forma se cubrirá el plano hacia abajo, partiendo del eje horizontal.

Independientemente de la decisión que tome el cliente con respecto a estos tres diseños, aquí lo importante es considerar que en muchas actividades productivas se requiere cubrir un plano con polígonos regulares, por lo cual se concluye que se trata de un conocimiento útil.

Intégrate a un equipo de trabajo y dibuja en tu cuaderno dos polígono regulares.

Compara tus dibujos con los de un integrante de otro equipo.

Continúa con tu equipo y en tu cuaderno, recubre con cuadrados un plano cuya área es de 15 cm^2.

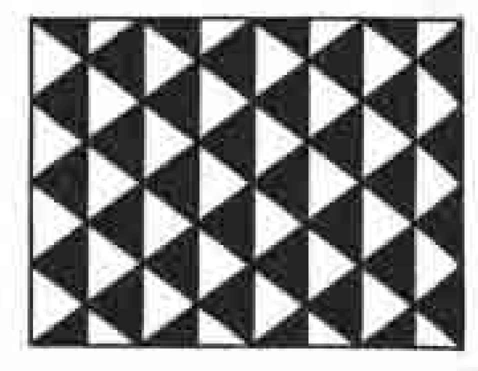
Revisa tu trabajo con los integrantes de otro equipo.

En forma individual, realiza lo que se te pide.

Muestra, por medio de un dibujo, que realizarás en tu cuaderno, cómo recubrirías con mosaicos en forma de triángulo equilátero una pared de 3 m de largo por 2 m de ancho.

Consulta la clave de esta evaluación que aparece enseguida. Si tienes errores, corrígelos.

CLAVE



130 ADENTRANDO EN EL TRIÁNGULO

Ángulos interiores en el triángulo
Conocimiento de la suma de los ángulos internos de un triángulo

(142)

El conocimiento del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo tiene diferentes aplicaciones en la geometría, en otras ramas de las matemáticas y en otras ciencias. ¿Cómo se obtiene ese conocimiento?

Observa el video. En él verás algunas formas de establecer cuál es la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo, y alguna aplicación importante de ese conocimiento.

Al finalizar, comenta con dos compañeros(as) el contenido del mismo.

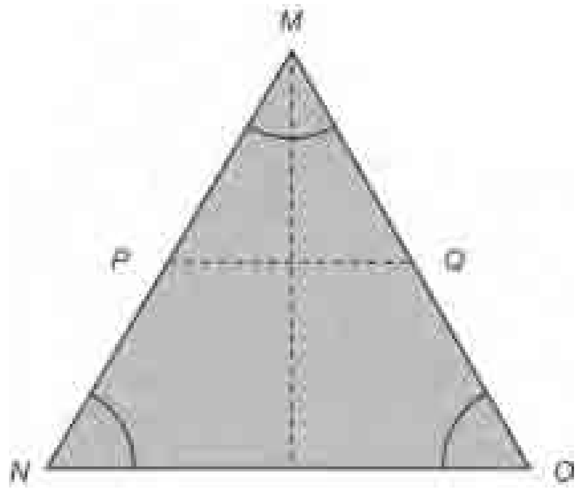
Participa con todo el grupo en la lectura comentada del siguiente texto:

ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

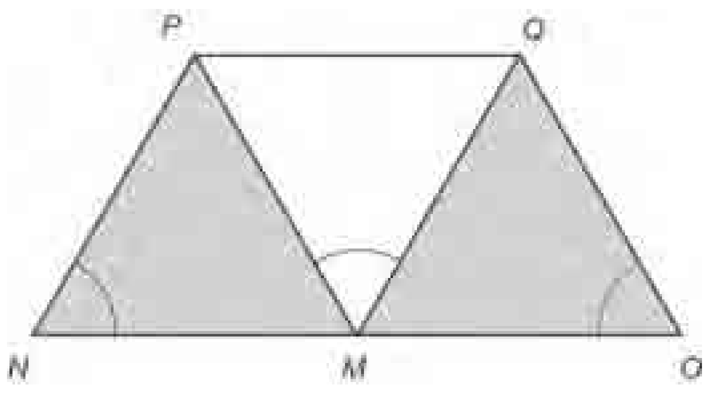
Una de las propiedades de un triángulo se refiere a la suma de los ángulos internos.

La siguiente construcción permite visualizar de qué se trata esta propiedad, ya que mediante dobleces se puede colocar los tres ángulos, uno seguido de otro.

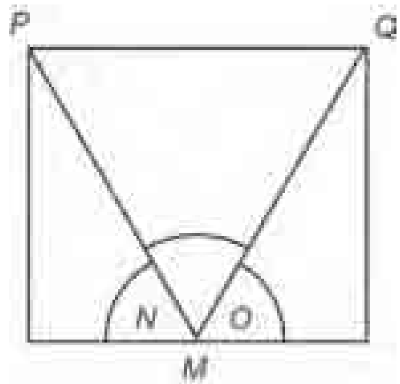
Dibuja en una hoja de papel y recorta el triángulo *MNO*, en el cual se han señalado los tres ángulos y se ha trazado su altura (*h*), así como el segmento $\overline{PQ}$ que une los puntos medios de dos de sus lados.



Se dobla la figura por la línea $\overline{PQ}$ hasta hacer que caiga *M* sobre *NO*, en el punto en el que la altura toca a la base.



A continuación se doblan nuevamente los dos puntos N y O para que coincidan con *M*.



Los tres ángulos forman un ángulo llano o de lados colineales (180º).

En consecuencia, resulta que:

La suma de los ángulos interiores del triángulo es igual a dos ángulos rectos, es decir a 180°. Por supuesto, quedan algunas dudas, como las siguientes:

¿En verdad caerá *M* exactamente sobre $\overline{NO}$?

¿Será cierto que al doblar las dos puntas caen exactamente sobre *M*?

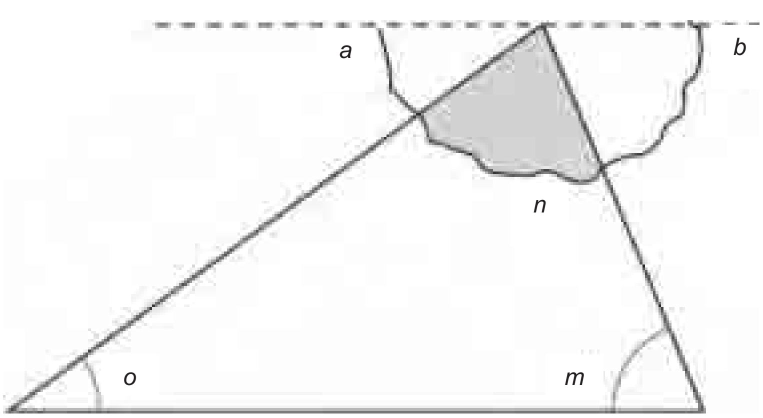
Por lo anterior, es conveniente usar la demostración de Euclides, que está basada en la congruencia de los ángulos alternos internos.

Antes de pasar a la demostración, es necesario considerar que se trata de un teorema.

Se llama teorema a una proposición que, para ser aceptada como verdadera, requiere ser demostrada por medio del razonamiento apoyándose en conocimientos previos.

Teorema: La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.

Para realizar la demostración, es necesario auxiliarse de una figura. Se trata de un triángulo y de una línea paralela a la base, que toca el vértice superior, formando dos ángulos exteriores a la figura.



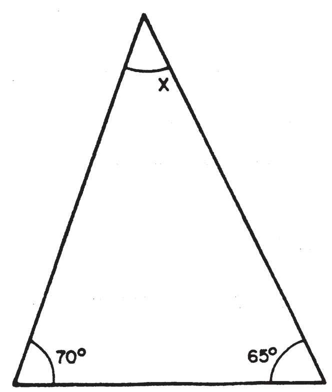
Demostración

Afirmaciones	**Razones**
$\angle a + \angle n + \angle b = 180º$	Por formar un ángulo llano.
$\angle a = \angle o$	Por ser alternos internos.
$\angle b = \angle m$	Por la razón anterior.
$\angle o + \angle n + \angle m = 180º$ (Conclusión)	Porque toda medida puede ser sustituida por su igual.

Una vez que el teorema ha sido demostrado, se considera como verdadero lo que en él se afirma.

Entonces, si se tiene un triángulo en el cual se conozcan las medidas de dos de sus ángulos, se puede obtener la medida del tercero, sumando las medidas de los dos que se conocen, y restándolas de 180°.

Ejemplo:



Entonces:

Si $x + 70° + 65° = 180°$,

luego $x = 180° - (70° + 65°)$

$x = 180° - 135°$

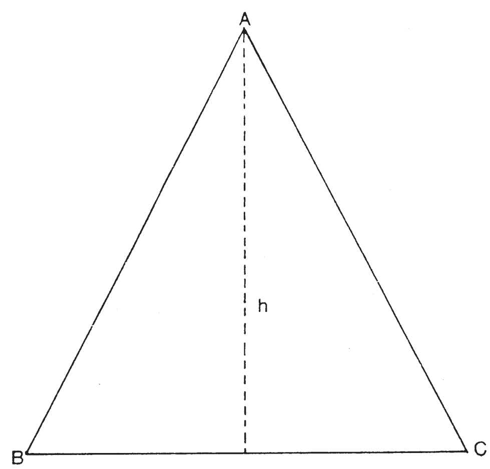
$x = 45°$

Comprobación:

$$70° + 65° + 45° = 180°$$

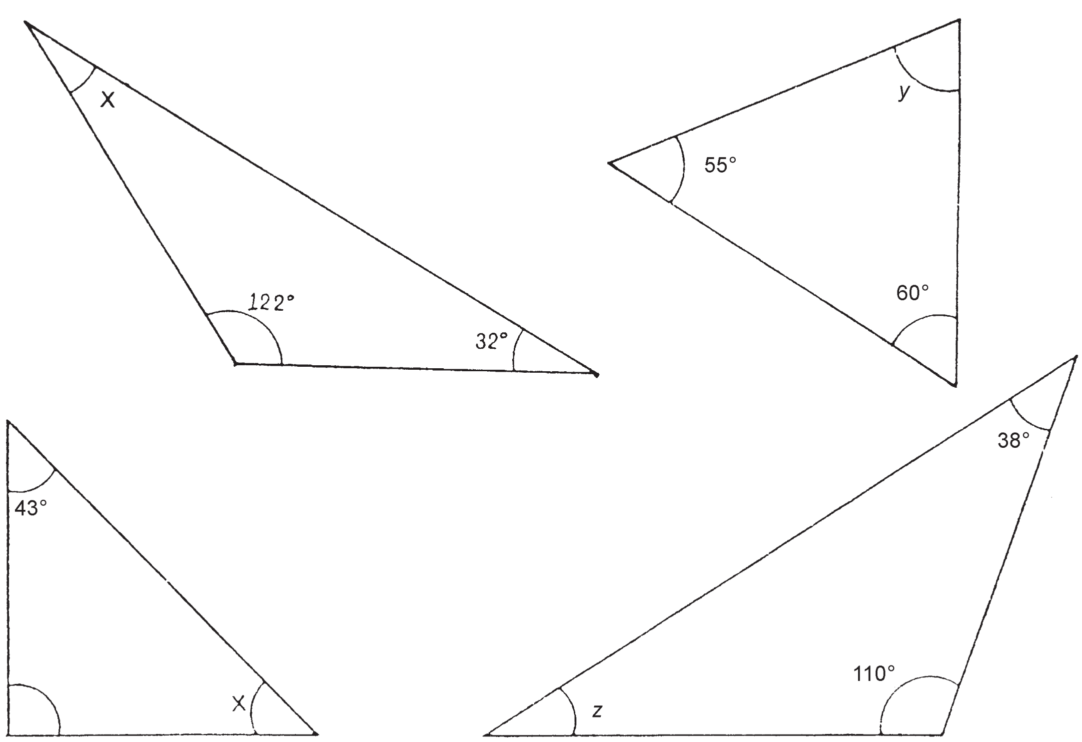
Cabe hacer notar que en un triángulo equilátero, por ser un polígono regular (lados y ángulos congruentes), cada ángulo mide 60°, o sea un tercio de 180°; y en un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios (suman 90°).

Intégrate a un equipo, dibuja y recorta diferentes triángulos. Mediante dobleces, como los indicados en la lectura anterior obtén la suma de sus ángulo interiores. ¿Se verifica en todos los casos que esta suma es 180º?



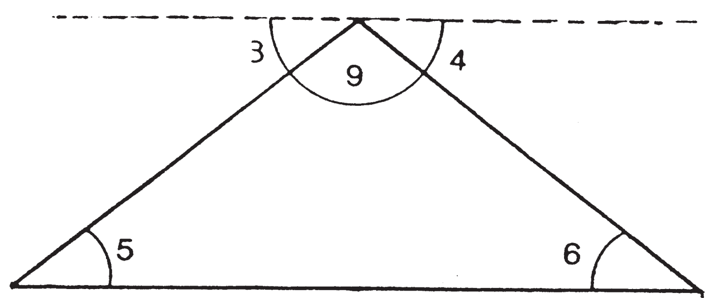
Compara tus resultados con los de otros compañeros(as).

Continúa trabajando con el mismo equipo, y calcula el valor del ángulo que se desconoce, en cada uno de los siguientes triángulos.



Compara tus resultados con los de los integrantes de otro equipo. Si tienes errores, corrige.

En forma individual, escribe en tu cuaderno las razones para justificar cada una de las afirmaciones hechas en 1, 2, 3 y 4, relacionadas con la suma de los ángulos internos de un triángulo. Básate en tus conocimientos acerca de los ángulos que resultan cuando dos paralelas son cortadas por una transversal y auxiliándote de la figura dada a continuación.



Afirmaciones

1. $\measuredangle\, 3 + \measuredangle\, 9 + \measuredangle\, 4 = 180º$
2. $\measuredangle\, 3 = \measuredangle\, 5$
3. $\measuredangle\, 4 = \measuredangle\, 6$
4. $\boxed{\measuredangle\, 5 + \measuredangle\, 9 + \measuredangle\, 6 = 180º}$

Compara tus respuestas con la clave de esta sección, que aparece enseguida.

CLAVE

1. Forman un ángulo llano; 2. Son ángulos alternos internos; 3. Por la razón anterior; 4. Todo número puede ser sustituido por su equivalente.

131 ¿UN CUADRILÁTERO = UN CÍRCULO?

(143)

Ángulos interiores de un cuadrilátero
Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero

¿Sabías que a nuestro alrededor existe una gran cantidad de figuras geométricas? Las figuras geométricas se caracterizan por tener cualidades propias, que son el número de sus lados y la suma de sus ángulos interiores; aquí únicamente se tratará un tipo de figuras geométricas.

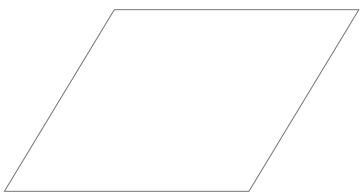
Observa el video que te presentará una información interesante al respecto.

Con un compañero(a) lee y analiza el siguiente texto:

ÁNGULOS INTERIORES DE UN CUADRILÁTERO

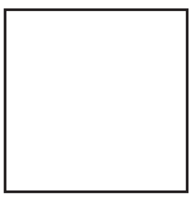
Dentro de las figuras geométricas están los cuadriláteros, que son polígonos formados por cuatro lados; estos se clasifican de acuerdo con las características de sus lados, y son:

Paralelogramos. Son los cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos dos a dos.

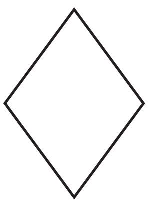


PARALELOGRAMO

RECTÁNGULO



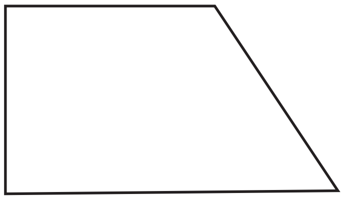
CUADRADO



ROMBO

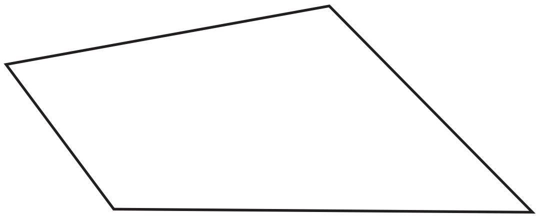
Trapecios. Son los cuadriláteros en donde son paralelos un par de lados opuestos.

TRAPECIO ISÓSCELES



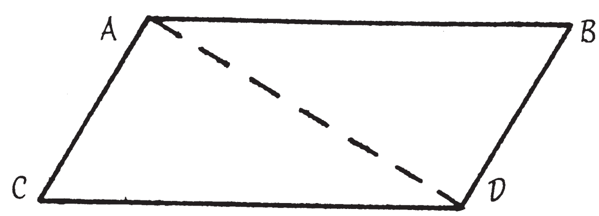
TRAPECIO RECTÁNGULO

Trapezoides. Son aquellos cuadriláteros que no tienen lados paralelos.

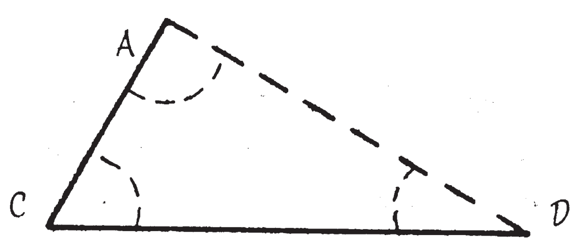


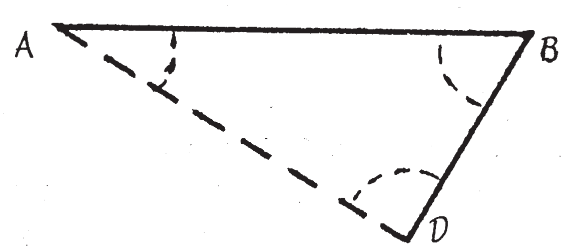
Ahora se verá un procedimiento para determinar la suma de las medidas de los ángulos interiores, de un cuadrilátero.

Dado un cuadrilátero *ABCD*, se traza un segmento de recta que una a dos vértices no consecutivos; a este segmento de recta se le llama diagonal.



De la figura se observa que resultan dos triángulos: el *ABD* y el *ACD*; se marcan sus ángulos interiores.





Cada uno de los vértices representa al ángulo interior, por lo que del triángulo *ACD* se tiene:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$$

Para el triángulo *ABD* se tiene:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$$

Si se suman los ángulos interiores de ambos triángulos se tiene:

$$\sphericalangle \mathrm{A} + \sphericalangle \mathrm{C} + \sphericalangle \mathrm{D} + \sphericalangle \mathrm{A} + \sphericalangle \mathrm{B} + \sphericalangle \mathrm{D} = 360^{\circ}$$

Debido a que un cuadrilátero cualquiera se puede dividir en dos triángulos, y la medida de los ángulos interiores de ellos suman 360°, se puede concluir que:

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360° .

Forma una pareja con otro compañero(a), y contesta en tu cuaderno lo que se pide a continuación.

1. ¿Qué entiendes por un cuadrilátero?

2. ¿ Qué diferencia existe entre un paralelogramo y un trapecio?

3. ¿ Qué es un trapezoide?

4. ¿Qué entiendes por diagonal?

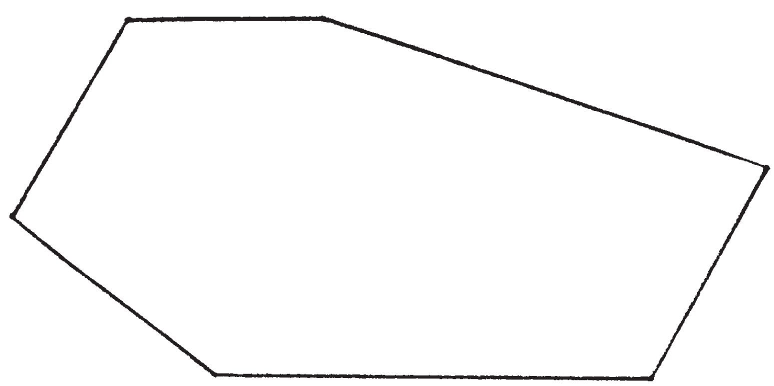
5. Escribe, con tus propias palabras, el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

6. ¿Cuál es un procedimiento para determinar la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero?

Lee, ante el grupo, tus respuestas, como lo indique el profesor(a); tienes la opción de completar tus respuestas en caso de ser necesario.

Sigue con tu compañero(a), y contesta lo que se pide en cada caso.

1. En la siguiente figura traza una diagonal de manera que obtengas dos cuadriláteros.

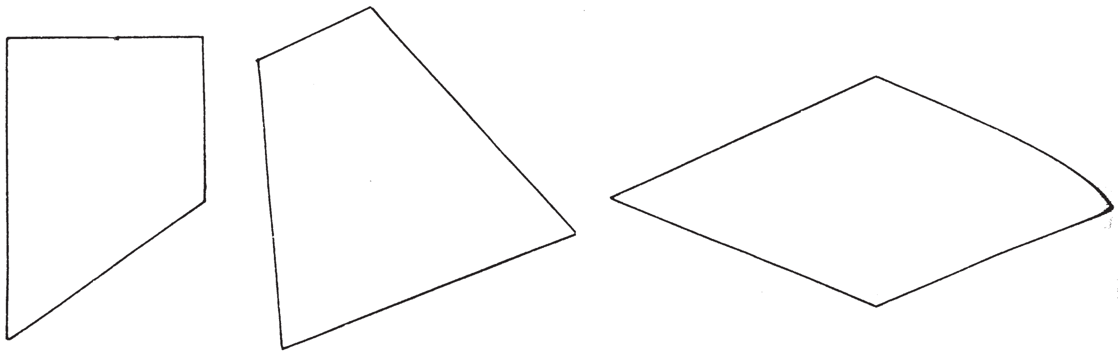


   a) ¿Cuántos lados tiene la figura?

   b) ¿Cómo podría llamarse, según el número de lados?

   c) Si pudiste descomponer la figura en dos cuadriláteros, ¿cuánto mide la suma de los ángulos internos de esta figura?

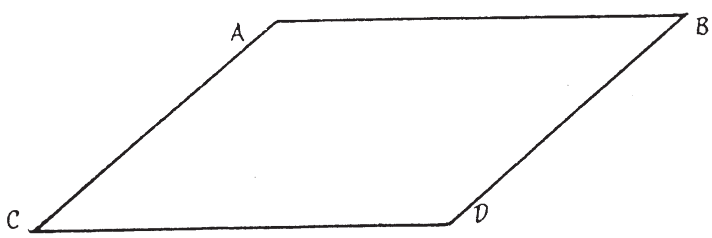
2. Con ayuda del transportador mide los ángulos interiores de las siguientes figuras, súmalos y escribe el resultado, así como el nombre de cada cuadrilátero.



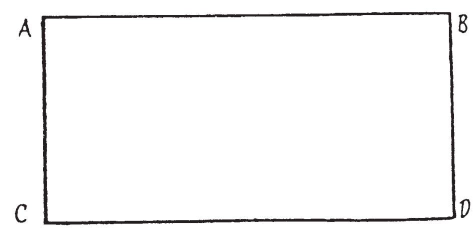
3. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un rectángulo?
   Explica tu respuesta en tu cuaderno.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as); en caso de existir dudas consulta con tu profesor(a).

En forma individual, traza $\overline{AD}$ en las siguientes figuras, y mide los ángulos de cada triángulo.



ROMBOIDE



RECTÁNGULO

a) Del triángulo *ABD* en el romboide mide cada uno de los siguientes ángulos y escríbelos en tu cuaderno.

   $\measuredangle DAB$, $\measuredangle B$, $\measuredangle ADB$

b) Del triángulo *ACD* en el romboide mide cada uno de los siguientes ángulos y escríbelos en tu cuaderno.

   $\measuredangle ADC$, $\measuredangle C$, $\measuredangle CDA$

c) Del triángulo *ABD* en el rectángulo escribe las medidas de los siguientes ángulos:

   $\measuredangle DAB$, $\measuredangle B$, $\measuredangle ADB$

d) Del triángulo *ACD* en el rectángulo escribe las medidas de los siguientes ángulos:

∢*CAD*, ∢*C*, ∢*CDA*

1. ¿Cómo son las medidas del ∢*C* y ∢*B* en cada una de ambas figuras? (romboide y rectángulo)

2. Suma la medida de los siguientes ángulos.

En el romboide ∢*CAD* + ∢*DAB*
∢*COA* + ∢*ADB*

En el rectángulo ∢*CAD* + ∢*DAB*
∢*CDA* + ∢*ADB*

3. Suma las medidas de los ángulos interiores del romboide. Suma las medidas de los ángulos internos del rectángulo.

4. ¿Qué has verificado con estas sumas, relacionado con los ángulos interiores de un cuadrilátero?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as); en caso de que sean diferentes, recurre a la clave.

CLAVE

En el romboide: Triángulo *ABD*, ∢*DAB* = 50°, ∢*B* = 42°, ∢*DAB* = 88°; Triángulo *ACD*, ∢*CAD* = 88°, ∢*C* = 42°, ∢*CDA* = 50°. En el rectángulo: Triángulo *ABD*, ∢*DAB* = 27°, ∢*B* = 90°, ∢*ADB* = 63° Triángulo *ACD*, ∢*CAD* = 63°, ∢*C* = 90°, ∢*CDA* = 27°. 1. Son iguales, en el romboide son de 42° y en el rectángulo de 90°; 2. En el romboide: ∢*CAD* + ∢*DAB* = 138°, ∢*CDA* + ∢*ADB* = 138°; en el rectángulo: ∢*CAD* + ∢*DAB* = 90°, ∢ *CDA* + ∢ *ADB* = 90°. 3. Romboide 360°, Rectángulo 360°. 4. 360°.

132 (144) UN POLÍGONO > UN CÍRCULO

Ángulos interiores de un polígono
Conocimiento de la suma de los ángulos interiores de un polígono

¿Recuerdas algunos objetos que tengan las formas geométricas que hasta hoy conoces? ¿Qué cualidades les has observado? ¿Cómo se relacionan las propiedades de unas figuras con otras?

Observa con atención el video y encuentra esa relación.

Lee con un compañero(a) el texto **Ángulos interiores de un polígono**, y comenta el procedimiento que se plantea.

ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO

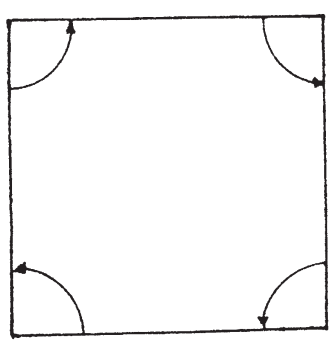
Como se recordará, se llama polígono toda figura geométrica cerrada que consta de tres o más lados.

Los polígonos reciben nombres específicos, según el número de lados que los forman, así se tiene que el menor es el triángulo (3 lados) y le siguen los cuadriláteros (4 lados), los pentágonos (5 lados), hexágonos (6 lados) hasta el de doce lados. A partir del polígono de 13 lados carecen de nombre específico y se les asigna el nombre de polígono seguido del número de lados que lo conforman, con excepción del polígono de 20 lados, que se conoce como icoságono.

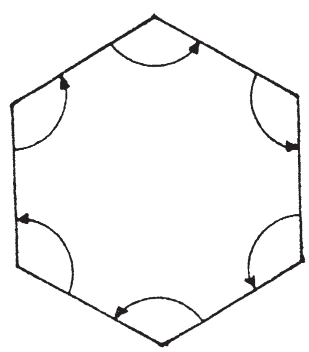
En este caso, corresponde tratar el caso de los polígonos con más de cuatro lados.

En todo polígono, los lados consecutivos forman ángulos que se conocen con el nombre de **ángulos internos**.

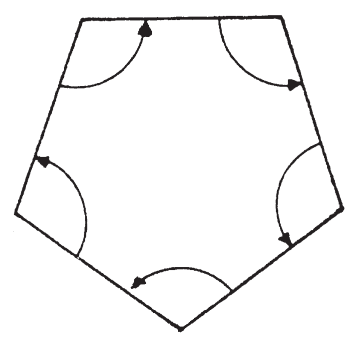
Un polígono tiene tantos ángulos internos como lados lo forman.



4 lados, 4 ángulos

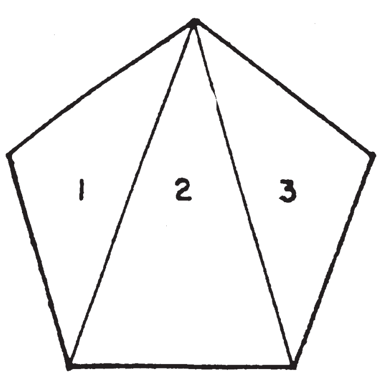


6 lados, 6 ángulos



5 lados, 5 ángulos

Ahora, obsérvese qué sucede al trazar las diagonales del polígono desde un mismo vértice.

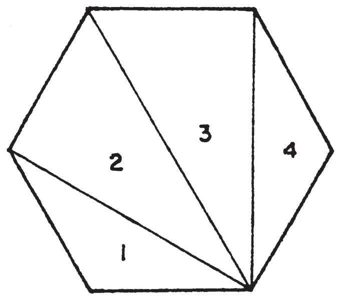


En la figura se forman tres triángulos que al relacionarlos con el número de lados se tiene que: 5 – 2 = 3.

Ya se sabe que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º; por lo tanto, si se suman los 180° del triángulo 1, más los 180° del triángulo 2, más los 180° del triángulo 3, se tiene: 180° + 180° + 180° = 540°.

Dicho de otra forma, la suma de los ángulos interiores de un pentágono se obtiene al multiplicar 180° por 3.

Ahora, véase el mismo procedimiento para saber cuánto suman los ángulos interiores de un hexágono.



Al trazar las diagonales que parten del mismo vértice, se forman cuatro triángulos. Si se establece la relación entre el número de lados del polígono y el número de triángulos formados, se tiene: 6 – 2 = 4.

Como se obtienen triángulos, y ya se sabe que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, basta con sumar cuatro veces 180°, o bien, multiplicar 180° por cuatro. De donde se tiene: 180° (4) = 720°, que es la suma de los ángulos internos de un hexágono.

Pero, ¿cómo se podrá simplificar todo este procedimiento? Obsérvese:

1. Al trazar las diagonales de un polígono desde un mismo vértice se obtienen dos triángulos menos que el número de lados del polígono; si se representa con n el número de lados, se tiene entonces que el número de triángulos que se forma está dado por $n – 2$.

2. Se sabe que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180°.

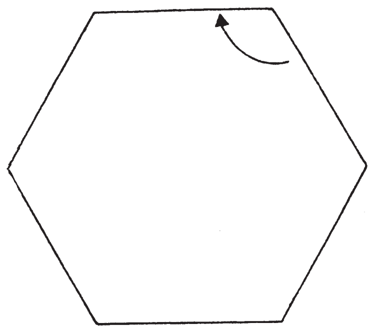
3. En ambos casos se suman 180° tantas veces como triángulos se formaron, o bien, se multiplica 180° por el número de triángulos formados.

Si se unen estos tres puntos, se puede establecer que:

Para saber cuánto mide la suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera se multiplica 180 (n – 2), donde n es el número de lados del polígono.

Con un compañero(as), realiza el siguiente ejercicio.

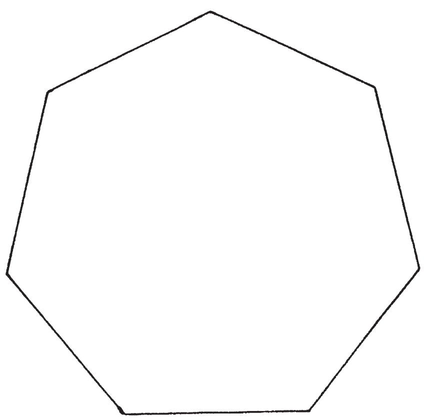
En el hexágono regular que se presenta enseguida, sin ayuda del transportador, determina la medida de uno de sus ángulos internos y contesta en tu cuaderno:

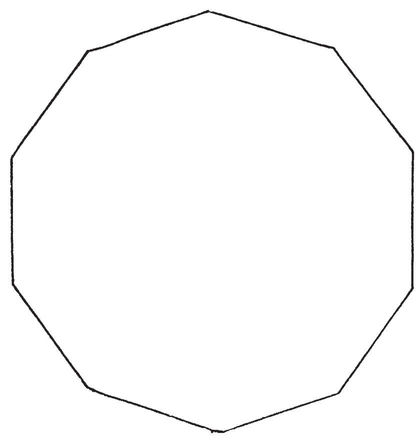


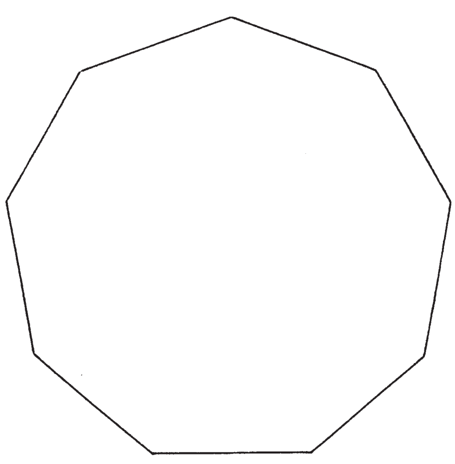
¿Cuántos lados tiene un hexágono?
¿Cuántos ángulos internos?
¿Cuántos triángulos se forman con las diagonales que parten del mismo vértice?
¿Cuánto mide la suma de los ángulos internos del hexágono?
¿Qué operación se debe realizar para conocer la medida de un ángulo si se conoce la suma de todos y el número de lados que tiene?
¿Cómo queda representada dicha operación?
¿Cuál es la medida de cada ángulo?

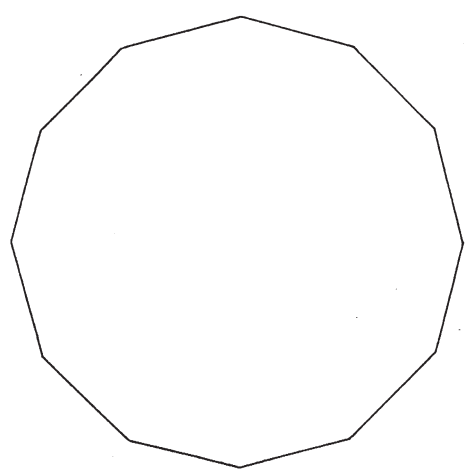
Compara tus respuestas con las de otra pareja. Corrige, si es necesario.

Sigue con tu compañero(a) y, conforme al procedimiento del texto sobre ángulos interiores de un polígono, encuentra la medida de la suma de los ángulos interiores de cada figura.



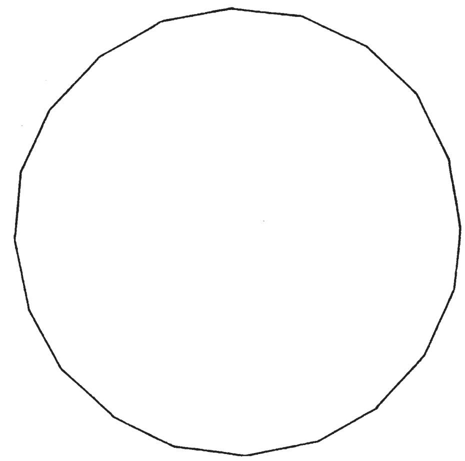






Compara tus respuestas con las de otro compañero(a), y corrige si tuviste errores.

Ahora, tú sólo, resuelve en tu cuaderno el siguiente ejercicio.



1. Escribe el nombre de la figura.
2. Traza las diagonales a partir de un sólo vértice.
3. Numera los triángulos formados.
4. Anota la suma de los ángulos interiores de todos los triángulos.
5. Escribe la operación anterior, abreviada.
6. Escribe la operación para conocer la medida de un ángulo de este polígono.
7. Escribe la medida de uno de sus ángulos.

Compara tus respuestas con la clave.

CLAVE

1. Icoságono; 3. 18; 4. 3 240°; 5. 180° (18); 6. 3 240° ÷ 20; 7. 162°.

133 DOS EN UNO

(145)

Círculo y circunferencia

Trazo y características de la circunferencia

¿Qué diferencia hay entre círculo y circunferencia?

¿Cuántas formas de trazar un círculo conoces?

Observa atentamente el video que dará respuesta a esas preguntas.

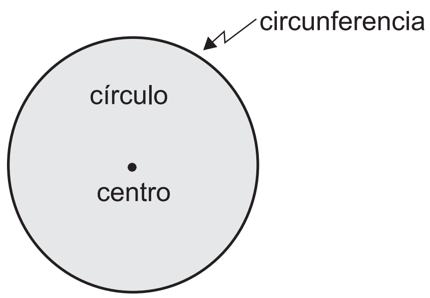
Lee y analiza con un compañero(a) el texto.

CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Con frecuencia hay confusión entre lo que es el círculo y lo que es la circunferencia por lo que aquí se establecerán conceptos que ayudarán a diferenciarlos. Analícense:

Circunferencia es la línea que resulta del desplazamiento de un punto alrededor de otro llamado centro.

Círculo es la porción del plano limitado por la circunferencia.



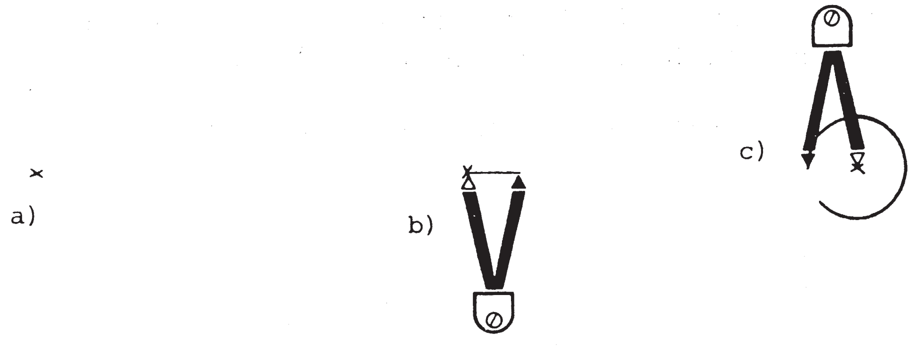
Dicho de otra forma, la circunferencia es el borde o frontera del círculo.

El instrumento usual para trazar una circunferencia es el compás y se realiza de la siguiente forma:

a) Se ubica el punto que será el centro de la circunferencia.

b) Se determina la distancia del centro a la circunferencia con la abertura del compás.

c) Se apoya la punta del compás en el centro y se hace girar hasta dibujar la circunferencia.



Además del trazo es importante conocer las líneas relacionadas con un círculo.

Ya antes se mencionó la distancia del centro hacia la circunferencia; a esa distancia se le conoce con el nombre de **radio**.

Todos los radios de un círculo tienen la misma medida.

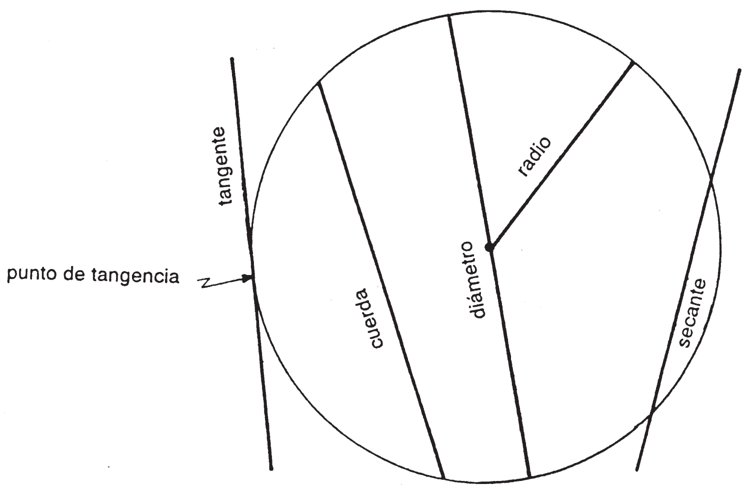
Cuerda es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro es la cuerda que pasa por el centro del círculo.

Secante es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Tangente es la recta exterior que toca a la circunferencia en un punto llamado **punto de tangencia**.

Obsérvese la siguiente figura que muestra dichos segmentos.



Ahora véase que si se toma un radio del círculo y se hace girar hasta llegar al mismo sitio de partida, además de delimitar el círculo, su giro representa un ángulo completo, por lo que se dice que un círculo mide 360°.

Por último puede observarse que no existe círculo sin circunferencia.

Forma una pareja y realiza lo que se indica.

1. En tu cuaderno, dibuja un círculo del tamaño que desees, traza varios radios y anota su medida; traza su diámetro y anota su medida; traza cuerdas, además del diámetro y anota su medida; traza una tangente al círculo cuyo punto de tangencia sea el extremo de cualquiera de los radios trazados. Al terminar, contesta las preguntas.

   a) ¿Cómo son las medidas de los radios?

   b) Suma la medida de dos radios y compárala con la del diámetro. Di cómo son.

   c) ¿Qué nombre recibe la cuerda que tiene mayor medida?

   d) Mide los ángulos que se forman con el radio y la tangente trazada; ¿cuánto mide cada ángulo? ¿Qué nombre reciben estos ángulos de acuerdo con su medida?

e) Anota, en forma de conclusiones las respuestas a las preguntas anteriores.

Compara tu ejercicio con el de otros compañeros(as) y, si hay dudas, consulta con tu profesor(a).

En forma individual, resuelve el siguiente ejercicio en tu cuaderno.

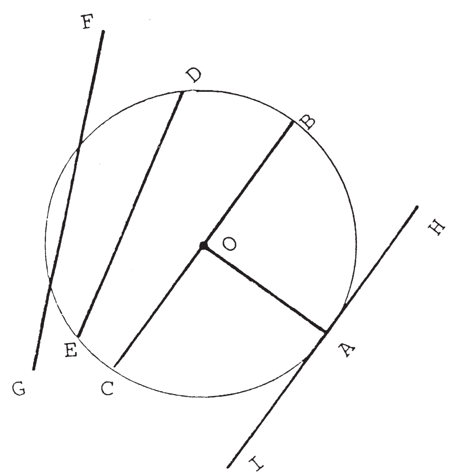
1. Responde las siguientes preguntas en tu cuaderno:

   a) ¿Qué relación hay entre el radio y el diámetro de un círculo?

   b) ¿En qué se distingue el diámetro de las otras cuerdas del círculo?

   c) ¿Cómo son las medidas de los radios de un mismo círculo?

2. Relaciona las columnas. Básate en la figura. Haz el ejercicio en tu cuaderno.



( ) $\overline{OA}$	a) Tangente
( ) $\overline{HI}$	b) Radio
( ) $\overline{FG}$	c) Punto de tangencia
( ) $\overline{BC}$	d) Diámetro
( ) $\overline{ED}$	e) Secante
	f) Cuerda

Compara tus respuestas con la clave.

CLAVE

a) El diametro mide dos veces el radio o el radio mide la mitad del diametro; b) Es la única cuerda que pasa por el centro del círculo; c) iguales. 2. (b), (a), (e), (d), (f).

134 ALREDEDOR DEL RELOJ

(146) Perímetro del círculo

El contorno de una fuente circular te da la idea de lo que es la circunferencia; pero ¿sabes cómo encontrar su perímetro?

Ve el video y observa cómo la medida de la circunferencia está muy relacionada con el diámetro del círculo. Comenta en grupo cuál es esa relación y con qué letra se representa.

Lee y analiza el texto **Perímetro del círculo**.

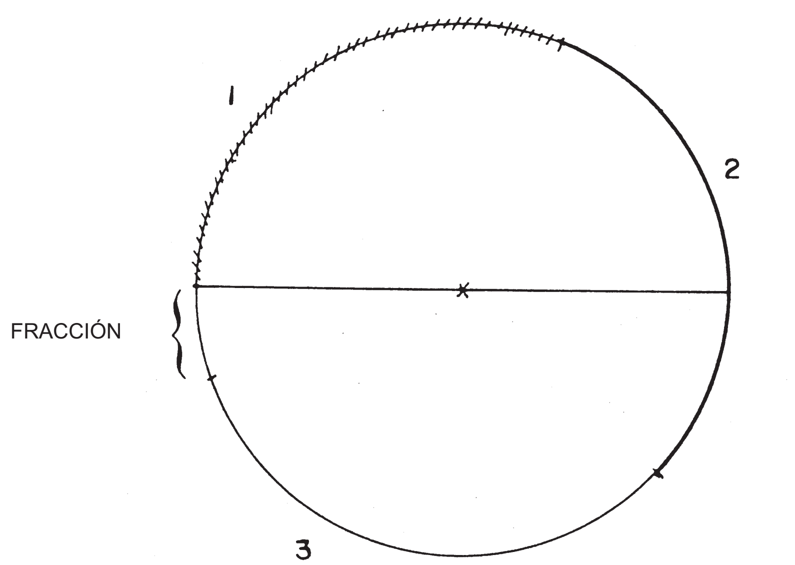
PERÍMETRO DEL CÍRCULO

La medida de la circunferencia se obtiene de manera muy sencilla. Véase el problema siguiente:

Se desea poner encaje a un mantel circular cuyo diámetro es de 2.5 m.

Para resolver este problema, debe establecerse la relación que existe entre la longitud de la circunferencia y la del diámetro.

Cuando se toma con un cordel la medida del diámetro y se observa cuántas veces cabe en la circunferencia, se puede apreciar lo siguiente:



La longitud del diámetro cabe tres veces en la circunferencia más una fracción.

La existencia de esta relación entre la longitud de la circunferencia y la longitud del diámetro fue encontrada hace más de 40 siglos por los babilonios, quienes calcularon que el diámetro cabía tres veces en la circunferencia.

Un experimento interesante consiste en buscar objetos similares como monedas, platos, diferentes utensilios de cocina y con ayuda de una cuerda o hilo y una regla medir el diámetro del círculo y la longitud de la circunferencia y establecer, para cada caso el cociente.

$$\frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{longitud del diámetro}}$$

Se observará cómo este cociente es aproximadamente el mismo en todos los casos, algo más que 3.

El número producido por esta relación es uno de los más importantes en las matemáticas. Euler lo llamó π (letra griega) y aproximaciones a él son:

$$\pi = 3\frac{1}{7}$$
$$\pi = 3.14$$
$$\pi = 3.1416$$
$$\pi = 3.141592...$$

El diámetro de un circunferencia es fácil de medir; con él y ayuda de π se puede calcular el perímetro de la circunferencia.

$$C = \pi \cdot d$$

Para calcular la longitud de la circunferencia se multiplica la longitud del diámetro por π.

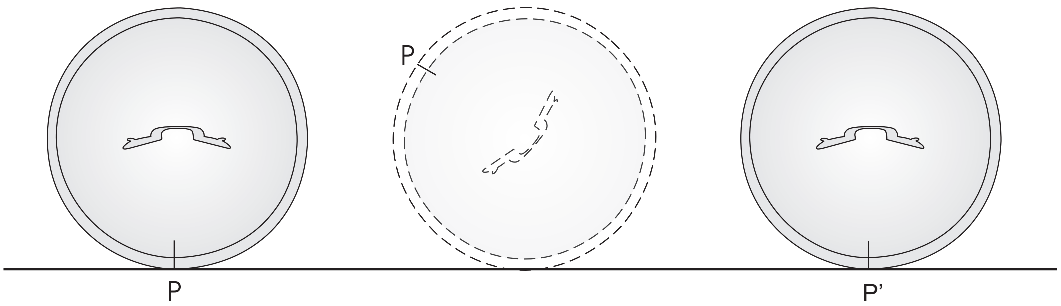
Analiza con tu grupo las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es el diámetro de una circunferencia?
2. ¿Qué relación guardan entre sí la medida del radio y del diámetro en un círculo?
3. ¿Qué sucede al comparar el diámetro de un círculo con su circunferencia?

Discute las preguntas y llega a tus propias conclusiones.

Realiza con un compañero(a) el siguiente experimento.

Elige un objeto de forma circular (tapa de una olla, de un tarro, plato).



Haz una marca sobre el borde. Hazla coincidir sobre un punto *P* de una recta trazada sobre un papel. Rueda el objeto sobre la recta hasta alcanzar la marca nuevamente y señala este punto *P′*.

Mide la distancia entre los puntos *P* y *P′*. Esta distancia es la longitud de la circunferencia; mide también su diámetro.

a) Compara sobre la recta $\overline{PP'}$, la longitud del diámetro. ¿Cuántas veces cabe el diámetro en el segmento $\overline{PP'}$?

b) Encuentra el cociente:

$$\frac{\text{Perímetro de la circunferencia}}{\text{diámetro}}$$

¿Cuál es? ¿Qué tan cerca está de 3.14?

c) Calcula la longitud de la circunferencia mediante la expresión general

$$C = \pi \cdot d$$

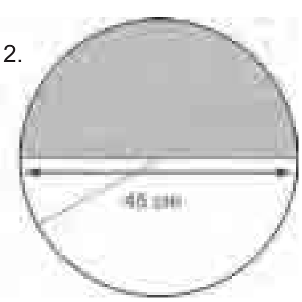
(toma π = 3.14) (d el diámetro del objeto del experimento)

d) Compara este resultado con la longitud $\overline{PP'}$, medida sobre la recta del experimento. ¿Cómo resulta esta comparación?

e) ¿Cuál crees que sea la medida más próxima a la real?

Obtén individualmente el perímetro de los círculos siguientes. Utiliza 3.1416 para el valor de π.

1.


2.


2. Obtén el perímetro correspondiente al sector sombreado.

Compara tus resultados con la clave.

CLAVE

1. P = 141.372 cm

135 ESPACIO REDONDO

(147) Área del círculo
Justificación de la fórmula

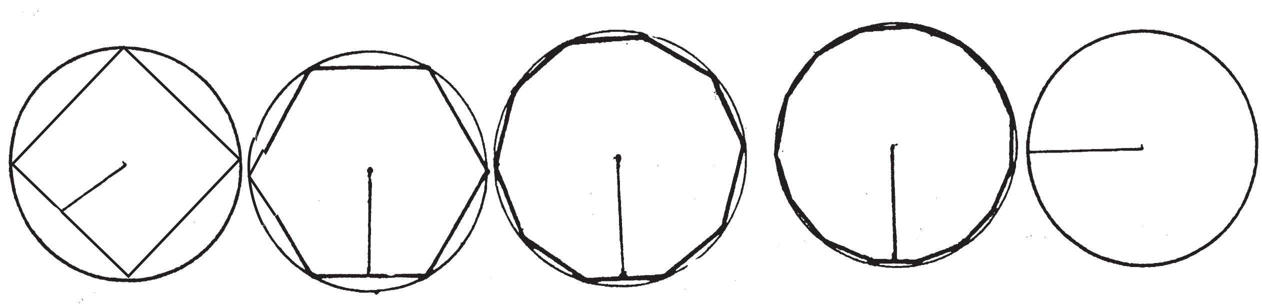
Hoy aprenderás a obtener el área de una figura que Pitágoras consideraba perfecta: el círculo.

Observa el video donde verás que, basándote en la fórmula para obtener el área de polígonos regulares, puedes deducir la fórmula para obtener el área del círculo. Comenta en tu grupo por qué se considera al círculo un polígono regular con un número infinito de lados.

Lee junto con un compañero(a) el texto **Área del círculo** y comenta en tu grupo por qué la apotema de un polígono es el radio en el círculo.

ÁREA DEL CÍRCULO

Al trazar polígonos regulares inscritos en un círculo con diferente cantidad de lados, puede observarse que al aumentar el número de lados la figura se acerca más a la forma del círculo y que la longitud del apotema aumenta hasta que en el círculo coincide con la del radio.



Por lo tanto, el círculo se considera un polígono regular con un infinito número de lados.

Véase el siguiente problema:

En el centro de un parque se desea poner un jardín circular. ¿Cuántos metros cuadrados de pasto se necesitan para cubrir su superficie si se sabe que tiene 15 m de diámetro?

Al considerar al círculo como un polígono regular con infinito número de lados, para calcular su área se puede utilizar la fórmula:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

Para obtener el perímetro de un círculo la fórmula es $C = \pi \cdot d$ por lo que, al sustituirlo por P, se obtiene :

$$A = \frac{\pi \cdot d \cdot a}{2}$$

Además, la apotema de un polígono es igual al radio en el círculo, por lo tanto:

$$A = \frac{\pi \cdot d \cdot r}{2}$$

Si se considera que $d = 2r$.

$$A = \frac{\pi \cdot 2r \cdot r}{2}$$

Cancelando el 2 en el numerador y en el denominador queda:

$$A = \pi \cdot r \cdot r$$

De donde podemos concluir que el área de un círculo se obtiene mediante la expresión general:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Para resolver el problema anterior, se sustituyen los valores anteriores en la fórmula (se debe considerar que en el problema se indica que el diámetro mide 15 m, por lo tanto, el radio es igual a 7.5 m)

$$A = 3.\ 1416\ (7.\ 5\ \text{m})^2$$
$$A = 3.\ 1416\ (56.25\ \text{m}^2)$$
$$A = 176.715\ \text{m}^2$$

Por lo que se necesitan 176.715 metros cuadrados de pasto para cubrir la superficie circular del parque.

Reúnete con un compañero(a), y resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

1. ¿Cuál es el área que ocupa una fuente circular, si su diámetro mide 3.2 m?

2. En el centro de una plaza se piensa construir un hemiciclo (medio círculo) que sirva para las ceremonias del pueblo. ¿Cuál será su área si el radio mide 12 m?

3. ¿Cuál es el área que ocupa una edificación circular cuya circunferencia es igual a 56 m?

   a) ¿Cuáles son los datos que da el problema?

   b) ¿Cómo se obtiene el diámetro cuando conoces la longitud de una circunferencia? Explica.

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as). Si hay diferencia verifica; si es necesario, corrige.

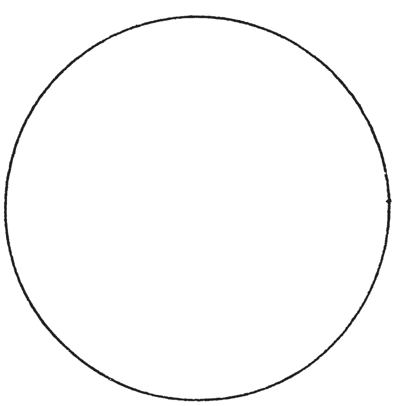
Individualmente, resuelve las siguientes preguntas en tu cuaderno:

1. Señala en el círculo un radio.

2. Señala un diámetro.

3. ¿Cuántos radios equivalen a un diámetro?

4. Mide el radio del círculo, y obtén su área utilizando la fórmula $A = \frac{P \cdot a}{2}$.



5. Calcula el área con la fórmula $A = \pi \cdot r^2$

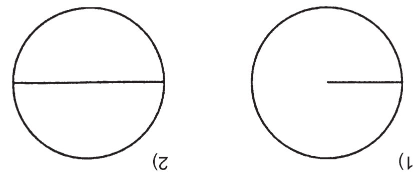
6. ¿Hubo diferencia en los resultados?

7. ¿Qué puedes concluir?

Compara tus respuestas con la clave; si hay diferencias, verifica y corrige.

CLAVE

3) 2 radios = diámetro; 4) 19.635 cm^2; 5) 19.635 cm^2; 7) Es la misma fórmula, sólo se sustituyeron sus componentes.



136 RESUÉLVELOS TÚ MISMO

(148)

Problemas sobre el círculo y la circunferencia
Resolución de problemas

El círculo es una figura que aparece en muchos objetos que te rodean: las ruedas de los carros, el fondo de un pozo, la forma de un plato, entre otras. ¿Has resuelto alguna vez problemas en los que se hable de esta figura?

Observa el video. Comenta en tu grupo cómo se resolvieron en el programa los problemas propuestos.

Resuelve con un compañero(a) los siguientes problemas en tu cuaderno.

1. ¿Cuál es el perímetro de la llanta de una bicicleta cuyo rayo mide 25 cm?
2. ¿Qué área cubre, en un jardín, un reloj de sol circular cuyo diámetro es igual a 7 m?
3. ¿Cuál es el diámetro de una polea cuya circunferencia es igual a 20 cm?

Compara tus resultados con los de tus compañeros. Si hay dudas, coméntalas con el profesor(a) y, si es necesario, corrige.

De manera individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. ¿Cuántos metros cuadrados de adoquín se necesitan para cubrir el piso de un quiosco circular cuyo diámetro mide 2.8 m?
2. ¿Cuál es la longitud de una pista de carreras si su radio es de 650 m?

Revisa tus resultados y compáralos con la clave adjunta. Si hay diferencias, coméntalas con el profesor(a) y, si es necesario, corrige.

CLAVE

1. a) Circular; b) diámetro = 2.8 m; c) El área del quiosco; d) $A = \pi r^2$; e) 6.157536 m^2. 2. a) Circular; b) Radio = 650 m; c) La circunferencia; d) $P = \pi d$; d) 4 084.08 m.

137 COMPRENDER ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

Repaso de lo desarrollado

(151) Integración de los conocimientos adquiridos

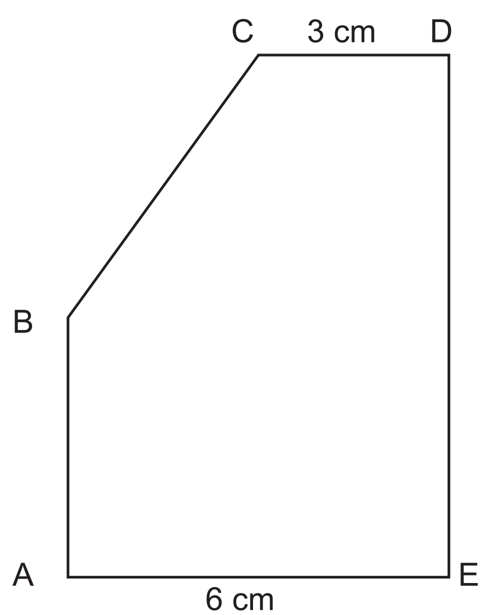
A lo largo de las sesiones anteriores habrás notado que, desde los tiempos antiguos hasta los modernos el ser humano ha tenido la necesidad de aplicar sus conocimientos acerca de la medición de las dimensiones de los cuerpos geométricos, así como las relaciones que existen entre ellas.

Por lo tanto, es conveniente que repases lo estudiado con el objeto de que apliques tus conocimientos sobre perímetros y áreas.

Con un compañero(a) trabaja el siguiente problema.

Es muy interesante y requiere muchos de los conceptos que has aprendido en este núcleo. Tómalo como un reto.

1. El siguiente dibujo es un plano de un terreno pentagonal, dibujado a escala 1: 20 000



a) En el dibujo no está señalado cuánto mide $\overline{BC}$. ¿Cómo podrías calcular su longitud? Te damos una pista; piensa en trazos que te permitan cómo construir un triángulo, y recuerda un famoso teorema relacionado con los lados de un triángulo rectángulo.

b) En el dibujo $\overline{AE}$ mide 6 cm. ¿Cómo calculas cuánto mide en la realidad? Recuerda la escala del dibujo: 1: 20 000.

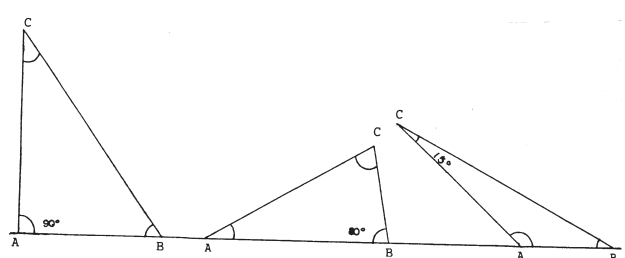
c) El dueño del terreno quiere conocer qué área tiene. ¿Cómo procedes para hallar el área en la realidad? Escribe el procedimiento que uses para resolver el problema.

Comparte tu trabajo con el de otros compañeros(as). Si tienes dudas, consúltale a tu profesor(a).

Realiza en tu cuaderno lo que se indica.

1. Un campesino tiene un terreno que mide 140 m de largo por 48 m de ancho y desea conocer la medida de la diagonal que se forma en su terreno. ¿Cuánto mide la diagonal?

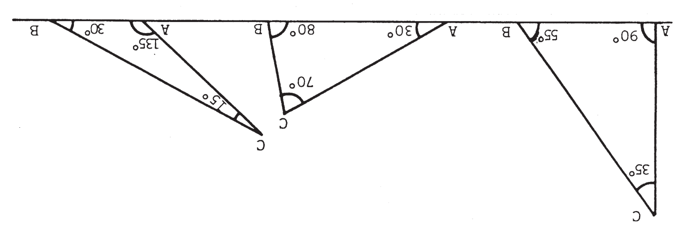
2. Dibuja en tu cuaderno los siguientes triángulos; busca la medida de los ángulos que faltan (procura que el centro del transportador coincida con el vértice del ángulo que se mide). No olvides que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180º.



(Figura 1) (Figura 2) (Figura 3)

Muestra tu trabajo a tus compañeros(as), si deseas consulta la clave.

CLAVE



2.

1. 148 m

138 CÓMO USO LO QUE SÉ
UNAS MEDIDAS A TRAVÉS DE OTRAS

(150) La semejanza de las figuras y el conocimiento del triángulo rectángulo

En la vida cotidiana aparece con frecuencia la necesidad de efectuar medidas que supondrían un trabajo muy complicado si se quisiera tomarlas sobre terreno. Este problema fue tratado desde la antigüedad. Hoy tenemos instrumentos muy precisos que nos obviarían muchos cálculos.

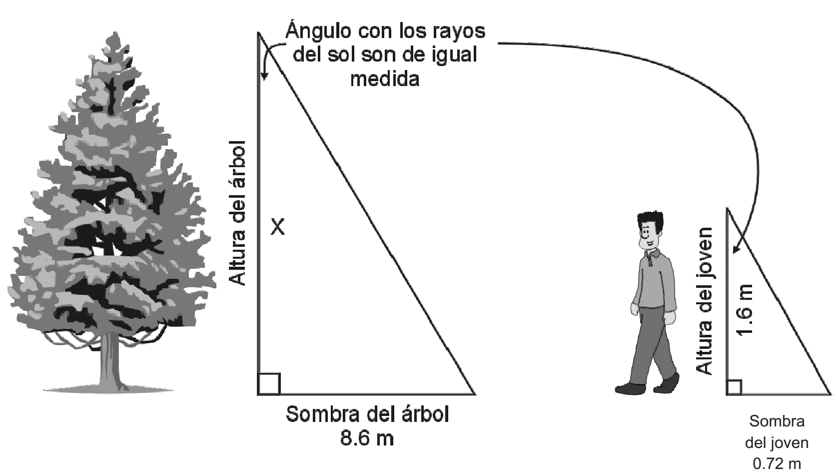
Lo interesante es que tú los puedes resolver con una facilidad asombrosa.

Trabaja con un compañero(a).

Un joven que mide 1.60 m está parado cerca de un enorme árbol. Él quiere saber cuánto mide la altura del árbol.

Tiene dos datos muy interesantes, la sombra que arroja el árbol es de 8.60 m y la del joven es de 0.72 m.

Si colocamos en un dibujo estos datos podríamos construir triángulos rectángulos semejantes: la sombra y la altura de los objetos forman ángulo recto y gracias a que los rayos del sol forman ángulos iguales con los objetos verticales ya se tienen triángulos con dos ángulos de igual medida.



El cociente de proporcionalidad se puede encontrar así:

$$\frac{\text{longitud sombra del árbol}}{\text{longitud de la sombra del joven}} = \frac{8.6}{0.72} = 11.94$$

Este cociente es el mismo entre:

$$\frac{\text{altura del árbol}}{\text{altura del joven}} = \frac{x}{1.6} = 11.94$$

x, la altura del árbol no se conoce; ahora la puedes calcular. ¿Cuánto mide el árbol?

Compara tu resultado con el de otros compañeros(as).

Sigue trabajando con tu compañero(a):

Elige, en tu localidad, la altura de un objeto que desees conocer, la cual no sea fácil de obtener directamente como el alto de la torre de la iglesia, un árbol, un poste, un edificio, una roca, etc. Busca un objeto, como una varilla o tú mismo, para que a determinada hora del día puedas medir el largo de las sombras proyectadas, como en el caso del problema que analizaste anteriormente.

Escribe los datos en tu cuaderno.

1. a) ¿Qué altura vas a calcular?

   b) ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por el objeto elegido?

   c) ¿Cuál es la longitud de la varilla que vas a usar y que puedes medir fácilmente? O en su defecto, ¿cuál es tu altura?

   d) ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por la varilla o por ti, cuando estás de pie?

2. Haz un dibujo que represente los triángulos a considerar, en el planteamiento del problema. Coloca en ellos las medidas conocidas y usa *x* para señalar la altura que vas a buscar.

3. ¿Cuál es el cociente de proporcionalidad que encontraste?

4. Calcula la altura deseabas conocer. ¿Cuánto mide de alto el objeto elegido?

5. ¿Podrías medir esa altura directamente? ¿Por qué?

Comparte tu trabajo con tus compañeros(as) y con el profesor(a). También se lo puedes mostrar a los de tu casa.

139 CONSTRUCCIONES INTERESANTES CON LO QUE SÉ

(151) Aplicación de la semejanza

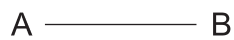
Los conocimientos geométricos son de gran utilidad para resolver problemas cotidianos y para producir creaciones de nuestro ingenio.

Junto con un compañero(a) analiza los procedimientos y realiza tus propias construcciones.

1. Cómo dividir un segmento dado en tantas partes iguales como quieras.

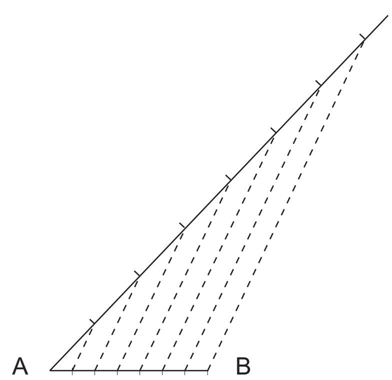
   Esta tarea es muy fácil si tienes una escuadra y una regla.

   Dividir el segmento *AB* en 7 partes iguales en longitud.



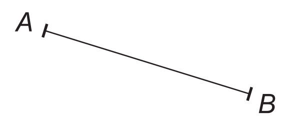
   Este segmento mide aproximadamente 20 mm, no es una tarea fácil dividirlo, con ayuda de una regla graduada en 7 partes de igual longitud. Pero con la ayuda de una construcción auxiliar y unos cuántos conocimientos geométricos resulta sencillo hacerlo.

   A partir de *A* trazas una recta y llevas sobre ella 7 segmentos de igual longitud. Luego se trazan paralelas como indica el dibujo.



   ¿En qué propiedades se basa este procedimiento? ¿Cómo son los triángulos obtenidos?

   Con tu compañero(a), divide un segmento como el de la figura en 11 partes de igual longitud. Hazlo en tu cuaderno.



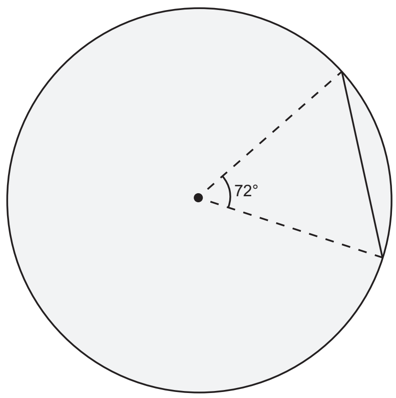
2. Cómo trazar una **estrella pitagórica**.

   Traza un pentágono regular. Para ello puedes dibujar una circunferencia y señalar ángulos consecutivos alrededor del centro, de medida 72º. Unes los puntos de corte de los radios que forman estos ángulos de la circunferencia.

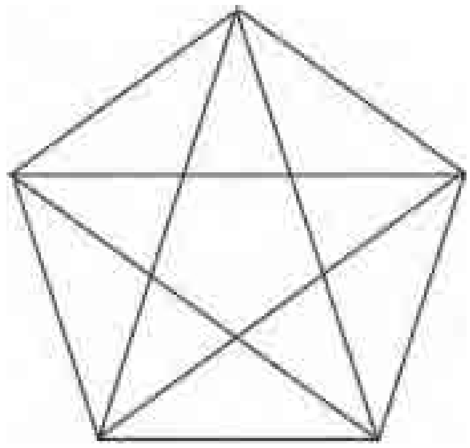
   Completa el dibujo en tu cuaderno.

   Una vez que hayas dibujado el pentágono traza las diagonales.

   Ahora la puedes recortar de tus dibujos.



b) Fíjate que se obtiene otro pentágono interior. ¿Quieres trazar una estrella más pequeña? ¿Cómo lo harías?



Trázala y muestra tu trabajo al profesor(a).

140 (152) ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

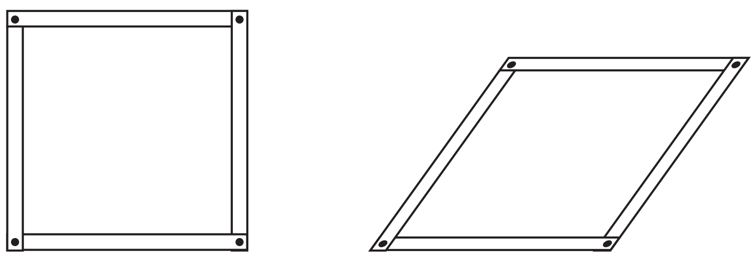
Evaluación personal de los avances logrados

Estás terminando el penúltimo núcleo del grado séptimo. Esta sesión tiene por objeto valorar cuánto has avanzado en tu aprendizaje matemático.

Trabaja individualmente.

1. Construye un cuadrado articulado, con tiras de cartulina o palitos de paleta, de igual longitud y chinches o tachuelas. Defórmalo.

   a) ¿Tiene la nueva figura la misma forma que la original?



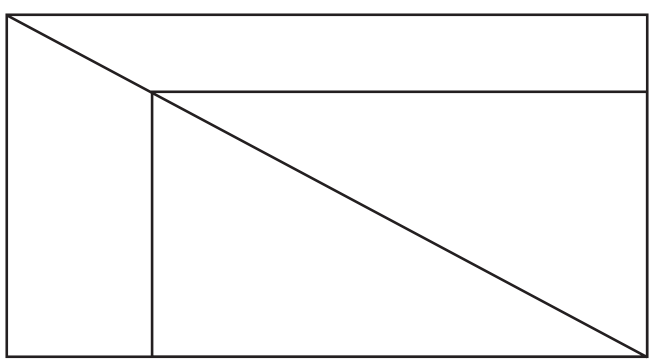
   b) ¿Miden sus lados lo mismo que en la primera figura? ¿Y sus ángulos?

   c) ¿Cómo identificas la nueva figura?

   d) ¿Son semejantes estas dos figuras? ¿Por qué?

2. Dibuja un rectángulo, traza una diagonal. Elige un punto de ella y traza paralelas a los lados, de tal manera que se forme un rectángulo interior.

   a) Mide la base y la altura del rectángulo grande.



b) Mide la base y la altura del rectángulo interior.

c) Encuentra los siguientes cocientes:

$$\frac{\text{base del rectángulo grande}}{\text{base del rectángulo interior}}$$

$$\frac{\text{altura del rectángulo grande}}{\text{altura del rectángulo interior}}$$

¿Qué observas? ¿Qué puedes decir de los dos rectángulos? ¿Qué significado tiene el cociente encontrado?

3. ¿Cuál es la relación entre los lados de dos cuadrados si sus áreas están en la proporción $\frac{16}{9}$?

   Dibuja dos cuadrados cuyas áreas estén en esta proporción.

4. De los siguientes enunciados escribe en tu cuaderno cuáles son ciertos y cuáles no.

   a) Todos los triángulos son semejantes.

   b) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

   c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

   d) Todos los rombos son semejantes.

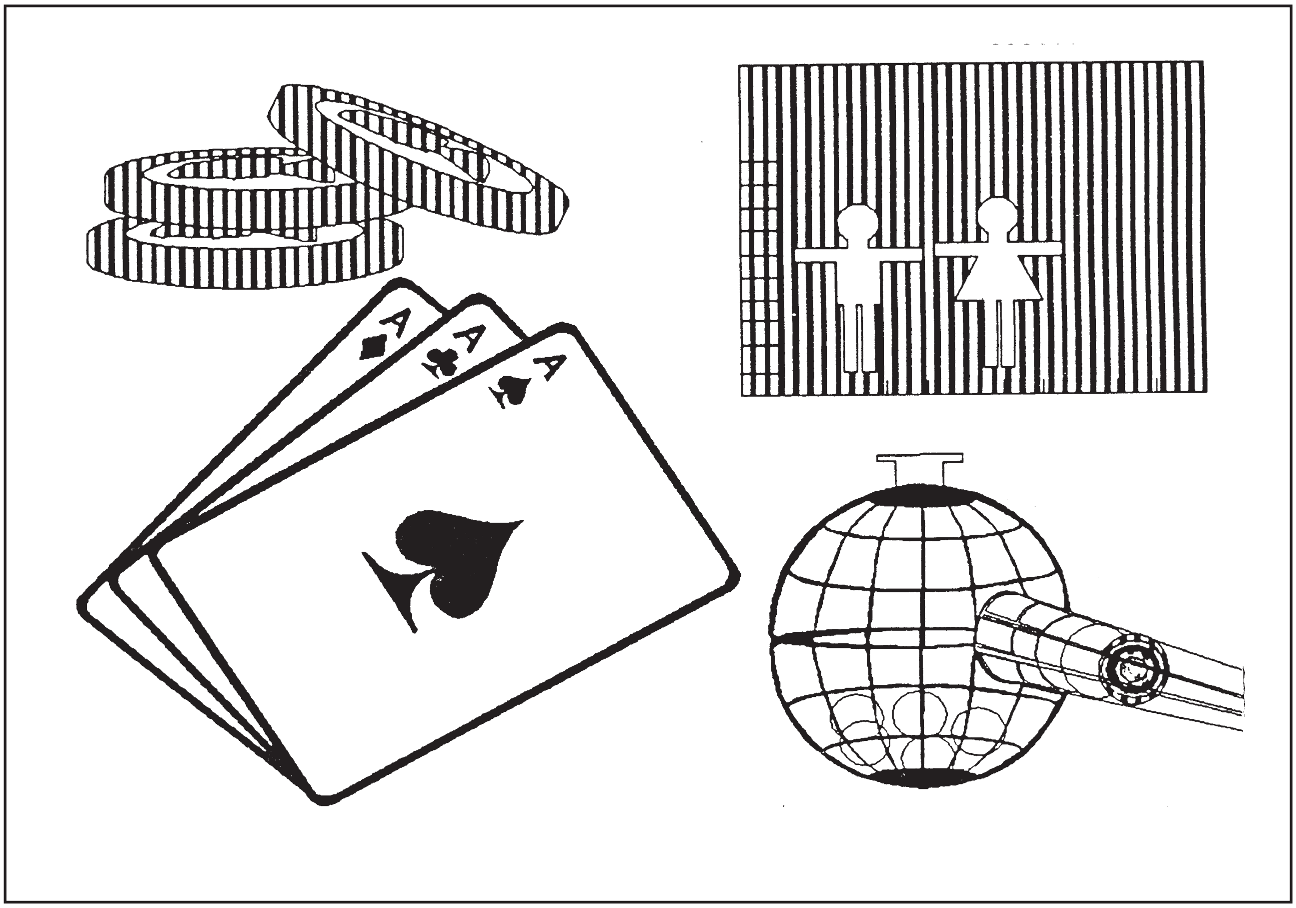
5. Un compañero dibujó un triángulo y luego midió sus ángulos y escribió estas medidas:

$$\measuredangle A = 38^\circ \qquad \measuredangle B = 70^\circ \qquad \measuredangle C = 82^\circ$$

   ¿Qué le dirías tú a ese compañero(a)?

Comparte la solución que has encontrado a estos problemas con tu profesor(a) y compañeros(as).

Núcleo Básico 8



MANEJO DE LA INFORMACIÓN Y PROBABILIDAD

Tradicionalmente los gobiernos han llevado registros de población, nacimientos, defunciones, ocupaciones, producción, y todo tipo de actividades que se realizan en su jurisdicción. El conteo y medición de tales hechos genera gran cantidad de información. En la actualidad los medios masivos de comunicación, a través de reportajes y noticieros, principalmente, proporcionan información de manera constante.

En microempresas, proyectos agrícolas y agropecuarios, lo mismo que en almacenes y tiendas se hace necesario organizar información relacionada con las compras, ventas, pérdidas y ganancias. Todo ello con miras a tener balances juiciosos que permitan tomar decisiones.

Una buena parte de esa información se da a conocer por medio de tablas y gráficas; esto hace resaltar la importancia del tratamiento de la información.

En este núcleo se tratarán técnicas como el muestreo, la organización de datos y su representación en tablas y gráficas. Los métodos descriptivos para el análisis de datos. La probabilidad clásica y el diagrama de árbol y el cartesiano.

141 NO ES LO MISMO...

(153)

Población y muestra

Conocimiento del concepto de población y muestra

¿Alguna vez has recibido una muestra “gratis”de algún producto para que lo pruebes? Eso lo hacen para que conozcas la calidad que tiene éste, pues una muestra representa la generalidad de los productos. En esta sesión conocerás qué es una población y qué es una muestra en el contexto de las matemáticas.

Observa detenidamente el video. Forma un equipo de trabajo y comenten dónde se puede aplicar el muestreo.

Lee con tu equipo el siguiente texto:

POBLACIÓN Y MUESTRA

En muchas ocasiones es necesario realizar investigaciones donde se estudian las características o valores de una población determinada, pero debido a las limitaciones de tiempo o de recursos no se trabaja con la totalidad de la población sino con una parte de ésta.

Por ejemplo: supóngase que se desea saber las preferencias deportivas de los alumnos que cursan actualmente la Telesecundaria, pero entrevistar a todos los alumnos implicaría un gasto excesivo en tiempo y dinero, y el análisis de los resultados sería dificultoso. En situaciones como ésta es necesario utilizar un método estadístico llamado muestreo. Este se usa en encuestas, diseño y análisis de experimentos, control de calidad, etcétera.

Se le llama población al grupo o conjunto de individuos, características u objetos que se examinan. En el ejemplo anterior la población serían todos los alumnos de Telesecundaria y debido a que es muy difícil examinar toda la población se elige una muestra, que es una parte pequeña de la población que se toma como representativa del conjunto.

La muestra elegida debe cumplir con los siguientes requisitos para tener validez: a) debe representar a la población, esto es, ha de pertenecer a ésta y ser elegida al azar o en forma aleatoria, para que todos los elementos de la población tengan la misma probabilidad de ser considerados; b) debe ser confiable, es decir, los resultados que se obtengan deben poder generalizarse a toda la población con cierto grado de precisión; c) que sea práctica, es decir, debe ser sencilla de llevar a cabo; d) que sea eficiente, esto es, debe proporcionar la mayor información al menor costo.

Existe un procedimiento para elegir una muestra al azar, éste es el llamado método de muestreo aleatorio, el cual se explicará detalladamente por medio del siguiente ejemplo:

En una fábrica trabajan 4500 obreros y se desea tomar una muestra de 45 elementos. El primer paso es enumerarlos atendiendo al número de cifras que tiene el último elemento; en el ejemplo se tienen 4 cifras por lo tanto el primer elemento se enumera con 0001.

Posteriormente se colocan en una urna 10 bolitas numeradas del 0 al 9 y cada vez que se elija un obrero se extrae una esfera, se anota el dígito y se regresa a la urna; se revuelven las esferas y se repite el procedimiento tres veces más hasta tener un número de cuatro dígitos. De esta forma todos los obreros tienen la misma posibilidad de aparecer en la muestra.

Puede ocurrir que el número de cuatro dígitos sea mayor al de la población, en este caso se divide éste entre el último número y se toma el residuo. Por ejemplo si se obtiene 6456, se dividirá este número entre 4500, resultando 1 de cociente y de residuo 1956, el cual pertenecerá a la muestra. De esta forma no se desperdician los números mayores a la población elegidos con este procedimiento.

Ahora bien, ¿de qué tamaño debe ser la muestra? Esta varía dependiendo del tamaño de la población y las características propias de la investigación, pero en general **se toma el 1% de la población para formar una muestra.** El tamaño de la población se denota con N y el de la muestra con n. De acuerdo con lo anterior, en el ejemplo dado se tiene que: en Telesecundaria estudian aproximadamente 500000 alumnos; se recomienda, por tanto, escoger una muestra de 5 000 de ellos para entrevistarlos. Puesto que en el país existen 10 000 planteles de este tipo, se eligen 100 escuelas aleatoriamente, y 50 alumnos de cada una de ellas.

En esta investigación N es igual 500 000 y n igual 5 000.

Comenta con tus compañeros(as) de equipo la importancia del muestreo en las actividades de las personas.

Analiza con tu equipo de trabajo la información obtenida y responde en tu cuaderno las siguientes cuestiones.

1. ¿En qué casos se aplica el método de muestreo?

2. ¿Cuáles son las ventajas de este método?

3. ¿A qué se le llama población?

4. ¿Qué es una muestra?

5. ¿Cómo se elige una muestra?

6. ¿Qué requisitos debe cumplir una muestra para tener validez?

Compara tus respuestas con las de otro equipo. Si surgen dudas, coméntalas ante el grupo.

Resuelve en equipo los ejercicios presentados a continuación:

1. Obtén la población y la muestra de los siguientes ejemplos.

   a) Se desea saber el porcentaje de tornillos defectuosos producidos en 5 días. Al día se producen 10 000 tornillos y se pretende examinar 20 tornillos diariamente en diferentes horas del día.

   b) Se quiere conocer la popularidad de un político que es candidato a gobernador de un departamento, entrevistando a 1 000 habitantes del mismo.

2. Propón una investigación posible en la que se defina una población y su muestra.

3. Se quiere saber el “rating” o nivel de audiencia que tiene un programa de televisión en Bogotá, cuya población es de aproximadamente 7 millones de habitantes, entrevistando a 70 000 personas que habitan en ella.

Compara las respuestas de los ejercicios anteriores con las de otro equipo de trabajo. Si tienes dudas, pregunta al profesor(a).

Responde individualmente en tu cuaderno:

1. a) Cuando se realiza una investigación sobre ciertas características propias de una población y se toma al azar una parte de ella, ¿qué método se está utilizando?

   b) ¿En qué se diferencia una muestra de una población?

2. Contesta lo que se te pide.

   a) Anota dos ventajas del muestreo en una investigación.

   b) Escribe tres requisitos que debe cumplir una muestra para tener validez.

3. Obtén la población y la muestra en:

   Una empresa que fabrica 100 000 bombillas a la semana realiza el control de calidad de sus productos probando 1 000 bombillas en el mismo lapso de tiempo.

Coteja tus respuestas con la clave. Si tienes dudas, pregunta al profesor(a).

CLAVE

1. a) Estadística, muestreo; b) la muestra es un porcentaje (1%) de la población. 2. a) Pudiste haber respondido dos de las siguientes ventajas: bajo costo, ahorro de tiempo, facilidad para realizar la investigación, análisis sencillo de resultados. Pudiste haber respondido tres de las siguientes condiciones: que represente a la población, que sea confiable, práctica y eficiente; 3. Población: la producción de bombillas N = 100 000, Muestra: bombillas probadas en una semana n = 1 000.

142 TABLAS QUE INFORMAN

(154)

Organización de datos

Elaboración de tablas para la organización de datos

¿Sabes cuál es el siguiente paso en una investigación después de obtener los datos de la misma? En esta sesión aprenderás a organizar los datos de una investigación lo cual constituye el segundo paso que debe efectuarse.

Observa atentamente el video y comenta en forma breve con tus compañeros(as) de grupo cómo se organizan los datos de una investigación.

Forma un equipo de trabajo y lee el texto; comenta con tus compañeros(as) de equipo sobre la utilidad de organizar los datos de una investigación.

ORGANIZACIÓN DE DATOS

Cuando se realiza una encuesta o investigación cualquiera, se obtienen datos, los cuales es necesario, en primer término, organizar para posteriormente analizarlos y así encontrar la información que se busca. Véase el siguiente ejemplo:

En un centro de salud se quiere saber el peso de los pacientes de un año que acuden a consulta, para valorar así el grado de nutrición de los niños de esta edad que habitan en la comunidad.

Al cabo de una semana se atendieron 30 niños de un año, quienes tuvieron los siguientes pesos en kilogramos:

José	8.0	Francisco	7.4	Clara	11.0
Roberto	9.0	Susana	8.9	Pablo	10.2
Laura	9.5	Petra	9.0	Isabel	6.5
María	7.0	Gabriela	8.3	Manuel	7.4
Carmen	8.5	Martín	9.0	Adrián	9.0
Alejandro	9.0	Luis	9.8	Esperanza	8.5
Trinidad	9.0	Héctor	8.0	Josefina	9.0
Rosa	9.0	Miguel	9.0	Ricardo	10.3
Pedro	8.0	Alfredo	8.9	Aurora	12.5
Juan	10.3	Javier	9.8	Karina	8.4

Se observa que los datos están en desorden; para facilitar su estudio se deben ordenar en forma creciente (del menor al mayor) o decreciente (del mayor al menor). En este caso se ordenará en forma decreciente:

12.5	11.0	10.3	10.3	10.2	9.8	9.8	9.5	9.0	9.0
9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	8.9	8.9	8.5
8.5	8.4	8.3	8.0	8.0	8.0	7.4	7.4	7.0	6.5

Posteriormente, se registran los datos en una tabla o se hace la **tabulación** de ellos, la cual consta de tres columnas: 1. Nombre de la característica estudiada (en este caso el peso). En esta columna se anotan los datos sin repetirlos y en forma ordenada. 2. Conteo de los datos. Aquí se registra el número de veces que se repite cada dato con una marca o rayita. 3. Frecuencia. En esta columna se anota el número que representa a las rayitas obtenidas del conteo de los datos.

TABULACIÓN		
Peso	**Conteo**	**Frecuencia**
12.5	I	1
11.0	I	1
10.3	II	2
10.2	I	1
9.8	II	2
9.5	I	1
9.0	~~IIII~~ IIII	9
8.9	II	2
8.5	II	2
8.4	I	1
8.3	I	1
8.0	III	3
7.4	II	2
7.0	I	1
6.5	I	1
	TOTAL	**30**

Una vez hecha la tabulación, se observa que el peso mayor es 12.5 kg y el menor,6.5 kg. De estos dos datos se obtiene la oscilación o variación, la cual resulta de establecer la diferencia entre ellos. En el ejemplo dado se tiene:

$$\text{Oscilación} = 12.5 - 6.5 = 6$$

La oscilación sirve para calcular los intervalos o clases, como se verá a continuación. Los intervalos son datos agrupados de acuerdo con la amplitud de intervalo que se elija. Para determinar el número de intervalos se divide la oscilación entre la amplitud del intervalo elegido.

En el ejemplo se requiere una amplitud de intervalo de 1.2 kg, pues cada kilogramo de peso es significativo en los niños de un año. Así, para obtener el número de clases o intervalos del ejemplo, se realiza la siguiente operación:

$$\frac{\text{oscilación}}{\text{amplitud del intervalo}} \quad \frac{6}{1.2} = 5 \text{ intervalos}$$

Puede ocurrir que el cociente anterior no resulte un número entero; en ese caso se redondeará al número entero correspondiente. Por ejemplo: si resultan 3.8, se considerarán 4 intervalos.

A continuación se definen los intervalos o clases tomando los límites superior e inferior y considerando la amplitud de intervalo elegida. Por ejemplo: el primer intervalo tiene como límite superior 12.5 (peso mayor), a éste se le resta la amplitud del intervalo, 1.2, obteniéndose 11.3, que es el límite inferior.

Posteriormente se determina el número de casos que están dentro de cada intervalo, es decir, las frecuencias de clase.

Los datos agrupados de la forma expuesta con anterioridad se presentan en un cuadro o tabla de frecuencia.

TABLA DE FRECUENCIAS	
Peso (intervalos)	**Frecuencias**
12.5 – 11.3	1
11.2 – 10.0	4
9.9 – 8.7	14
8.6 – 7.4	9
7.3 – 6.1	2
TOTAL	**30**

Las tablas de frecuencias facilitan el análisis de resultados de una investigación, ya que mediante ellas se pueden establecer relaciones entre los datos.

En el ejemplo dado, los médicos observaron que la mayoría de los pacientes de un año se encontraban bien alimentados, pues se encontraron dentro del intervalo de peso de 9.9 a 8.7 kg, mientras que sólo se presentaron dos casos con bajo peso, y uno con exceso de peso u obesidad.

Comenta con tus compañeros(as) de grupo las ventajas de organizar los datos de una investigación.

Analiza junto con tus compañeros(as) de equipo la información obtenida para contestar las siguientes preguntas en tu cuaderno.

1. ¿Cuál es el primer paso para organizar los datos de una investigación?
2. ¿Dónde se registran los datos ordenados?
3. ¿Qué es una tabulación?
4. ¿Qué es una oscilación?

5. ¿Qué son los intervalos? ¿Qué es la amplitud de intervalo?

6. ¿Cómo se obtienen las clases o intervalos?

7. ¿Qué es la frecuencia de clase?

8. ¿Para qué sirven las tablas de frecuencia?

Compara tus respuestas con las de otro equipo de trabajo. Si existen discrepancias pregunta al profesor(a).

Realiza una encuesta en tu grupo con base en la pregunta: ¿qué número calza?

Anota en el tablero los datos obtenidos para que todos los equipos de trabajo los copien.

Con tu equipo organiza los datos de la encuesta en tu cuaderno, siguiendo los pasos dados a continuación:

1. Ordenar los datos.
2. Tabulación de datos.
3. Oscilación.
4. Intervalos.
5. Tablas de frecuencias.
6 Conclusión.

Compara tus resultados con los de otro equipo. Si surgen dudas, coméntalas ante el grupo para resolverlas.

Forma una pareja con otro compañero(a) de grupo y resuelve el siguiente ejercicio de organización de datos.

Se realizó una encuesta a un grupo de mujeres a partir de la siguiente pregunta: ¿qué talla de ropa usa usted?, obteniéndose los siguientes resultados:

40	28	32	34	36	32	34	32	32	28
36	32	30	32	34	38	32	40	38	32
34	38	36	34	32	34	30	28	36	30
42	30	28	34	32	34	40	36	34	38

1. Ordena en tu cuaderno los datos en forma decreciente:

2. Tabula los datos.

3. Halla la oscilación.

4. Intervalo.

Tallas(intervalos)	Frecuencia

5. Tabla de frecuencias

6. Conclusión.

Compara tus resultados con la clave. Si tienes dudas pregunta a tu profesor(a).

CLAVE

1.

42	40	40	40	38	38	38	38	36	36
36	36	36	34	34	34	34	34	34	34
34	34	32	32	32	32	32	32	32	32
32	32	30	30	30	30	28	28	28	28

2.

Tallas	Conteo	Frecuencia
42	/	1
40	///	3
38	////	4
36	~~////~~	5
34	~~////~~ ////	9
32	~~////~~ ~~////~~	10
30	////	4
28	////	4

3. Oscilación: 42 – 28 = 14

4. Intervalo: 4.6 ó 5.

5.

Tallas(intervalos)	Frecuencia
42 – 40	4
39 – 37	4
36 – 34	14
33 – 31	10
30 – 28	8
Total	

143 UN DIBUJO DICE MÁS...

Gráfica de frecuencia absoluta
Elaboración de la gráfica correspondiente a la frecuencia absoluta

(155)

La frecuencia con que se presenta cierto dato en una serie de datos es significativa; hay más posibilidades de analizar la razón de esa frecuencia, cuando ésta se representa por medio de una gráfica. ¿Has representado lo que está registrado en una tabla de frecuencia absoluta por medio de una gráfica? Si no, he aquí la oportunidad de hacerlo.

Observa el video. En él verás cómo se procede para representar por medio de una gráfica lo que está expresado en una tabla de frecuencia absoluta. Cuando hayas terminado, intercambia ideas al respecto con tu compañero(a) más próximo.

Lee en equipo el texto **Gráfica de frecuencia absoluta**.

GRÁFICA DE FRECUENCIA ABSOLUTA

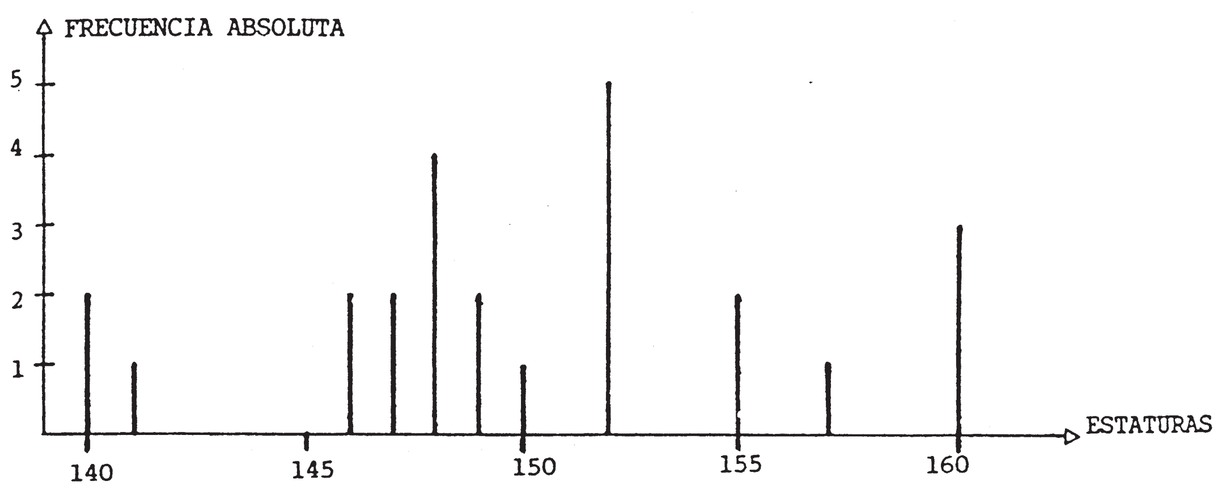
Los datos estadísticos que han sido registrados en una tabla pueden representarse por medio de una gráfica. Ese dibujo, realizado correctamente, permite la adecuada interpretación de los datos y es un valioso recurso para encontrar con mayor claridad la respuesta a interrogantes importantes.

Para precisar estas ideas, considérese el siguiente ejemplo.

Se han tabulado los datos referentes a la estatura en centímetros de los miembros de un equipo de fútbol, integrado por 25 jugadores (titulares y reservas).

Estaturas	Conteo	Frecuencia absoluta
140	||	2
141	|	1
146	||	2
147	||	2
148	||||	4
149	||	2
150	|	1
152	~~||||~~	5
155	||	2
157	|	1
160	|||	3
	Total	**25**

Para elaborar la gráfica representativa de los datos anotados en la tabla, se trazan dos ejes, uno horizontal y otro vertical, que sean perpendiculares. En el eje horizontal se anotan los datos (estatura de los futbolistas) y en el vertical las frecuencias.

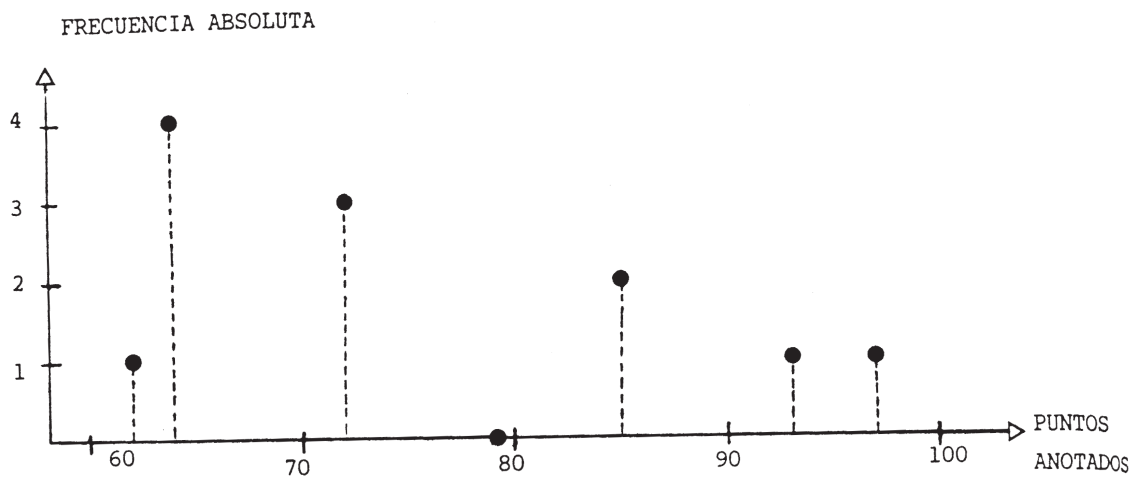


Otro ejemplo se presenta a continuación.

El entrenador de un equipo de baloncesto ha registrado el número de puntos que cada uno de sus doce jugadores (titulares y reservas) anotó en total durante la temporada que recientemente terminó. Dicha información la concentró en la siguiente tabla.

Puntos anotados	Conteo	Frecuencia absoluta
62	|	1
64	|| ||	4
72	|||	3
79		0
85	| |	2
93	|	1
97	|	1
	Total	**12**

La gráfica representativa de esta tabla se ve así.



Seguramente, el análisis de estas gráficas, y otras que puedan elaborar los entrenadores, con características personales y del rendimiento de sus jugadores en la práctica de un deporte, permitirán optimizar el funcionamiento de los equipos a su cargo.

Por otra parte, conocer cómo se realiza la representación gráfica de las frecuencias absolutas, sirve de base para comprender cómo se elaboran e interpretan otras gráficas más específicas en cuanto a cualidades y cantidades que se verán más adelante en este curso y otros posteriores.

Con tu equipo resuelve en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se pueden organizar con mayor facilidad los datos estadísticos?

2. ¿Cómo debes proceder para elaborar una gráfica de frecuencia absoluta ?

Compara tus respuestas con las de un integrante de otro equipo. Si tienes errores, corrígelos.

Con el mismo equipo completa la siguiente tabla en tu cuaderno, anotando en la columna correspondiente, la frecuencia absoluta.

Puntaje por ventas	Tabulación	Frecuencia absoluta
47	~~////~~ /	
53	////	
61	/	
82	~~////~~ ~~////~~	
97	~~////~~ //	
	Total	

Muestra tus anotaciones a tu profesor(a). Si hay algún error, corrígelo.

Continúa trabajando con tu equipo; elabora una gráfica en tu cuaderno que represente la frecuencia absoluta registrada en la tabla que se te proporciona.

Visitas	Conteo	Frecuencia absoluta
Museos	////	4
Parques arqueológicos	//	2
Empresas	///	3
Zoológicos	/	1
Bibliotecas	//	2
Oficinas públicas	~~////~~	5
	Total	**17**

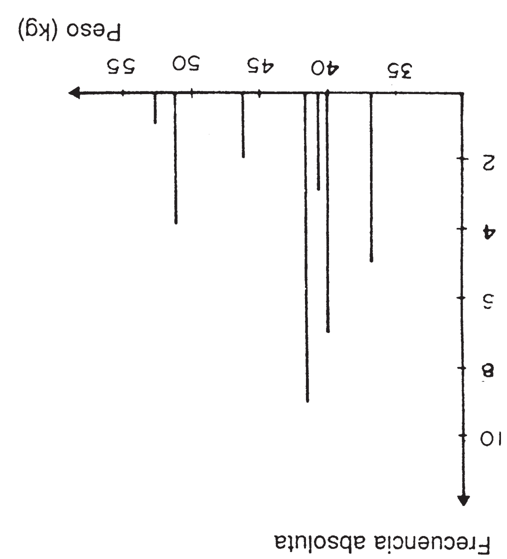
Revisa tu gráfica con los integrantes de otro equipo y si encuentras errores en la misma, rectifícalos.

Ahora en forma individual, elabora la gráfica en tu cuaderno que represente la frecuencia absoluta registrada en la tabla que se da a continuación.

H Peso (kg)	Conteo	Frecuencia absoluta
37.5	~~////~~	5
40	~~////~~ //	7
40.5	///	3
41	~~////~~ ///	9
46	//	2
51	////	4
52.5	/	1
	Total	31

Compara tu gráfica con la que está en la clave de esta sección. Si tienes errores corrígelos.

CLAVE



144 ¿TANTAS VECES?

(156) Frecuencia relativa
Obtención de la frecuencia relativa

¿Qué porcentaje de los alumnos de un grupo ha aprobado español? ¿Qué porcentaje de las ventas de una tienda corresponde a alimentos? Cuando la frecuencia se representa con un tanto por ciento se está haciendo referencia a la frecuencia relativa.

Observa el video; en él conocerás el procedimiento para obtener la frecuencia relativa. Al terminar, reúnete con dos compañeros(as) y comenta su contenido.

Participa en la lectura comentada del texto:

FRECUENCIA RELATIVA

Cuando se tiene una serie de datos, debidamente ordenada y tabulada no solamente es necesario conocer la frecuencia absoluta de los valores que se incluyen, esto es, el número de veces que un dato aparece en el total considerado, sino que se requiere saber también cuál es el porcentaje de la aparición de ese dato en relación al conjunto de los datos, es decir la frecuencia relativa.

Para que se aprecie cuál es el procedimiento que se sigue cuando es necesario obtener una frecuencia relativa, considérese el siguiente ejemplo.

Un médico familiar de una institución de seguridad social, atendió durante una semana a cierto número de pacientes con síntomas de diversos padecimientos, los cuales se enumeraron en la tabla que aparece a continuación:

Motivo de consulta	Conteo	Frecuencia absoluta
Gripe	~~IIII~~ IIII	9
Luxación	~~IIII~~ II	6
Heridas	IIII	4
Quemaduras	~~IIII~~	5
Hepatitis	III	3
Diabetes	~~IIII~~ III	8
Afección renal	~~IIII~~ I	6
Gastritis	~~IIII~~ IIII	9
	Total	**50**

(**Suma de frecuencias absolutas)**

Para obtener la frecuencia relativa de un dato hacemos un razonamiento sencillo correspondiente a un problema de proporcionalidad directa:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \rightarrow & 50 \\ x & & 9 \end{array}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{50}{9} \rightarrow 50x = 100 \times 9$$

$$x = \frac{9 \times 100}{50}$$

$$x = 18\%$$

Si el cien por ciento o la totalidad de las frecuencias absolutas es 50, ¿qué porcentaje representa una frecuencia de 9?

Como puedes observar la **frecuencia relativa** es un dato que se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el total y multiplicando el cociente por cien. Es decir:

$$\text{frecuencia relativa} = \frac{\text{frecuencia absoluta}}{\text{suma de frecuencias absolutas}} \times 100$$

Realizando las operaciones según los datos de la tabla anterior, se obtiene:

$$\frac{9}{50} \times 100 = 0.18 \times 100 = 18\%$$

$$\frac{6}{50} \times 100 = 0.12 \times 100 = 12\%$$

$$\frac{4}{50} \times 100 = 0.08 \times 100 = 8\%$$

$$\frac{5}{50} \times 100 = 0\ .10 \times 100 = 10\%$$

$$\frac{3}{50} \times 100 = 0.06 \times 100 = 6\%$$

$$\frac{8}{50} \times 100 = 0.16 \times 100 = 16\%$$

$$\frac{6}{50} \times 100 = 12\ \%$$

$$\frac{9}{50} \times 100 = 18\%$$

Nota: Pueden verificarse los resultados con la calculadora.

La suma de estos resultados o porcentajes debe dar 100% ya que en la fórmula intervienen como cociente 50, que es el total de valores registrados en la tabla. Al representar la frecuencia con un tanto por ciento, se está haciendo referencia a la **frecuencia relativa**.

Enseguida se presenta una nueva tabla en la cual se incluyen las frecuencias relativas.

Motivo de consulta	Conteo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)
Gripe	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert\vert$	9	18
Luxación	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	6	12
Heridas	$\vert\vert\vert\vert$	4	8
Quemaduras	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5	10
Hepatitis	$\vert\vert\vert$	3	6
Diabetes	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	8	16
Afección renal	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	6	12
Gastritis	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert\vert$	9	18
	Total	**50**	**100**

Es posible concluir, por tanto, que el 16% de las consultas se dio a enfermos de diabetes y 12% de los pacientes padecen afecciones renales y luxación.

¿Qué porcentaje del total fueron consultas para enfermos de hepatitis?

Puede afirmarse entonces que la frecuencia relativa es el número que representa a la frecuencia absoluta, expresado por medio de un porcentaje relativo a la suma total de frecuencias absolutas.

Para fines estadísticos, es más significativo hablar de tanto por ciento, por eso es importante saber cómo se obtienen las frecuencias relativas cuando se tiene una serie de datos referentes a determinado hecho.

Comenta con tu equipo las ventajas de obtener la frecuencia relativa de un dato.

Con el mismo equipo de trabajo, realiza lo que se pide. Trabaja en tu cuaderno.

En una serie de datos estadísticos, la frecuencia absoluta es 7, 12, 1, 3, 10 y el total es 33. Para obtener la frecuencia relativa, completa en tu cuaderno las siguientes expresiones. Puedes usar tu calculadora.

$$\frac{7}{\boxed{}} \times 100 = 0.21 \times 100 = \boxed{}$$

$$\frac{\boxed{}}{33} \times 100 = 0.36 \times 100 = \boxed{}$$

$$\frac{1}{33} \times 100 = \boxed{} \times 100 = \boxed{}$$

$$\frac{3}{33} \times \boxed{} = 0.09 \times 100 = \boxed{}$$

$$\frac{\boxed{}}{33} \times 100 = 0.33 \times 100 = \boxed{}$$

Revisa tu trabajo con los integrantes de otro equipo. Si te equivocaste, corrige.

Individualmente, completa la siguiente tabla en tu cuaderno, anotando la frecuencia relativa en la columna correspondiente. Usa tu calculadora para obtenerla.

Gastos	Conteo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)
Mantenimiento	~~IIII~~ I	6	
Útiles de aseo	IIII	4	
Gratificaciones	~~IIII~~ III	8	
Arreglo del jardín	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12	
	Total	**30**	

Compara tus frecuencias con las de la clave de esta lección, que aparece enseguida. Si tienes errores, corrígelos.

CLAVE

Mantenimiento: 20%; Útiles de aseo: 13%; Gratificaciones: 27%; Arreglo de jardín: 40%; Total 100%.

145 DIBUJOS INFORMATIVOS

(157)

Gráfica de frecuencia relativa
Elaboración de la gráfica correspondiente a la frecuencia relativa

Seguramente te has dado cuenta de que en muchas ocasiones, cuando se nos proporciona información de lo que ocurre en el mundo que habitamos, se habla de tanto por ciento. Así es como se presenta la frecuencia relativa en los dibujos llamados gráficas, cuyo análisis e interpretación sirve de apoyo para tomar decisiones o elaborar planes.

Observa el video. Te darás cuenta de cómo puedes proceder para elaborar gráficas de frecuencia relativa. Cuando hayas terminado participa en un intercambio de ideas con tus compañeros(as) de grupo.

Lee con dos compañeros(as) el texto:

GRÁFICA DE FRECUENCIA RELATIVA

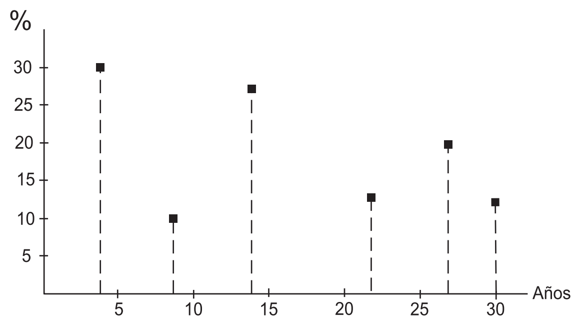
La frecuencia relativa, registrada en una tabla, puede representarse por medio de una gráfica. Esta gráfica se elabora considerando los porcentajes de las diferentes frecuencias relativas que se obtuvieron al ordenar una serie de datos estadísticos.

Para apreciar con claridad lo anterior, tómese en cuenta la siguiente situación.

En una reunión regional de profesores de Telesecundaria, se hizo el registro de los años de servicio de todos los asistentes, obteniéndose los datos que se muestran en la tabla.

Años de servicio	Conteo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)
3	~~||||~~ ||||	9	30
8	|||	3	10
14	~~||||~~ ||	7	23
22	|||	3	10
27	~~||||~~	5	17
30	|||	3	10
	Total	**30**	**100%**

La representación gráfica de la frecuencia relativa se realiza trazando dos ejes, uno horizontal y otro vertical, que son perpendiculares. En el eje horizontal se colocan los datos obtenidos y en el vertical la frecuencia relativa, como se ve a continuación.



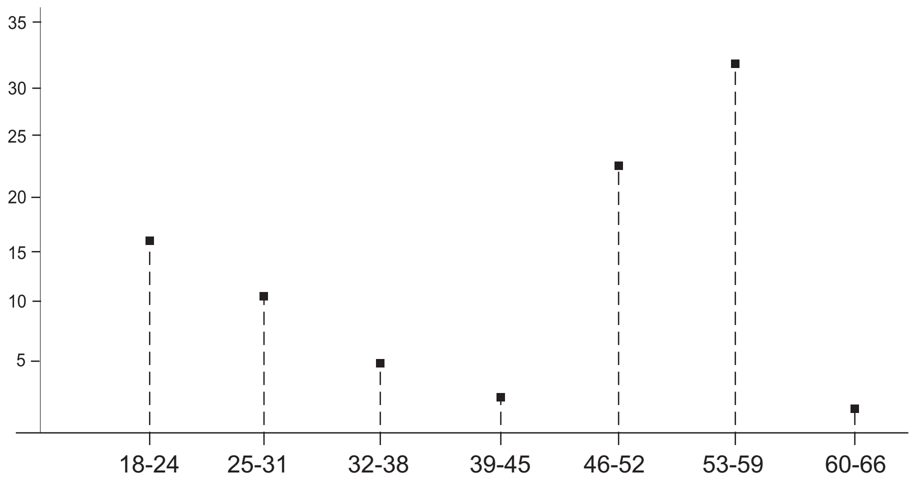
Mediante el análisis de la gráfica, las autoridades educativas pueden tomar algunas decisiones basándose en la frecuencia relativa, así como hacer comparaciones con otras regiones que también estén a su cargo.

A continuación se desarrolla otro ejemplo.

El alcalde municipal de cierta localidad ha concentrado las edades de todas las personas en edad de votar, que viven en esa población. Los datos recolectados se muestran en la tabla que se presenta enseguida.

<table>
<tr><th>Edades</th><th>Conteo</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa (%)</th></tr>
<tr><td>18 – 24</td><td>~~||||~~ ~~||||~~ ||</td><td>12</td><td>17</td></tr>
<tr><td>25 – 31</td><td>~~||||~~ ||||</td><td>9</td><td>12</td></tr>
<tr><td>32 – 38</td><td>||||</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>39 – 45</td><td>|||</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>46 – 52</td><td>~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||</td><td>18</td><td>25</td></tr>
<tr><td>53 - 59</td><td>~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||||</td><td>24</td><td>33</td></tr>
<tr><td>60 - 66</td><td>||</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Total</td><td>72</td><td>100%</td></tr>
</table>

La gráfica de frecuencia relativa correspondiente a la tabla elaborada con los datos recogidos, es como se ve enseguida.



Esta gráfica, analizada por diversos funcionarios, puede proporcionar información para el proceso electoral en sus diferentes fases, la cual es una, entre otras, de las aplicaciones que se le puede dar.

¿En este caso qué utilidad podría dársele para el día del proceso electoral?

La frecuencia relativa es muy utilizada para cuestiones concernientes a la producción de todo tipo de objetos, en el control de calidad, etcétera.

Por lo tanto, es conveniente saber cómo se representa gráficamente dicha frecuencia, pues además se empleará este conocimiento en temas que serán estudiados en cursos posteriores.

Con el mismo equipo, elabora en tu cuaderno una gráfica de frecuencia relativa, tomando en cuenta los datos que aparecen en la tabla.

Puntos ganados	**Conteo**	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa (%)**
28	~~IIII~~ II	7	20
31	~~IIII~~	5	14
35	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14	40
36	~~IIII~~ II	7	20
40	II	2	6
		Total 35	**100**

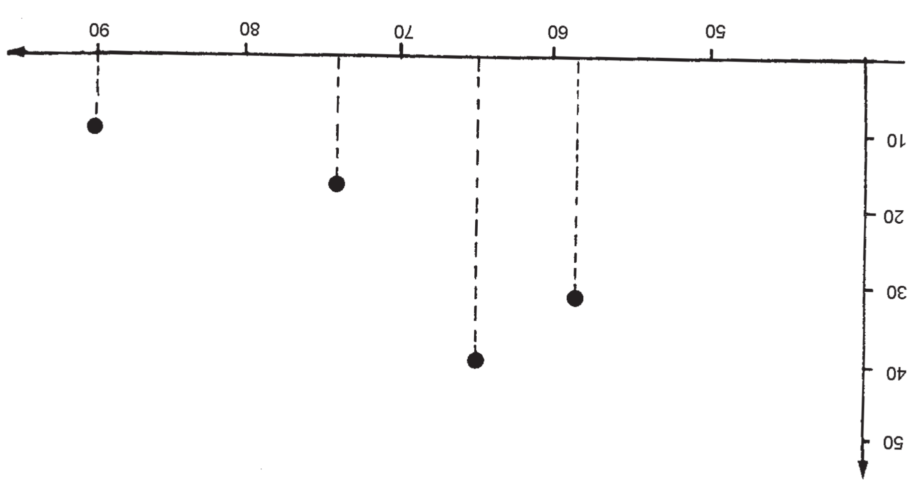
Revisa tu gráfica con los integrantes de otro equipo. Si te equivocaste, corrige.

De manera individual, elabora en tu cuaderno la gráfica de frecuencia relativa que represen-ta lo que está registrado en fa siguiente tabla.

<table>
<tr><th>Aciertos</th><th>Conteo</th><th>Frecuencia absoluta</th><th>Frecuencia relativa (%)</th></tr>
<tr><td>58</td><td>|||| ||</td><td>7</td><td>32</td></tr>
<tr><td>65</td><td>~~||||~~ ||||</td><td>9</td><td>41</td></tr>
<tr><td>73</td><td>~~||||~~</td><td>4</td><td>18</td></tr>
<tr><td>90</td><td>||</td><td>2</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td>Total</td><td>22</td><td>100%</td></tr>
</table>

Compara tu gráfica con la que aparece en la clave de esta sección. Si tienes errores, corrige.

CLAVE



146 EL CÍRCULO QUE HABLA

(158)

Gráficas circulares
Formulación de gráficas circulares

¿Has oído decir que un dibujo dice más que mil palabras? ¿Cuántos grados de amplitud tiene el ángulo central de un círculo? ¿Cuánto deberá medir la suma de todos los ángulos que representen datos en una gráfica circular?

Observa el video donde verás al círculo que habla.

Lee en equipo el siguiente texto:

GRÁFICAS CIRCULARES

Es muy común escuchar sobre la insuficiencia de los ingresos en una familia, por lo que es recomendable planear la distribución de ellos y tratar de ajustarse a ella lo más que se pueda.

Enseguida se presenta la distribución de ingresos que planea una pareja que inicia su vida marital y desea tener el menor número de problemas económicos.

Porcentaje	Destino
30%	Vivienda
25%	Alimentos
20%	Ropa
10%	Ahorro
15%	Otros

Esta distribución puede representarse en una gráfica circular, que también permite ver con claridad qué aspecto representa el gasto más oneroso.

Para elaborar una gráfica circular se deben trazar ángulos centrales que equivalgan al porcentaje que se va a representar, lo que conduce a establecer, por razonamiento proporcional, una ecuación donde 360° del círculo equivale al 100% y, por tanto, a cada porcentaje le corresponderá un *x* valor que se conocerá al despejar *x*. A continuación se muestra este procedimiento, para el ejemplo planteado anteriormente.

Vivienda:

$$\begin{array}{lcl} 360^\circ & \rightarrow & 100\% \\ x & \rightarrow & 30\% \end{array}$$

$$\frac{360^\circ}{100\%} = \frac{x}{30\%} \qquad x = \frac{(360^\circ)(30\cancel{\%})}{100\cancel{\%}} \qquad \boxed{x = 108^\circ}$$

$$\boxed{\text{Vivienda} = 108^\circ}$$

Alimentos:

$$\frac{360^\circ}{100\%} = \frac{x}{25\%} \qquad x = \frac{(360^\circ)(25\cancel{\%})}{100\cancel{\%}} \qquad \boxed{x = 90^\circ}$$

$$\boxed{\text{Alimentos} = 90^\circ}$$

Ropa

$$\frac{360^\circ}{100\%} = \frac{x}{20\%} \qquad x = \frac{(360^\circ)(20\cancel{\%})}{100\cancel{\%}} \qquad \boxed{x = 72^\circ}$$

$$\boxed{\text{Ropa} = 72^\circ}$$

Ahorro

$$\frac{360^\circ}{100\%} = \frac{x}{10\%} \qquad x = \frac{(360^\circ)(10\cancel{\%})}{100\cancel{\%}} \qquad \boxed{x = 36^\circ}$$

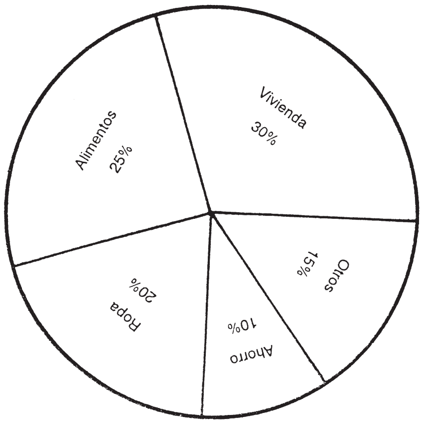
$$\boxed{\text{Ahorro} = 36^\circ}$$

Otros

$$\frac{360^\circ}{100\%} = \frac{x}{15\%} \qquad x = \frac{(360^\circ)(15\cancel{\%})}{100\cancel{\%}} \qquad \boxed{x = 54^\circ}$$

$$\boxed{\text{Otros} = 54^\circ}$$

Enseguida se trazan los ángulos señalados.



Aquí se puede observar con mayor claridad la inversión más onerosa que realizará la pareja que así planeó sus gastos.

¿Cómo les pareció esta forma de representar datos?

Con tu equipo resuelve el siguiente ejercicio. Usa la calculadora.

1. Realiza la gráfica circular de la composición étnica de México en 1980.

   55% mestiza.

   29% indígena.

   15% blanca.

   1% otras razas.

2. Representa en una gráfica circular la distribución del producto nacional bruto en 1978*.

   Agricultura 11%.

   Industria 37%.

   Servicios 52%.

Compara tus resultados con los de otro equipo. Si tienes errores, corrígelos.

Individualmente, realiza la gráfica circular de la edad de la población en México, según censo de 1990. Redondea los grados.

30% de 0 a 4 años.

32% de 15 a 29 años.

24% de 30 a 49 años.

10% de 50 a 69 años.

3% de 70 años en adelante.

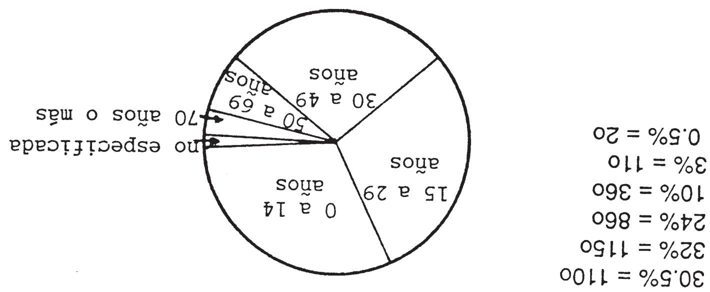
0.5% edad no especificada.

Compara tus resultados con la clave cuando te lo indique tu profesor(a).

---

* Almanaque mundial, 1982.

CLAVE



147 NOTICIEROS GRÁFICOS

(159)

Histogramas
Construcción de histogramas

¿Cómo te enteras de lo que sucede en tu país o en otros países? ¿Has visto algún tipo de información sobre tu comunidad u otras? ¿Siempre la presentan en la misma forma?

Atiende el video donde observarás una forma más de presentar la información.

Realiza en pareja una lectura comentada del texto:

HISTOGRAMAS

Los histogramas, llamados también histogramas de frecuencias, son representaciones gráficas de datos cuando éstos son cuantitativos, o sea que hacen referencia a números o cantidades. Por ejemplo, el número de personas que integran una familia, las calificaciones obtenidas en un examen por un grupo de niños, la estatura de cierto número de personas, etcétera.

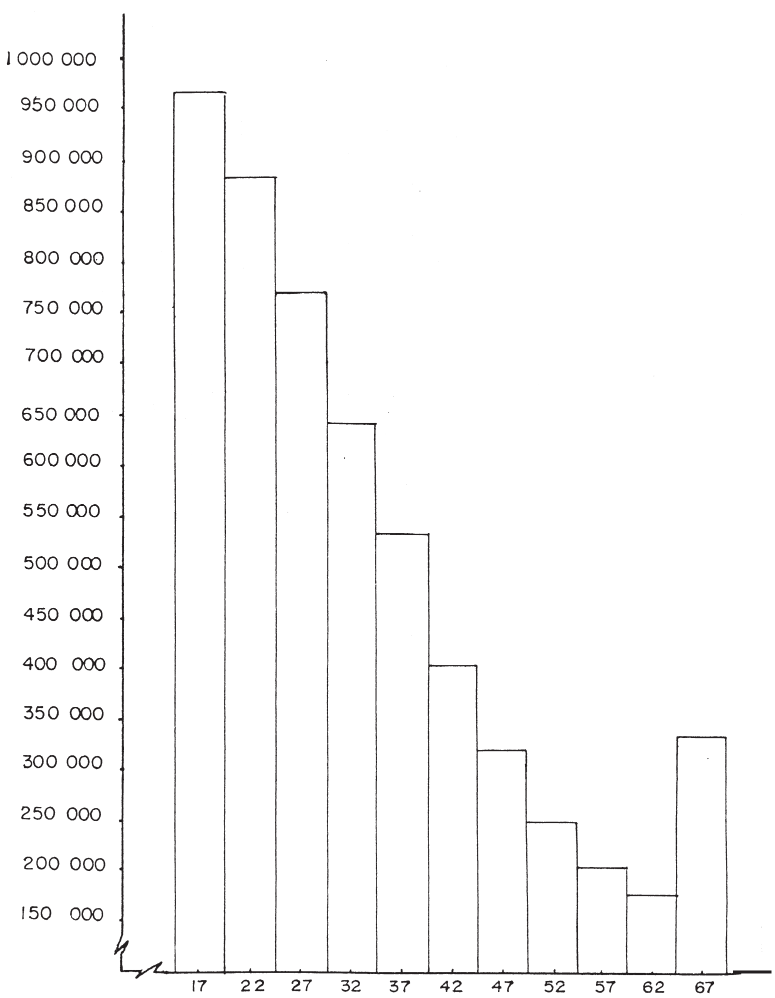
Para realizar un histograma es necesario agrupar los datos en intervalos, señalar la frecuencia y el punto medio que se obtiene sumando los límites del intervalo y dividiendo entre dos; y emplear dos líneas perpendiculares; esto es, un eje horizontal, donde se señalará la amplitud del intervalo y un eje vertical en el que se presentarán las frecuencias.

Ejemplo:

En un censo se obtuvieron los siguientes datos sobre el número de personas alfabetas según su edad.

Intervalos	Frecuencia	Punto medio
15 – 19	966 000	17
20 – 24	886 000	22
25 – 29	765 000	27
30 – 34	645 000	32
35 – 39	528 000	37
40 – 44	400 000	42
45 – 49	316 500	47
50 – 54	253 000	52
55 – 59	202 000	57
60 – 54	169 000	62
65 – 69	331 000	67

Obsérvese el histograma que representa esos datos.



Como puede verse, la base de cada rectángulo corresponde a cinco unidades, es decir, a la amplitud del intervalo y su altura equivale a la frecuencia de los datos.

Para determinar la longitud de la base en los rectángulos se señala la mitad del intervalo a la izquierda del punto medio y la otra mitad a la derecha del mismo. Por ejemplo, en el caso anterior se tiene que uno de los puntos medios es 17, entonces se hizo una marca de 2.5 unidades a derecha e izquierda del 17, y así con los demás puntos medios, por lo que los rectángulos quedan contiguos. A las marcas que señalan el inicio y el final de la base en cada rectángulo, se les conoce como **límites reales.**

Además, cabe mencionar que en el inicio de cada eje se ha señalado un rompimiento ( ) de éste, que indica que en la distancia del origen al primer dato existen valores no señalados por convenir así para el trazo de la gráfica.

Así, puede observarse que el histograma es una forma más clara de presentar los datos para su análisis.

Reúnete con un compañero(a) y responde las preguntas, con base en el texto leído.

a) ¿Cómo se obtuvo la amplitud del intervalo señalado?

b) ¿A qué hacen referencia los intervalos?

c) ¿A qué dato se refiere la frecuencia?

d) Suma los límites de cada intervalo y divídelos entre dos. ¿Qué valores obtuviste?

e) ¿En qué forma se puede determinar el punto medio de un intervalo?

Compara tus respuestas con !as de otro compañero(a) y si hay dudas, consulta a tu profesor(a).

Continúa en pareja y realiza los siguientes ejercicios.

Se encuestó sobre el peso (en kg) de 35 estudiantes de Telesecundaria. Completa la tabla y haz el histograma en tu cuaderno.

Peso (kg)	Frecuencia	Punto medio
36 – 38	10	
39 – 41	12	
42 – 44	6	
45 – 47	4	
48 – 50	3	

En un censo se obtuvieron los siguientes datos acerca de la población que se encuentra entre los 5 y 14 años de edad en básica primaria. Completa en tu cuaderno la tabla y haz el histograma. (Las frecuencias son cantidades redondeadas).

Intervalo	Frecuencia	Punto medio
5 - 6	339 000	5.5
7 - 8	5 500	
9 - 10	2 500	
11- 12	2 000	
13 – 14	2 500	

Compara tus resultados con otra pareja y corrige si tuviste errores.

En forma individual, realiza el siguiente ejercicio.

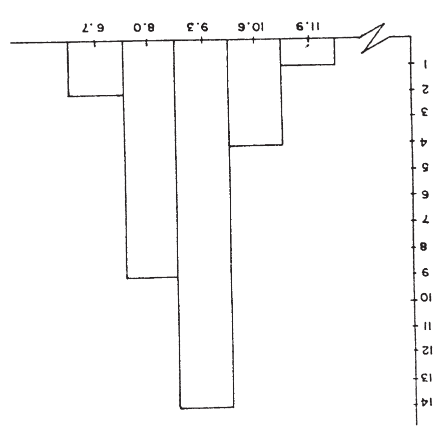
a) Traza en tu cuaderno el histograma de una tabla sobre el peso de niños de un año.

Intervalo	Frecuencia	Punto medio
12.5 – 11.3	1	11.9
11.2 – 10.0	4	10.6
9.9 – 8.7	14	9.3
8.6 – 7.4	9	8.0
7. 3 – 6.1	2	6.7

b) Escribe en tu cuaderno tus conclusiones sobre la información anterior.

Compara tu histograma con el de la clave y corrige si tuviste errores.

CLAVE



148 OTRO DIBUJO INFORMATIVO

(160)

Polígonos de frecuencias
Construcción de polígonos de frecuencias

Como habrás observado, las gráficas nos ayudan a mostrar la frecuencia con que se presentan algunos datos.

Observa el video en el que verás otro tipo de gráfica. Comenta en tu grupo en qué se parecen un histograma y un polígono de frecuencia.

Lee el texto que viene a continuación.

POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Cuando los datos a graficar son numéricos, se dice que son cuantitativos y un medio para expresarlos es la gráfica **poligonal o polígono de frecuencias**. Una vez que se ha elaborado el histograma, el polígono de frecuencias es fácil de trazar; para ello, véase el siguiente planteamiento:

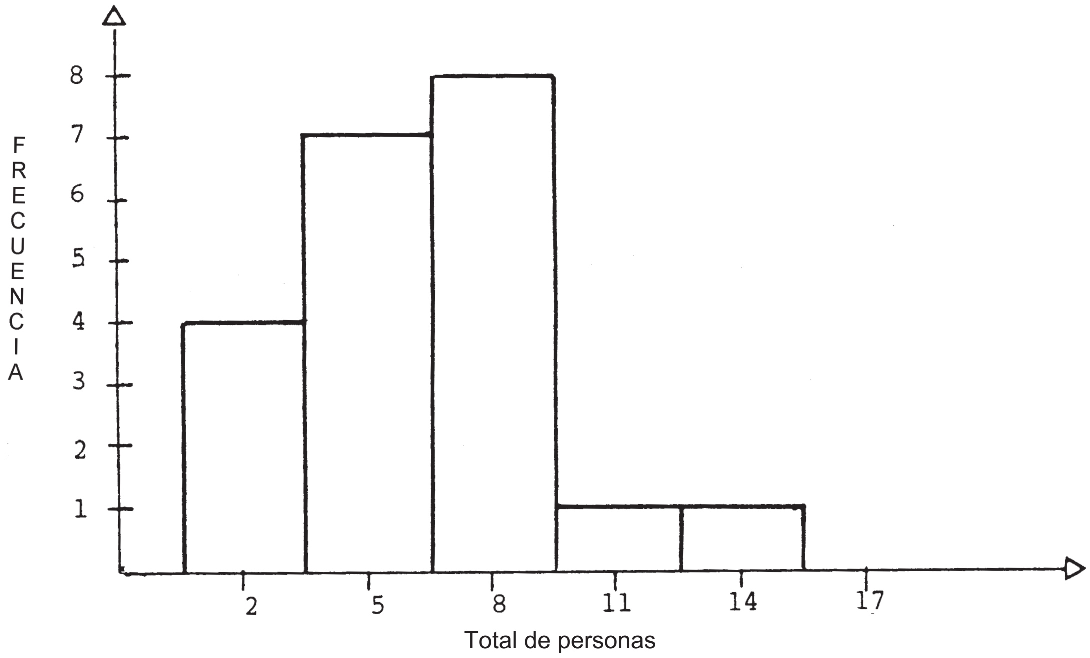
Al entrevistar a los alumnos de un grupo de séptimo año de telesecundaria y preguntarles cuál es el número de personas que viven en su casa se obtuvieron los siguientes datos:

9	6	3	8	4	3	5
7	5	5	6	9	6	7
8	10	15	3	8	9	2

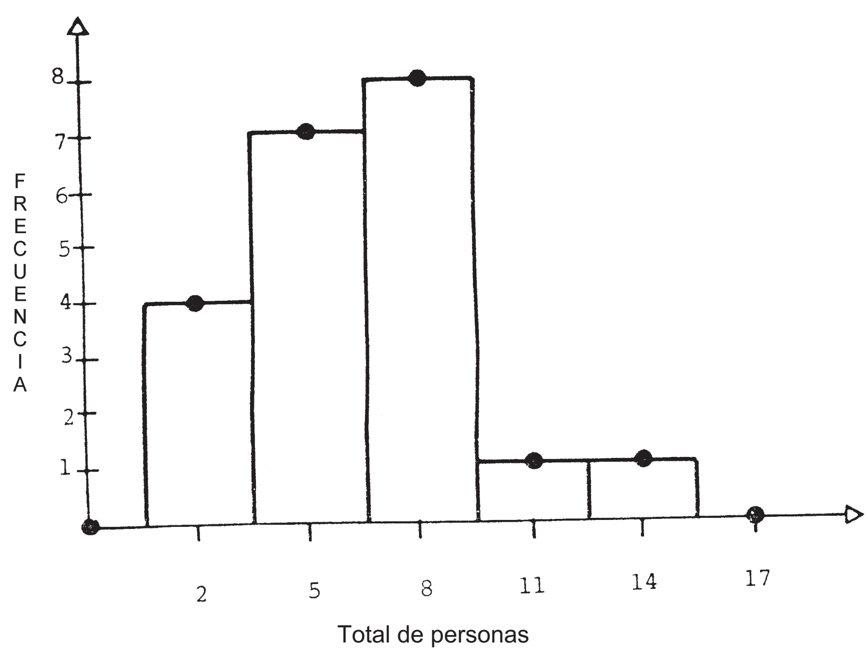
Con estos datos se realiza la tabulación correspondiente:

Intervalo	Frecuencias	Punto medio
1 – 3	4	2
4 – 6	7	5
7 – 9	8	8
10 – 12	1	11
13 – 15	1	14
TOTAL	21	

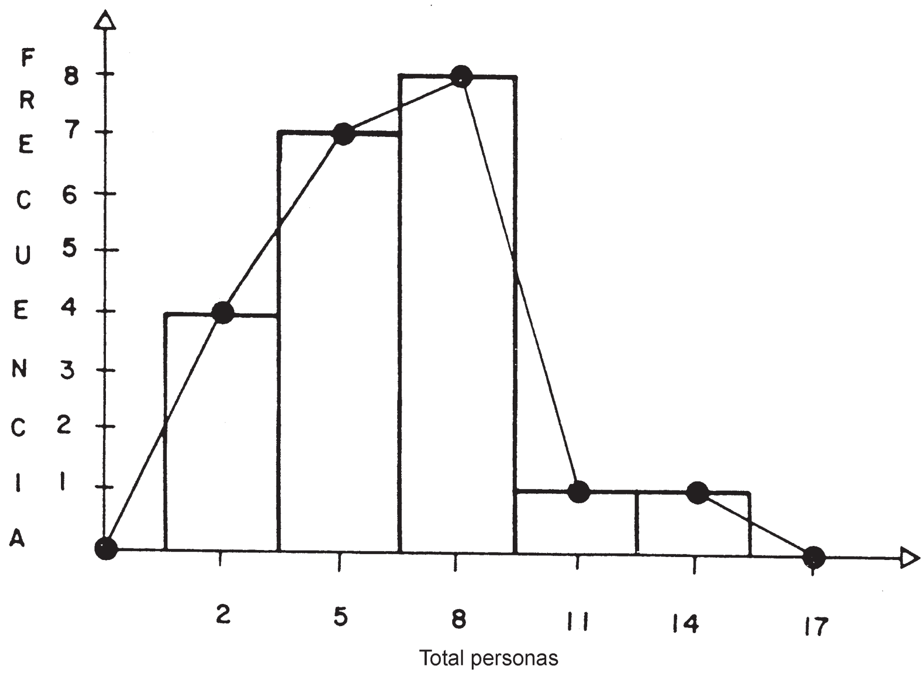
Con la tabulación es posible realizar el histograma.



Una vez trazado éste, se localizan los puntos medios en la parte superior de cada rectángulo y se señala la medida de la mitad del intervalo a la izquierda de la primera barra del histograma y la mitad a la derecha del último, sobre el eje horizontal.



Y por último se unen dichos puntos de donde se obtiene la poligonal.



Para trazar el polígono de frecuencias se unen con una poligonal los puntos medios de los techos de los rectángulos del histograma.

Discute con un compañero(a) y contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1. ¿Para qué sirve un polígono de frecuencias?
2. ¿Qué semejanzas tiene con el histograma?
3. ¿En qué se diferencian?
4. ¿Cómo se construye un polígono de frecuencias?
5. ¿Por qué crees que se llama polígono de frecuencias?
6. ¿Crees que se pueda hacer el polígono de frecuencias sin el histograma? ¿Cómo? Discútelo con el grupo.

Una vez anotadas, lee tus respuestas ante el grupo.

Con un compañero(a), realiza los siguientes ejercicios; para ello léelos con atención.

Los datos de un censo de población de 12 años en adelante, en un departamento, son los siguientes:

Trabaja en tu cuaderno

12 años	166 000
13 años	156 000
14 años	157 000
15 años	149 000
16 - 19	566 000
20 - 24	589 000
25 - 29	234 000
30 - 34	196 000
35 - 39	174 000
40 - 44	136 000
45 - 49	118 000
50 - 54	95 000
55 - 59	74 000
60 - 64	62 000
65 – 69	123 000

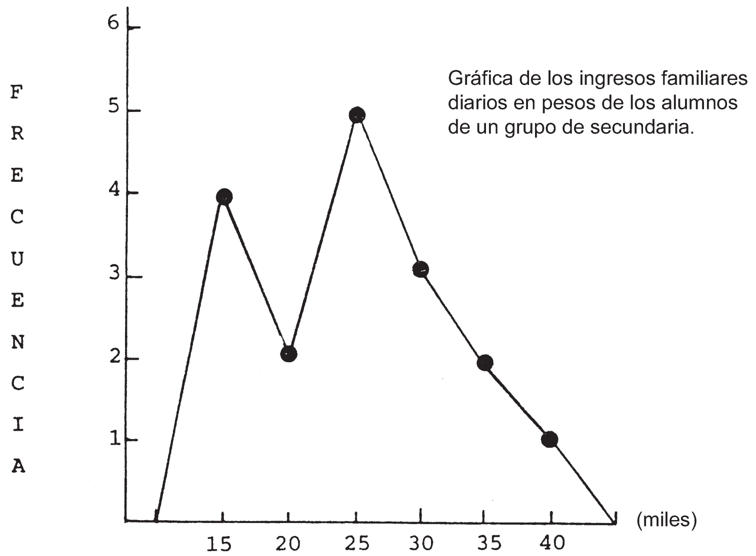
Completa la siguiente tabla:

Intervalo	Frecuencia	Punto medio
10 – 14	479 000	12
15 – 19	234 000	17
20 – 24		22
25 – 29		
30 – 34		
35 – 39		
40 – 44		
45 – 49		
50 – 54		
55 – 59		
60 – 64		
65 – 69		

Grafica en tu cuaderno tus datos y construye el histograma para que con base en él traces la gráfica poligonal.

Compara tu gráfica con la de tus compañeros(as). Comenta con tu profesor(a) las dudas que tengas, y si hay errores, corrígelos.

Observa la siguiente gráfica poligonal. Haz la tabulación en tu cuaderno y contesta las preguntas.



1. ¿Cuál es el ingreso familiar menor que se percibe en el grupo?

2. ¿Cuál es el mayor ingreso?

3. ¿Qué ingreso es más frecuente?

4. ¿En qué ingreso hay menor frecuencia?

Verifica tus resultados comparándolos con la clave. Si hay diferencias, analiza tus procedimientos y corrige.

CLAVE

1. $15 000
2. $40 000
3. $25 000
4. $40 000

Intevalo (Miles)	Frecuencia	Punto medio (Miles)
13 – 17	4	15
18 – 22	2	20
23 – 27	5	25
28 – 32	3	30
33 – 37	2	35
38 – 42	1	40

Total: 17

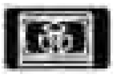
149

(161)

DIBUJOS PARLANTES

Pictograma y gráfica de barras
Construcción de pictogramas y gráfica de barras

Los datos de una investigación pueden mostrarse de varias formas, algunas de ellas muy atractivas, como el pictograma y la gráfica de barras.



Observa el video donde verás que hay gráficas que puedes elaborar e interpretar fácilmente.

Lee, como lo indique el profesor(a), el siguiente texto:

PICTOGRAMA Y GRÁFICA DE BARRAS

Cuando se realiza una investigación, los datos se deben organizar y mostrar por medio de una gráfica con la cual las personas puedan interpretar de manera fácil los datos que en ella se exhiben. Unas de las gráficas más sencillas son el pictograma y la gráfica de barras.

Pictograma

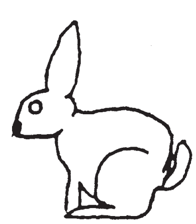
Un grupo de cunicultores reportan mensualmente el incremento en su población de cría en los meses y cantidades siguientes:

Enero	350 conejos
Febrero	700 conejos
Marzo	1 050 conejos
Abril	1 250 conejos

Esta información puede mostrarse por medio de la gráfica que se llama **Pictograma**.

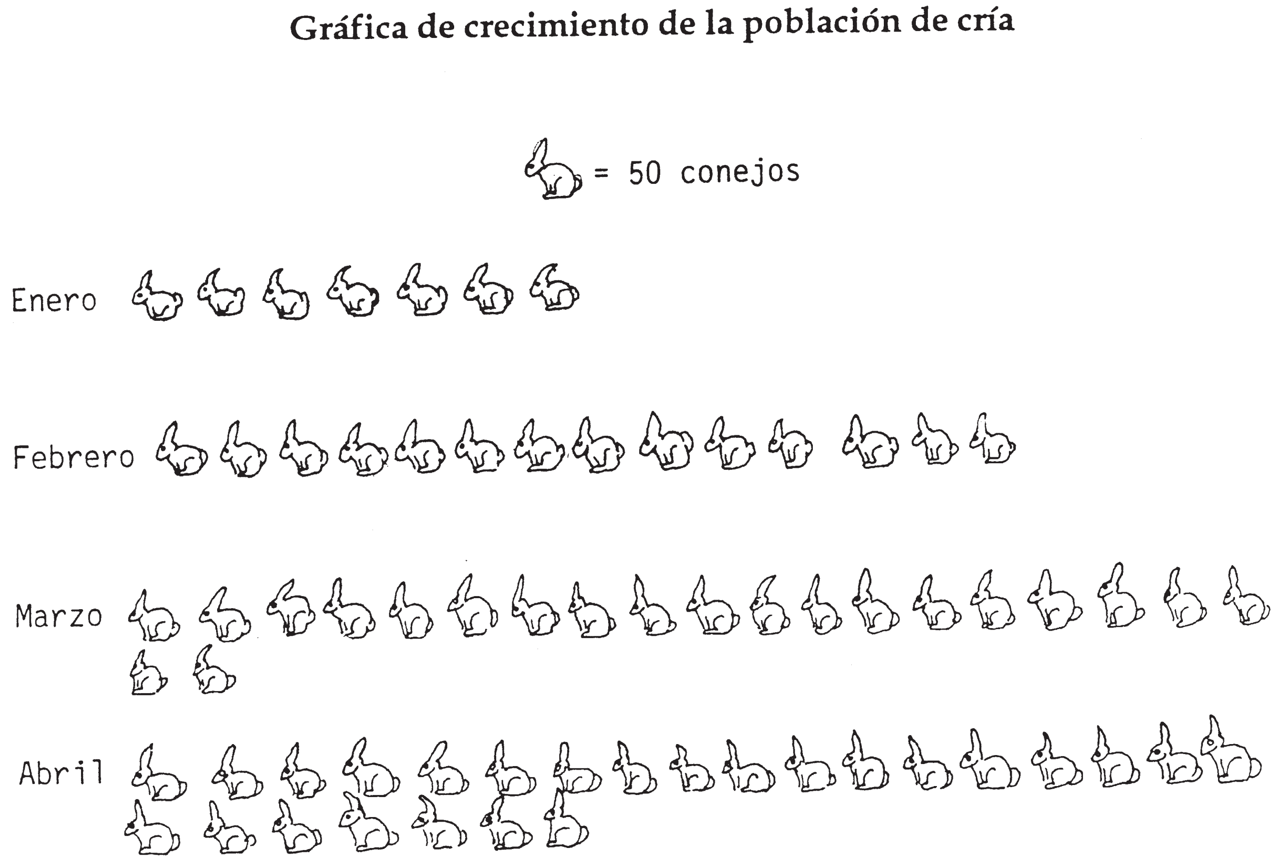
En el pictograma se indican las frecuencias por medio de filas horizontales o verticales con **figuras esquemáticas**, esto es, dibujos representativos a los cuales se les asigna un valor previamente acordado.

En virtud de la cantidad de población manejada por los cunicultores, se puede establecer que cada dibujo representa 50 unidades y como dibujo se utilizará el siguiente.



= 50 conejos

Una vez establecida la unidad se realiza la gráfica.



Esta gráfica es muy fácil de elaborar e interpretar, por lo que se emplea cuando las personas a quienes se dirige no tienen conocimiento de estadística.

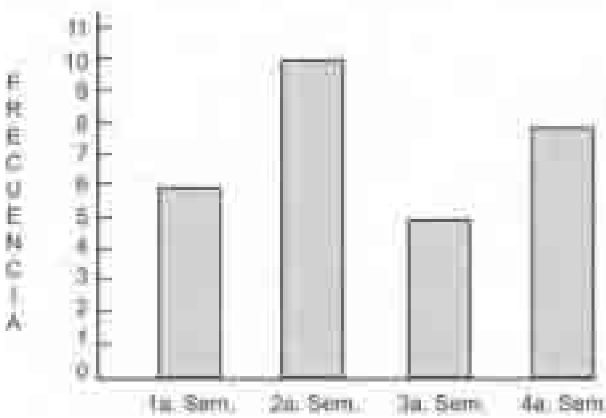
Gráfica de Barras

Una escuela de Telesecundaria informa semanalmente sobre la cantidad de alumnos impuntuales. En el mes de mayo se indican los siguientes datos:

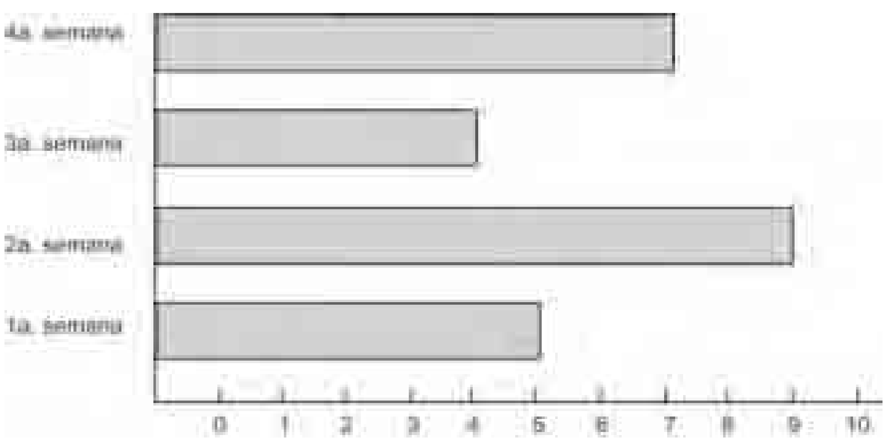
1ª semana: 6 alumnos
2ª semana: 10 alumnos
3ª semana: 5 alumnos
4ª semana: 8 alumnos

Estos datos se pueden representar mediante una **gráfica de barras**, la cual es un medio adecuado para graficar frecuencias de datos cualitativos, es decir de datos no numéricos. Para esta gráfica se utilizan dos ejes: uno horizontal, que indica los datos cualitativos (en este caso las semanas), y otro vertical, en donde se muestran las frecuencias de cada dato. Las barras se trazan en forma vertical u horizontal.

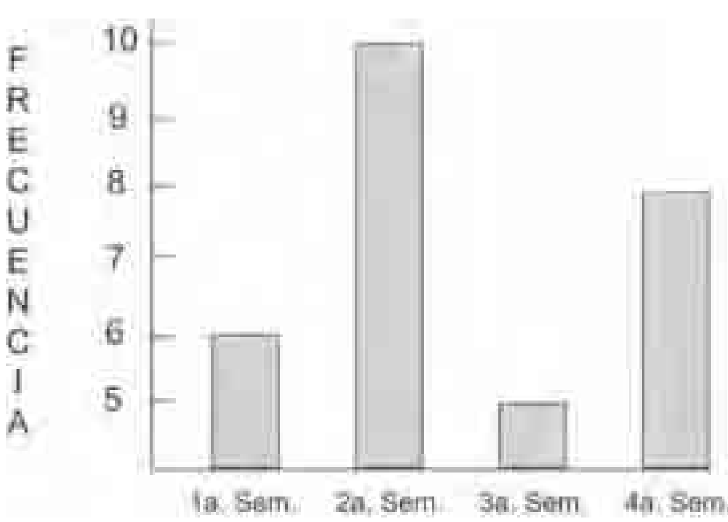
Gráfica de los alumnos impuntuales durante el mes de mayo.



También es posible hacer la gráfica en forma horizontal: en el eje vertical se anotan los datos cualitativos y en el horizontal las frecuencias.



Cuando se elabora una gráfica de barras y todos los datos rebasan cierta frecuencia, es posible iniciar el eje de frecuencia con un número menor y próximo a él y no en el cero como en las gráficas anteriores. Siguiendo el ejercicio anterior se tendría:



En estas gráficas, llamadas **truncas**, debe tenerse cuidado en su interpretación, pues si no se observa el eje de frecuencia, se podría creer que la primera semana llegaron impuntuales el doble de alumnos que la tercera, situación que no es cierta.

El pictograma y la gráfica de barras sirven cuando los datos por graficar son cualitativos y su elaboración e interpretación es muy fácil.

Reúnete con un compañero(a) y contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas.

1. ¿Qué tipo de datos se grafican en el pictograma y la gráfica de barras?
2. ¿Qué es el pictograma?
3. ¿Cómo se indican las frecuencias en un pictograma?
4. ¿Qué es la gráfica de barras?
5. ¿Qué es una gráfica truncada?

Lee ante el grupo tus respuestas. Discútelas y corrige si es necesario.

Con un compañero(a), realiza en tu cuaderno las gráficas de los ejercicios siguientes.

1. En una semana se registraron las siguientes ventas en la cooperativa: lunes $350 000, martes $ 400 000, miércoles $ 250 000, jueves $ 300 000 y viernes $200 000. Realiza el pictograma correspondiente. Observa el símbolo propuesto.

2. En una comunidad se realizó una investigación para observar las preferencias que los habitantes tienen por las diferentes mascotas, y se encontraron los siguientes resultados:

   Perros: 15 personas
   Gatos: 22 personas
   Pájaros: 13 personas
   Peces: 8 personas

   Realiza en tu cuaderno una gráfica de barras con los datos anteriores.

   Compara tus gráficas con las de tus compañeros(as). Si hay errores, corrígelos.

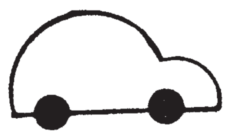
Realiza individualmente los siguientes ejercicios:

En época de vacaciones una terminal de autobuses anuncia el número de salidas que tiene durante una semana a los centros turísticos de la región.

Martes	20 salidas
Miércoles	15 salidas

Jueves	20 salidas
Viernes	25 salidas
Sábado	35 salidas
Domingo	30 salidas

1. Elabora con los datos anteriores un pictograma en tu cuaderno. Observa el símbolo que se va a utilizar.



= 5 salidas

2. Elabora con los mismos datos un diagrama de barras en tu cuaderno. Recuerda que lo puedes hacer en forma vertical u horizontal.

3. Observa la gráfica y contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es el día en que hay más salidas?

   b) ¿Qué día hay menos salidas?

   c) ¿Qué días hay igual número de salidas?

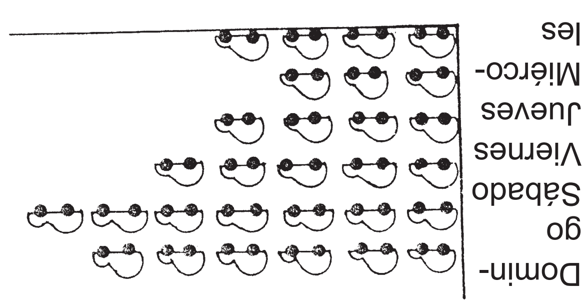
   d) ¿Cuál de las gráficas te parece más difícil de interpretar?

   e) ¿Cuál gráfica te agrada más para hacer. ¿Por qué?

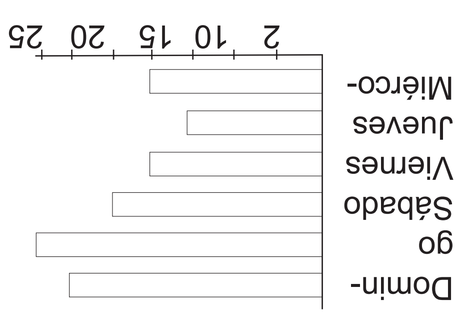
Revisa tus respuestas nuevamente. Verifica con la clave si son correctas y corrige si es necesario.

CLAVE

1)



2)



150 RECONSTRUYE LOS HECHOS

(162)

RECONSTRUYE LOS HECHOS

Interpretación de gráficas
Información obtenida de gráficas

El trabajo de un detective consiste en investigar datos, interpretarlos y así reproducir algún suceso. En esta sesión tu misión será esa, pues a partir de una gráfica deberás reconstruir los hechos.

Observa el video, en donde se mostrarán algunos de los datos que puedes obtener con solo mirar una gráfica. Después, discute las características de cada una de ellas.

Con un compañero(a), observa las gráficas y completa oralmente los ejercicios correspondientes.

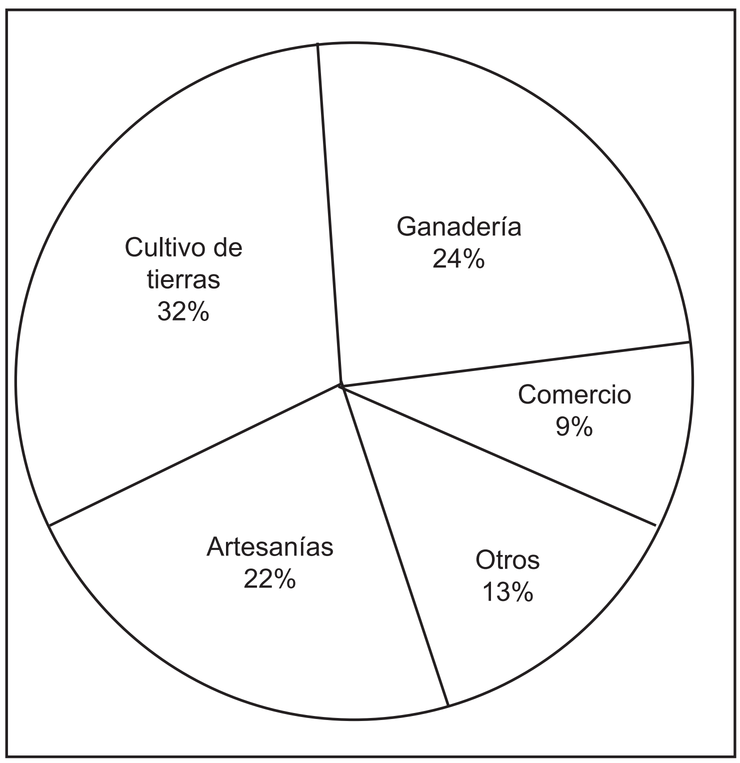
En la gráfica se puede observar que:

a) La mayor parte de las personas se dedican a...

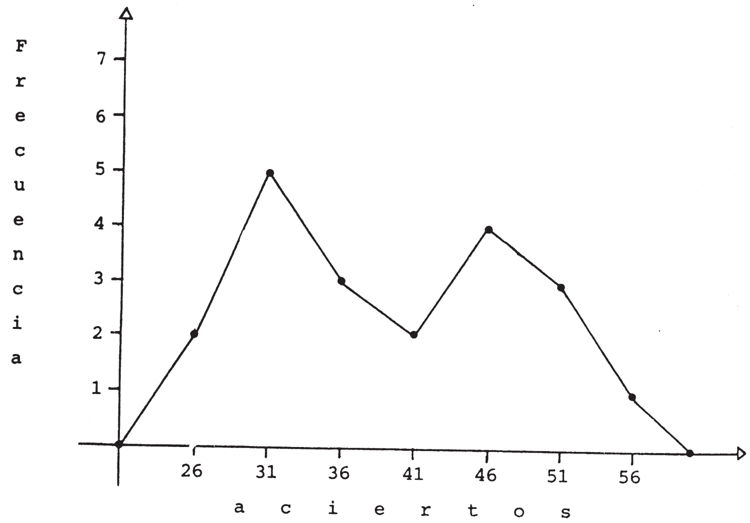
b) La ocupación en la que participan menos personas es...

c) Se puede observar que la comunidad es eminentemente productora de materias primas, ya que la mayoría de su población se dedica a...

d) Además de éstas otra actividad importante en el lugar es...



En la siguiente gráfica se muestra el número de aciertos que obtuvieron los alumnos de un grupo en un examen de 60 preguntas.



En grupo y oralmente, completen las frases propuestas.

Esta gráfica muestra que:

1. El número de aciertos que obtuvieron en el grupo osciló entre...

2. Sólo... alumnos obtuvieron en promedio 26 aciertos.

3. Y de 56 aciertos en promedio, hubo... alumnos.

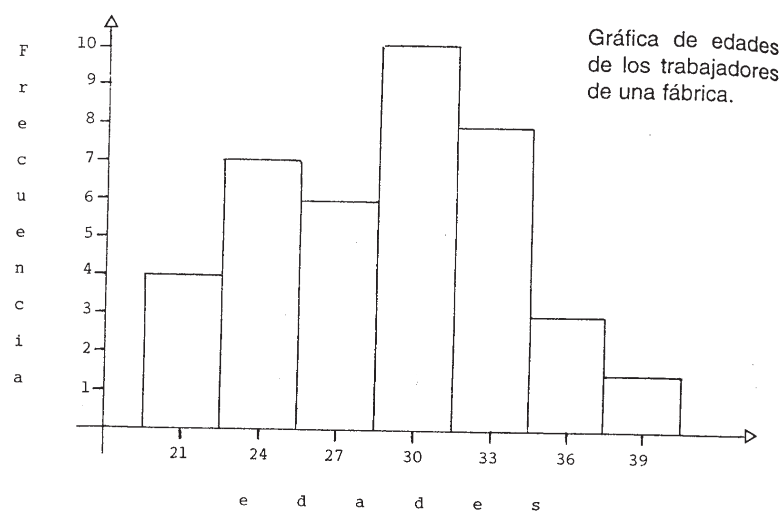
4. Si para aprobar, los alumnos debieron tener 36 aciertos o más, ... alumnos aprobaron.

5. Y... alumnos reprobaron.

Si no llegan a acuerdos, consulta con tu profesor(a).

Realiza individualmente.

Haz en tu cuaderno el diagrama y contesta las preguntas.



De esta gráfica se pueden concluir que:

a) Las edades de los trabajadores oscilan entre los ... y .... años.

b) La edad más frecuente en los trabajadores es en promedio de ... años

c) Tienen menos de 30 años en promedio ... trabajadores y 30 años o menos.

Verifica tus respuestas consultando la clave, y si tuviste errores, corrígelos.

CLAVE

a) 19.5 y 40.5 años; b) 30 años; c) 17,23.

151 (163) LECTURA DE DIBUJOS

Tablas y gráficas comparativas
Construcción de tablas y gráficas comparativas

Frecuentemente es necesario comparar datos obtenidos durante dos o más períodos de tiempo, para darnos cuenta de la variación de diversos fenómenos de carácter social.

Observa el video a fin de que puedas apreciar y valorar la información comparativa de manera clara y sencilla.

Comenta el contenido del programa en forma breve con tu grupo.

Realiza una lectura comentada del texto:

TABLAS Y GRÁFICAS COMPARATIVAS

Es muy común que se tengan que realizar comparaciones de las investigaciones realizadas, así como de la presentación de los datos, ya sea en forma tabular o gráfica, para tomar decisiones o para formular planes a corto y largo plazo.

Para concretar esta idea, considérese el siguiente caso:

Un director de núcleo realizó una investigación acerca de la cartilla de vacunación en dos escuelas de la misma localidad y realizó una tabla comparativa, en la que registró los datos de los alumnos que carecen de alguna de las vacunas.

Resulta, además, que en ese lugar no existe un centro de salud, y las vacunas solamente se aplican cuando una brigada médica recorre diversas poblaciones de la región.

Vacunas no aplicadas	Alumnos de la escuela A (Frecuencia)	Alumnos de la escuela B (Frecuencia)
Tuberculosis	15	6
Poliomielitis	4	4
Difteria, tos ferina y tétano	7	2
Antisarampión	3	5
Totales	28	18

Por medio de la tabla anterior se pueden determinar algunos aspectos, como los siguientes:

a) El mayor número de alumnos que no ha sido vacunado contra la tuberculosis se encuentra en la escuela A.

b) El menor número de alumnos que no ha sido vacunado contra la difteria, tos ferina y tétanos se encuentra en la escuela B.

c) Existe igual número de alumnos que no han sido vacunados en la escuela A y B en lo que respecta a las vacunas de la poliomielitis.

La representación gráfica de los datos de la investigación es la que aparece en la página siguiente:

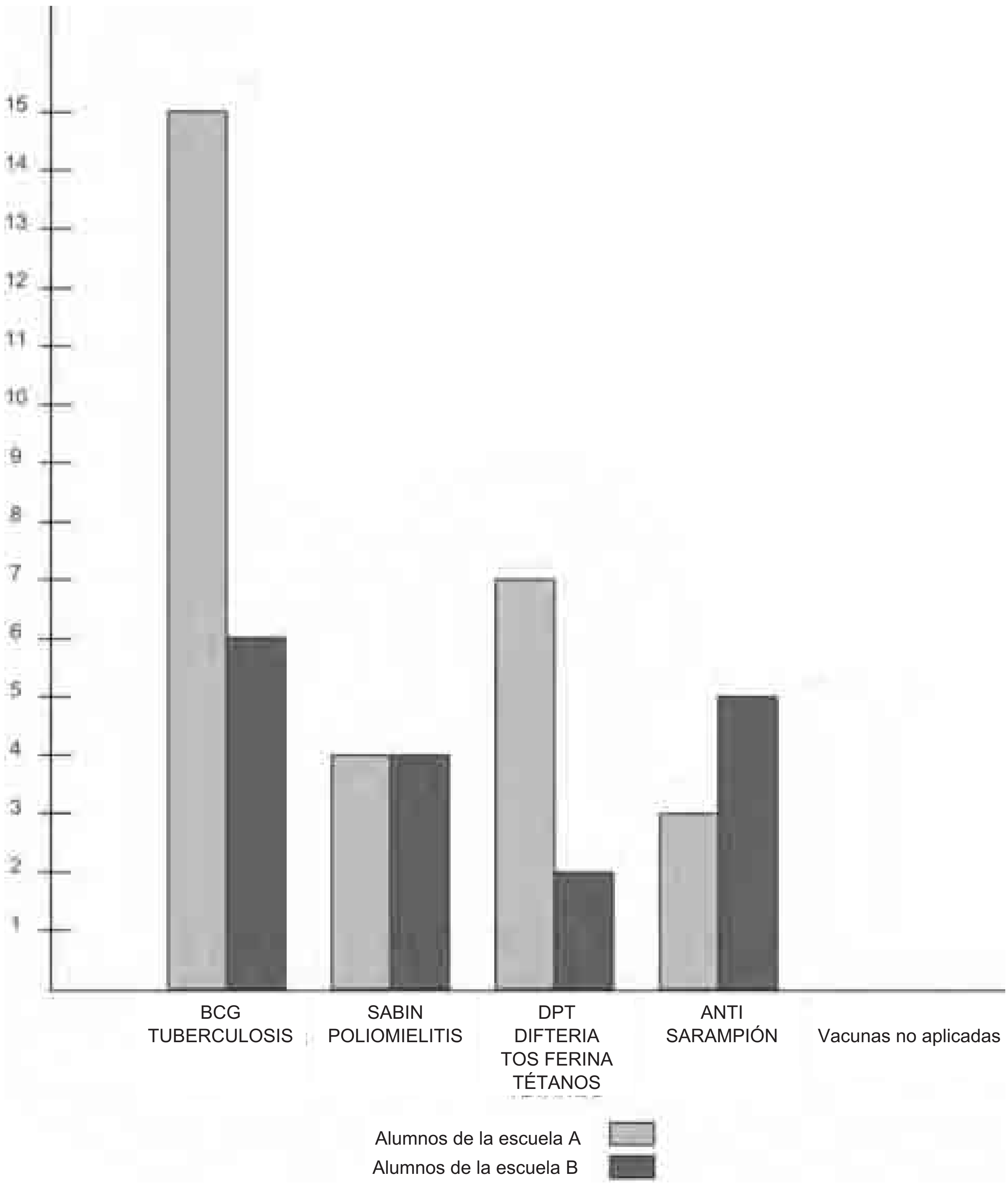
Esta información comparativa servirá de base para solicitar una campaña de vacunación y lograr que los alumnos que carecen de alguna vacuna sean inmunizados.

Así como en este ejemplo se puede llegar a tomar una decisión con base en las tablas y gráficas elaboradas, existen casos en los cuales es necesario llevar un control en cuanto a compras y/o ventas.

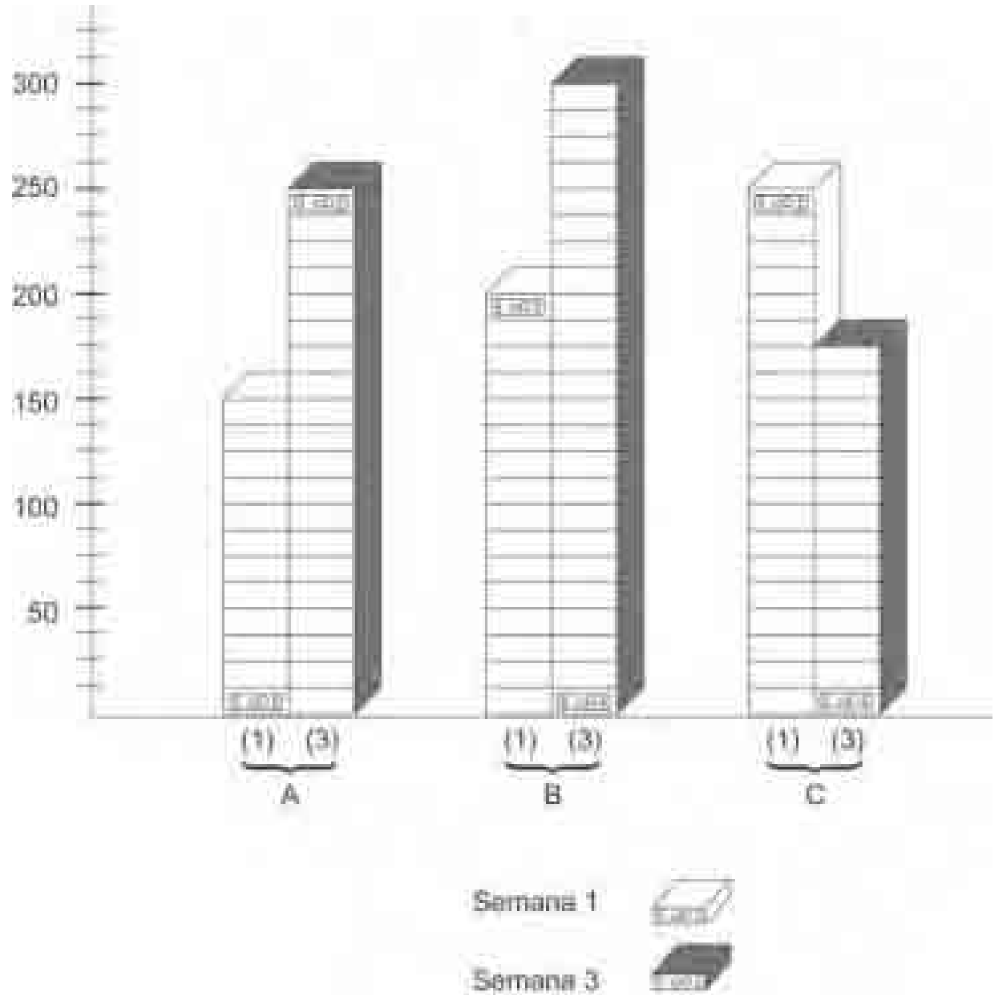
Véase la siguiente tabla:

El ranchito " Quiquiriquí" vende huevos por caja y se necesita saber en qué semana, 1ª o 3ª del mes, se venden más cajas y cuál es el mejor cliente que se tiene. Para este efecto se ha elaborado la tabla comparativa de dos semanas 1ª, 3ª .

Clientes	Semana	
	1ª	3ª.
A	150	250
B	200	300
C	250	175



Una vez realizada la tabla, se procede a representar los datos en una gráfica con el siguiente pictograma.



Como puede observarse, estas tablas y gráficas se hacen con la finalidad de conocer el volumen de ventas y así poder aumentarlas.

Es muy importante tener reunidos los datos antes de preparar la presentación en forma tabular y gráfica para estar en condiciones de realizar su análisis e interpretación. Por ejemplo, los clientes *A* y *B* compran más cajas de huevos en la tercera semana del mes que en la primera.

La ventaja de comparar tablas y gráficas radica en que se pueden tomar decisiones que sirvan para el desarrollo de medidas preventivas o correctivas en múltiples situaciones de importancia económica, política o social.

Otra ventaja de presentar datos comparativos por medio de tablas y gráficas radica en que permite al lector apreciar y valorar la información de una manera clara y sencilla.

¿Cómo les pareció esta otra forma de presentar la información? ¿En qué se diferencia de las anteriores?

Continúa trabajando con tu compañero(a) y contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

1. ¿Consideras importante realizar investigaciones para posteriormente presentar los datos en forma tabular y gráfica? ¿Por qué?

2. ¿El realizar comparaciones de la información obtenida en una investigación te permite tomar decisiones? ¿Cómo lo ejemplificarías?

Comenta tus respuestas con algún compañero(a) de otro equipo y enriquece tus respuestas.

Con tu mismo compañero(a) de equipo, elabora una tabla comparativa de la información que se presenta.

1. En una encuesta realizada por un alumno, acerca de la actividad productiva desarrollada por hombres y mujeres de la comunidad, se obtuvieron los siguientes datos.

   PH = profesionales hombres — PM = profesionales mujeres

   CH = comerciantes hombres — CM = comerciantes mujeres

   AH = artesanos hombres — AM = artesanos mujeres

   OH = obreros hombres — OM = obreros mujeres

   LH = líderes hombres — LM = líderes mujeres

   A continuación se dan los datos no ordenados de la investigación realizada, ordénala y clasifícala; posteriormente elabora en tu cuaderno una tabla comparativa de la actividad productiva de hombres y mujeres de la entidad:

CH	CM	AM	CH	OH	PM	AM	OH	OH	CH
OH	OH	PH	OH	AM	CH	LH	CM	AM	CM
AH	LH	LM	LM	AH	LM	LM	AH	LM	AH
LH	AH	OM	CH	LM	CM	PH	OM	CH	LM
OM	CM	LH	OM	CM	LM	CM	LM	CM	OM
LM	OM	LH	OM	PH	LH	LH	OM	LH	CH
PM	LH	LH	CM						

2. ¿Qué puedes concluir de la tabla anterior?

3. Menciona algún(os) aspecto(s) que se te haya(n) dificultado en la elaboración de la tabla comparativa.

Compara tus tablas con las de otro equipo de trabajo y corrige tus errores.

Realiza individualmente las siguientes actividades:

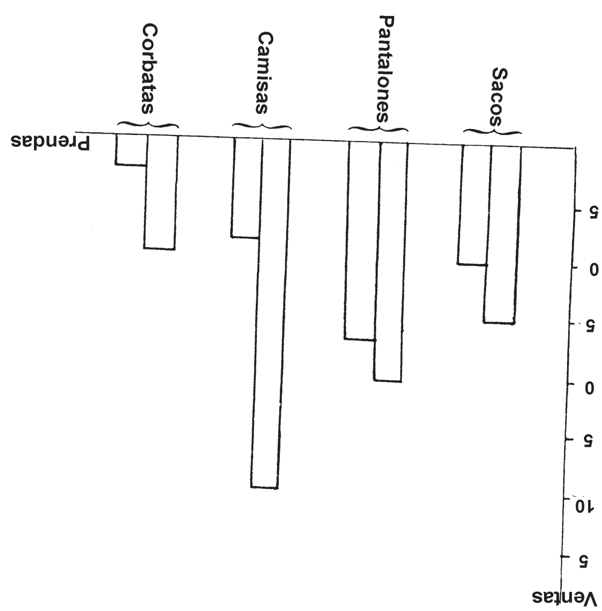
Elabora en tu cuaderno una gráfica comparativa de las ventas de prendas realizadas en los meses de agosto y septiembre, por una tienda de ropa para caballero.

Tabla comparativa de las ventas de ropa en los meses de agosto y septiembre		
Ropa para caballero	**Agosto**	**Septiembre**
Sacos	15	10
Pantalones	20	17
Camisas	30	8
Corbatas	9	2
Totales	74 prendas	37 prendas

Escribe en tu cuaderno tus conclusiones derivadas del análisis de la gráfica.

Compara tu gráfica con la de la clave de este apartado, que se encuentra a continuación.

CLAVE



152 COMPRENDER, ANTES QUE RECORDAR, ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

(169) Repaso parcial de lo desarrollado
Integración de lo aprendido

Dicen que las matemáticas son como los novios: si no se ven, se olvidan, y que sólo se ama lo que se conoce. Pues bien, en esta sesión revisarás los temas tratados para no olvidarlos y llegar a amar las matemáticas.

Observa el video; te ayudará a recordar algunos temas de estadística estudiados en este curso.

Anota el nombre del tema en donde tengas duda y al finalizar el programa consulta a tu profesor(a).

En grupo y oralmente, resuelve las siguientes cuestiones.

1. Completa cada enunciado con uno de los términos que a continuación se dan: a) muestreo, b) frecuencia relativa, c) muestra, d) frecuencia absoluta, e) porcentaje.

   A. En una población, la parte representativa elegida al azar se llama....

   B. Hacer un estudio por .... de una población es más práctico, pues se facilita el análisis de los resultados, y se ahorra tiempo, dinero y esfuerzo.

   C. Se denomina … de un dato al número de veces que éste se repite.

   D. La ... se obtiene al dividir la frecuencia absoluta de un dato entre el número de datos y multiplicar el cociente por 100.

2. Escribe dentro del paréntesis la letra que corresponda para relacionar los nombres de la columna izquierda con las descripciones de la derecha. Hazlo en tu cuaderno.

E. Gráfica de barras	( )	Representa datos cuantitativos; se puede obtener al unir con segmentos los puntos medios de los techos de los rectángulos del histograma.
F. Gráfica comparativa	( )	Representa datos cualitativos en forma de porcentaje en sectores de un círculo que suman 100%.

G.	Polígono de frecuencia	( )	Representa datos cualitativos en un sistema de ejes perpendiculares; a partir de uno de ellos se construyen barras del mismo ancho, cuya longitud está determinada por la frecuencia del dato.
H.	Gráfica circular	( )	Permite comparar rasgos comunes de dos o más muestras.
I.	Pictograma	( )	Representa datos cualitativos agrupados en intervalos colocados sobre el eje horizontal y sobre los cuales se construyen rectángulos cuya longitud depende de la frecuencia del intervalo.
K.	Histograma	( )	Representa datos cualitativo cuya frecuencia se indica con figuras repetitivas.

3. Con base en la siguiente tabla, elabora en tu cuaderno una gráfica comparativa.

   Cantidades de algunos alimentos que consumen los adolescentes de 13 y 15 años en una ración.

Alimento	Mujeres M	Hombre H
Carne (pollo vísceras)	125 g	150 g
Legumbres (garbanzo y lentejas, etcétera)	70 g	80 g
Frutas y verduras	300 g	300 g
Total	495 g	530 g

L. ¿Cuál es el alimento que consumen en mayor cantidad tanto hombres como mujeres?

M. ¿Qué alimento se consume en menor cantidad?

N. ¿Quiénes consumen mayor cantidad de alimento?

O. ¿Por qué consideras que los hombres de 13 a 15 años consumen más cantidad de alimento?

Compara las respuestas de tu cuestionario con las de la clave; detecta tus errores y corrígelos.

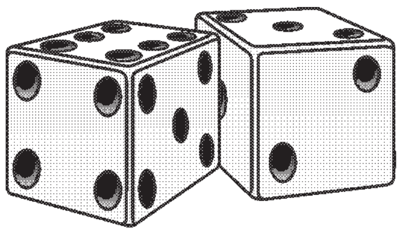
CLAVE

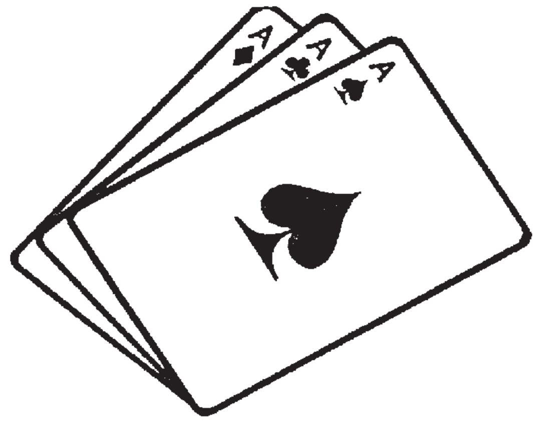
A. muestra, B. muestreo, C. frecuencia absoluta, D. frecuencia relativa, (H), (I), (F), (G), (K), (J). L. frutas y verduras, M. legumbres, N. hombres, O. Nota: tiene varias respuestas.

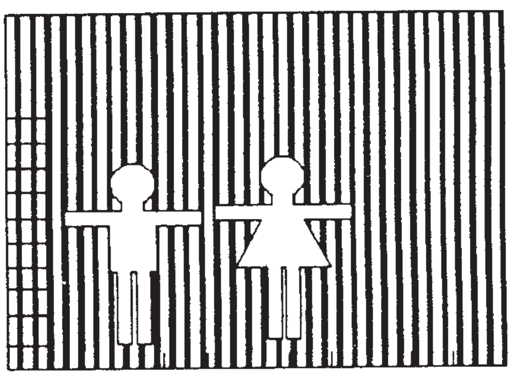
153 ¿LA ENCONTRÓ O NO?

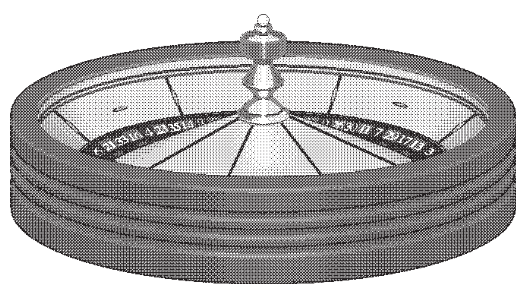
Probabilidad de un evento

(170) Determinación de la probabilidad de un evento





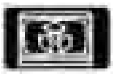




En el mundo en que vivimos existen muchas situaciones que implican incertidumbre. Estas situaciones van desde los juegos de azar hasta problemas que se presentan en otros campos de gran importancia como las ciencias físicas, ciencias sociales, la industria y los seguros, por ejemplo. La probabilidad estudia ese tipo de situaciones, es decir, estudia fenómenos puramente azarosos o aleatorios. La palabra probabilidad indica la posibilidad de que ocurra un evento o de que se obtenga cierto resultado.

En estas sesiones se tratará de examinar los posibles resultados de una experiencia aleatoria. Realizar experimentos que sean útiles para comparar los resultados esperados con los resultados reales.

¿Qué probabilidad hay de que te ganes la lotería comprando sólo un billete? ¿y qué probabilidad habrá de que ganes un premio en una rifa? ¿Qué probabilidad hay de que el día de tu cumpleaños llueva?



Observa con atención el programa televisivo, pues en él encontrarás la forma de dar respuesta a las preguntas que se te plantean.

Lee con dos compañeros(as) el texto:

PROBABILIDAD DE UN EVENTO

¿Cara o sello? Se pregunta al lanzar una moneda al aire: ¿quién conoce la respuesta correcta? Nadie, ésta sólo se sabe hasta que cae la moneda.

¿Será niño o niña? Es la pregunta típica a una mujer embarazada.

Preguntas como las anteriores y muchas más del mismo estilo forman parte del estudio de la **probabilidad.**

A cada posible resultado de lanzar la moneda al aire se le conoce como evento (ya sea que caiga cara o sello) y al conjunto de esos eventos se le conoce como **espacio de eventos** o **espacio muestral**. De igual forma, el resultado del alumbramiento sólo podrá ser niño o niña, y cada uno de estos resultados será, el evento y el conjunto de ambas posibilidades será el **espacio muestral.**

Pero no siempre un espacio muestral se compone de dos eventos como en los casos anteriores; su dimensión dependerá del tipo de experimento que se realice. Así, se tiene que al lanzar un dado, el espacio muestral estará formado por todos los posibles resultados (1, 2, 3, 4, 5, 6) y cada uno de ellos será un evento. Otro ejemplo sería el resultado de un partido de fútbol, ya que sólo se pueden dar cualquiera de los siguientes eventos: ganar, perder o empatar y; por tanto, el espacio muestral estará formado por los tres eventos.

De lo anterior se puede concluir que:

La amplitud del espacio muestral depende del número de resultados (eventos) probables que tenga un experimento.

Por otra parte, para determinar la probabilidad de que suceda un evento se puede hacer el siguiente análisis:

Para el lanzamiento de un dado se tienen los posibles resultados 1, 2, 3, 4, 5 o 6 (sólo uno a la vez), por lo que la probabilidad de que caiga cualquiera de ellos será uno entre seis: $\frac{1}{6}$; para el lanzamiento de una moneda sólo existe la probabilidad de que caiga cara o sello (una a la vez), por lo que la probabilidad de cualesquiera de los dos es uno entre dos: $\frac{1}{2}$; para el partido de fútbol, la probabilidad de cualesquiera de los resultados es uno entre tres: $\frac{1}{3}$.

De lo expuesto, se puede decir que:

> La probabilidad teórica de que suceda un evento (cuando sólo puede ocurrir uno a la vez) es igual a la unidad (el evento) entre el número de eventos que forman el espacio muestral.

Con tu equipo responde en tu cuaderno las preguntas.

a) ¿Cuántos y cuáles eventos forman el espacio muestral del resultado de sacar una ficha de una bolsa en la cual hay tres fichas rojas y dos azules?

b) ¿Cuántos y cuáles eventos forman el espacio muestral de que el primero de mayo caiga en lunes?

c) ¿Cuántos y cuáles eventos forman el espacio muestral de un sorteo de diez números?

Compara tus respuestas con las del otro compañero(a) y corrige si es necesario.

Con tus mismos compañeros(as), analiza los experimentos y da respuesta en tu cuaderno a las siguientes preguntas.

1. Se tiene una bolsa con cinco pares de medias de color negro y cinco pares de medias azules. Considérese para cada evento la bolsa con los 10 pares.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de medias negras?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de medias azules?

2. En una caja hay una bombilla fundida y una en buen estado. Considérese que después de sacar una, ésta se regresa a la caja.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bombilla en buen estado?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bombilla fundida?

3. Se hace una rifa con 15 boletos.

   a) ¿Qué probabilidad hay de ganar, si se compra un boleto?

   b) ¿Cuál será la probabilidad si se compran cinco boletos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se compran todos los boletos?

d) ¿Cuál es la probabilidad si no se compran boletos?

Compara tus respuestas con las de otro compañero(a) y comenta si tuviste errores.

Ahora, tú solo resuelve el siguiente ejercicio.

a) Si haces girar una perinola de seis opciones, ¿qué probabilidad hay de que caiga en la opción "todos ponen"?

b) En el dominó hay 28 fichas y siete de ellas tienen el mismo número en ambos extremos. Si se escoge una ficha, ¿qué probabilidad hay de que sea la que tiene en ambos extremos cuatro puntos?

c) ¿Qué probabilidad hay de que en un juego de dominó se tenga la que tiene seis en los extremos?

d) ¿Qué probabilidad hay de que se abra en la página 15 un libro de 100 páginas?

e) ¿Qué probabilidad hay de que en un juego de geometría como el tangram (7 piezas), una pieza salga rota?

f) ¿Cómo se llama al resultado de un experimento en probabilidad?

g) ¿Cómo se le llama al conjunto de posibles resultados de un experimento?

h) ¿Cómo se obtiene la probabilidad de un evento?

Al terminar, compara tus respuestas con la clave y, si tienes dudas, consulta a tu profesor(a).

CLAVE

a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{28}$; c) $\frac{6}{28}$; d) $\frac{1}{100}$; e) $\frac{1}{5}$; f) Evento, g) Espacio muestral, h) Diviviendo el evento entre el número de posibles resultados.

154

VAMOS A LA FIJA

(171)

Probabilidad clásica

Conocimiento de la probabilidad clásica

Si lanzas una moneda al aire, el resultado que se espera es cara o sello esto es, se espera que se tenga una de las dos posibilidades; el estudio de los fenómenos puramente azarosos se llama probabilidad.

Observa el video, ya que en él se presentará información que te permitirá complementar el tema, luego comenta con tus compañeros(as) aquellos aspectos que consideres más importantes.

Lee con otro compañero(a) el texto.

PROBABILIDAD CLÁSICA

En el siglo XVII (1600-1699), el llamado " filósofo jugador", Chevalier de Meré escribió al matemático Blas Pascal solicitando algunos informes sobre el juego de dados. A su vez, Pascal escribió al matemático Pierre de Fermat. En la correspondencia que así se estableció tuvo sus inicios la teoría de la probabilidad.

Aunque las primeras ideas referidas a la teoría de la probabilidad surgieron en relación con los juegos de azar, tales como los dados, las cartas, la lotería, etc., éstas dieron lugar a la creación de un campo temático esencial dentro de las matemáticas, que se conoce como **probabilidad**; actualmente contribuye de manera importantísima a facilitar los estudios de las ciencias naturales y sociales, así como a la solución de muchos problemas prácticos en los negocios, la industria, el gobierno, etcétera.

Además de Pascal, otros distinguidos científicos como Bernoulli y Laplace dieron gran impulso al estudio de la probabilidad.

Pierre Simón de Laplace fue quien formuló la definición clásica de la probabilidad, proveniente de los juegos de azar, que se emplea cuando los espacios muestrales son finitos y tienen resultados igualmente probables.

Esta definición se basa en las siguientes condiciones:

a) El espacio muestral de todos los resultados es finito, esto es, los resultados se pueden contar.

b) Los eventos posibles o favorables son equiprobables, es decir, tienen la misma probabilidad de suceder.

La probabilidad *P* (*A*) de cualquier evento está dada por:

$$P\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)}$$

En donde:

P (A) = Probabilidad del evento *A*

n (A) = Resultados favorables del evento

n (S) = Número total de resultados posibles

Ejemplos:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar al aire un dado se obtenga un número par?

   Si S: 1, 2, 3, 4, 5, 6, entonces *n (S)* = 6

   Si A: 2, 4, 6, entonces *n (A)* = 3

   Por lo tanto:

$$P\,A = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

   De aquí se observa que la probabilidad de que salga un número par es 0.5; ahora, la probabilidad de que no salga un número par, esto es, de que salga un número impar, es 0.5.

2. Si se saca al azar una ficha de un dominó, ¿cuál es la probabilidad de que sea una ficha con número repetido?, ¿cuál es la probabilidad de que no lo sea?

   Si de las 28 fichas, 7 tienen número repetido, entonces:

   S: 28 fichas, o sea *n (S)* = 28

   A: 7 número repetido, o sea *n (A)* = 7

   por lo tanto:

$$P\,A = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0.25$$

La probabilidad de que la ficha no tenga el número repetido, se determina de la siguiente manera:

S: 28 fichas, o sea *n (S)* = 28

A: 21 fichas esto es: *n (A)* = 21

Por lo tanto:

$$P\,A = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} = 0.75$$

De los ejemplos mostrados, se aprecia que las probabilidades siempre son mayores que cero y menores que uno.

Obsérvese que si se suman las probabilidades de que salga una ficha con número repetido y de que no salga una de ellas, el resultado es la unidad, esto es:

$$0.25 + 0.75 = 1$$

De lo anterior se concluye que la probabilidad de que suceda un evento puede ser mayor o igual que cero y menor o igual que uno; asimismo, la suma de las probabilidades de eventos posibles siempre es igual a la unidad.

3. ¿Cuál es la probabilidad de que en una familia con tres hijos dos sean hombres y una sea mujer? Es lógico pensar que pueden nacer tres hombres o tres mujeres en forma consecutiva. También podrían nacer dos hombres y luego una mujer, etcétera.

   A continuación se consideran todos los casos posibles.

   S: HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM *n (S)* = 8

   A: HHM, HMH, MHH *n(A)* = 3

   Por lo tanto:

$$P\,(A) = \frac{n\,(A)}{n\,(S)} = \frac{3}{8} = 0.375$$

De lo visto en esta sesión, se tiene que:

La probabilidad clásica es el estudio de fenómenos puramente azarosos y la suma de las probabilidades favorables y desfavorables de un evento siempre es igual a la unidad.

Haz los comentarios que te haya suscitado esta lectura.

Organicen un debate en torno a las siguientes preguntas:

1. ¿A partir de qué surgió la teoría de la probabilidad.
2. ¿Cómo debe ser el espacio muestral para determinar la probabilidad en un evento?
3. ¿Qué entiendes por un resultado equiprobable?
4. ¿Qué entiendes por espacio muestral?
5. ¿Qué entiendes por evento posible o favorable?
6. ¿Qué entiendes por probabilidad de un evento?

Cuando no sea posible lograr acuerdos busquen la asesoría del profesor(a).

Con dos compañeros(as) determina lo que se pide en cada caso. Trabaja en tu cuaderno.

1. Si a una fiesta acuden 56 hombres y 83 mujeres, ¿cuál es el espacio muestral?
2. Escribe el espacio muestral cuando se lanzan dos dados.
3. Si de un cine salen de la primera función 40 personas y permanecen dentro del cine 110, ¿cuál es el espacio muestral?
4. En un juego de dominó se extrae una ficha; ¿cuáles son los resultados posibles de que la suma de los puntos sea 5?

Compara tus resultados con los de otros grupos; en caso de existir errores, revisa tus procedimientos.

En forma individual, resuelve los siguientes ejercicios. Trabaja en tu cuaderno.

1. Determina la probabilidad de sacar una ficha de un dominó de manera que la suma de sus puntos sea 6.
2. Si una bolsa contiene 3 canicas blancas, 4 negras y 6 amarillas, determina en tu cuaderno la probabilidad que existe de:
   a) Sacar una canica que no sea amarilla ni negra.
   b) Sacar una canica que sea negra.
   c) Sacar una canica que sea amarilla.
   d) Al sumar las probabilidades ¿qué resultado se obtiene?

3. Una señora va a dar a luz trillizos en una clínica. Determina la probabilidad de que sean:

   a) un hombre y dos mujeres.

   b) tres niñas.

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as); en caso de que sean diferentes consulta la clave.

CLAVE

1. S: 28 fichas; 2. S: 3 + 4 + 6 = 13 canicas; A: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (0, 6); a) A: 3 blancas;

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{4}{28} = 0.143$; $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{13} = 0.230$; b) A: 4 negras; $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{6}{13} = 0.461$;

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{4}{13} = 0.308$; d) 9.230 + 0.308 + 0.641 = 0.999; c) A: 6 millas;

3. S: HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, MHM, MMH, MMM; a) A: HMM; MHM; MMH;

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{8} = 0.375$; $A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{8} = 0.125$; b) A: MMM.

155 EL ÁRBOL INFORMATIVO

(172)

Diagrama de árbol

Uso del diagrama de árbol

Quien a buen árbol se arrima... con buena información culmina.

¿Qué tan probable será la información anterior?

Observa el video y comenta brevemente con tus compañeros(as) la relación que existe entre el nombre del diagrama de árbol y su forma.

Lee con un compañero(a) el siguiente texto:

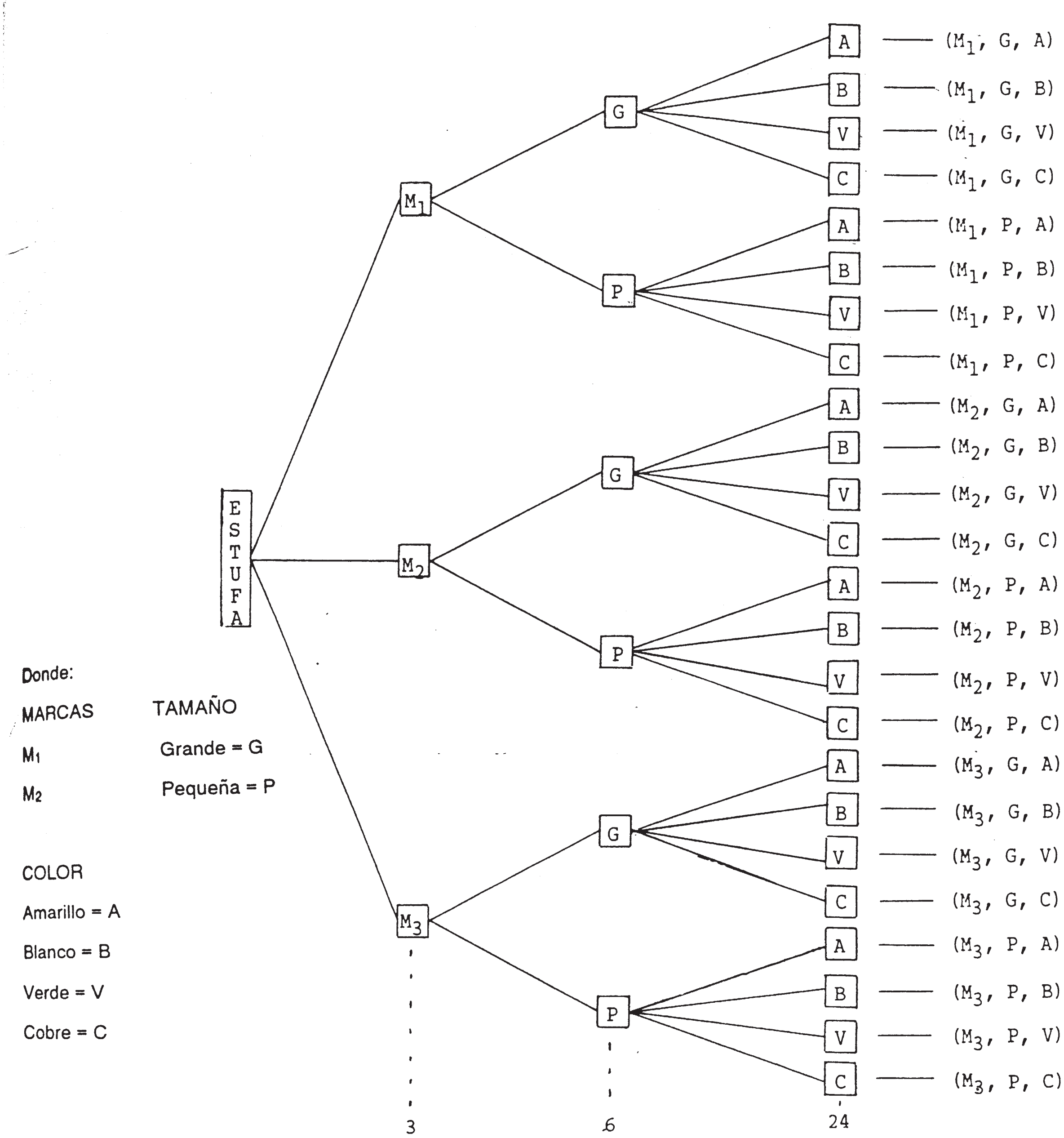
DIAGRAMA DE ÁRBOL

Existen diagramas como el de árbol y el cartesiano, que se utilizan para describir gráficamente el espacio muestral de un fenómeno aleatorio.

Véase la siguiente situación:

Una tienda de aparatos domésticos ofrece al cliente tres marcas de estufas, cada marca con dos tamaños y en cuatro colores diferentes. ¿Cuántas estufas diferentes existen para escoger, según la marca, tamaño y color?

Obsérvese en el diagrama de árbol la representación de esta situación:



En el diagrama se observa que al final hay 24 ramificaciones; esto significa que existen 24 estufas diferentes que el cliente puede escoger, por ejemplo, una estufa de la marca 1, grande y amarilla (M_1 G, A) o una estufa de la marca 2, pequeña y cobre (M_2 P, C).

Analizado el diagrama, se tiene que:

1. El seleccionar sólo la marca representa un fenómeno aleatorio simple, cuyos posibles resultados son 3.

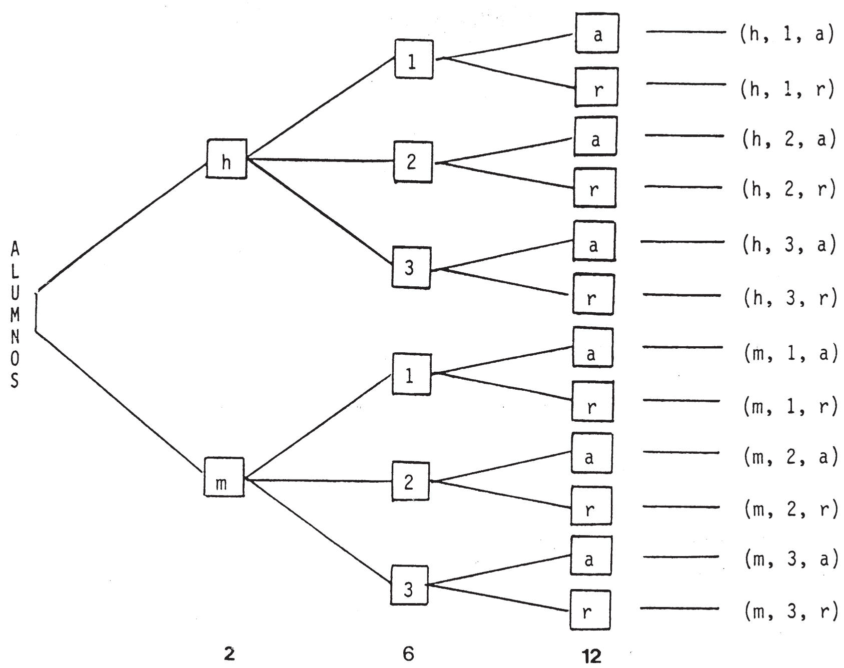
2. El seleccionar marca y tamaño representa un fenómeno compuesto, y la relación que existe entre el número de marcas (3) y el de tamaños (2), con el número de posibles resultados (6) es su producto $3 \times 2 = 6$.

3. El seleccionar marca, tamaño y color representa también un fenómeno aleatorio compuesto, en donde la relación que existe entre el número de cada variante, marca (3), tamaño (2) y color (4) con el número de posibles resultados (24) es su producto $3 \times 2 \times 4 = 24$.

El diagrama de árbol es un medio básico de conteo para determinar espacios muestrales y para contar todos los posibles resultados una sola vez.

Véase el siguiente ejemplo:

El maestro(a) de matemáticas clasifica a sus alumnos como hombres (h), mujeres (m), estudiantes de primero (1), estudiantes de segundo (2), estudiantes de tercero (3), aprobados (a), reprobados (r); ¿cuál es el número de clasificaciones posibles y cuáles son?



Se hacen doce clasificaciones y son: (h, 1, a), (h, 1, r)... (M, 3, r).

En este caso, las variantes son sexo, grado y resultado de examen. La situación ha sido representada con un diagrama de árbol.

Con un compañero(a), contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas.

¿Qué es un diagrama de árbol? ¿Por qué se le denomina diagrama de árbol?

Al analizar el diagrama de árbol que representa un fenómeno aleatorio compuesto por dos o más variantes, ¿qué relación se establece entre el número de las variantes y el total de posibles resultados?

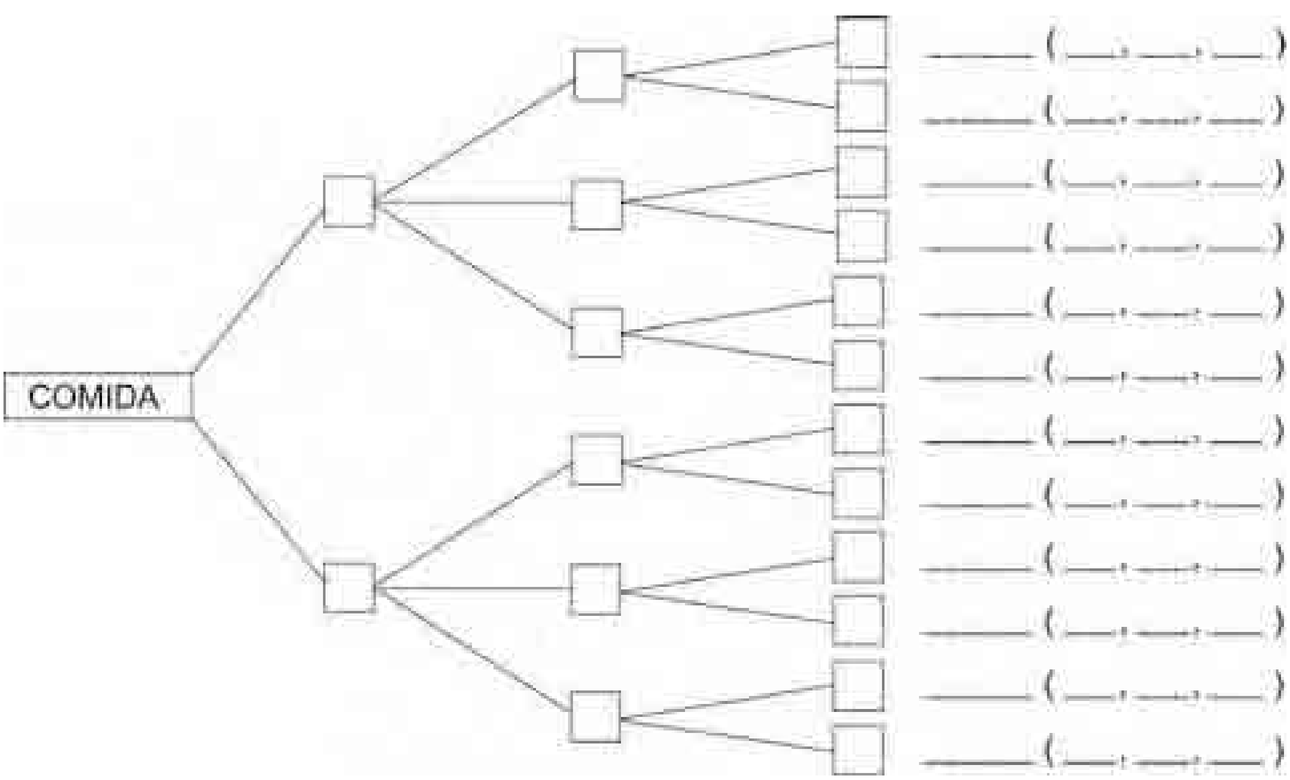
Compara tus resultados con los de otros equipos y corrige en caso de error.

Continúa trabajando con tu compañero(a) y elabora en tu cuaderno el diagrama de árbol que represente la siguiente situación.

El menú del día en un restaurante es el siguiente:

Consomé o sopa de pasta Bistec o hígado o ternera Fruta o gelatina.

¿Cuántas comidas diferentes se pueden formar con este menú y cuáles son? (Utiliza sólo las iniciales del menú para abreviar tiempo y espacio).



¿Cuántas variantes se presentan en este menú?

Calcula cuántas selecciones se pueden hacer en cada una de las variantes.

Compara tu ejercicio con el de otro equipo y en caso de error corrige.

En forma individual, elabora el diagrama de árbol que representa la siguiente situación:

Para el fin de semana, una persona programa sólo tres actividades de diferente tipo y tiene que seleccionarlas del siguiente cuadro.

Estudio	Deporte	Artística
Español	Fútbol	Baile
Inglés	Voleibol	Pintura
	Natación	Modelado

Elabora un diagrama de árbol en tu cuaderno, como el del ejemplo anterior con todos los posibles programas de actividades. (Utiliza sólo las iniciales de cada actividad).

E = Español	F = Fútbol	B = Baile
I = Inglés	V= Voleibol	P = Pintura
	N = Natación	M = Modelado

a) ¿Cuáles son las variantes que se marcaron para hacer la programación?

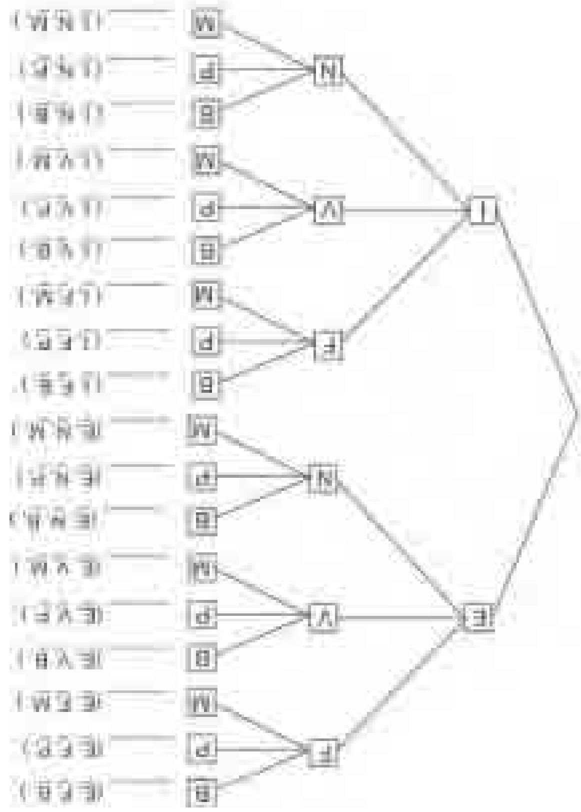
b) ¿Cuántas actividades tiene cada variante?

c) ¿Qué relación tiene el número de variantes con el total de programas?

d) Tú, ¿qué programa de actividades escogerías y por qué?

Compara tus respuestas con la clave y corrige errores.

CLAVE



a) Estudio, deporte, artísticas; b) 2, 3, 3; c) El producto del número de las variantes es igual al total de programas.

156	**LOS PUNTOS QUE HABLAN**
(173)	**Diagrama cartesiano** **Elaboración del diagrama cartesiano**

¿Sabes qué es un diagrama? Es una representación gráfica de algo. En esta sesión conocerás el diagrama de todos los posibles resultados que tiene un fenómeno aleatorio.

Forma una pareja con otro compañero(a) de grupo y observa el video. Comenta con tu compañero(a) sobre la utilidad de los diagramas.

Lee en pareja.

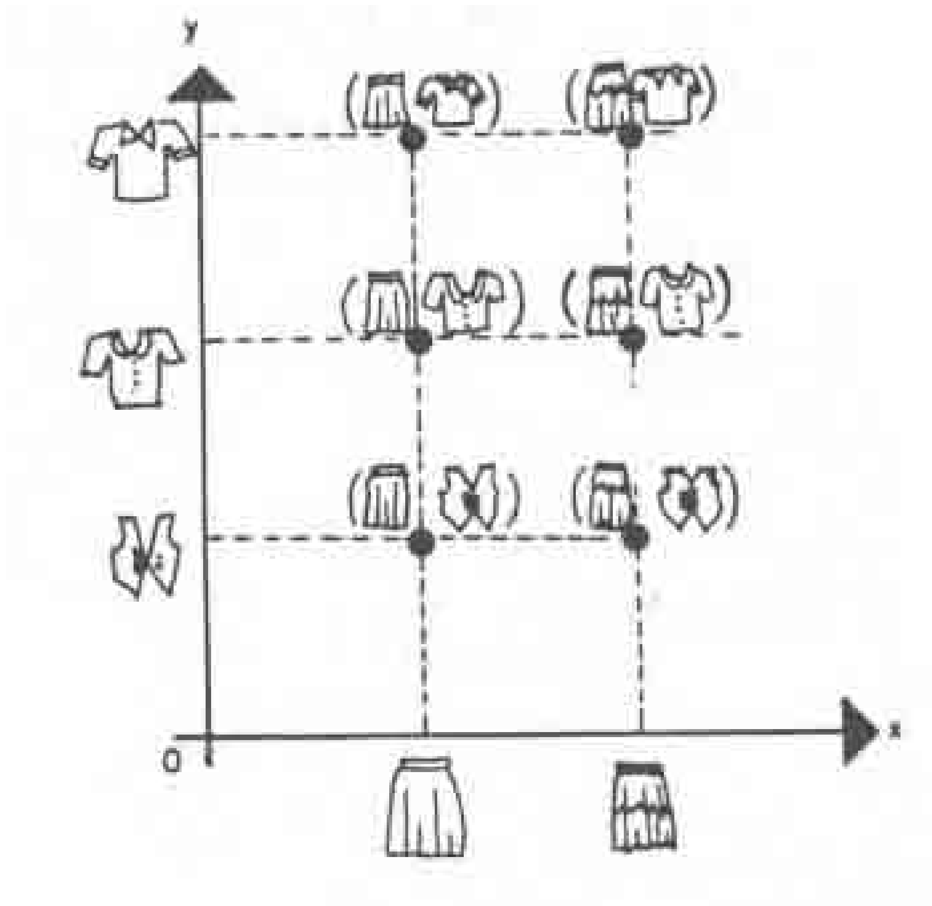
DIAGRAMA CARTESIANO

Los diagramas son representaciones gráficas de sucesos o eventos y resultan de gran utilidad para comprender lo que en ellos se representa. Existen diversos tipos de diagramas: de flujo, de árbol y cartesianos.

El diagrama cartesiano se utiliza en probabilidad, para representar todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio. Véase el siguiente ejemplo:

El guardarropa de una mujer consta de las siguientes prendas: 2 faldas, una blanca y la otra roja; 3 blusas, una blanca, una azul y otra estampada. Se quieren saber todas las posibles combinaciones de las prendas.

Lo anterior se puede representar en un plano cartesiano, donde las faldas se definen en el eje de las *x* y las blusas en el de las *y*, de tal manera que los puntos de intersección de las faldas y las blusas dan por resultado todas las posibles combinaciones.

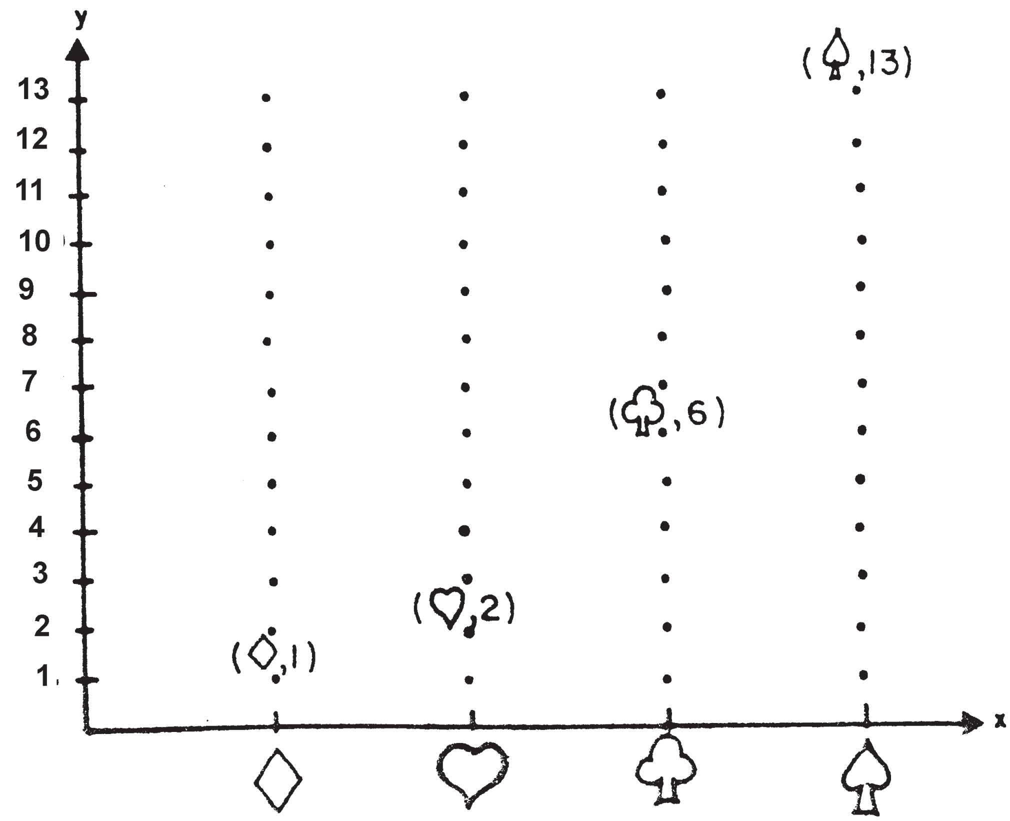


Obsérvese que se obtuvieron seis combinaciones, ya que se efectúa un producto entre el número de faldas y el de blusas ($2 \times 3 = 6$).

Otro ejemplo:

La baraja tiene 4 figuras ♦ ♥ ♣ ♠ y cada una de ellas 13 números. Obténganse todas las cartas que hay en la baraja.

Las figuras se representan en el eje de las *x* y los números en las *y*. ¿Cuál es el número de cartas de la baraja? ¿Por qué?



Nótese que, para representar un fenómeno cualquiera en un diagrama cartesiano, es necesario que únicamente existan dos variables o características ya que éste consta de dos ejes, uno vertical y otro horizontal. Los diagramas cartesianos no sirven para representar fenómenos que tengan más de dos variables.

En pareja realiza los ejercicios dados a continuación. Trabaja en tu cuaderno.

1. Al comprar un auto en un concesionario, le dan a elegir al comprador entre cinco colores (blanco, azul, negro, rojo y verde) y dos versiones. (2 y 4 puertas). Representa en un diagrama cartesiano todas las posibilidades que tiene un comprador para elegir.

   ¿Cuántas combinaciones existen de colores y versiones?

   ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador elija un carro verde con dos puertas?

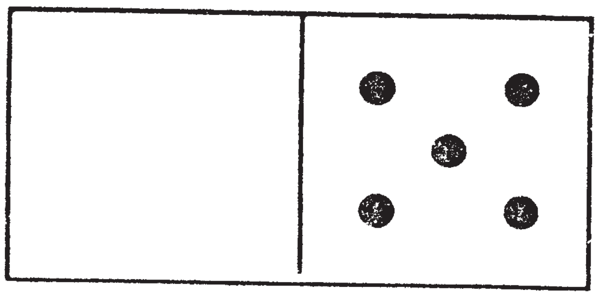
2. Inventa con tu compañero(a) de pareja otra situación donde puedas utilizar un diagrama cartesiano.

   Compara tus resultados con los de otra pareja. Si surgen dudas, coméntalas ante el grupo para resolverlas.

Resuelve individualmente el ejercicio dado a continuación:

- En tu cuaderno representa en un diagrama cartesiano todas las combinaciones posibles en las fichas de dominó que están divididas, la mitad en blanco y la otra mitad tiene valores que van de 0 a 6.

Este es un ejemplo de una ficha; en una mitad tiene 0 y en la otra 5.



a) ¿Cuántas posibles combinaciones como estas tienen las fichas de dominó? ¿Por qué?

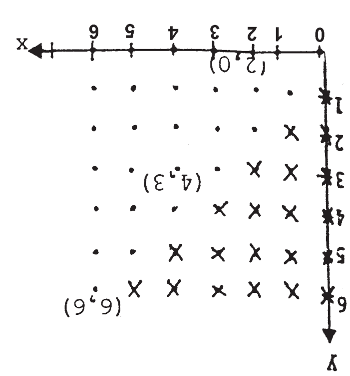
b) Observa que una ficha puede representar dos combinaciones a la vez, por ejemplo 2, 1 y 1, 2 así que, para obtener el número total de fichas de dominó, tacha en el diagrama cartesiano, una de las dos combinaciones.

¿Cuántas fichas tiene un dominó?

Compara tus respuestas con la clave. Si tienes dudas pregúntales a tu profesor(a).

CLAVE

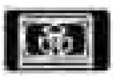
a) Tienen 49 combinaciones, porque existen 7 valores posibles en cada mitad, los cuales se multiplican para obtener las combinaciones; b) 28 fichas.



157 ¿SERÁ O NO SERÁ?

(174) Gráfica de la probabilidad de un evento
Graficación de la probabilidad

¿Cuántos juegos conoces? ¿Todos tienen reglas específicas? ¿Qué sucede si al jugar no cumples con los requisitos que se indican?



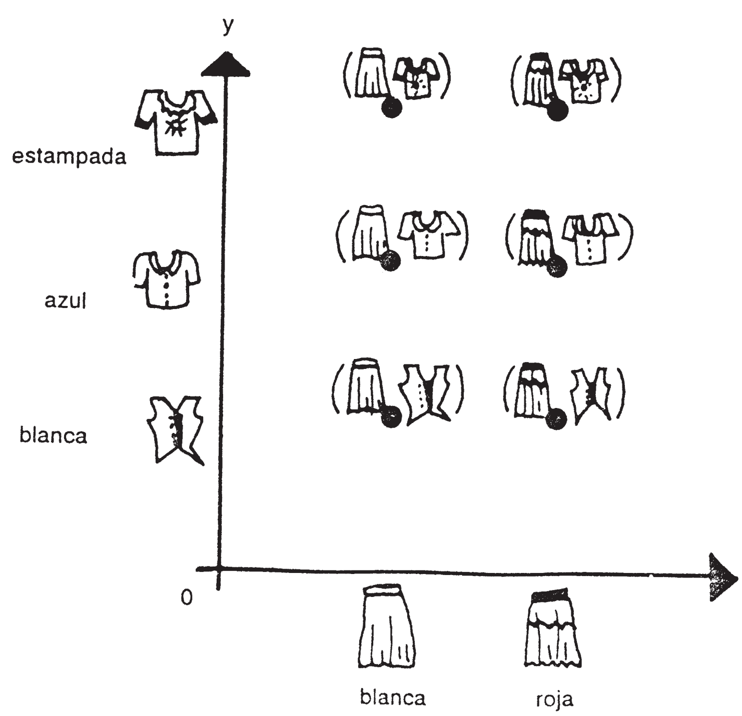
Ve el video y ayuda a encontrar los eventos que sí cumplen con las condiciones dadas.

Realiza en grupo una lectura comentada del texto:

GRÁFICA DE LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO

¿Qué tan posible es encontrar lo que se desea? Para responder a esta pregunta es necesario establecer las características de lo que se quiere.

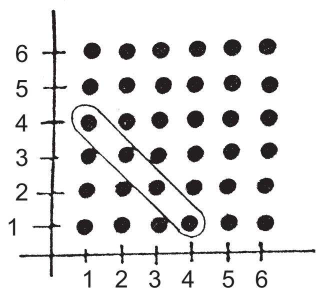
Así, si se retorna al ejemplo de las blusas y faldas, citado en el tema del diagrama cartesiano, pero se establece como condición que es necesario llevar por lo menos una prenda blanca, se tiene el siguiente diagrama:



De lo anterior se puede concluir que la probabilidad de que el evento “llevar por lo menos una prenda blanca" es de $\frac{4}{6}$, o sea, que son seis las combinaciones, pero sólo en cuatro de ellas se cumple la condición dada.

Véase otro ejemplo:

Al lanzar dos dados y que la suma de las caras sea cinco.



Al lanzar los dados se tienen 36 posibles resultados, pero sólo cuatro de ellos cumplen con la condición “la suma de las caras es cinco”. Es decir, la probabilidad del evento solicitado es $\frac{4}{36}$.

¿Cuál es la suma que tiene mayor probabilidad? ¿Cuál es el valor de éste?

Por lo expuesto anteriormente se puede decir que la gráfica de la probabilidad de un evento muestra aquellos posibles resultados que cumplen con la condición marcada por el evento.

Piensa en la situación que se te presenta enseguida y contesta en tu cuaderno las preguntas.

Se realiza un juego que consiste en lanzar dos dados en el que las caras deben sumar 3.

¿Cuántos eventos posibles hay en el lanzamiento de un dado?
¿Cuántas combinaciones posibles habrá al lanzar los dos dados?
¿Qué relación hay entre las respuestas de las preguntas anteriores?
¿Cuántos eventos cumplen con la condición de que su suma sea 3 y cuáles no?
¿Qué probabilidad hay de que ocurra esto?

Lee las respuestas al grupo, según te indique el profesor(a), y corrige si es necesario.

Forma una pareja, en tu cuaderno haz la gráfica de probabilidad para cada evento que se señale enseguida y di a cuánto equivale.

Al lanzar dos monedas al aire, el evento deberá hacer que caiga cara o sello.

De una baraja española (40 cartas) sacar cualquier carta mayor que 5.

Sacar un as de una baraja española.

Al lanzar dos dados, que las caras de ambos muestren un número par.

Compara tus respuestas con otra pareja; si hay discrepancias, consulta a tu profesor(a).

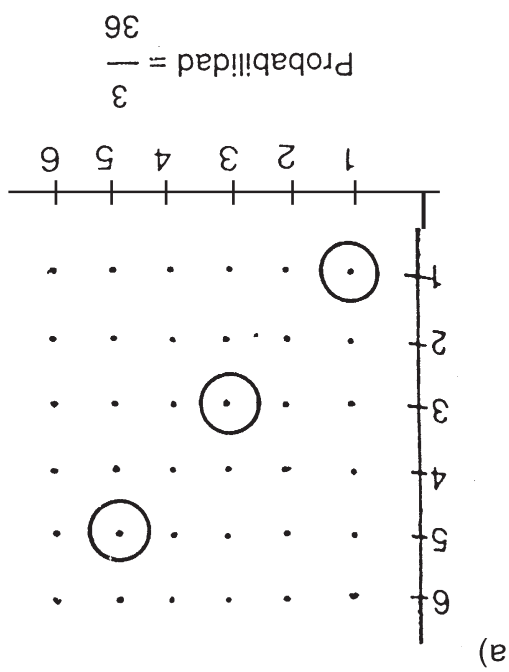
Individualmente, realiza en tu cuaderno el siguiente ejercicio.

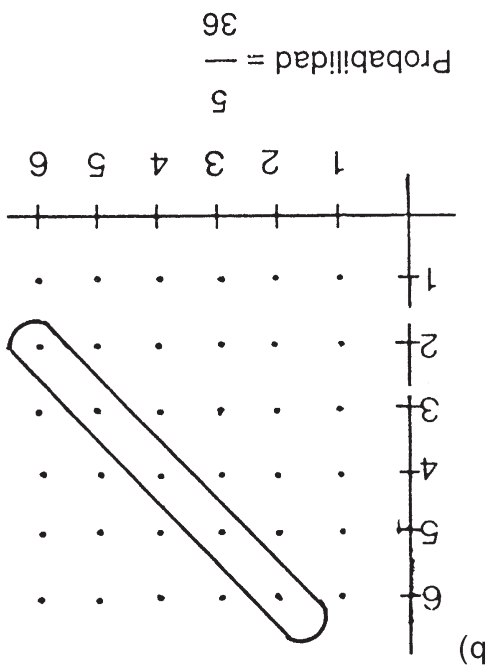
a) Al lanzar dos dados, que las caras de ambos muestren un número impar. ¿Cuáles son las parejas que cumplen la condición?

b) En un juego de dos dados, sacar una combinación cuyos puntos sumen 8; ¿cuáles son las parejas que cumplen la condición?

Espera las indicaciones del profesor(a) para comparar tus resultados con la clave.

CLAVE





158 ÉXITO Y FRACASO

(175)

Ensayos de Bernoulli

Establecimiento de la probabilidad de éxito y fracaso

Cuando compras un billete de lotería esperas dos posibles resultados: ganar o perder, pero, ¿qué probabilidad tienes de que ocurra cada una de ellas?

Observa el video y comenta en qué consiste el éxito o fracaso de un experimento.

Lee en grupo, de la forma en que el profesor(a) lo indique.

ENSAYOS DE BERNOULLI

En ocasiones, al realizar un experimento identifica la posibilidad de obtener varios resultados, en otros sólo dos. Esto es, el resultado puede ser el deseado o el no deseado.

Al lanzar una moneda, los posibles resultados son.

Cara

Sello

Si el resultado deseado es cara, el obtener cara en el lanzamiento señalará el éxito; si el resultado es sello determinará el fracaso. Si el experimento se repite varias veces, los resultados serán independientes de los anteriores.

Al realizar una visita médica para una revisión general, tenemos dos posibles diagnósticos, que señalarán el éxito o fracaso del ensayo.

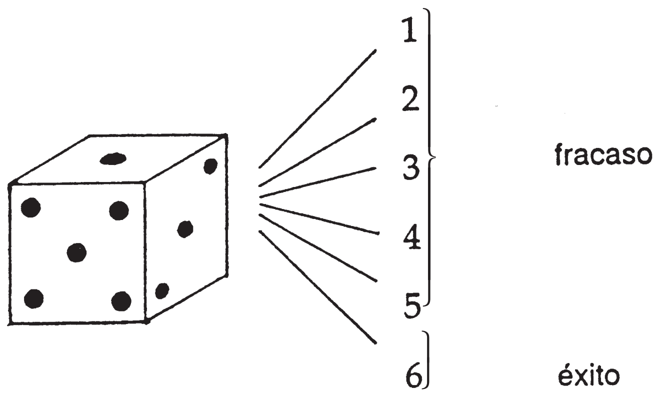
sano (éxito)

Visita

enfermo (fracaso)

Los ensayos anteriores tienen alternativa: éxito o fracaso.

Cuando se lanza un dado al aire y se espera salga 6, tenemos los siguientes posibles resultados



Se observa que existen cinco posibilidades, de las seis ($\frac{5}{6}$), de que el resultado sea fracaso y una de seis ($\frac{1}{6}$) de éxito. Al sumar esas posibilidades, la suma será el total de resultados posibles, 1.

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Denótese el éxito y fracaso como:

$$\text{éxito} = p$$

$$\text{fracaso} = q$$

De donde se deduce que:

$$P + q = 1$$

El tipo de experimento en el que sólo existen dos resultados posibles (éxito o fracaso), y en el cual el resultado de cualquier ensayo es independiente de los otros, recibe el nombre de **ensayos de Bernoulli**.

Si se participa con tres números en la rifa de un televisor, en la que se vendieron 500, ¿cuáles son las probabilidades de ganarlo o de perderlo?

Señálese a "ganar el televisor" como el éxito del ensayo.

Probabilidad de éxito: $p = \dfrac{3}{500}$

Para encontrar la probabilidad del fracaso, despejamos a *q* (que denota el fracaso) en la fórmula. Le restamos a uno la probabilidad de éxito:

$$p + q = 1$$

$$\text{Probabilidad de fracaso} \quad q = 1 - p$$

$$q = 1 - \frac{3}{500} = \frac{497}{500}$$

El éxito o fracaso de un ensayo en estadística no radica en estricto en el significado literal de esas palabras, sino en lo esperado o no esperado en un experimento.

Discute en grupo las respuestas a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuáles son los resultados de un evento, según los ensayos de Bernoulli?
2. ¿Cuándo se dice que el resultado es “éxito”?
3. ¿Cuándo se dice que el resultado es “fracaso”?
4. ¿Cuál es el resultado de sumar la probabilidad de éxito y fracaso en un experimento?
5. ¿Cómo se obtiene la probabilidad del fracaso, conocida la probabilidad de éxito?
6. ¿Qué son los ensayos de Bernoulli?

Encuentra con un compañero(a) las probabilidades de los siguientes eventos. Trabaja en tu cuaderno.

1. Al lanzar un dado y **esperar número impar**. ¿Cuál es la probabilidad de éxito? ¿Cuál es la probabilidad de fracaso? ¿Cuál es la suma de los dos?
2. En una baraja española **extraer un rey**. ¿Cuál es la probabilidad de éxito? ¿Cuál es la probabilidad de fracaso? ¿Cuál es la suma de los dos?
3. Al cobrar un tiro de castigo (penalti) de **meter gol**. ¿Cuál es la probabilidad de éxito? ¿Cuál es la probabilidad de fracaso? ¿Cuál es la suma de los dos?

Compara tus resultados con los de tus compañeros(a). Si hay diferencias, verifica y corrígelas.

Resuelve de manera individual los siguientes ejercicios:

Si se tiene una caja con 10 canicas blancas, 6 azules, 4 verdes y 2 negras.

1. ¿Cuál es el total de canicas en la caja?

2. Si se extrae una al azar y se desea sea blanca. ¿Cuál es la probabilidad de éxito? ¿Cuál es la probabilidad de fracaso?

3. Si al extraer una, se desea sea negra. ¿Cuál es la probabilidad de éxito? ¿Cuál es la probabilidad de fracaso?

4. Si se desea que no sea verde, ¿cuál es la probabilidad de éxito? ¿Cuál es la probabilidad de fracaso?

Compara tus resultado con la clave; si hay diferencias, analiza los ejercicios y corrígelos.

CLAVE

1. 22 canicas; 2. a) $\frac{10}{22}$; b) $\frac{12}{22}$; 3. a) $\frac{2}{22}$; b) $\frac{20}{22}$; 4. a) $\frac{18}{22}$; b) $\frac{4}{22}$

159 COMPRENDER MÁS QUE RECORDAR ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

(176)

Repaso de lo desarrollado

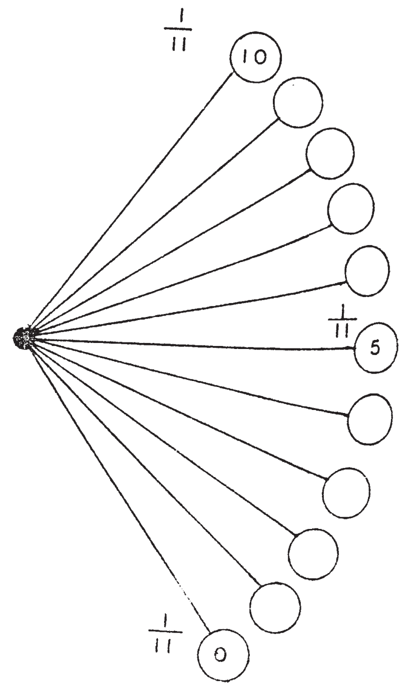
Integración de los conocimientos adquiridos

¿Has pensado alguna vez cuál es la probabilidad de que obtengas una calificación aprobatoria en matemáticas? ¿Puedes calcular esa probabilidad?

Observa el video. Verás un panorama general de todo lo que has estudiado en este núcleo, en lo que se refiere a la probabilidad; al terminar el programa, reúnete con un compañero(a) para comentar lo que hayas entendido.

Intégrate en un equipo de trabajo y realiza en tu cuaderno lo que se te indica.

1. Enseguida aparece el árbol de probabilidad de que obtengas una calificación aprobatoria en Matemáticas en este núcleo. Dicho árbol aparece incompleto. Analízalo y complétalo. Considera S: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.



Estamos suponiendo que las notas van de 0 a 10 sin que esto quiera decir que así se evalúe en tu escuela.

2. De acuerdo con tu análisis del diagrama, resuelve las siguientes preguntas.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una calificación reprobatoria?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que tu calificación sea 8 o más?

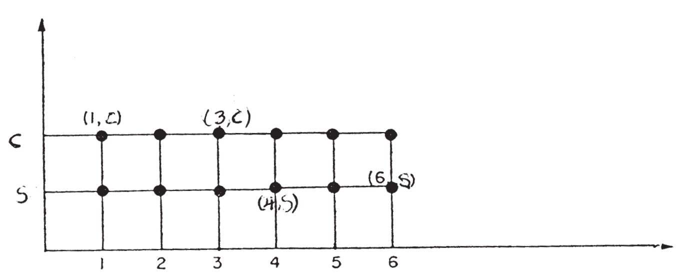
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebes con menos de 8?

   d) ¿Cuál es la suma de todas la probabilidades?

Con los mismos compañeros(as) de equipo, obtén todos los pares ordenados que pueden formarse al lanzar al aire un dado y una moneda. Regístralos en forma de parejas y traza un diagrama cartesiano.

Se te dan algunos pares, tanto de la lista como del diagrama.

(1, C) .... (4, C) (6,S)



En forma individual, resuelve en tu cuaderno cada una de las siguientes preguntas.

3. Calcula la probabilidad de sacar un rey en una baraja de 52 cartas.

   S: (52 cartas) $\qquad$ $n\,(S) = 52$

   $P\,(A) = \dfrac{n\,(A)}{n\,(S)} =$

4. Calcula la probabilidad que existe de sacar un cubo verde de una caja que contiene 3 cubos verdes y cinco amarillos.

   S: (8 cubos) $\qquad$ $n\,(S) = 8$

   $P\,(A) = \dfrac{n\,(A)}{n\,(S)} =$

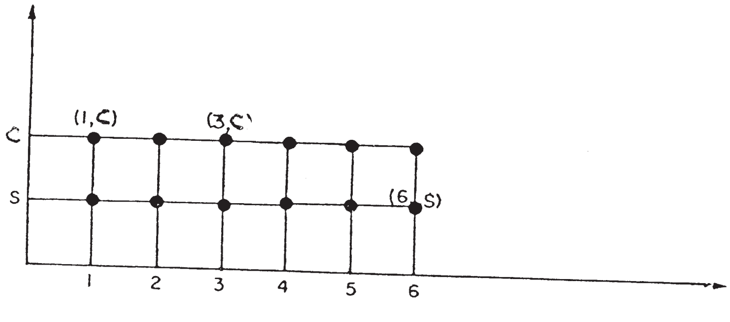
5. Calcula la probabilidad de que en una baraja de 40 cartas, puedas extraer una sota, un caballo o un rey.

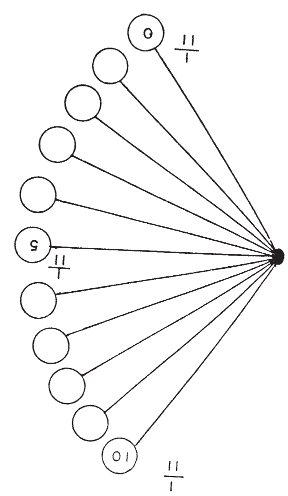
   S: (40 cartas) $\qquad$ $n\,(S) = 40$

   $P\,(A) = \dfrac{n\,(A)}{n\,(S)} =$

Compara tus respuestas con la clave del repaso que aparece a continuación. Si tienes errores corrígelos.

CLAVE





3. $\frac{P(A)}{n(A)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; 4. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$; 5. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0.3$

(1, C), (1, S), (2, S), (2, C) (3, S), (3, C), (4, S), (4, C), (5, S), (5, C), (6, S) (6, C).

1.
2. $\frac{6}{11}$; b) $\frac{3}{11}$; c) $\frac{2}{11}$; d) 1

160 ¡DEMUESTRA QUE SABES!

Es muy probable que tenga la información
Evaluación personal de los avances logrados

(177)

¡Felicidades! Has llegado a la última evaluación de séptimo grado del nivel de Educación Básica.

Observa el video y haz todo lo que en él se te indica. Trabaja en tu cuaderno.

Con base en una Encuesta a 90 jóvenes", se determinó que sus preferencias para los sabores de las paletas son las siguientes:

Limón	20
Guanábana	10
Fresa	13
Chocolate	17
Vainilla	12
Ningún sabor	18
Total:	90

1. Cómo se llama en términos estadísticos a la totalidad de los habitantes de la localidad?

2. Si se elige a los habitantes cuya edad está comprendida entre los 10 y los 15 años para realizar un evento, ¿cómo se llama a esa parte de la población?

3. ¿Qué es la oscilación?

4. Di cómo se determinan los intervalos.

En forma individual continúa tu evaluación.

5. Con los datos de la “encuesta”, completa la siguiente tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Tabla de frecuencias			
Sabores	**Conteo**	**Frecuencias**	
		Absoluta	**Relativa (%)**

6. En tu cuaderno representa, en una gráfica poligonal, la frecuencia relativa.

7. ¿Cuál es la probabilidad de aceptación del producto?

8. ¿Cuál es la probabilidad de no aceptación del producto?

9. ¿Cuál es la probabilidad de que los integrantes de la muestra prefieran los sabores: a) limón, b) guanábana, c) fresa, d) chocolate, e) vainilla, f) ningún sabor?

10. ¿Cuál es la suma de todas las probabilidades del punto anterior?

Intercambia tu cuaderno con un compañero(a) y espera las respuestas que proporcionará tu maestro(a); si tienes errores corrígelos.

161 ARMANDO LAS PIEZAS III

(178)

Panorámica de lo aprendido
Integración de todo el curso

Has concluido un curso más; ahora debes demostrar qué tantos conocimientos asimilaste a lo largo del mismo. Si algunos temas no los comprendiste adecuadamente, es el momento para que trates de hacerlo; esto te servirá de base para el curso posterior.

Reúnete con otros compañeros(as) para resolver lo que se pide en cada caso.

Como la evaluación es parte integral del programa desarrollado, tu profesor(a) ha elaborado en compañía de otros colegas un cuestionario con preguntas y problemas interesantes que te llevarán a hacer un recorrido parcial de las matemáticas que debes dominar.

Los resultados te indicarán tus fortalezas y debilidades y con base en ellos debes organizar responsablemente tus actividades de refuerzo, si es que las necesitas. En esto contarás con el apoyo de otros textos y con la orientación del profesor(a) que te acompañó durante el año escolar que finaliza.

Los problemas que vienen a continuación pueden formar parte de la evaluación. De todas maneras conviene que los resuelvas y los comentes con un compañero(a) y con el profesor(a).

Se proponen varios problemas al respecto

1. Compra y venta de mangos.

   Gloria compra tres mangos por \$1 500 y vende dos por \$1 500. Si un día obtuvo \$4 500 de ganancias, ¿cuántos mangos vendió ese día?

2. Promoción de manzanas.

   En la tienda de Iván Camilo, por la compra de una docena de manzanas, dan 3 de oferta. En la tienda de Hermes, por cada 7 manzanas dan 2. Ángela necesita 270 manzanas.

   a) ¿En cuál de las dos tiendas le conviene hacer la compra para aprovechar las ofertas?

   b) Si el precio de cada manzana es de \$1 200, ¿cuánto tendrá que pagar en una tienda o en la otra?

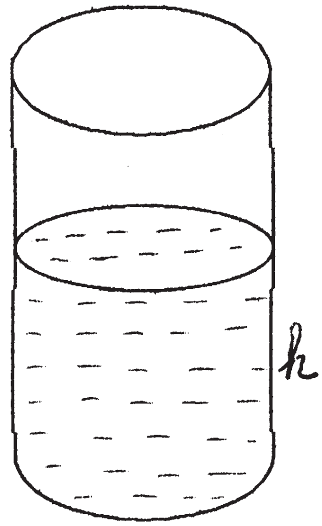
3. El agua en el cilindro.

   Se vierte agua, en un vaso cilíndrico, hasta una altura h.

   El área del fondo interior es de 50 cm^2.

   a) Expresar el volumen V (en cm^3) del agua, teniendo en cuenta la altura h (en cm).

   b) Si el agua alcanza una altura de 20 cm, ¿cuál es su volumen?



4. Adivina quiénes somos –números y ecuaciones–.

5. El pastor que calcula y su rebaño.

   Un pastor que tiene reunido los $\frac{5}{6}$, del número de sus ovejas dice: “si encuentro otra oveja, solo me resta reunir $\frac{1}{8}$ del número total de ellas”.

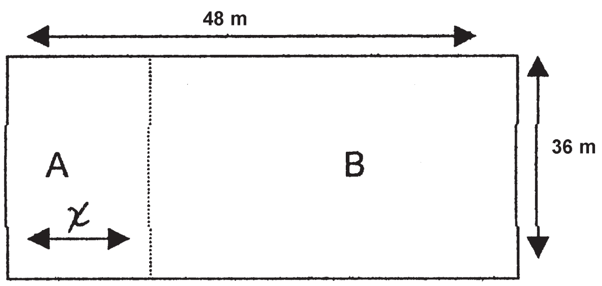
   a) ¿Cuántas ovejas tiene el rebaño?

   b) ¿Cuántas ovejas tiene reunidas ya el pastor?

6. Se divide un terreno rectangular, en dos parcelas:

a) Encontrar el valor de X para el cual el perímetro de la parcela B sea el doble del perímetro de la parcela A.

b) Encontrar el valor X para el cual el área de la parcela B sea el doble del área de la parcela A.

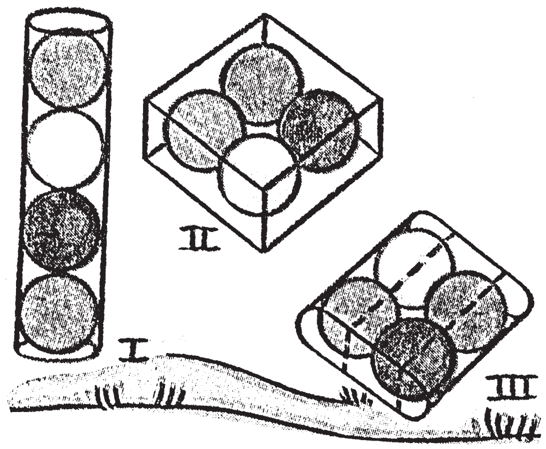


7. Cómo empacar las bolas de béisbol.

Para empacar 4 bolas de béisbol de 8 cm de diámetro se tienen tres tipos de cajas:

a) Para los jugadores la caja más práctica es aquella que tenga menos volumen. ¿Cuál es?

b) Para el fabricante la mejor caja es aquella que exige menos plástico para su fabricación. ¿Cuál es ésta?



a) Elabora una tabla para organizar los datos que se te proporcionan.

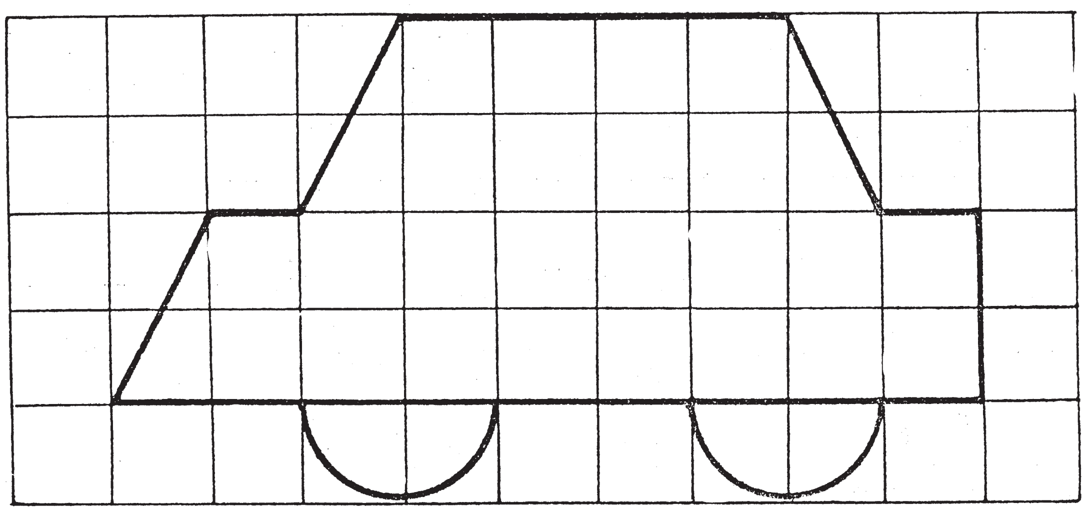
Un comerciante ha registrado el número de kilogramos de cierto detergente, que se ha vendido diariamente en su establecimiento durante los últimos veinte días y los datos que obtuvo son los siguientes.

15, 18, 18, 21, 13, 15, 17, 21, 15, 11
18, 18, 17, 22, 13, 13, 16, 21, 21, 11

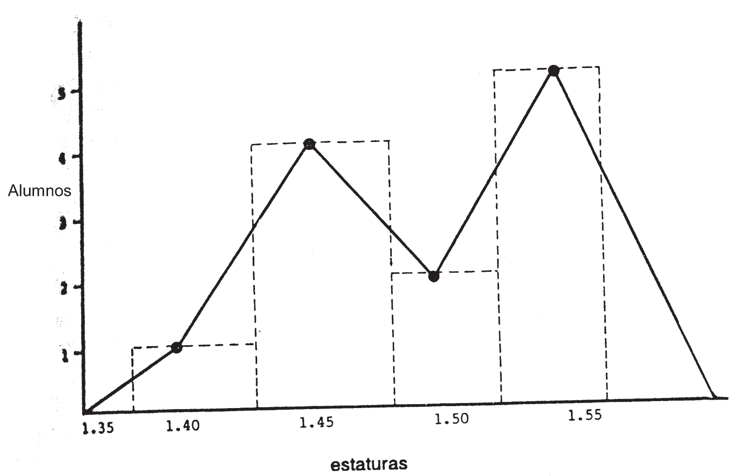
b) Anota en la siguiente tabla la frecuencia absoluta.

<table>
<tr><th>Producción</th><th>Conteo</th><th>Frecuencia absoluta</th></tr>
<tr><td>Maíz</td><td>|||</td><td></td></tr>
<tr><td>Fríjol</td><td>~~||||~~ |</td><td></td></tr>
<tr><td>Trigo</td><td>~~||||~~ ||||</td><td></td></tr>
<tr><td>Cebada</td><td>||</td><td></td></tr>
<tr><td>Garbanzo</td><td>~~||||~~</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Total</td><td></td></tr>
</table>

8. Realiza el siguiente dibujo en tu cuaderno en escala 2 : 1 y 1 : 2.



9. De acuerdo con el siguiente diagrama sobre las estaturas de alumnos contesta las preguntas:

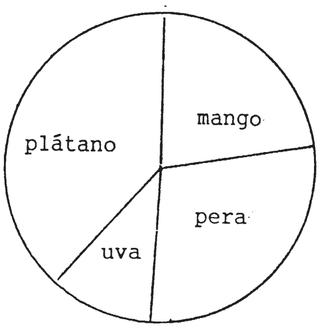


1. ¿Entre qué longitudes oscilan las estaturas del grupo?

2. Cuál es la estatura que tiene mayor frecuencia?

3. ¿Cuál es la estatura en donde hay menor frecuencia?

10. Según el siguiente gráfico, se puede decir que:



Escribe SÍ o NO en el paréntesis.

a) El 50% de la oferta la constituyen mangos y peras . . . . ( )

b) El 75% de la oferta está representado por uvas, peras y mangos . . . . . ( )

c) La mayor oferta la constituyen uvas, peras y mangos . . . . ( )

d) El plátano y la pera se llevan más del 50% de la oferta . . . . ( )