UNIDAD 16

Números reales

Cuando se realizan mediciones, por ejemplo de longitud, se pueden efectuar aproximaciones tan precisas como se desee, usando para expresarlas únicamente números fraccionarios. Esto es posible porque, por pequeña que sea su distancia sobre la recta numérica, entre dos números racionales existen infinitos otros racionales, y siempre existirá alguno que brinde la aproximación deseada.

Los números que pertenecen al conjunto de los racionales están tan próximos entre sí en la recta numérica que puede parecer que allí no caben más puntos que los racionales. Sin embargo, ya conocés otros números que también tienen su ubicación en la recta numérica como π (pi) o $\sqrt{2}$ (raíz cuadrada de 2) y que no son números racionales, porque no pueden expresarse como cociente entre dos números enteros. Esos números reciben el nombre de *números irracionales*.

Los números racionales junto con los irracionales constituyen el conjunto de los números reales que estudiarás en esta última unidad.

A

1. Sobre la recta numérica

Ya aprendiste a representar números racionales en la recta numérica. Valiéndote de ese tipo de representación, podrás determinar las relaciones de orden que existen entre los números racionales.

a) Dibujá en una hoja cuadriculada (apaisada), una familia de rectas de la siguiente manera:

1. En la primera de ellas, tomando como unidad 12 lados de cuadraditos, representá los números racionales enteros -2, -1, 0, 1 y 2. Marcá claramente el punto sobre la recta que corresponde a cada uno de ellos.

2. Debajo de la recta que dibujaste, hacé otra recta igual a la anterior marcando, además, los puntos medios de cada unidad de modo que correspondan a los números racionales, $-\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$.

Deben quedar alineados verticalmente los puntos que corresponden a los mismos números en ambas rectas, por ejemplo, 0 y 0, -2 y $-\frac{4}{2}$, 1 y $\frac{2}{2}$

3. De esta manera, dibujá en la misma hoja otras rectas con unidad un tercio, un cuarto, un quinto, un sexto, un séptimo, un octavo, un décimo, un doceavo y, por último, un veinteavo. Tenés que trabajar con mucha precisión para lograr que queden encolumnadas las fracciones equivalentes.

b) Observando las rectas que dibujaste, copiá y respondé las siguientes preguntas en tu carpeta.

1. Si apoyás la regla verticalmente sobre el número racional 1 (recordá que además de racional, el número 1 también es entero y natural) ¿qué otros números aparecen alineados verticalmente con él?

2. ¿Y si hacés lo mismo de manera que la regla pase por el racional $\frac{3}{2}$?

3. ¿$-\frac{6}{8}$ es mayor, menor o igual que $-\frac{3}{4}$?

4. ¿$\frac{3}{5}$ es mayor, menor o igual que $\frac{7}{5}$?

5. ¿$\frac{3}{4}$ es mayor, menor o igual que $\frac{3}{10}$?

6. Dadas dos fracciones de igual denominador, ¿cuál es la mayor?

7. Y de dos fracciones de igual numerador, ¿cuál es la mayor?

8. ¿Es verdadero o falso que un número racional negativo es siempre menor que uno positivo? Fundamentá tu respuesta.

9. ¿Qué número racional se puede encontrar entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$? ¿Y entre $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{7}$?

10. ¿Existe un único número racional entre esos pares de fracciones?

c) Reunite con otro compañero para comparar las respuestas a las preguntas anteriores. Escribí otras preguntas que puedan contestarse observando todas las rectas numéricas que dibujaste. Intercambialas con las de tus compañeros y controlen las respuestas con el docente.

> Habrás observado que entre dos números racionales que no sean equivalentes, por ejemplo **a** ≠ **b**, siempre se puede establecer una relación de orden, vale decir, que **a** es menor que **b**, o bien que **a** es mayor que **b**.

A 2. ¿Siempre se puede encontrar un número racional que esté entre otros dos?

Para responder a la pregunta del título de esta actividad debés realizar los siguientes ejercicios.

a) Copiá en tu carpeta los siguientes pares de fracciones.

- $\frac{3}{4}$ < .... < $\frac{5}{4}$
- $-\frac{1}{2}$ < .... < 0
- $\frac{6}{5}$ < .... < $\frac{7}{5}$
- $\frac{7}{6}$ < .... < $\frac{8}{6}$
- $\frac{3}{4}$ < .... < $\frac{3}{3}$
- $-\frac{11}{8}$ < .... < $-\frac{10}{8}$
- $-\frac{1}{7}$ < .... < $\frac{1}{7}$
- $-\frac{1}{8}$ < .... < $\frac{1}{12}$

1. Teniendo en cuenta las rectas numéricas que dibujaste en la actividad **1**, intercalá una fracción entre cada par. Si no encontrás una fracción intermedia en una misma recta, fijate en las otras.

- Te podés ayudar colocando verticalmente dos tiras de papel en cada una de las fracciones que tenés que comparar de modo que quede a la vista el intervalo entre ambas.

Habrás observado que, a veces, se puede intercalar una fracción entre otras dos de igual denominador, por ejemplo: $\frac{3}{4} < \frac{4}{4} < \frac{5}{4}$. En otros casos basta buscar una fracción que esté a la derecha de la primera y a la izquierda de la segunda. Por ejemplo, entre $\frac{7}{6}$ y $\frac{8}{6}$ se pueden intercalar $\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{7}, \frac{10}{8}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}, \frac{15}{12}, \frac{24}{20}, \frac{25}{20}, \ldots$

2. Verificá la afirmación que acabás de leer usando la calculadora.
3. Respondé en tu carpeta: ¿se podría seguir intercalando fracciones con mayor denominador? ¿Por qué?
4. Escribí en tu carpeta seis o siete fracciones de las que pueden intercalarse entre $\frac{13}{16}$ y $\frac{13}{7}$.

b) Explorá algunos ejemplos para ver si entre dos fracciones cualesquiera, la fracción que se obtiene calculando el promedio entre ambas, se sitúa en el punto medio del segmento que tiene por extremos a esas fracciones. Podés ayudarte usando nuevamente las rectas numéricas.

Por pequeño que sea el intervalo entre dos números racionales, es decir, por pequeña que sea la distancia entre ellos, siempre existen entre ambos, otros números racionales. Es decir, que entre dos números racionales cualesquiera, por próximos que estén, se pueden intercalar tantos racionales como se quiera. Esta propiedad característica de los números racionales se llama ***densidad****. Significa que entre dos números racionales cualesquiera hay infinitos otros. Por eso se dice que el conjunto de los números racionales es* ***denso****.*

La **densidad** del conjunto de los números racionales sólo se puede concebir a través de un razonamiento, es decir, que no es una propiedad que se pueda visualizar. Se trata de pensar que una recta numérica no está completa con los puntos que corresponden a los números racionales. Esto se debe a que existen otros números, los irracionales, que no se pueden expresar como cociente entre dos números enteros y, sin embargo, corresponden a puntos de la recta numérica.

A

3. Números que no son racionales

En esta actividad vas a trabajar con la expresión decimal de los números racionales. Esto te permitirá distinguirlos de aquellos números que no son racionales.

a) Observá los siguientes ejemplos,

- $\frac{5}{4}$ = 1,2500000...
- $\frac{13}{99}$ = 0,1313131313...
- $\frac{12}{4}$ = 3,000000...
- $\frac{131}{90}$ = 1,45555555...

Seguramente, recordarás que una fracción siempre indica una división. Al efectuarla, se obtiene el desarrollo decimal correspondiente a ese número racional.
En los ejemplos que observaste, todos estos desarrollos de números racionales tienen una característica en común, son expresiones periódicas, porque tienen una o más cifras decimales que se repiten indefinidamente y se denominan *período*.
Los dos primeros ejemplos son expresiones decimales exactas, porque su período es cero. El tercer ejemplo es un desarrollo decimal periódico con período 13. El último ejemplo es un desarrollo decimal periódico con período 5.
Esta periodicidad distingue a los números racionales de aquellos otros que no lo son.

b) Usá la calculadora o hacé las cuentas de dividir necesarias para hallar el desarrollo decimal de las siguientes fracciones: $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{23}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{45}{100}$. Luego completá en tu carpeta la siguiente tabla:

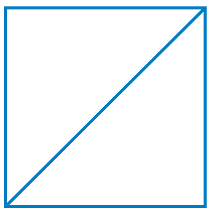
Fracción	Desarrollo decimal	Período de desarrollo decimal
$\frac{3}{5}$		
$\frac{7}{8}$		
$\frac{13}{2}$		
$\frac{17}{6}$		
$\frac{23}{7}$	3,285714285714	285714
$\frac{4}{9}$		
$\frac{45}{100}$		

*Existen números para los que es imposible encontrar una expresión decimal exacta o periódica, con período distinto de cero: son los **números irracionales**. Por ejemplo, $\sqrt{2}$.*

c) Ya trabajaste sobre la recta numérica para representar números racionales, incluidos los números naturales y los números enteros. Ahora, aprenderás a ubicar sobre la recta real a los números irracionales. Leé el siguiente párrafo y copialo en tu carpeta.

Para hallar la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 (la llamaremos **x**) se puede aplicar la propiedad pitagórica:

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = x^2$$
$$2 = x^2$$
$$\sqrt{2} = x$$

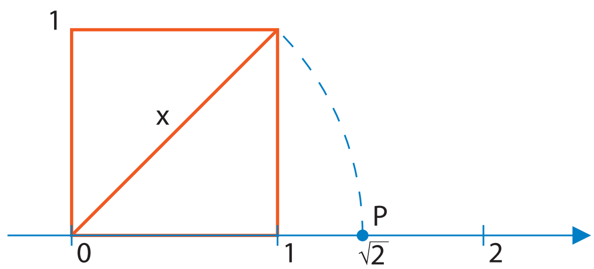


El valor de la diagonal x es entonces un número mayor que 1 y menor que 2; se escribe $\sqrt{2}$, se lee *raíz cuadrada de dos* y es un número irracional cuyo cuadrado es 2.

d) Para ubicar en la recta numérica el punto que corresponde a $\sqrt{2}$ podés recurrir a un procedimiento geométrico.

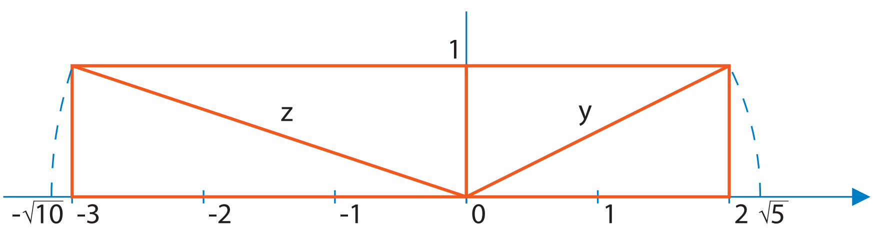
1. Trazá en tu carpeta una recta numérica tomando como unidad el lado del cuadrado.

2. Usá el compás para transportar sobre la recta, a partir de 0, la longitud de la diagonal. Observá que la diagonal es mayor que 1 y menor que 2 y el punto que corresponde a $\sqrt{2}$ está ubicado entre 1 y 2.



En el punto **2** de la consigna anterior comprobaste geométricamente que el punto correspondiente a $\sqrt{2}$ se encuentra entre los que representan a 1 y 2.

e) En la recta siguiente se han representado los puntos que corresponden a los números irracionales $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{10}$. Describí con tus palabras la justificación del procedimiento empleado.



f) El trabajo con los instrumentos de Geometría puede ser poco preciso, por ejemplo, el ancho del trazo del lápiz es un factor importante de imprecisión. Pero existen otras maneras de obtener números irracionales, por ejemplo, mediante procedimientos numéricos. Esto se explica en el siguiente texto.

Para determinar exactamente el lugar que corresponde a un número irracional sobre la recta numérica, por ejemplo $\sqrt{2}$, conviene encontrar su valor numérico con mayor precisión. El punto correspondiente a $\sqrt{2}$ se encuentra con seguridad sobre la recta numérica, entre los que representan a 1 y 2, ya que $1^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$ y $2^2 = 4$.

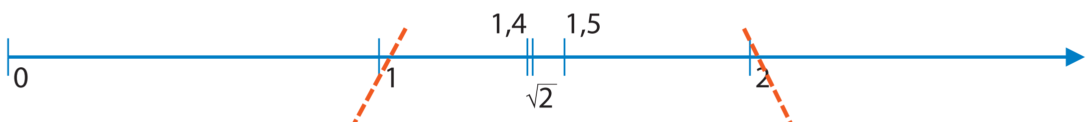
Se puede encontrar un intervalo más pequeño que [1, 2] en el que también se encuentre $\sqrt{2}$. Si se consideran los números entre 1 y 2, el límite inferior del intervalo buscado debe ser tal que su cuadrado sea menor que 2. Realizando los cálculos que aparecen a continuación encontramos los nuevos límites del intervalo:

$1{,}3^2 = 1{,}69$ demasiado pequeño.

$1{,}4^2 = 1{,}96$ demasiado pequeño.

$1{,}5^2 = 2{,}25$ demasiado grande.

Entonces, el punto $\sqrt{2}$ se encuentra entre los que corresponden a 1,4 y 1,5.

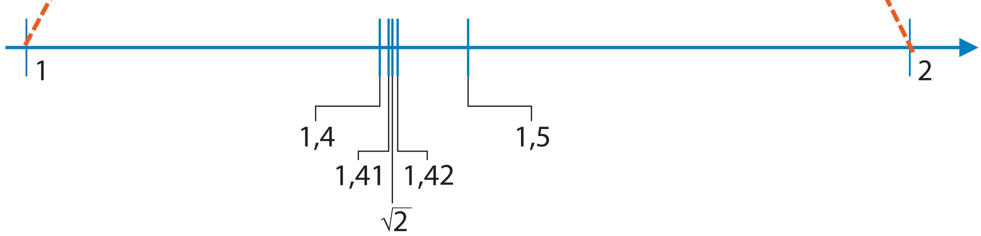


Se puede encontrar un intervalo todavía más pequeño en el cual también se encuentre $\sqrt{2}$:

$1{,}41 \times 1{,}41 = 1{,}9881$ demasiado pequeño.

$1{,}42 \times 1{,}42 = 2{,}0164$ demasiado grande.

Entonces, el punto correspondiente a $\sqrt{2}$ se encuentra entre los que corresponden a 1,41 y 1,42.



1,414 y 1,415;

1,4142 y 1,4143;

1,41421 y 1,41422.

La sucesión de intervalos es ilimitada y define a un único punto correspondiente a la raíz cuadrada buscada.

Con tiempo, paciencia y la ayuda de una calculadora, se puede continuar este proceso de estrechamiento del intervalo tanto como se quiera.

A

4. Cálculo de la raíz cúbica de un número

El mismo procedimiento de determinación de intervalos que aprendiste en la actividad anterior y te permitió calcular la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto, se puede aplicar al cálculo de una raíz cúbica. Es suficiente disponer de una calculadora. Verás un ejemplo.

a) Calcular la raíz cúbica de 5,23.

1. Si tu calculadora tiene una tecla x^y se obtiene el resultado marcando la siguiente secuencia: 5 · 2 3 x^y 3 $\frac{1}{y_x}$ =. En el visor se leerá 1,7358035.

2. Si tu calculadora no tiene ninguna tecla para potencia, podés hacer el cálculo por tanteo determinando intervalos cada vez más pequeños empezando por límites enteros.

Por ejemplo, el intervalo [1, 2]: $1 < \sqrt[3]{5,23} < 2$ porque $1^3 = 1 < 5,23$ y $2^3 = 8 > 5,23$.

En la seguridad de que $\sqrt[3]{5,23}$ está entre 1 y 2 se pueden averiguar los décimos también por tanteo:
$1,5^3 = 3,375$ se ve que es menor que 5,23, entonces se puede probar con 1,7.
$1,7^3 = 4,913$ que es también menor que 5,23.
$1,8^3 = 5,832$ que es mayor que 5,23, por lo tanto:
$1,7 < \sqrt[3]{5,23} < 1,8$

3. Ya sabés que $\sqrt[3]{5,23} = 1,7$. Calculá la cifra de los centésimos aplicando el mismo procedimiento.

b) Calculá por tanteo.

- $\sqrt[3]{11}$
- $\sqrt[3]{41}$

Aunque no seamos capaces de representar exactamente por medios geométricos, todos los números irracionales a partir de su expresión decimal, es posible determinar aproximadamente, su ubicación sobre la recta numérica real.

La construcción geométrica y la determinación del valor numérico que acabás de estudiar permiten representar sobre la recta cualquier raíz irracional. Los puntos que ocupan estos números irracionales están vacíos en la recta racional, es decir, que no están ocupados por ningún punto racional. Por eso se dice que la recta racional es densa, pero no está completa. Todos los infinitos huecos que dejan libres entre sí los números racionales son ocupados por los números irracionales que de este modo completan la recta real. Esta propiedad de la recta real se conoce con el nombre de *completitud*.

A 5. Números reales

Además de los ejemplos que estudiaste en la actividad anterior, en el CUADERNO DE ESTUDIO **2**, tuviste oportunidad de conocer otros números irracionales: ≠ (pi) y Φ (fi) conocidos por los griegos desde la época clásica.

a) Cuando se usan números irracionales en la resolución de problemas, es frecuente usar sus aproximaciones, con la precisión que requiera el problema en cuestión. Reunite con tus compañeros para decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

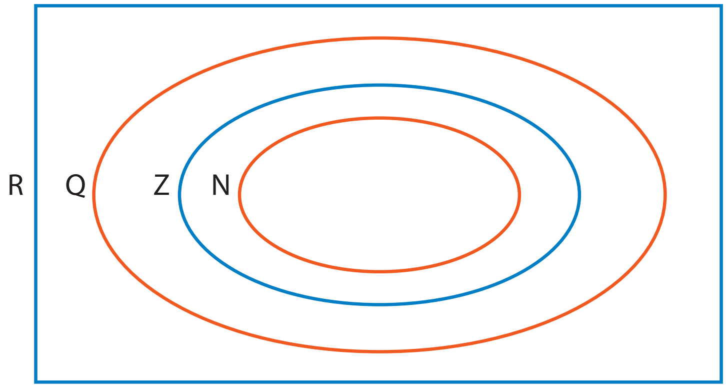
Las aproximaciones de números irracionales son números racionales.

El número ≠ define la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro y, el número de oro, Φ, fue obtenido por los griegos como la relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado. Cuando los griegos llegaron a la conclusión de que esta relación no se podía expresar como cociente de dos números enteros, se quedaron tan conmovidos y les pareció algo tan contrario a la lógica que lo llamaron *irracional* y lo mantuvieron en secreto. Lo mismo sucedió con el número ≠.

Al trabajar con ≠ seguramente usaste alguna de sus aproximaciones: 3,14; 3,141592; 3,1416 o $\frac{22}{7}$, por mencionar solo algunas. La aproximación que se lee en algunas calculadoras es 3,141592654.

b) Conversen con el docente sobre cómo razonaron en la consigna **a** para tomar su decisión.

c) En el diagrama se muestran todos los conjuntos numéricos que conocés. Las letras R, Q, Z y N nombran, respectivamente, al conjunto de los números reales, racionales, enteros y naturales.



El conjunto formado por todos los números racionales y todos los números irracionales, forma el conjunto de los números reales.

1. A modo de síntesis del trabajo realizado en esta unidad, ubicá en el diagrama los siguientes números reales:

$5; \frac{6}{7}; 0,345; 3,555555; -34; 0; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}$ ≠; Φ

Tené en cuenta que los números reales pueden considerarse como estructuras intelectuales. La necesidad de su creación no nace de una imposición de la práctica, porque trabajando con los números racionales la recta numérica aparece densa y sólo se advierte su incompletitud cuando se conciben los números irracionales. A la humanidad le llevó veinticinco siglos llegar al estado de conocimiento que hoy tenemos acerca de los números reales.

Para finalizar

En la práctica, los números sirven para expresar medidas y operar con ellas. Las medidas son siempre aproximadas, por eso los números decimales que se usan para resolver situaciones prácticas deben tener una cantidad de cifras decimales adecuada a lo que se quiere expresar y a la exactitud de las medidas que se usen. Por ejemplo, para expresar la superficie de un terreno no tiene sentido decir que mide 2850,97125334 m^2; es más adecuado decir que tiene 2851 m^2. Un número es racional si se puede representar como cociente entre a y b, donde a es un entero y b un entero distinto de cero. Los números racionales se pueden escribir con expresiones decimales exactas o bien como decimales periódicas. En cambio, los números irracionales no se pueden escribir como decimales exactos ni periódicos porque tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Si bien la recta racional constituye un conjunto denso, la recta real sólo se completa cuando se consideran, además de los racionales, los números irracionales. El conjunto de los números reales se caracteriza por las propiedades de densidad y completitud.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Productos curiosos

a) Multiplicá el número 76 923 por 2, 7, 5, 11, 6 y 8.
Anotá los resultados y observá sus características.
b) Hacé lo mismo para 76 923 por 1, 10, 9, 12, 3 y 4.
c) Describí tus observaciones en la forma más completa posible.

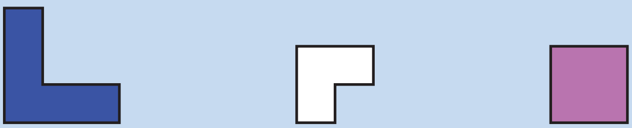
2. Potencias curiosas

- $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
- $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
- $4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$

a) ¿Cómo continuarías esta sucesión?
b) ¿Siempre se verifica esta regularidad? ¿Por qué?

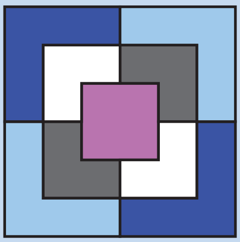
3. Un rompecabezas cuadrado de 6 x 6

Este cuadrado está formado por figuras de tres tipos:



a b c

a) ¿Qué fracción del rompecabezas corresponde a cada una?
b) ¿Qué fracción del total queda cubierta por las 4 piezas del tipo b?
c) ¿Qué fracción del total quedaría cubierta por la suma de una pieza a y una pieza c?
El desafío consiste en proponer la partición de un cuadrado de 6 x 6 en cuatro trozos iguales formados, cada uno, por tres piezas del tipo b.



A modo de despedida

Desde que comenzaste a trabajar con estos Cuadernos hasta hoy habrás aprendido mucho sobre Matemática. Los conocimientos que adquiriste te permitieron resolver muchos problemas prácticos y otras cuestiones interesantes específicas de la Matemática aunque no les hayas encontrado una aplicación práctica inmediata.

La Matemática depende tanto de la lógica como de la creatividad, y está regida por propósitos prácticos y por su propio interés interno. Para algunas personas, y no sólo para los matemáticos profesionales, la esencia de esta disciplina se encuentra en su belleza y en su reto intelectual.

Gran parte de la belleza que muchas personas han percibido en esta ciencia no radica en encontrar la mayor perfección o complejidad, sino al contrario, en proporcionar un gran ahorro y sencillez en la representación y la comprobación de sus ideas. La Matemática teórica no está restringida por los problemas del mundo real, pero a la larga contribuye a entenderlo mejor. A medida que la Matemática avanza, se han encontrado más y más relaciones entre partes que se habían desarrollado por separado, por ejemplo, entre las representaciones simbólicas del Álgebra y las representaciones espaciales de la Geometría.

A través del trabajo con estos Cuadernos esperamos que hayas descubierto que la Matemática forma parte del quehacer científico, que el lenguaje simbólico matemático es en extremo valioso para expresar las ideas científicas sin ambigüedad y que hayas podido disfrutar de la naturaleza del pensamiento matemático.