Unidad 15 Funciones cuadráticas

En esta unidad vas a continuar trabajando con funciones. Ampliarás el trabajo que realizaste en la unidad 12 acerca de las funciones lineales representadas gráficamente mediante rectas, con el estudio de otras funciones cuya representación gráfica es una curva.

Mediante algunos ejemplos sencillos, estudiarás las características de estas relaciones en las que la incógnita está elevada al cuadrado, y de sus correspondientes representaciones gráficas.

Frecuentemente, estas funciones, denominadas cuadráticas, describen además de situaciones matemáticas, fenómenos propios de otras disciplinas como la Física o la Economía. Su aplicación a otras ramas del conocimiento es útil para representar, por ejemplo, movimientos con aceleración constante, trayectorias de proyectiles, ganancias y costos empresariales, etcétera.

Podrás comprobar que el estudio de estas gráficas permite obtener información mediante el análisis de las funciones sin necesidad de recurrir a la experimentación.

A

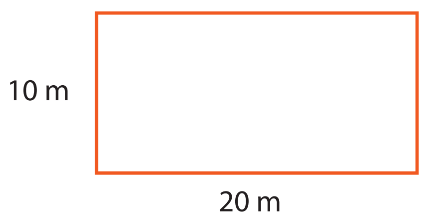
1. Una huerta escolar

A partir de un problema concreto, investigarás la relación funcional área-perímetro en una familia de rectángulos del mismo perímetro.

a) Leé el siguiente problema. Al terminar la actividad, estarás en condiciones de responder a la pregunta que plantea.

> En la escuela de Tres Cruces van a construir una huerta de forma rectangular. Con el dinero disponible se pueden comprar 60 metros de alambre tejido romboidal para el cerco. La directora propone que, con esa cantidad de alambre, la huerta tenga la mayor superficie posible para sembrar. ¿Qué medidas debe tener la huerta?
> Responder a esta pregunta es equivalente a encontrar la respuesta a otra pregunta que podemos expresar de la siguiente manera: ¿Cuál es el rectángulo de mayor superficie que se puede rodear con 60 m de cerco?

b) Reunite con tus compañeros para explorar qué dimensiones pueden tener los distintos rectángulos de 60 m de perímetro, por ejemplo, un rectángulo de 20 m por 10 m.



Para facilitar la tarea, trabajen con la suma del largo y del ancho de cualquiera de esos rectángulos. Prueben al menos cuatro ejemplos con largos y anchos diferentes.

c) Copien en sus carpetas la siguiente tabla y complétenla con todos los casos que hayan encontrado. Más adelante, completarán la columna libre.

Dimensiones de los rectángulos		
Altura (m)	**Base (m)**	
20	10	

d) Antes de continuar, respondan entre todos a las siguientes preguntas sobre las huertas rectangulares que propusieron.

1. ¿Pensaron en las dimensiones de una huerta cuadrada?
2. ¿Colocaron en la tabla algún caso que tenga 10 m de base y 20 m de altura?
3. ¿Tuvieron en cuenta los casos de los rectángulos rotados, es decir, los que se obtienen si se intercambian la base y la altura?

e) Tal como plantea el problema, el objetivo es construir una huerta de la mayor superficie posible. Entonces, completá la columna que quedó vacía en el cuadro del punto **c** escribiendo el área correspondiente a cada rectángulo, expresada en metros cuadrados.

f) Ahora estás en condiciones de responder a la pregunta del problema:

- ¿Qué medidas debe tener la huerta? O lo que resulta equivalente, ¿cuál es el rectángulo de mayor área que se puede rodear con 60 m de cerco? Escribí la respuesta en tu carpeta.

A 2. Las funciones cuadráticas y las parábolas

Para introducirte en el tema de las funciones cuadráticas y sus gráficos, vas a analizar los resultados de la actividad **1**, desde el punto de vista matemático. Revisarás los valores de la tabla que construiste en el punto **c** de esa actividad.

a) Llamá **x** a la base de los rectángulos e **y** al área.
Para cada valor de la base, **x**, mayor que cero y menor que 30, existe un rectángulo que tiene una cierta superficie, **y**. Completá la tabla siguiente, con los datos que calculaste en la actividad **1**.

x (base, m)	y (superficie, m^2)
20	200
10	200
15	

b) Representá gráficamente en un sistema de ejes la relación que vincula la superficie de los rectángulos de perímetro 60, **y**, en función de la base, **x**. Elegí con cuidado la escala conveniente para cada uno de los ejes de coordenadas. Si te parece necesario, buscá otros pares de coordenadas para obtener una curva más precisa.

c) Teniendo en cuenta la tabla y el gráfico que acabás de realizar, copiá en tu carpeta las siguientes afirmaciones y escribí si son verdaderas o falsas.

1. La relación que vincula la superficie de los rectángulos de perímetro 60 **(y)** en función de la base **x** no es lineal.
2. Hay pares de rectángulos con la misma superficie. Por ejemplo, el de base 20 y el de base 10.
3. Existe un único valor de la base para el que no hay dos superficies iguales.
4. Existe un valor máximo de la superficie **y = 225** correspondiente a **x = 15**.
5. La curva es simétrica respecto de una recta que pasa por el punto (15; 225).
6. La curva es cóncava hacia abajo.

Es posible obtener la fórmula que corresponde a esta relación que vincula la superficie de los rectángulos de perímetro 60, **y**, en función de la base, **x**, procediendo del siguiente modo:

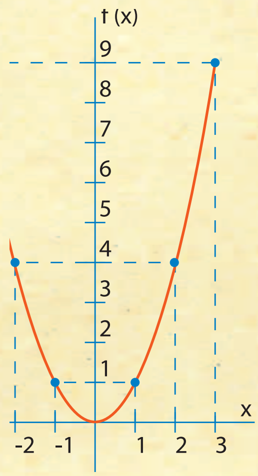
Expresiones equivalentes	Justificación
$y = x \cdot h$	Aplicación de la fórmula para obtener la superficie de un rectángulo.
$y = x\,(30 - x)$	Se reemplaza la altura de los rectángulos por la diferencia entre 30 y la longitud de la base.
$y = 30\,x - x^2$	Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta y se obtiene una ecuación de segundo grado.

Habrás observado que:
• La fórmula que vincula la base **x** con el área **y** de los rectángulos de perímetro 60 es:
$y = 30x - x^2$.
• La variable independiente **x** está elevada al cuadrado por lo que es una ecuación de segundo grado, la expresión $f(x) = y$ corresponde a una función cuadrática.
• La curva que representa a la función cuadrática es una parábola.

d) Copiá las siguientes ecuaciones y realizá las operaciones necesarias para indicar cuáles son ecuaciones de segundo grado. Reunite con tus compañeros para comparar los resultados.

1. $3 + x = \frac{4}{2-x}$
2. $x^3 - 1 = x (x + 2)$
3. $x . 54x = 6$
4. $10x^3 = 5 x^2 + 60$

La función cuadrática más sencilla es $f(x) = x^2$ porque la expresión x^2 no está modificada por coeficientes ni otros términos. Su gráfica es esta curva simétrica:



e) Copiá en tu carpeta la tabla de la función $f(x) = x^2$ y completá los espacios en blanco.

x	-3		-1		0	0,5		2	
f(x)=x²		4		0,25	0	1			9

Se puede afirmar que:
- las fórmulas que caracterizan a las funciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado;
- las funciones cuadráticas se representan mediante parábolas.

3. Fórmula general de las funciones cuadráticas

Después de analizar la función $y = x^2$ trabajarás con la expresión simbólica general de las funciones cuadráticas.

a) Copiá en tu carpeta la siguiente situación. Podrás resolverla al terminar la actividad.

En un negocio de venta de celulares, para decidir a qué precio vender los teléfonos y obtener la mayor ganancia posible, realizaron algunas consultas y se informaron de que la ganancia **y** (en miles de pesos) en función del precio **x** (en cientos de pesos) está determinada por la fórmula:

$$y = -2x^2 + 12x - 10$$

La fórmula permite afirmar que, por ejemplo, si se vende cada teléfono a $200 ($x = 2$), la ganancia es de $6000 ($y = 6$).

b) Copiá la siguiente tabla y completala según los datos del problema.

Precio *x* (en cientos de pesos)	Ganancia y (en miles de pesos)
1	
2	6
3	
4	
5	

1. ¿Cuál es el precio de cada teléfono que permite obtener la ganancia máxima?
2. ¿Para qué precios la ganancia es nula?
3. Representá gráficamente en un sistema de ejes la relación que vincula la ganancia **y**, en función del precio de los teléfonos celulares **x**. Elegí con cuidado la escala conveniente para cada uno de los ejes de coordenadas. Si lo necesitas, buscá otros pares coordenados para obtener una curva más precisa.

Habrás observado que sabiendo que la fórmula $y = -2x^2 + 12x - 10$ correspondiente a la ganancia (y) que se obtiene en función del precio (x) de los teléfonos celulares es la ecuación corresponde a una función cuadrática y la representación gráfica es una parábola.

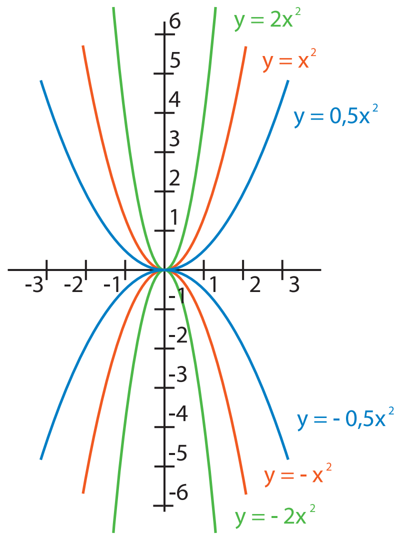
La expresión simbólica general de las ecuaciones correspondientes a funciones cuadráticas puede tener además del término de segundo grado, uno de primer grado y un término independiente.

*Una **función cuadrática** es toda función que puede escribirse en la forma* $f(x) = a\,x2 + b\,x + c$, *donde **a**, **b** y **c** son números cualesquiera, con la condición de que a sea distinto de 0. A esta expresión se la conoce como **expresión polinómica** de la función cuadrática.*

Si $b = 0$, *la ecuación es de la forma* $y = a\,x^2 + c$.
Si $c = 0$, *la ecuación es de la forma* $y = a\,x^2 + bx$.
Si $b = 0$ *y además* $c = 0$, *la ecuación es de la forma* $y = a\,x^2$.

c) En el gráfico siguiente, se han representado seis funciones del tipo $y = ax^2$ en las que a tiene distintos valores, $b = 0$ y $c = 0$.

1. Observá el gráfico y respondé:
- ¿Qué relación encontrás entre el valor absoluto de **a** en cada ecuación y la abertura de las parábolas?



Habrás observado que:
- Todas las parábolas de ecuación $y = ax^2$ tienen por vértice el punto V = (0, 0).
- La parábola $y = ax^2$ tiene un mínimo si $a > 0$ y tiene un máximo si $a < 0$.
- Cuanto mayor es el valor absoluto de a, más cerrada es la parábola correspondiente.

d) Revisá los gráficos que corresponden a las ecuaciones $y = -2x^2 + 12x - 10$ e $y = 30\,x - x^2$ (obtenida en punto **b** de la actividad **2** y comparalos con el gráfico de la ecuación $y = x^2$.

1. Anotá las semejanzas y diferencias que observás en cuanto a:
- Las intersecciones de la curva con el eje **x**.
- Las intersecciones de la curva con el eje **y**.
- El eje de simetría de la curva.
- La existencia de máximo o de mínimo.
- La concavidad hacia arriba o hacia abajo.
- El número de términos de las ecuaciones.

2. Compará tus observaciones con las de tus compañeros y conversen sobre ellas con el docente.

> Habrás observado que:
> si la fórmula es del tipo $\mathbf{y = ax^2}$, la parábola es simétrica con respecto al eje **y**.

e) En este punto trabajarás con expresiones equivalentes.

1. Hacé todas las cuentas que necesites para verificar que la fórmula $y = -2\ (x\ -3)^2 + 8$ es equivalente a: $\mathbf{y = 2x^2 + 12x -10}$

> Las dos fórmulas representan la misma función cuadrática, sólo que en la primera se pueden leer las coordenadas del punto máximo o vértice de la parábola, en este caso (3; 8). A las expresiones de este tipo se las conoce con el nombre de *expresión canónica de la función cuadrática.*

2. Hacé todas las cuentas que necesites para verificar que la fórmula $\mathbf{y = -2\ (x - 1) \cdot (x - 5)}$ es equivalente a $\mathbf{y = 2x^2 + 12\ x -10}$.

> Las dos fórmulas representan la misma función cuadrática, sólo que en la primera se pueden leer los valores 1 y 5 de **x** que anulan la función cuadrática (son los valores de **x** cuya imagen por la función es cero, vale decir los valores de **x** que hacen **y** = **0**). A las expresiones de ese tipo se las conoce con el nombre de expresión factorizada de la función cuadrática.

> En la consigna **e** de esta actividad pudiste observar que una misma función cuadrática, como la del ejemplo, se puede expresar de tres formas distintas.
> - $\mathbf{y = -2\ (x - 1)\ (x - 5)}$
> - $\mathbf{y = -2x^2 + 12x - 10.}$
> - $\mathbf{y = -2\ (x - 3)^2 + 8}$

f) A partir de la función cuadrática cuya ecuación es $\mathbf{y = 2x^2 + -4x + 2}$, realizá su representación gráfica, sabiendo que:

- (1; 0) es el punto donde la función es mínima;
- (0; 2) es el punto de intersección con el eje **y**.

1. Para hacerlo, completá una tabla con los valores que necesites y recordá las características de las parábolas que observaste en las actividades anteriores.

2. Según lo que observaste en la consigna **e** para una misma función cuadrática se pueden escribir diferentes ecuaciones. Escribí las correspondientes a la función dada y después controlá con tus compañeros y tu docente para ver si lo hiciste bien.

A 4. Para seguir avanzando

Hasta acá estudiaste distintas funciones cuadráticas a partir del análisis de gráficos. Pero también existen formulas muy útiles que posibilitan conocer con rapidez el vértice y las raíces, sin necesidad de graficarlas.

a) Leé las siguientes fórmulas y verificá que se cumplan en las funciones cuadráticas de los problemas que resolviste anteriormente.

Dada una función cuadrática en la forma

$x_v = -\frac{b}{2a}$ permite hallar la abscisa del vértice (x_v, y_v) de la parábola.

$(x_1, x_2) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ permite obtener las raíces de la parábola de ecuación

$y = ax^2 + bx + c$

Conversá con tu docente para decidir si es conveniente que profundices en este tema utilizando los libros de Matemática de la biblioteca del aula.

Para finalizar

En esta unidad aprendiste que una función de la forma $y= ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, es una función cuadrática porque el término en el que la variable tiene el mayor exponente es un término cuadrático y su gráfico es una curva llamada *parábola*.

El análisis de las representaciones gráficas de las funciones brinda mucha información acerca de ellas. En el caso de las parábolas, el punto de corte con el eje y se obtiene haciendo $x = 0$ en la ecuación de la parábola. Los puntos de corte con el eje x son de la forma $(x,0)$. Sustituyendo y por 0 en la fórmula $y = ax^2 + bx + c$ se obtiene la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, cuya solución es el o los valores de x en los que la curva corta al eje horizontal.

También aprendiste que el trabajo con las ecuaciones correspondientes te puede brindar información, por un lado, acerca de las coordenadas del vértice y, por otro lado, acerca de los puntos en los que la parábola se corta con el eje de las abscisas. Es decir, que si una ecuación es de la forma $y = a(x-\alpha).(x-\beta)$ los números α y β son los valores de x que anulan la función, o bien que si la ecuación tiene la forma $y = a(x-m)^2 + n$ el par de números (m, n) indica las coordenadas del punto vértice de la parábola que presenta un máximo o un mínimo.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El producto de dos factores

a) Te proponemos una forma interesante para multiplicar, por ejemplo, 37 x 41.
En la primera columna figuran los resultados que se obtienen de dividir sucesivamente 37 por 2 (sólo la parte entera de cada resultado).
En la segunda, figuran los resultados que se obtienen de multiplicar sucesivamente 41 por 2.

37	41
18	82
9	164
4	328
2	656
1	1312

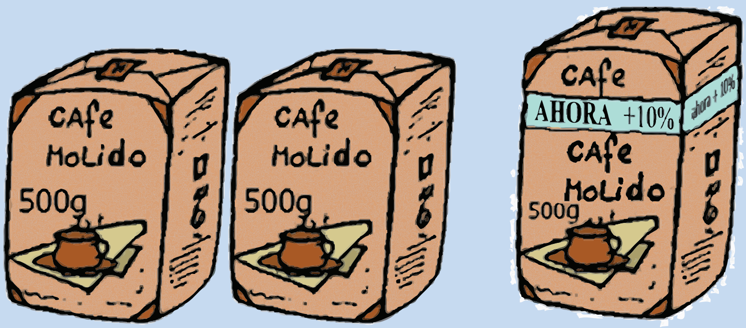
La suma **41 + 164 + 1312** es el resultado de la multiplicación: **1517**
Para elegir los sumandos, entre los números de la segunda columna, se descartan aquellos que se "corresponden" con resultados pares de las divisiones. En nuestro ejemplo, no se suman 82, ni 328, ni 656.

b) Resolvé otras multiplicaciones según el método explicado en el punto anterior.

c) ¿Te atrevés a descubrir el "truco"?

2. Los paquetes de café

En un negocio venden el paquete de 500 gramos de café a $20 el paquete. Han traído paquetes nuevos al mismo precio que contienen 10% más de café gratis. Los clientes se llevan estos paquetes nuevos y dejan los otros pero al dueño se le ocurre que si ofrece los paquetes que no tienen café gratis con el 10% de descuento en el precio va a poder venderlos todos. ¿Te parece que tiene razón? ¿Por qué?



3. Un tiro por elevación

"Donde pone el ojo, pone la bala" es una descripción de un muy buen tirador, aunque no siempre ocurre así porque si el tirador pretende que el proyectil recorra grandes distancias, su trayectoria será una parábola: el impulso inicial lo lleva hacia arriba y la gravedad lo atrae hacia abajo. Para que llegue, entonces, al destino que se quiso darle, hay que lanzarlo con cierto ángulo. Este antiguo esquema ilustra el tiro de un cañón. La altura y la distancia están medidas en metros y el tiempo en segundos. El desafío consiste en que con esos datos establezcas la ecuación correspondiente.