Unidad 14 Sistemas de inecuaciones

Los problemas de administración y economía están relacionados frecuentemente con la necesidad de optimizar una función matemática. Puede ser necesario, por ejemplo, optimizar ganancias, costos, tiempos de espera, en situaciones en las que se presentan algunas restricciones. En este tipo de problemas, optimizar puede significar tanto la búsqueda del máximo como del mínimo de una función o variable de la economía, por ejemplo, los insumos, la mano de obra, el capital disponible o el tiempo de producción.

Las restricciones que presentan los problemas de ese tipo se pueden expresar, en general, a través de inecuaciones lineales. En la unidad 13 estudiaste sistemas de dos ecuaciones lineales. Por la importancia que adquieren como una herramienta matemática que se aplica en diversos campos como la industria o la administración, en esta oportunidad ampliarás el trabajo realizado mediante el estudio de inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales.

Las relaciones que se establecen entre las variables puestas en juego en el momento de optimizar un recurso dan lugar a una aplicación de inecuaciones al método matemático denominado programación lineal. Se trata de problemas que involucran gran cantidad de variables y para ser resueltos generalmente requieren de la ayuda de las computadoras. En esta unidad verás algunos ejemplos sencillos de este tipo de problemas.

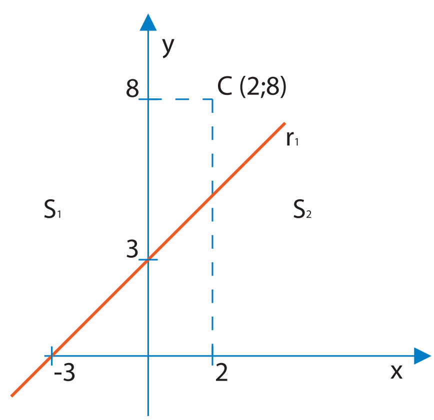
Seguramente recordarás el trabajo realizado en unidades anteriores con funciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Es conveniente que tengas a mano los materiales de dichas unidades para que recurras a ellos cada vez que lo necesites.

A

1. ¿Cómo se representa un semiplano?

La resolución de problemas se apoya frecuentemente en la representación gráfica de zonas del plano limitadas por rectas; por eso, es importante que distingas esas zonas.

a) Representá gráficamente la recta $\mathbf{r_1}$, cuya ecuación es $y = x + 3$. Indicá sus puntos de intersección con los ejes, (0; 3) y (-3; 0) y también un punto C = (2; 8) que no pertenece a $\mathbf{r_1}$. Sombreá con diferentes colores las zonas S_1 y S_2 del plano del papel, cada una de las cuales está limitada por $\mathbf{r_1}$.
Observá el esquema de la situación:



b) Escribí cuatro pares ordenados correspondientes a puntos que verifiquen la ecuación de la recta $\mathbf{r_1}$. Representalos en el gráfico.

c) La recta $\mathbf{r_1}$ divide al plano en dos zonas o semiplanos: S_1 y S_2. La inecuación $y > x + 3$ corresponde al semiplano S_1, al que pertenece, entre otros, el punto C = (2; 8).

- Pensá cómo se puede verificar esta afirmación y hacelo.
- Escribí las coordenadas de otros puntos que pertenezcan a S_1 y comprobá si esos puntos, en efecto, hacen verdadera la inecuación de la recta dada.

d) ¿Qué inecuación corresponde a $\mathbf{S_2}$? Verificalo.

e) Los puntos de $\mathbf{r_1}$, ¿pertenecen a $\mathbf{S_1}$? ¿Por qué?

f) Los puntos de $\mathbf{r_1}$ ¿pertenecen a $\mathbf{S_2}$? ¿Por qué?

El análisis de las coordenadas de puntos ubicados en las dos zonas del plano, que quedan determinadas por una recta, fundamenta la siguiente definición:
Se dice que la recta $\mathbf{r_1}$ que divide a los semiplanos $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$ es la recta borde de uno de los semiplanos $\mathbf{S_1}$ o $\mathbf{S_2}$.

g) ¿Qué relación satisfacen las coordenadas de los puntos del plano que pertenecen a $\mathbf{S_1}$ o a $\mathbf{r_1}$? Respondé escribiendo la inecuación correspondiente.

h) Copiá en tu carpeta y completá:

La inecuación **y** ″ x + **3** es la relación que verifican las coordenadas de los puntos del plano que pertenecen a ....

Observá que la diferencia entre escribir y ″ x + 3 y escribir $y < x + 3$ consiste en que en el primer caso los puntos de la recta satisfacen a la inecuación y ″ x + 3, en cambio, en el segundo caso, al excluirse la igualdad, la recta $y = x + 3$ no pertenece al conjunto solución de la inecuación $y < x + 3$. Por eso se adopta la convención de representar a la recta borde con línea de puntos para indicar que no pertenece al semiplano.

i) Representá en distintos sistemas de ejes cada una de las siguientes inecuaciones.

I. $y < -5x + 2$	**IV.** $3x > 2y$
II. $y \geq -6x - 4$	**V.** $-3y + 9 < 6x$
III. $-y < 2x$	**VI.** -4y ″ 5x

Comenzá representando la recta borde, cuya ecuación conviene que esté expresada en la forma $y = mx + b$. Luego indicá claramente qué convención elegís para mostrar el semiplano que se obtiene en cada caso. En general, se sombrea el conjunto de los puntos que verifican la inecuación pero en algunos libros, los autores prefieren dejar en blanco dicha zona.

j) Verificá que el semiplano obtenido en cada caso sea el correcto reemplazando en la inecuación original las coordenadas de algún punto del semiplano indicado.

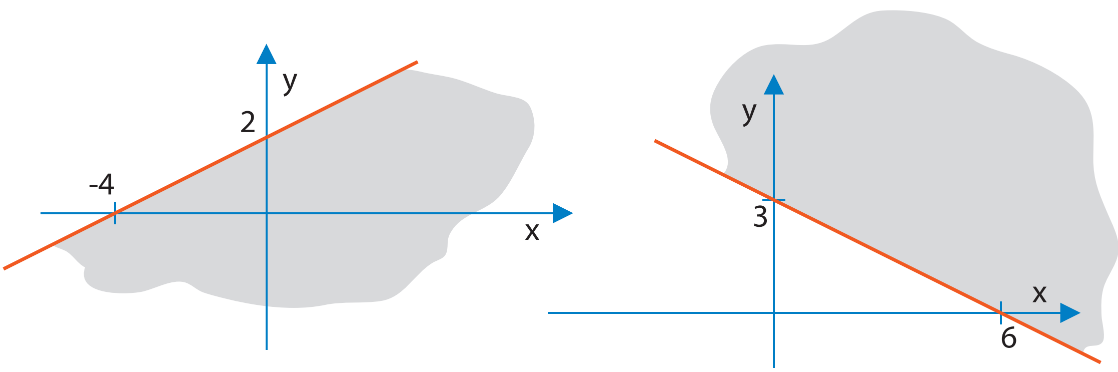
La reflexión sobre las características de los puntos que pertenecen a uno u otro semiplano te permitirá analizar cómo se vinculan con las respectivas inecuaciones.

2. Reconocimiento de inecuaciones

En esta actividad vas a formular inecuaciones a través del reconocimiento de semiplanos representados gráficamente.

a) Copiá en tu carpeta los siguientes esquemas.

b) Escribí la relación que satisfacen las coordenadas de los puntos del semiplano que se muestra sombreado en cada esquema.



*Recordá que en la unidad **4** aprendiste que las intersecciones de una recta con los ejes coordenados son los datos que permiten escribir la ecuación de la recta.*

A 3. Zonas en el plano gráfico

En las actividades anteriores ubicaste los puntos del plano que satisfacen a una inecuación o indicaste la inecuación correspondiente partiendo del gráfico de un semiplano. En esta actividad, vas a determinar la zona del plano cuyos puntos satisfacen simultáneamente a dos inecuaciones.

a) Hallá gráficamente la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones y verificala. Explicá en forma completa cómo procedés para llegar a mostrar el resultado.

I) $\begin{cases} y \text{ ″ } 2x + 1 \\ y < \frac{1}{3}x \end{cases}$ **III)** $\begin{cases} 3y > 6x \\ 2x - 6y \text{ ″ } 9 \end{cases}$

II) $\begin{cases} y \text{ ″ } 3x + 5 \\ y < 2x + 1 \end{cases}$ **IV)** $\begin{cases} 6x - 9 < 3y \\ y + x < 10 \end{cases}$

Hallar gráficamente la solución de un sistema de dos inecuaciones lineales es representar en un mismo sistema de ejes los puntos cuyas coordenadas verifican simultáneamente ambas inecuaciones. Para ello es conveniente representar por separado el semiplano solución de cada una de las inecuaciones y, luego, analizar si existe alguna zona que sea común a ambos semiplanos. La zona común, si existe, es la solución del sistema dado.

b) Sin realizar el gráfico, investigá si el punto (2, 4) pertenece a la solución del sistema.

$$\begin{cases} x + y > 3 \\ y > 3 \\ x \text{ ″ } 2 \end{cases}$$

c) Antes de realizar la actividad **4**, resolvé gráficamente aplicando el método que aprendiste en las actividades anteriores, dos o tres sistemas con más de dos inecuaciones. Podés buscar en los libros de la biblioteca del aula sistemas para resolver o solucionar los siguientes:

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + y = 48 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \geq 5 \\ y \leq 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

En las actividades anteriores trabajaste con inecuaciones y aprendiste a resolver gráficamente sistemas de inecuaciones lineales. Ahora vas a aplicar esos conocimientos a la resolución de problemas de **programación lineal**. En este tipo de problemas, los sistemas están formados por más de 2 inecuaciones, a veces 3 o incluso más.

4. Programación lineal

En esta actividad vas a encontrar desarrollado en forma completa un problema de *programación lineal.*

a) Copiá el problema en tu carpeta. Antes de continuar, conversá con tu docente y con tus compañeros acerca de qué significa “utilidad”, “pies” de madera y “maximizar”.

La empresa de muebles Cañuelas fabrica mesas y sillas de comedor. En la industria maderera el volumen de madera disponible se mide en pies.*
Para fabricar cada silla se necesitan 20 pies de madera y 4 horas de trabajo.
Para fabricar cada mesa, 50 pies de madera y sólo 3 horas de trabajo.
El fabricante dispone de 1980 pies de madera y personal a su disposición para trabajar hasta 380 horas.
El fabricante desea obtener una utilidad de $30 por cada silla vendida y $60 por cada mesa vendida.
¿Cuántas mesas y sillas se deben producir para maximizar las utilidades, suponiendo que se vende todo objeto producido?

* El pie de madera es una medida inglesa de uso tradicional en carpintería, que corresponde a 1 pie (30,48 cm) de ancho, por 1 pie de largo, por 1 pulgada (2,54 cm) de grosor.

b) Para responder a la pregunta de la situación planteada, debés seguir varios pasos.
1. El primero es volcar en un cuadro toda la información disponible, para ello copiá la siguiente tabla y completala con los datos indicados en el enunciado.

	Cantidad necesaria por cada unidad		Total dispondible
	silla	mesa	
Madera (pies)			
Mano de obra (horas)			
Utilidad por unidad ($)			

2. Si llamás **x** al número total de sillas que se producen, ¿cuál es la cantidad de madera necesaria para construir **x** sillas?
3. Si llamás **y** al número total de mesas producidas, ¿cuál es la cantidad total de madera necesaria para producir las **y** mesas?
4. Expresá los datos de los dos primeros renglones de la tabla relacionados con **x** e **y** mediante las inecuaciones respectivas.

5. ¿Tiene sentido que **x** o **y** tomen valores negativos? ¿Por qué?
6. Escribí las dos inecuaciones que indican que **x** e **y** sólo pueden tener valores que no sean negativos.
7. Representá en un mismo sistema de ejes coordenados el sistema que forman las inecuaciones que escribiste en los puntos **2**, **3** y **6**. Elegí convenientemente la escala de cada eje; pensá, por ejemplo, que si sólo se fabricaran sillas, la madera disponible alcanzaría para hacer 99 sillas.

Seguramente el sistema de inecuaciones que representaste es:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 50y \text{ ″ } 198 \\ 4x + 3y \text{ ″ } 380 \end{cases}$$

Este sistema de inecuaciones se denomina conjunto de restricciones del problema porque indica las condiciones que no se pueden exceder.
El conjunto solución del sistema se llama polígono de soluciones posibles. Los puntos interiores al polígono pueden ser las soluciones del problema que lo originó.

8. Coloreá en tu gráfico el conjunto solución del sistema. Nombrá los vértices del polígono y escribí sus coordenadas.
9. ¿Qué utilidad obtiene, es decir, cuánto gana el fabricante...
- si fabrica 10 sillas y ninguna mesa?
- si fabrica 6 sillas y 2 mesas?
- si no fabrica sillas y sí 5 mesas?

Los pares sillas-mesas: (10; 0), (6; 2), (0; 5) verifican la ecuación $30x + 60y = 300$.
Todos los distintos pares de números que verifican esta ecuación, representan la cantidad de mesas y sillas que se deben fabricar para que, al ser vendidas, produzcan una ganancia de $300.
$30\,x + 60\,y = 300$ es una de las rectas de isoutilidad ("isos" signfica "igual").
Llamaremos r_1 a esa recta "asociada" con $300 de utilidad.

10. ¿Cuál es la ecuación de la recta de isoutilidad $\mathbf{r_2}$, que corresponde a $600? Escribila y hallá dos pares de valores (**x; y**) que la verifiquen.
- Escribí la recta $\mathbf{r_3}$ de isoutilidad correspondiente a $1500 de utilidad.
- Dibujá en el mismo sistema de ejes donde representaste el polígono de soluciones posibles, las rectas $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_3}$.
- ¿Cómo resultan $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_3}$ entre sí? ¿Por qué?
- ¿En cuál de ellas, los pares (**x; y**) resultan más convenientes para el fabricante? En otras palabras, ¿cuáles pares representan la cantidad de mesas y de sillas que producen mayor utilidad?

11. Copiá en tu carpeta las siguientes afirmaciones y decidí si son verdaderas o falsas con relación al problema anterior.

V F Todas las rectas de isoutilidad tienen pendiente $-\frac{1}{2}$.

V F A medida que las utilidades aumentan, las rectas se alejan del (0;0).

V F Para encontrar el punto de mayor utilidad, se debe trazar la recta de isoutilidad que se encuentre lo más lejos posible de (0;0) y que tenga intersección con el polígono de soluciones posibles.

12. Mostrá en el gráfico algunas otras rectas de isoutilidad y la que proporciona la mayor de las utilidades, es decir, la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ que pasa por (65;40).

13. Ahora, respondé la pregunta del problema propuesto: ¿cuántas sillas deben producirse para maximizar el beneficio? ¿cuántas mesas? ¿qué utilidad obtendrá el fabricante?

Para responder a las preguntas planteadas por este problema se ha **maximizado** la función **30x + 60y = u.** Esta función es la función objetivo del problema. Es decir, que es la función que se debe optimizar (maximizar o minimizar) según la situación.
El punto que corresponde a la mayor utilidad es uno de los vértices del polígono de soluciones posibles.
Para encontrar cuál de los vértices del polígono de soluciones posibles es el punto de utilidad máxima, hay que evaluar en cada vértice la función **utilidad**: u =30x+ 60y.
Podemos mostrarlo en un cuadro:

coord. del vértice	(0;0)	(0;66)	(95;0)	(65;40)
u = 30 x + 60 y	0	3960	2850	4350

*En un problema de **programación lineal** hay que identificar:*
- *el conjunto de restricciones;*
- *el polígono de soluciones posibles;*
- *la función objetivo.*

El problema se resuelve encontrando cuál de los vértices del polígono de soluciones posibles optimiza la función objetivo.

c) Para revisar lo que aprendiste, copiá este sistema en tu carpeta y, luego, respondé a las preguntas que siguen. Si tenés alguna duda, revisá el trabajo que realizaste en las consignas **a** y **b**.
Supongamos que en un problema de programación lineal es necesario minimizar

la función $\mathbf{z = 2x + 4y}$ sujeta a las restricciones: $\begin{cases} x \text{ ″ } 0 \\ y \text{ ″ } x + 5 \\ x + y \text{ ″ } 10 \\ y \text{ ″ } -5x + 5 \end{cases}$

1. ¿Cuál es la función objetivo?
2. ¿Cuál es el conjunto de restricciones?
3. Representá gráficamente el polígono de soluciones posibles.
4. Hallá el par (**x;y**) que minimiza la función **z**.

Para finalizar

Los sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales se aplican en la resolución de problemas de programación lineal. Se usan en muchos problemas de la industria, el comercio o la economía cuando se trata de encontrar un conjunto de datos que maximice o minimice, según el caso, una función que se denomina *función objetivo*.

Las funciones de ganancia y de costo son ejemplos de funciones objetivos. El sistema de igualdades o desigualdades a las que está sujeta la función objetivo refleja las restricciones; por ejemplo, las limitaciones sobre recursos como insumos o mano de obra, impuestas a la solución del problema.

Estos modelos de optimización son usados en casi todas las áreas de toma de decisiones. Cuando se manejan muchas variables, el mayor o menor éxito de estos procedimientos depende de la cantidad de información que posea quien toma las decisiones. No cabe duda de que el uso de las nuevas tecnologías de la información contribuye al éxito en la resolución de este tipo de problemas

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Montones de piedras

Hay cinco montones de piedras. Se quita $\frac{1}{5}$ de las piedras del primer montón y se agregan al segundo montón. Luego se quita $\frac{1}{5}$ de las piedras que hay ahora en el segundo montón y se agregan al tercer montón. A continuación, se quita $\frac{1}{5}$ de las piedras que hay ahora en el tercer montón y se agregan al cuarto montón. Finalmente, se quita $\frac{1}{5}$ de las piedras que hay ahora en el cuarto montón y se agregan al quinto montón. De este modo, todos los montones finalizan con 124 piedras cada uno. ¿Cuántas piedras había inicialmente en cada montón?

2. Un número de seis cifras

Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, se puede formar un número de seis cifras distintas **abcdef**, tal que el número de tres cifras **abc** sea múltiplo de 4, el número de tres cifras **bcd** sea múltiplo de 5, el número de tres cifras cde sea múltiplo de 3 y el número de tres cifras **def** sea múltiplo de 11.

3. Sudokus

Te ofrecemos un sudoku exprés y otro tradicional.
El sudoku exprés es un juego similar al sudoku, pero se juega en un tablero de 6 por 6, solamente con los números del 1 al 6. No deben repetirse en ninguna fila y ninguna columna.

1	5				
6			4		
				5	2
2	3				
		1			6
				4	1

			7	6			4	3
				3				9
5				9	8	6		
		9						5
		3		2		4		
4						7		
		1	9	8				2
3	9			1				4
2	8			4	7			