UNIDAD 13

Sistemas de ecuaciones

Una línea fundamental del trabajo matemático es identificar, en cada campo de estudio, un pequeño conjunto de ideas y reglas básicas a partir de las cuales puedan deducirse, aplicando cierta lógica, todas las demás ideas y reglas de interés en ese campo.

Cuando estás buscando conexiones entre las ideas y las reglas básicas de un campo de estudio y las que pueden deducirse de ellas, estás pensando matemáticamente. Eso te permite adquirir nuevos conocimientos sobre la base de conocimientos previos. Ponés en juego ese tipo de pensamiento cuando, a partir de lo que ya sabés, seguís avanzando en tus estudios.

En esta unidad retomarás aspectos vinculados con las funciones lineales sobre las que trabajaste en la unidad 4 de este Cuaderno. Analizarás la posibilidad de describir una recta a partir de su ecuación o de su representación gráfica en el plano. Abordarás problemas en los que las variables están ligadas por más de una relación y que implican la resolución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales.

*Seguramente recordarás el trabajo realizado en las unidades **4** y **11** de este Cuaderno con funciones lineales y con ecuaciones. Es conveniente que tengas a mano los materiales de dichas unidades para que recurras a ellos cada vez que lo necesites.*

A 1. Resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales

Tomando como base la ecuación general de una recta y sus expresiones equivalentes, vas a resolver situaciones en las que las condiciones del problema se vinculan a través de más de una ecuación.

> *En la unidad **4** de este Cuaderno estudiaste que:*
> *La expresión general de la ecuación de una recta:* $y = a \cdot x + b$ *en la que el número* a *es la pendiente y el número* b *la ordenada del punto (0, b) en el que la recta corta el eje* y.
> *Al estudiar ecuaciones en la unidad **11**, trabajaste con expresiones equivalentes de una ecuación.*

a) Leé la siguiente situación y a partir de los datos que se presentan en el problema, resolvela en tu carpeta tal como lo indican las consignas.

Para organizar una fiesta de egresados, se pidieron dos presupuestos. En el primero, la entrada cuesta $ 18 por persona y en el otro, cobran un costo general por la fiesta de $ 300 y, además, $ 15 por persona.

1. Copiá en tu carpeta y completá la tabla siguiente, según el primer presupuesto, con el importe que se debería abonar teniendo en cuenta el número de personas invitadas o bien con la cantidad de personas que corresponden al importe indicado.

Número de personas	Importe
30	540
60	
	1620
120	
	2700

Si **x** representa el número de personas que concurrirán a la fiesta, e **y** el importe correspondiente, se puede afirmar que 18 • x es la expresión matemática que permite obtener **y**.
En otras palabras, y = 18 • x es la fórmula de la relación que existe entre el número de asistentes a la fiesta y el gasto correspondiente teniendo en cuenta el primer presupuesto.

b) Considerando ahora el segundo presupuesto, completá la tabla siguiente en tu carpeta.

Número de personas (x)	Importe (y)
30	750
60	
	1650
120	
	2550

Verificar que los valores encontrados sean soluciones de la ecuación planteada es reemplazar la incógnita en la ecuación por el valor (o los valores) hallado. Si se cumple la igualdad, entonces la solución hallada es la respuesta al problema.

1. Verificá que la fórmula que expresa la relación entre el número de asistentes y el importe que debería abonarse sea: $\mathbf{y} = 15 \cdot \mathbf{x} + 300$.
2. ¿Existirá un número de personas (**x**) tal que para ambos presupuestos el gasto o importe demandado (**y**) sea el mismo? Pensá un modo de encontrar respuesta a esta pregunta. Probalo.
3. Compará lo que pensaste con la opinión de tus compañeros y el docente.

Un recurso posible para responder a la pregunta del punto **2** es utilizar el método gráfico. Consiste en representar gráficamente ambas relaciones, en un mismo sistema de ejes cartesianos ortogonales y hallar, si existe, el único punto del plano que pertenezca a ambos gráficos.

c) Graficá las relaciones que corresponden a los dos presupuestos para buscar, si existe, el único punto que pertenece a ambos gráficos.

*Podés consultar la unidad **12** o a tu docente si no recordás este tema.*

1. Primero elegí una escala adecuada para el eje x (número de personas) que te permita representar los datos con comodidad y otra adecuada para el eje y (importe en pesos). En el mismo sistema de ejes, representá gráficamente las relaciones $\mathbf{y = 18 \cdot x}$ e $\mathbf{y = 15 \cdot x + 300}$.

Los puntos que obtuviste para cada ecuación pertenecen a una recta y representan su conjunto solución porque son los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación.

2. Observá el gráfico que hiciste en la actividad **1**. Copiá en tu carpeta las preguntas que aparecen a continuación y respondelas:

- ¿Hay algún punto que pertenezca a las dos rectas?
- ¿Cuáles son sus coordenadas?
- ¿Qué cantidad de personas podrían asistir a la fiesta si se abonaran 1800 pesos, según el primer presupuesto?
- ¿Qué cantidad de personas podrían asistir a la fiesta si se abonaran 1800 pesos, según el segundo presupuesto?
- ¿Cuánto se debería abonar si asistieran 100 personas a la fiesta, según el primer presupuesto?
- ¿Cuánto se debería abonar si asistieran 100 personas a la fiesta, según el segundo presupuesto?
- ¿Qué significa el par ordenado (100;1800), de acuerdo con el problema que estamos estudiando?

En el ejemplo del primer presupuesto, los pares (x, y) que verifican $y = 18 \cdot x$ pertenecen a una recta. Los pares que verifican $y = 15 \cdot x + 300$ (segundo presupuesto) pertenecen a una recta distinta de la anterior.
Entonces, se puede pensar que si estamos buscando un número de personas (x) y un importe (y) que verifique ambos presupuestos, este par (x, y) debe pertenecer a ambas rectas.

El par ordenado (100;1800) representa al punto cuyas coordenadas (x, y) son, respectivamente, 100 y 1800, y es la solución del sistema que forman las dos ecuaciones por ser la intersección de ambas y satisfacer a las dos.

$$\begin{cases} x + y = 340 \\ 5x + 10y = 2500 \end{cases}$$

La llave que abarca las dos ecuaciones significa que las dos deben verificarse simultáneamente, es decir, que forman un sistema.

Las dos ecuaciones consideradas forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (x, y).

A

2. Otro problema

a) Copiá en tu carpeta el siguiente problema:

En una caja hay tornillos pequeños que pesan 5 g y tornillos grandes que pesan 10 g. En total hay 340 tornillos. El peso total de los tornillos que hay en la caja es 2,5 kg. ¿Cuántos tornillos de cada tipo hay en la caja?

1. A medida que vayas leyendo la resolución paso a paso del problema anterior, copiá en tu carpeta los datos del problema y las ecuaciones que se van deduciendo.

Paso 1
Podemos llamar ***x*** a la cantidad de tornillos pequeños e ***y*** a la cantidad de tornillos grandes.

Paso 2
Según el enunciado del problema se cumple que $x + y = 340$.

Paso 3
Como cada tornillo pequeño pesa 5 gramos, 5x representa el peso de los tornillos pequeños.

Paso 4
Como cada tornillo grande pesa 10 gramos, 10y representa el peso de los tornillos grandes.

Paso 5
También debe cumplirse, según el enunciado del problema, que el peso de todos los tornillos sea 2,5 kg que es equivalente a 2500 g: o sea que también se cumple que $5x + 10y = 2500$.

2. ¿Es necesario que el número de tornillos de cada tamaño que buscamos verifique $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 340$ y también $5x + 10\,y = 2500$? ¿Por qué? Escribí tu respuesta en la carpeta y comparala con la de otros compañeros.

b) Para resolver este otro sistema vas a recurrir otra vez al método gráfico. En este caso, el sistema de ecuaciones que debe resolverse es:

$$\begin{cases} x + y = 340 \\ 5x + 10y = 2500 \end{cases}$$

Como ya sabés, las ecuaciones lineales se corresponden gráficamente con rectas en el plano. Para hacer el dibujo necesitás dos o tres puntos de cada una de ellas.

1. Escribí tres pares (**x,y**) ordenados de modo que verifiquen: **x** + **y** = 340. Si te resulta más fácil, para hallarlos podés usar ecuaciones equivalentes, por ejemplo: **y** = 340 – **x** ó **x** = 340 – **y**.
2. Escribí tres pares ordenados que verifiquen que 5**x** + 10**y** = 2500.
Si lo creés conveniente podés recurrir a otras expresiones de la misma ecuación. Dado que en este caso no es tan sencillo hallar expresiones equivalentes, deberás trabajar con cuidado. Si en la ecuación 5**x** + 10**y** = 2500 despejás **y** correctamente obtendrás **y** = 250 – 0,5**x**.
3. Elegí una escala adecuada para el eje **x** (cantidad de tornillos pequeños) y otra adecuada para el eje **y** (cantidad de tornillos grandes). En el mismo sistema de ejes representá gráficamente las relaciones **y** = 340 - **x** e **y** = 250 – 0,5**x**.

Recordá que cada ecuación está representada por una recta.

4. Observá el gráfico. ¿Se puede leer a través del gráfico cuántos tornillos pequeños y cuántos grandes hay en la caja? ¿Por qué? Compará tu respuesta con las de tus compañeros. Si tienen alguna duda, consulten con su docente.

A

3. Tres situaciones para graficar

En esta actividad encontrarás tres situaciones que se pueden solucionar gráficamente resolviendo un **sistema de ecuaciones.**

a) Resuelvan las situaciones planteadas. Para hacerlo:
- léanlas con atención;
- nombren las incógnitas;
- escriban las dos ecuaciones lineales que forman el sistema;
- hallen pares ordenados que verifiquen cada una de las ecuaciones;
- representen gráficamente cada ecuación, después de elegir convenientemente la escala para cada eje;
- hallen la solución del sistema.

1. El perímetro de un rectángulo es 24 cm. La base mide 2 cm más que la altura. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones del rectángulo?

2. Un teatro tiene 180 butacas, entre platea y pullman. La entrada para pullman cuesta $12 y para platea cuesta $20. Si la recaudación total de la función de ayer, a sala llena, fue $2800, ¿cuántas butacas en platea y cuántas en pullman tiene el teatro?

3. La familia Quispe —madre, padre y tres niños— fueron a presenciar un espectáculo y pagaron $31 por las entradas de todos. Los Oneto —madre, padre, abuela y dos niños— pagaron $34. ¿Cuánto costó la entrada de cada adulto y la de cada niño?

Además del método gráfico, existen otros procedimientos matemáticos que permiten resolver sistemas de ecuaciones.

4. Resolución analítica de un sistema de dos ecuaciones lineales

En la siguiente actividad, vas a conocer otras herramientas para resolver sistemas de ecuaciones. A continuación, encontrarás una síntesis de algunas ideas importantes acerca de las **ecuaciones lineales** que estuviste trabajando en esta y otras unidades sobre funciones.

a) En la siguiente actividad, van a conocer otras herramientas para resolver sistemas de ecuaciones.
1. Luego consulten las unidades **4** y **11** de este Cuaderno y decidan si les parece necesario agregar a esta lista otras ideas importantes sobre funciones y sistemas.

- Las expresiones de la forma $y = mx + b$, con m y b constantes, se llaman **ecuaciones lineales.** Por ejemplo, $y = 2x + 3$ es una ecuación lineal (lo mismo que cada una de las que consideraste en las actividades anteriores).
- El gráfico de una ecuación lineal es una recta. Los pares ordenados (0; 3); (-1; 1); (1; 5) y (2; 7) son algunos de los puntos del plano que pertenecen a la recta cuya ecuación es $y = 2x + 3$. Las coordenadas de los infinitos puntos de la recta forman el conjunto solución de la ecuación $y = 2x + 3$.
- Si se multiplican ambos miembros de la ecuación $y = 2x + 3$ por un mismo número real, por ejemplo 2, la nueva expresión $2y = 4x + 6$ es una ecuación equivalente a la dada, porque tiene el mismo conjunto solución que $y = 2x + 3$. Entonces, hay muchas otras ecuaciones equivalentes a $y = 2x + 3$.
- Las coordenadas (x; y) del punto que pertenece a las dos rectas que forman un sistema, hacen verdadera —verifican— las dos ecuaciones del sistema.

b) Copiá en tu carpeta el siguiente problema:

¡Llegó el circo al pueblo de San Lorenzo! En la función de ensayo hubo precios especiales. La entrada para los adultos se cobró \$24 y para los menores \$12. Asistieron 100 personas y se recaudaron \$1560. Se desea conocer el número de adultos y de menores que asistieron a la función.

1. Planteá las dos ecuaciones posibles, llamando **x** a la cantidad de adultos e **y** a la cantidad de menores.

Es posible que hayas obtenido el sistema $\begin{cases} x + y = 100 \\ 24x + 12y = 1560 \end{cases}$

También se puede obtener otro sistema formado por ecuaciones equivalentes, distinto al que se propone aquí. Si obtuviste un sistema equivalente consultá con tu docente para transformar convenientemente tus ecuaciones y poder así seguir el razonamiento aquí propuesto.

A partir del sistema $\begin{cases} x + y = 100 \\ 24x + 12y = 1560 \end{cases}$

Si se multiplican por 12 ambos miembros de la primera ecuación, se obtiene $12x + 12y = 1200$, que es una ecuación equivalente a la ecuación $x + y = 100$; es decir, con las mismas soluciones. Se logra así que los coeficientes de **y** en ambas ecuaciones resulten iguales.

2. Escribí el sistema que resulta con esta modificación.

3. ¿Qué otra operación se puede hacer para que los coeficientes de **x** resulten iguales? ¿Cuál de las ecuaciones modificarías? ¿Da lo mismo elegir cualquiera de las opciones? ¿Por qué?

Suponiendo que el nuevo sistema obtenido sea $\begin{cases} 12x + 12y = 1200 \\ 24x + 12y = 1560 \end{cases}$

Se resta a la segunda ecuación la primera, miembro a miembro, para lograr una ecuación con una sola incógnita: $12x + 0y = 360$, de donde se obtiene que $x = 30$. Es ahora fácil deducir que $y = 70$, dado que a partir de las condiciones iniciales del problema se sabe que $x + y = 100$.

4. Hacé las cuentas necesarias para comprobar que (30; 70) es, efectivamente, la solución del sistema.

El método con el que resolviste este problema es de tipo analítico, esto significa que no es gráfico, sino escrito. Con él resolviste este sistema mediante las operaciones de adición y sustracción. En las actividades anteriores resolviste gráficamente algunos sistemas de ecuaciones en los que se pudo encontrar la solución a partir de observar las coordenadas de la intersección de dos rectas. Este método es cómodo cuando la lectura del gráfico no ofrece dificultades. Pero pensá, por ejemplo, que si la solución de un sistema fuera el par ordenado $\left(\frac{1}{7};\frac{5}{9}\right)$ sería imposible leerla con precisión en un gráfico porque se trata de fracciones.

5. Resolvé analíticamente todos los problemas propuestos en las actividades anteriores: actividad **1** (fiesta de egresados), actividad **2** (tornillos en la caja) y las tres situaciones de la actividad **3**.

A

5. Otros problemas, otros sistemas

El método analítico por operaciones de sustracción y adición no es el único posible. Vas a completar este tema consultando otros métodos en los textos de Matemática.

a) Buscá en algún libro de Matemática de la biblioteca, problemas que se resuelvan a través de un sistema de dos ecuaciones lineales.

1. Elegí un problema y realizá un afiche con:

- el enunciado del problema;
- el nombre y significado de las variables que intervienen;
- la resolución analítica;
- la resolución gráfica;
- la respuesta o solución.

b) Resolvé gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones. Representá cada uno en gráficos cartesianos distintos.

I) $\begin{cases} 3x - 5 = y \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ **II)** $\begin{cases} -3x = y \\ y = 2x \end{cases}$ **III)** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -4y = 6x + 4 \end{cases}$

c) Leé la información que aparece a continuación y tenela en cuenta para clasificar los sistemas dados en la consigna anterior según el número de soluciones que tengan: una, ninguna o infinitas soluciones.

Qué sucede en el gráfico	Cantidad de soluciones	Clase de sistema
Las rectas se **cortan** en un punto.	Una	Compatible determinado.
Las dos ecuaciones representan la **misma recta**.	Infinitos	Compatible indeterminado.
Las rectas son **paralelas**.	Ninguna	Incompatible.

d) El punto A = (3; 4), es la solución de un sistema de ecuaciones.

1. Escribí la ecuación de la recta **r** que pasa por (0; 0) y por A.

2. Escribí la ecuación de otra recta **s** tal que el sistema que forman las rectas **r** y **s** tengan como única solución el punto A.

3. ¿Es única la ecuación de la recta **s**? ¿Por qué?

En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación se representa por una recta.
- Si el sistema tiene una sola solución, esta resulta ser un punto (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las dos ecuaciones del sistema.
- Si las ecuaciones son equivalentes, el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si las ecuaciones corresponden a rectas paralelas, el sistema no tiene solución.

Para finalizar

Importantes contenidos matemáticos como los números racionales, la proporcionalidad y las relaciones lineales están todos íntimamente conectados, por eso, cuando se abordan contenidos matemáticos nuevos, se tienen muchas oportunidades de usar y hacer conexiones con lo que ya se sabe.

Cuando algún problema concreto demanda encontrar los valores de las variables que satisfacen simultáneamente a dos ecuaciones, decimos que se trata de un *sistema*. Estas expresiones simbólicas tienen su correlato en tablas y gráficos que permiten visualizar las posiciones relativas de dos rectas y su punto de intersección que, en este caso, es la solución del problema.

Los temas que corresponden a la programación lineal que verás en la próxima unidad te ayudarán a ampliar este espacio de problemas que tienen aplicación en la economía, la administración y la actividad industrial.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Números y triángulos

Dibujá un triángulo equilátero cualquiera. Dividilo en cuatro triángulos, también equiláteros, uniendo los puntos medios de cada lado del triángulo original. Quedan determinados nueve segmentos que son los lados de los triángulos más pequeños. Distribuí los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9 en los lados de los triangulitos, sin repeticiones, de modo que la suma de los tres números correspondientes a cada triangulito sea siempre la misma.

2. Una relación pitagórica

En el triángulo ABC, C = 90°, AC = 20, y AB = 101. D es el punto medio de BC. Hallá el área del triángulo ADB.

3. Sudoku

El objetivo del juego es colocar en los cuadrados vacíos los números que faltan de modo que en cada cuadro de 3 × 3 estén todos los números del 1 al 9, con la condición de que cada número aparezca solamente una vez en cada fila horizontal y en cada columna vertical del cuadro 9 × 9.

			5			9		
	2							8
8				4				3
	5	7	1		3			2
2			9		5	3	8	
9				1				5
7				6		8	1	
		2			7			9

4. Sudoku exprés

Este juego es similar al Sudoku, pero se juega solamente con los números del 1 al 6.

	6			1	3
		2		5	6
		6			1
3		4	6		
		3			
6		1	5	3	4