Unidad 12 Funciones 2

En el Cuaderno de estudio 2 empezaste a estudiar las funciones matemáticas. Se trata de un tema muy amplio que continuarás aprendiendo en esta unidad.

La idea de función nace a partir del estudio de los fenómenos de cambio y se expresa a través de diversos lenguajes: verbal, algebraico, gráfico, tablas. Cada uno de esos lenguajes permite poner en evidencia o destacar ciertas características de las funciones.

Por otro lado, en el mundo actual, y en particular en los medios de comunicación, existe una gran variedad de información sobre diversos fenómenos de cambio, en campos tan diversos como la economía o la meteorología, que se presenta mediante tablas y, especialmente, por medio de gráficos.

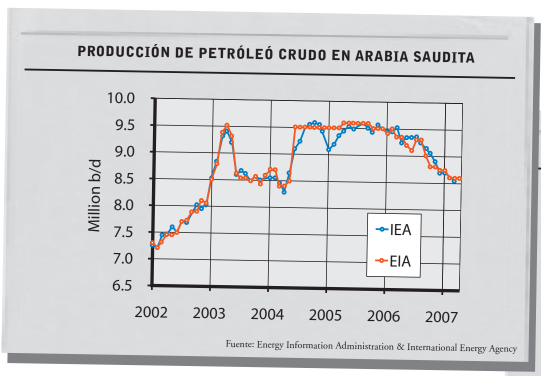
En esta unidad vas a analizar las representaciones gráficas de algunas funciones que ya conociste en unidades anteriores. Las actividades que se te plantean te permitirán seguir integrando los conocimientos que vas aprendiendo y así podrás desenvolverte cada vez con mayor seguridad y autonomía.

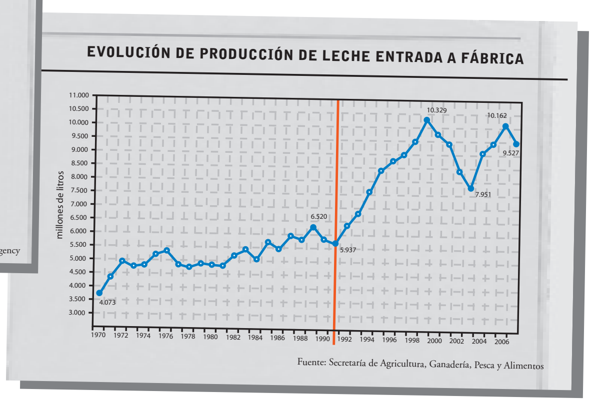
A 1. Comportamiento de funciones

En esta actividad vas a analizar el crecimiento de las imágenes en algunas funciones.

En libros, revistas y periódicos se presentan con frecuencia gráficos de funciones. Estos gráficos brindan mucha información acerca del comportamiento funcional; por eso es importante que aprendas a interpretarlas.

a) Cuando se desea mostrar la variación de un dato a lo largo de un período de tiempo, generalmente se usan segmentos y se unen los extremos de esos segmentos formando una poligonal. Se obtienen así gráficos lineales.





*Una función se caracteriza por tener una variable que puede tomar ciertos valores, llamada **variable independiente;** tiene una segunda variable que recibe el nombre de **variable dependiente**, cuyos valores dependen de los de la primera. Finalmente, además de las variables, una función tiene asociada una regla que permite asignar a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente.*

b) En las siguientes tablas de funciones, elegí dos elementos distintos del dominio, teniendo en cuenta que el primero sea menor que el segundo. Compará los respectivos valores correspondientes.
$g: N \rightarrow N \,/\, g(x) = x^3$

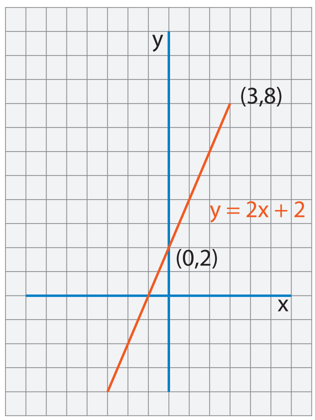
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

$f: Z \rightarrow Z \,/\, f(x) = 2x + 2$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12

Habrás observado que en estas funciones, siempre que se toman dos valores del dominio de modo que uno sea menor que el otro, entre las imágenes se mantiene el mismo sentido de la desigualdad. Por ejemplo si **a** y **b** son elementos del dominio de la función g(x) y **a** es menor que **b**, entonces g(a) es menor que g(b).

Por ejemplo, las funciones:
$g: N \rightarrow N \,/\, g(x) = x^3$ y **$f: Z \rightarrow Z \,/\, f(x) = 2x + 2$** son funciones crecientes porque al crecer los elementos del dominio también crecen las respectivas imágenes.



Por lo tanto se puede afirmar:
*Una función es creciente cuando para todo par de elementos **a** y **b** del dominio se verifica que si **a** es menor que **b**, entonces la imagen de **a** es menor que la imagen de **b**.*
*En símbolos: **a < b** **f(a) < f(b)**.*

c) A continuación analizarás si la función **valor absoluto** es, o no, una función creciente.

1. Leé la siguiente información que estudiaste en las unidades **1** y **2** del CUADERNO DE ESTUDIO **2**.

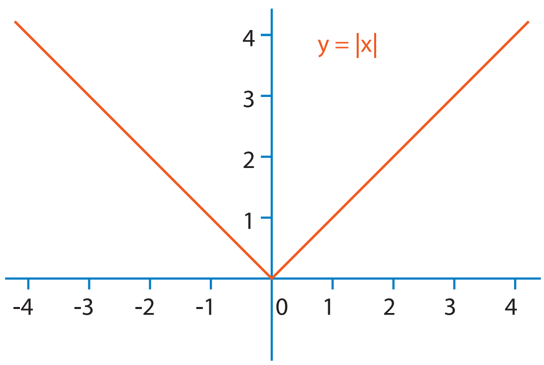
El valor absoluto de un número indica su distancia al número cero. Cualquier número, positivo o negativo, y su opuesto tienen el mismo valor absoluto porque tienen posiciones simétricas con respecto a 0. Por tratarse de una distancia, el valor absoluto es siempre positivo.

En los números racionales se define la función **h** que a cada número racional **x** le asigna su valor absoluto, es decir que **h** es una función racional con imágenes en los racionales positivos.

$h: Q \to Q^{+};\ h(x) = |x|$

2. Observá el gráfico que la representa y respondé:

- El número racional -2, ¿es mayor, menor o igual que -1,5? ¿Por qué?
- El valor absoluto de -2, ¿es mayor, menor o igual que -1,5? ¿Por qué?
- Si un número negativo **a** es menor que otro número negativo **b**, ¿qué signo tiene la desigualdad entre los correspondientes valores absolutos? Escribí la desigualdad.
- La función valor absoluto, ¿es creciente en el dominio de los números racionales negativos (Q^{-})? ¿Por qué?



El gráfico de la función valor absoluto muestra una pendiente negativa en el cuadrante de la izquierda y una pendiente positiva en el cuadrante de la derecha.

La función valor absoluto es decreciente en Q^{-} (racionales negativos) y creciente en Q^{+} (racionales positivos). Por ejemplo, -3 es menor que -0,5 y, en cambio, el valor absoluto de -3 es mayor que el valor absoluto de -0,5.

Es decir, que para dos números racionales negativos a y b, tales que $a < b$, los correspondientes valores absolutos no conservan el sentido de la desigualdad ya que $|a| > |b|$.

En símbolos: $-3 < -0{,}5$ y $|-3| > |-0{,}5|$ puesto que $3 > -0{,}5$.

La función $h(x) = |x|$ es decreciente en el dominio de los números racionales negativos y creciente para los números racionales positivos.

*Una función es **decreciente** cuando para todo par de elementos **a** y **b** del dominio se verifica que si **a** es menor que **b**, entonces la imagen de **a** es mayor que la imagen de **b**.*
En símbolos: $a < b \rightarrow f(a) > f(b)$.

d) Al estudiar las funciones de proporcionalidad aprendiste que:

*Si al doble, triple, cuádruple, etcétera, de cualquier valor de **x** le corresponde el doble, el triple, el cuádruple valor de **y**, entonces se trata de una función de proporcionalidad directa.*

1. Las funciones de proporcionalidad directa, ¿son funciones crecientes?
2. Justificá tu respuesta.

e) Buscá el gráfico de una función de proporcionalidad inversa, por ejemplo en la unidad **3** del CUADERNO DE ESTUDIO **2,** y decidí si es o no creciente aplicando lo que acabás de aprender sobre crecimiento de funciones. Si no lo tenés, podés buscar en un libro de la biblioteca del aula el gráfico de una función de proporcionalidad inversa, por ejemplo la gráfica de $k = \frac{y}{x}$ en la que **k** es un valor constante, y respondé:
1. Las funciones de proporcionalidad inversa, ¿son crecientes? ¿Por qué?
2. Para verificar si tu respuesta es correcta decidí si es o no creciente aplicando lo que acabás de aprender sobre crecimiento de funciones.

A

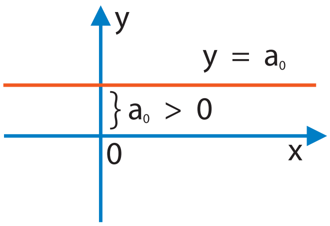
2. Gráficas de las funciones lineales

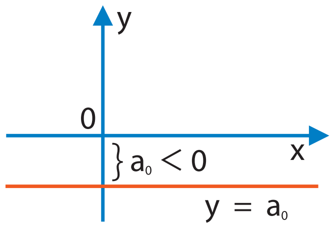
En esta actividad continuarás analizando gráficos de funciones lineales.

*En la actividad **3** de la unidad **4** de este Cuaderno trabajaste con funciones lineales y aprendiste que:*
- *Una función lineal está dada por una fórmula $f(x) = ax + b$.*
- *El gráfico de una función lineal es una recta de ecuación $y = a\,x + b$ en la que el número a es el valor de la pendiente y el número b es la ordenada al origen.*

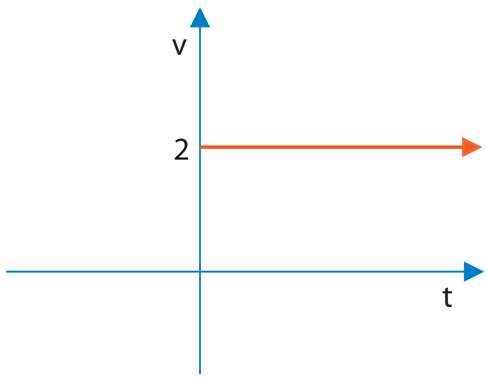
a) Representá la recta correspondiente a la función que le asigna como imagen a cualquier número racional el número 5, es decir $f: Q \rightarrow Q$; $f(x) = 5$.
1. ¿Qué valor tiene la pendiente de la recta?
2. ¿Cuál es la ordenada al origen de esa recta?
3. La gráfica, ¿corresponde a una función creciente? ¿Por qué?

Como acabás de comprobar:
Si una función está definida por la ecuación de una recta: $\mathbf{y = f(x) = a_0}$ (siendo a_0 una constante), se verifica que para todo par **a** y **b** del dominio, si $\mathbf{a < b}$ **es** $\mathbf{f(a) = f(b) = a_0}$.
La gráfica de esta función corresponde a una recta paralela al eje **x**, ubicada a_0 unidades por encima o por debajo del eje x dependiendo de que el signo de a_0 sea positivo o negativo.





Por ejemplo, al representar la velocidad $\left(\frac{\text{metros}}{\text{seg}}\right)$ de una partícula en función del tiempo (segundos), si se desplaza con una velocidad constante de 2 $\left(\frac{\text{metros}}{\text{seg}}\right)$, la gráfica que se obtiene es una semirrecta paralela al eje x ubicada a 2 unidades de distancia de ese eje.



Entonces,

Una función es constante si a todos los elementos del dominio les asigna la misma imagen $\boldsymbol{a < b}$ *es* $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$. *Una función constante no es creciente ni decreciente.*

b) Escribí tres funciones lineales que no sean constantes y sus correspondientes ecuaciones de rectas.

1. Señalá en cada ecuación la pendiente y la ordenada al origen.
2. Representá las tres rectas.
3. Indicá, en cada caso, cuál es el valor de **y** que corresponde al valor $x = 0$.

Entonces,

Se llaman ceros de una función ***f*** *a los valores* ***x*** *del dominio que satisfacen a la ecuación* $\boldsymbol{f(x) = 0}$.

c) Graficá la función $f(x) = 2x + 1$ indicando pendiente y ordenada al origen.

1. Buscá la intersección de la recta $y = 2x + 1$ con el eje x, reemplazando y por 0. Verificalo en el gráfico que hiciste.

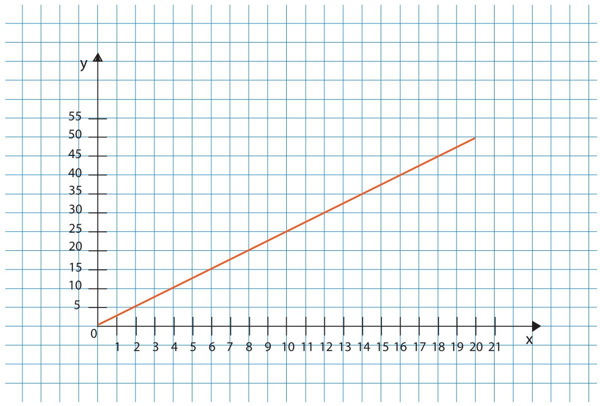
2. Los pares (2 , 5); (-1, 3), $(-\frac{1}{2}, 0)$ ¿son algunas de las posibles soluciones de la ecuación $y = 2x + 1$? ¿Por qué?

d) Escribí pares de valores que sean soluciones de cada una de las ecuaciones de las rectas que elegiste en la consigna **b**. ¿En qué punto cortan, cada una de esas rectas, el eje de las abscisas? ¿Y el eje de las ordenadas?

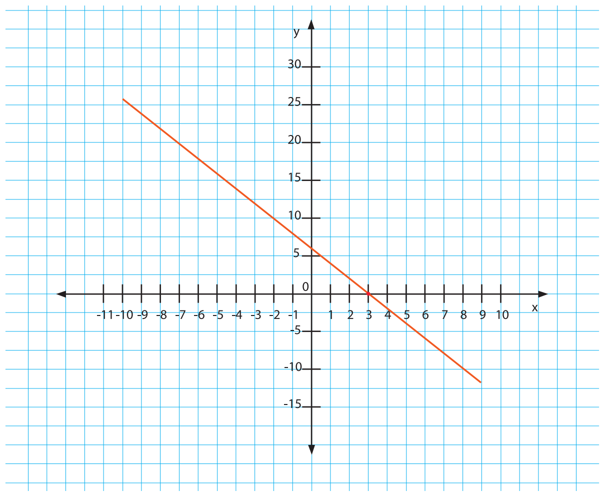
e) ¿Se pueden hallar los ceros de las funciones observando su gráfico sin usar la fórmula? Justificá tu respuesta y comparala con las de tus compañeros.

f) Buscá los ceros de las siguientes funciones lineales observando los gráficos y verificá tus respuestas usando las fórmulas.

1. Área de un triángulo de 5 cm de base en función de su altura:
$f(x) = \frac{5}{2}x$



2. $h(x) = 6 - 2x$ $\quad h: Q \rightarrow Q$



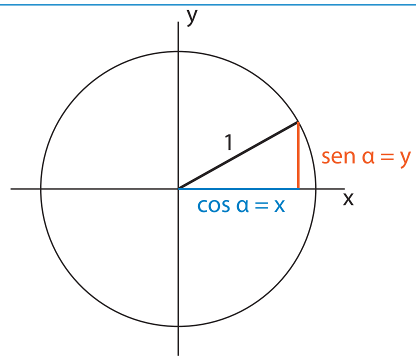
Hasta ahora analizaste el comportamiento de funciones lineales y aprendiste a distinguir funciones crecientes, decrecientes y constantes y cómo hallar analítica y gráficamente los ceros de una función.

3. Gráfica de funciones trigonométricas

En la actividad siguiente analizarás la representación gráfica de funciones trigonométricas realizando un estudio similar al que hiciste con las funciones anteriores.

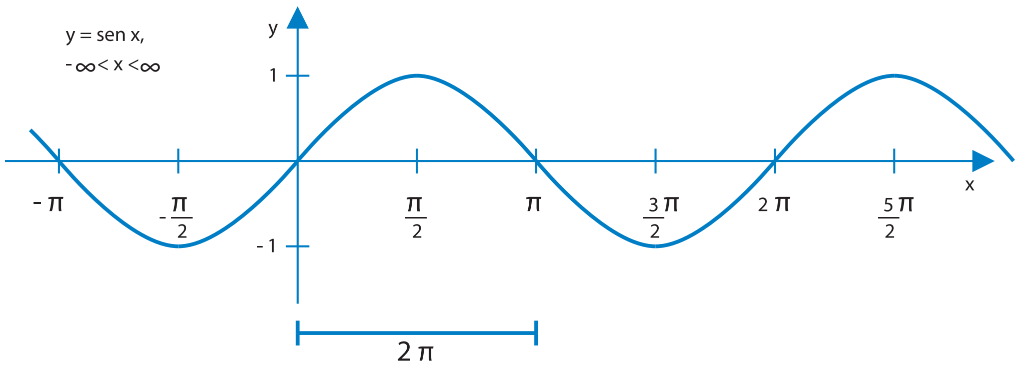
En la unidad **7** de este Cuaderno aprendiste que:

En una circunferencia trigonométrica el seno de un ángulo está dado por la medida de la ordenada del extremo de su lado libre, representada por el cateto opuesto al ángulo central.
Si un ángulo α está ubicado en el primero o segundo cuadrante, el seno de α es positivo y si pertenece al tercero o cuarto cuadrante, el seno de α es negativo.



a) La gráfica siguiente, en la que los ángulos se miden en radianes, corresponde a la función f(x) = sen x. Observá la gráfica y respondé en tu carpeta:

1. ¿Qué valor de x corresponde a un ángulo recto?
2. ¿Qué valor de x corresponde a un ángulo llano?
3. ¿Qué valor de x corresponde a un ángulo de un giro completo?
4. ¿Qué valor de x corresponde a un ángulo de 450°?



Habrás observado que si el lado móvil del ángulo gira en sentido contrario al de las agujas de un reloj, manteniéndose en el primer cuadrante, su ordenada va creciendo. Cuando el ángulo es recto $\left(\frac{\neq}{2}\right)$ la ordenada vale 1 y coincide con el radio de la circunferencia.

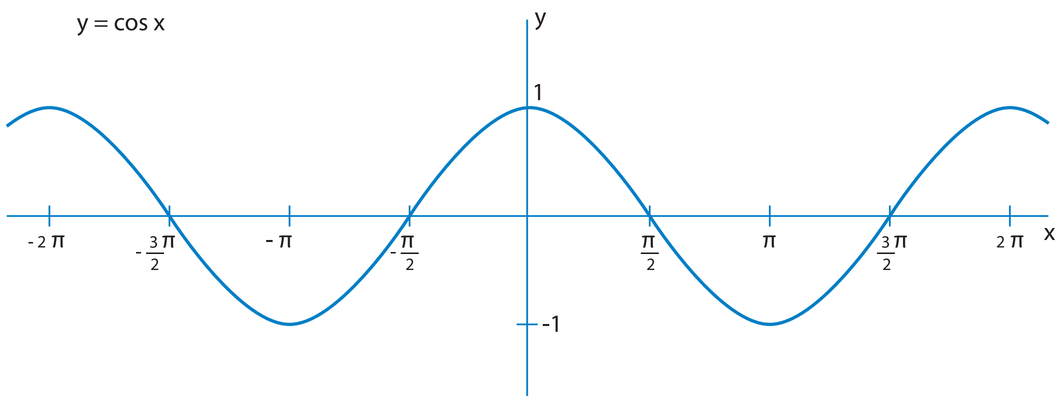
5. ¿Cuánto vale el seno del ángulo 0? ¿Y del ángulo ≠? ¿Y del ángulo $\frac{\neq}{2}$?
6. ¿Qué valores de **x** representan a los ángulos mayores que un giro completo?
7. ¿Qué valores de **x** son ceros de la función **sen x**?
8. ¿Cuál es la diferencia que existe entre dos ángulos para los que la función toma los mismos valores?
9. ¿Entre qué valores de **x** la función **sen x** es creciente?
10. ¿Entre qué valores de **x** la función **sen x** es decreciente?

b) A continuación se presenta una síntesis de las características de la función seno de un ángulo que se pueden observar a partir de la gráfica.

- La función circular **y = sen x** se puede representar en un sistema de ejes coordenados: en el eje **x** se representa la amplitud de los ángulos expresada en radianes y sobre el eje **y** el valor de la función.
- La representación de la función es una curva continua.
- El dominio de la función **y = sen x** es el conjunto de los números reales; los valores de las imágenes están comprendidos entre un valor mínimo (-1) y un valor máximo (+1), vale decir, que el conjunto imagen es el intervalo cerrado [-1, 1].
- La intersección con el eje **y** es el punto origen de coordenadas (0,0).
- Las intersecciones de la curva con el eje **x** son los puntos (-≠,0), (0,0), (≠,0), (2≠,0), …
- La función toma los mismos valores cuando entre los ángulos existe una diferencia de 2≠.

Esto significa que la función es periódica y que el período es 2≠.

c) Observá el gráfico correspondiente a la función **y = cos x** y repetí para esta función el análisis que hiciste en la consigna **a** para la función **y = sen x**. Además, observá cuánto hay que trasladar la función coseno para que su gráfica coincida con la de la función seno.



d) Teniendo en cuenta la síntesis la consigna **b**, elaborá con tus compañeros un breve informe acerca de las características de la función **coseno de x**.

Para finalizar

En esta unidad analizaste el comportamiento de algunas funciones que ya conocías y las clasificaste en crecientes, decrecientes o constantes y aprendiste a determinar analítica y gráficamente los ceros de distintas funciones.

Con estos nuevos conocimientos sobre funciones retomaste el análisis particular de las funciones trigonométricas.

También aprendiste que para interpretar la gráfica de una función conviene fijarse en:

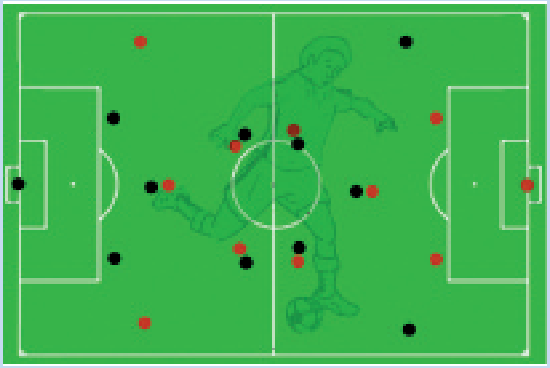
- cuáles son las variables y en qué unidades están descriptas;
- para qué valores está definida la función y para qué valores no tiene sentido;
- cuáles son los puntos notables: intersecciones con los ejes, máximos y mínimos;
- en qué intervalos la función crece o decrece.

Los gráficos de las funciones lineales y trigonométricas que analizaste tienen variadas aplicaciones en los medios gráficos, tecnológicos y científicos. Todas las ciencias actuales tratan de expresar ciertas características de los fenómenos estudiados en función de otras y cuanto más cuantitativo y medible sea este estudio, mayor será la utilidad de sus resultados.

Esta idea de función que hoy nos parece tan fácil y natural tardó varios siglos en constituirse a través del trabajo de grandes matemáticos y científicos. Tené siempre presente que las funciones describen fenómenos de cambio; su conocimiento te permitirá avanzar en el estudio de otros temas de Matemática y también en el de otras disciplinas.

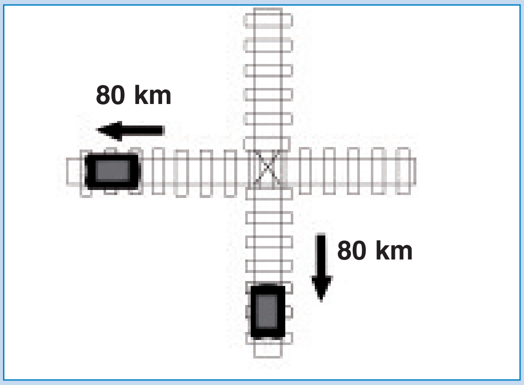
DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Equipos rivales



Dos equipos de fútbol A y B llevan jugados 13 partidos entre sí, jugando alternadamente en una y otra cancha. En 7 partidos el ganador fue el equipo local. El equipo A ganó 9 partidos en total. No hubo ningún empate.
¿Es posible saber con esta información en qué cancha se jugará el próximo partido?
En caso afirmativo, ¿en qué cancha se hará? Justificar la respuesta.

2. Trenes en movimiento



Dos trenes salen de una misma estación, uno hacia el Sur y el otro hacia el Oeste. ¿Qué distancia en línea recta los separa cuando cada uno lleva recorrido 80 kilómetros? ¿A qué distancia se encuentran de la estación de salida cuando ambos están a 100 kilómetros uno del otro y llevan recorridas distancias iguales?

3. Las monedas de Francisco

El abuelo le entregó a su nieto Francisco 15 monedas de un peso para que las acomodara formando pilas. Le dijo que, cuando terminara la tarea recibiría tantas monedas como el producto que resulta de multiplicar el número de monedas de todas las pilas. ¿Cómo puede Francisco organizar las pilas de monedas para obtener la mayor cantidad de dinero posible?