UNIDAD 11 Ecuaciones

En esta unidad vas a volver a trabajar sobre un tema aritmético. Vas a retomar el estudio de las ecuaciones como una introducción al Álgebra que comenzaste en la unidad 13 del CUADERNO DE ESTUDIO 2. La palabra "ecuación" viene del latín *æquare* que significa "igualar". Ya sabés que las ecuaciones son igualdades en las que hay que descubrir un número llamado *incógnita,* representado por una letra. Algunas veces las transformaciones necesarias para la resolución de una ecuación resultan evidentes. En otros casos, hay que hacer diferentes intentos antes de lograr el camino más adecuado.

Los resultados de la Matemática teórica y aplicada con frecuencia se influyen mutuamente. Es habitual que los descubrimientos de los matemáticos teóricos tengan un valor práctico que no había sido previsto por ellos. Por ejemplo, el estudio de las propiedades matemáticas de acontecimientos que ocurren al azar condujo al conocimiento que más tarde hizo posible mejorar el diseño de los experimentos en las Ciencias Naturales y en las Ciencias Sociales. En sentido inverso, al tratar de solucionar el problema del cobro justo a los usuarios del teléfono de larga distancia, los especialistas hicieron importantes descubrimientos sobre las matemáticas de redes complejas. La Matemática teórica no siempre está vinculada con el mundo real, pero a la larga contribuye a entenderlo mejor.

Se dice que el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático ya que las leyes físicas y químicas que explican el comportamiento de la materia están expresadas por fórmulas y ecuaciones. La riqueza del lenguaje simbólico radica en brindar la posibilidad de traducir los términos de un problema enunciado con palabras en expresiones algebraicas y así poder operar simbólicamente para resolverlo.

En esta oportunidad avanzarás en el estudio de las ecuaciones y de las estrategias para resolverlas.

TEMA 1: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

En las actividades de este tema vas a analizar los procedimientos que se deben seguir para encontrar el o los valores que son solución de una ecuación.

A partir de un problema enunciado o expresado verbalmente, se debe:

1. *Identificar qué se quiere averiguar y expresarlo como incógnita.*

2. *Plantear una* ***ecuación****, es decir, escribir una igualdad en la que esté comprendida la incógnita.*

3. *Resolver una ecuación* ***transformándola*** *en ecuaciones equivalentes y cada vez más sencillas, hasta encontrar el valor (o los valores) de la incógnita. A este proceso se lo llama* ***despejar la incógnita****.*

4. *Verificar que los valores encontrados sean soluciones de la ecuación planteada, es decir,* ***reemplazar la incógnita*** *por el valor (o los valores) hallado. Si se cumple la igualdad, entonces la solución de la ecuación será la respuesta al problema.*

*Si no recordás alguno de estos contenidos, tu docente te indicará qué actividades de la unidad **13** del CUADERNO DE ESTUDIO **2** te conviene revisar para estudiar el tema.*

A 1. Resolución de ecuaciones con una incógnita

En esta actividad explorarás distintos tipos de ecuaciones de primer grado y algunos métodos de resolución. Si bien los problemas pueden resolverse de diversas maneras, y a veces en forma intuitiva, en esta oportunidad vas a aprender un tipo de resolución que incluye las expresiones algebraicas, para seguir aprendiendo sobre ellas.

a) Leé el siguiente enunciado y analizá, paso a paso, las resoluciones a través de escrituras algebraicas que se presentan en el cuadro.

Una señora trajo de su huerta una cesta con manzanas. A una hija le dio la mitad más media manzana, a otra hija le dio la mitad de lo que le quedaba más media manzana y le quedó una manzana para ella. ¿Cuántas manzanas traía en la cesta?

	Manzanas que tiene en la cesta	Manzanas que entrega	Manzanas que le quedan
Una hija	x	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$	$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$
Otra hija	$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left[x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}$	1
Para ella	1	1	0

Si se suma el número de manzanas que le quedan a la madre y las hijas, el total de esa suma es la cantidad de manzanas que la madre tenía al principio en la cesta. Recurriendo a expresiones algebraicas es: $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ [x - (\frac{x}{2} + \frac{1}{2})] + \frac{1}{2} + 1 = x$

De este modo el problema quedó planteado en la forma de una ecuación que se puede resolver mediante sucesivos pasos o transformaciones.

Transformación aplicada	**Igualdad equivalente**
Ecuación por resolver:	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}+1=x$
Suprimir paréntesis:	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}+1=x$
Efectuar operaciones de adición:	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}+1=x$
Suprimir corchetes aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta:	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=x$
Quitar denominadores multiplicando ambos miembros por el menor denominador común entre 4 y 2:	$2x+2+x-1+6=4x$
Efectuar operaciones:	$3x+7=4x$
Sumar el opuesto en ambos miembros:	$3x+-3x+7=4x+-3x$
Sumar:	$7=x$

Cada uno de los pasos indicados permite transformar una ecuación en otra ecuación equivalente más sencilla. Se forma así una cadena de ecuaciones en la que la última es la solución de la ecuación porque brinda el valor de la incógnita.

b) Observen los dos primeros ejemplos de resolución de ecuaciones y resuelvan los demás.

I. $5x=30 \Rightarrow \frac{5x}{5}=\frac{30}{5} \Rightarrow x=6$

II. $x+\frac{1}{5}=\frac{4}{5} \Rightarrow x+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}-\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{3}{5}$

III. $x=(-2-9)\div 11$

IV. $x=12-x$

V. $5x=3+2x-3$

VI. $x^2=81$

VII. $12x-4=3x+5$

1. ¿En todas las ecuaciones tuvieron que efectuar las mismas transformaciones para despejar la incógnita?
2. ¿En todas obtuvieron como respuesta un único resultado?
3. Comparen el trabajo con el de sus compañeros.

Habrás notado que en las ecuaciones en que la incógnita está sólo en un miembro de la igualdad, por ejemplo en **I**, **II**, **III** y **VI**, la resolución es sencilla: se realizan los cálculos numéricos o bien se aplican las operaciones inversas de las indicadas respetando también el orden inverso en su aplicación.

Lo más importante es que cuando en una ecuación se opera en ambos miembros la misma transformación (ya se trate del opuesto aditivo o del inverso multiplicativo), se obtiene una ecuación equivalente.
Recordá que dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Por ejemplo, para resolver la ecuación:

-x + 13 = 5	se la puede transformar en:
-x + 13 + -5 = 5 + -5,	sumando a ambos miembros el opuesto aditivo de 5, luego operar la suma:
-x + 8 = 0	y por último sumar a ambos miembros el opuesto de **x**
-x + x + 8 = x	para obtener
8 = x	que es la solución de la ecuación.

2. Ecuaciones equivalentes

En la actividad anterior viste que para obtener una ecuación equivalente a otra se pueden aplicar algunas transformaciones a la ecuación original, por ejemplo, aplicar las propiedades de las operaciones directas.

Dada una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente si en cualquiera de los dos miembros de la igualdad original se efectúa alguna de las siguientes transformaciones o sus recíprocas:
1. *aplicación de una propiedad de las operaciones directas;*
2. *expresión de una multiplicación como suma abreviada;*
3. *expresión de una potenciación como una multiplicación reiterada.*

a) Copiá en tu carpeta la tabla siguiente. Revisá las transformaciones que figuran en el cuadro anterior e indicá si son del tipo 1, 2 o 3. Siguiendo los ejemplos que están resueltos, completá con la trasformación que se aplicó en cada caso y justificá tu decisión.

Igualdad original	Igualdad transformada	Transformación aplicada
$2 \cdot (b + d) = 7$	$(b + d) + (b + d) = 7$	Definición de multiplicación.
$2 \cdot (b + d) = 7$	$2b + 2d = 7$	
$a \cdot a \cdot a = 27$	$a^3 = 27$	Definición de potenciación.
$2 \cdot x – 3 = 3 \cdot (x + 2)$	$2 \cdot x – 3 = 3 \cdot x + 6$	Propiedad distributiva de la multiplicación.
$3 \cdot a + 2 \cdot a = -1$	$(3 + 2) \cdot a = -1$	Sacar factor común.
$2 \cdot 3 \cdot a \cdot 5 = -15$	$30 \cdot a = -15$	
$-x + 30 = -10$	$30 = -10 + x$	

b) En esta ecuación se usan números racionales no enteros.

$$\frac{2 - x}{6} = \frac{3x - 2}{3}$$

1. Resuélvanla en la carpeta, siguiendo las transformaciones que se indican en cada paso del cuadro.

Transformación a aplicar	Ecuación equivalente
Multiplicar ambos miembros por el inverso de $\frac{1}{6}$.	
Resolver $\frac{1}{3} \cdot 6$	
Aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación.	
Sumar en ambos miembros el opuesto de -4.	
Sumar en ambos miembros el opuesto de -x.	
Multiplicar ambos miembros por el inverso de 7.	
Verificar si $\frac{6}{7}$ es la solución de la ecuación.	

2. Comparen el trabajo con el de sus compañeros.
3. Escriban una breve conclusión orientándose por la siguiente pregunta: ¿Para resolver esta ecuación se podrían haber aplicado otras transformaciones diferentes de las que se indicaron? ¿Cuáles? Fundamenten la respuesta.

c) Resolvé las siguientes ecuaciones indicando lo realizado en cada paso y verificá las soluciones. Además indicá en cada caso qué ecuaciones tienen solución en el conjunto de los números naturales (N), en el conjunto de los números enteros (Z) y en el conjunto de los números racionales (Q). Justificá tus respuestas.

1. $8\,(x - 1) = 3.2^2$
2. $x = \frac{100}{x}$
3. $5x = 2x + \frac{11 \cdot 7}{26}$
4. $(x - 4) : 7 = (3x + 12) : 28$
5. $x + 9\,(x - 2) = 4 - 6\,(2 - 4\,x)$

d) Compará tus procedimientos con los de tus compañeros.

e) Transformá la siguiente ecuación para obtener el valor de **x**.

$$x = \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right) \cdot 8$$

Si operaste correctamente, con seguridad obtuviste $x - x = 4$; o sea $0\,x = 4$. Esta expresión no tiene solución porque no hay ningún número que multiplicado por 0 dé por resultado 4 ya que 0 es elemento absorbente en la multiplicación y por lo tanto, cualquier número multiplicado por 0 da 0.

A 3. Distintos caminos

Para lograr despejar una incógnita y hallar su valor numérico, las ecuaciones se pueden transformar en otras equivalentes, es decir, que tienen el mismo conjunto de soluciones. En esta actividad vas a comparar distintos caminos para resolver una situación usando símbolos algebraicos.

a) Leé el siguiente problema y resolvelo como te parezca. Verificá si el resultado es razonable, es decir, si el número de camisas estampadas que hallaste tiene sentido en este problema.

> En una tienda el precio de las camisas estampadas es de $150 y el de las lisas de $100.
> Cierto día se vendieron 30 camisas y lo recaudado fue $3600. Se desea saber cuántas camisas estampadas se vendieron ese día.

b) Te presentamos a continuación dos soluciones alternativas del mismo problema para que luego las compares con la tuya.

Solución 1

Se trata de encontrar una cantidad desconocida que es la cantidad de camisas de $150 a la que llamamos **x**.

- número de camisas de $150: **x**
- importe de las camisas de $150: 150 **x**.

Escribimos las otras cantidades del problema, empleando **x**:

- número de camisas lisas: 30 – **x**
- importe de las camisas de $100 = 100 (30 - **x**)

Traducimos al lenguaje algebraico la suma de ambos importes:

- 150 x + 100 (30 - **x**) = 3600

Solución 2

Si las camisas hubieran sido todas estampadas, el importe cobrado hubiera sido de 30 x _____ = 4500
Como se vendieron algunas camisas de $100 el importe fue menor. La diferencia es:_____ - 3600 = _____
Con cada camisa de $100 se recibieron $50 menos. Los $900 corresponden a tantas camisas como diferencias de $50. Para saber cuántas camisas lisas se vendieron se efectúa la división _____ : 50 = _____ ; luego si de las 30 camisas, _____ son lisas, las estampadas fueron 12.

1. Verificá que la solución de la ecuación sea adecuada al problema.
2. Resolvé la ecuación 150 x + 100 (30 - x) = 3600 y verificá el resultado que encuentres.
3. Compará tu resolución y las soluciones **1** y **2**. ¿Cuál te parece más clara?

e) Reunite con tus compañeros, comparen las diferentes resoluciones del problema planteado en la consigna **a**, revisen los comentarios que escribieron como conclusión en el punto **3** de la consigna **b** de la actividad **2** y escriban entre todos un comentario breve acerca de las posibilidades de resolución de problemas.

4. Más problemas

a) Resolvé los siguientes problemas.

1. Tres amigos vendieron una propiedad en \$200 000. ¿Cuánto le corresponde cobrar a cada uno sabiendo que cuando la compraron el primero puso el doble que el segundo y este el triple que el tercero? (Ayuda: llamá x a la cantidad que le corresponde al tercero).
2. De un tanque de combustible se gastó la mitad del contenido, después la mitad de lo quedaba y aún restan 36 litros. Calculá la capacidad del tanque.
3. El docente le dice a un niño que agregue 12 a un número dado y divida el resultado por 13. Pero el niño, que no presta atención, resta 13 del número dado y divide el resultado por 12. Lo extraño es que obtiene la respuesta correcta. ¿Cuál es el número dado?

b) Sustituí la **x** por su valor para decidir a qué ecuación corresponde cada una de estas soluciones: -3, 2, 4, 0. Justificá tus respuestas.

$2 = (2x + 5)(x + 1)$ $\quad$ $2{,}5 + 3x = 2x + 3{,}5$

$18 = 10x - 6$ $\quad$ $3x^2 - 6 = (x - 3)(2 + x)$

5. Reglas para obtener ecuaciones equivalentes

En la resolución de problemas aplicaste ecuaciones y pusiste en práctica muchas de las propiedades de las operaciones con las que trabajaste en la unidad **8** de este Cuaderno. El siguiente listado de reglas es una herramienta que te va a facilitar la resolución de ecuaciones, te conviene tenerlo siempre a mano.

a) Reunite con tus compañeros para leerlo. A medida que avancen en la lectura busquen ejemplos para ilustrar cada una de las reglas. Si les parece conveniente, copien las reglas en un papel afiche y péguenlo en la pared del aula.

1. En una multiplicación se puede cambiar el orden de los factores.
2. En un producto se puede omitir el signo • (“por”): **a • b** = **ab**.
3. La factorización o extracción del factor común **ax + bx = (a + b)x** permite pasar de una expresión con **x** como sumando a una expresión que tiene **x** como factor.
4. En una adición se puede aplicar la propiedad conmutativa de la adición a expresiones algebraicas: $x + 2 + y = y + x + 2$.
5. Se puede transformar una sustracción en adición: **a - b = a + (-b)**, por ejemplo: $3 – 5 = 3 + (-5)$.
6. El opuesto de una suma se puede escribir como la suma de opuestos:
-(a + b) = (-a) + (-b) = -a – b; por ejemplo: $-(4 + 6) = -4 + -6 = -4 – 6$
7. Aplicar la distributividad de la multiplicación sobre el producto **x (a + b) = x a + x b** permite transformar un producto con x como uno de sus factores en una suma de términos en x.
8. La misma estrategia se repite con el cociente: **(a + b) ÷ x = a ÷ x + b ÷ x**.
9. El número 1 es neutro para el producto y el cociente: **1 • x = 1 x = x** y también **x ÷ 1 = x**.
10. El número 0 es absorbente en el producto: **0 • x = x • 0 = 0**.

TEMA 2: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON LA CALCULADORA

Aunque se puede trabajar haciendo los cálculos con lápiz y papel, resulta muy útil aprender a usar la calculadora para resolver una ecuación, por ejemplo, cuando los números son muy grandes o cuando se necesita obtener el resultado rápidamente. Los métodos consisten en aproximarse a la solución reemplazando sucesivamente la **incógnita** por valores que se acerquen cada vez más al valor solución. Verás un método de **iteración** y otro de **tanteo**.

a) Vas a analizar el método llamado de **iteración** a partir de un problema enunciado en el Papiro de Rhind. Actualmente, este papiro se encuentra en el Museo Británico. Es un documento que fue escrito en Egipto en el año 1650 a.C. y contiene 87 cuestiones básicas de matemática. Comienza con la frase: "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios". El enunciado dice:

"Un montón y una séptima parte de este es igual a 24."

Esta ecuación se puede resolver por el método de iteración.
Vas a representar con una **x** al llamado montón. En lenguaje algebraico se escribe: $x + \frac{1}{7}x = 24$

En el primer paso se despeja una de las **x**: $x = 24 - \frac{1}{7}x$

En el segundo paso se da a **x** un valor cualquiera como una primera aproximación al valor verdadero. No importa si la aproximación es buena o no. Se elige aquí, por ejemplo, x = 10 y sustituimos 10 sólo en el segundo miembro de la igualdad, para calcular el resultado que se obtiene para **x** en el primer miembro: $x = 24 - \frac{1}{7}10$

Para resolverlo con la calculadora elemental se puede efectuar: $-10 \div 7 + 24$ y se obtiene:
x = 22,571429 que se toma como segunda aproximación de **x**.
Este valor x = 22,571429 se sustituye en el segundo miembro de la igualdad y se obtiene así $x = 24 - \frac{1}{7}22{,}571429$ y al resolver con la calculadora: x = 20,775511.

Se continúa iterando el mismo proceso con sucesivas aproximaciones.
En este caso las aproximaciones de **x** fueron:

Primera (valor inicial):	10
Segunda	22,571429
Tercera	20,775511
Cuarta	21,03207
Quinta	20,995419
Sexta	21,000655
Séptima	20,999907

Los valores que se obtienen se aproximan cada vez más al número 21. Por tanto x = 21 es la solución de $x + \frac{1}{7}x = 24$; porque $21 + \frac{1}{7}21 = 24$.

b) Ahora vas a analizar el método de **tanteo**. Se usa cuando se tiene una idea aproximada del valor de la solución.

Por ejemplo, para calcular el valor de **a**: $\mathbf{a}^3 = 2$, se sabe que **a** debe ser un número entre 1 y 2, es decir $1 < \mathbf{a} < 2$ puesto que $1^3 = 1$ y $2^3 = 8$. Se puede tomar por ejemplo, el primer valor de la aproximación como: **a** = 1,5 entonces $1{,}5^3 = 3{,}375$. Este número es mayor que 2, por lo tanto 1,5 es mayor que la solución

Para acercarnos al valor verdadero de **a**, debemos tomar un número menor comprendido entre 1 y 1,5 por ejemplo 1,2: 1,23 = 1,728.

En la siguiente tabla se registran los valores aproximados.

a está entre	**Valor aproximado**	**Cubo del valor aproximado**	**El valor aproximado de a es**
1 y 2	1,5	3,375	Mayor que x
1 y 1,5	1,2	1,728	Menor que x
1,2 y 1,5	1,3	2,197	Mayor que x
1,2 y 1,3	1,25	1,953125	Menor que x
1,25 y 1,3	1,26	2,000376	Casi igual que x

Después de los cinco pasos realizados se obtiene el número 1,26 cuyo cubo es 2,000376, muy próximo a 2. Es decir, que **a** es aproximadamente 1,26.

c) Usá los procedimientos que aprendiste para resolver con la calculadora.

1. $x^2 = 5$ **2.** $b^3 = 6$ **3.** $y = \wp\overline{3}$

El trabajo algebraico sobre expresiones que vinculan números y letras —constantes y variables— permite operar con ellas para determinar los valores de las variables que verifican una igualdad. Los diversos caminos que facilitan la resolución de ecuaciones ponen de relieve que se pueden transformar las ecuaciones en otras equivalentes, es decir, que tienen el mismo conjunto de soluciones, hasta lograr "despejar" la incógnita y hallar su valor numérico.

Conviene destacar que cuando se aplica a un miembro de la igualdad un opuesto aditivo o el inverso multiplicativo de un número, para que se mantenga la igualdad es necesario aplicarlo a ambos miembros y operar convenientemente en cada uno aplicando las propiedades de las operaciones involucradas.

Para finalizar

En esta unidad dedicada al Álgebra analizaste los posibles pasos que deberías seguir para resolver una ecuación que tiene una única incógnita, desde el planteo hasta llegar a la verificación que te permite asegurar la razonabilidad del resultado obtenido. También aprendiste que la calculadora puede funcionar como una herramienta potente para resolver ecuaciones por iteración o por sucesivos tanteos.

Este tipo de trabajo cobra sentido cuando la expresión algebraica sobre la que se trabaja resulta de la formulación de un problema planteado en lenguaje coloquial y se la va transformando en otras expresiones equivalentes para poder encontrar la solución del problema. En síntesis, las ecuaciones constituyen una herramienta muy valiosa para la resolución de problemas, tanto de la Matemática como de otras ciencias.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Los negocios de Juan

Juan hace negocios con objetos usados. En una ocasión compró dos sillones y a la semana siguiente los vendió a 60 pesos cada uno. Si al vender uno ganó el 20% y al vender el otro perdió el 20 % ¿Ganó, perdió o recuperó lo que había pagado por ambos sillones?

2. Los cálculos de Mora

La pequeña Mora se queja de la vida que lleva porque dice: “Duermo ocho horas al día y eso hace 2920 horas, que son 122 días al año. Los sábados y los domingos suman 104 días más. Si dedico tres horas al día a las comidas, son otros 45 días. Las vacaciones de verano duran 65 días y, si me concedo 2 horas al día para ver la tele y otras distraccciones, eso supone 30 días. Y todo esto sin incluir las fiestas de fin de año”. ¿Qué resultado dan los cálculos de Mora? ¿Qué falla en el razonamiento de Mora?

3. Sudoku

En la unidad **5** de este Cuaderno resolviste algunos rompecabezas numéricos llamados sudokus. El objetivo del juego es colocar en los cuadrados vacíos los números que faltan de modo que en cada cuadro de 3 × 3 estén todos los números del 1 al 9, con la condición de que cada número aparezca solamente una vez en cada fila horizontal y en cada columna vertical del cuadro 9 × 9.

					7			4
	1	8	6		4		7	
9		4			1	3		
8		9				7	1	4
3				1	6			2
	2	1						6
		6	2			5	8	
7	8		1	9			3	
			7	6	8			

	6	7	5		2			
5		1		3				
	9					4		
4			6		7	8	1	
	7	6	3		1			9
		5					2	
				5		3		4
			2		3	9	6	