UNIDAD 10 Teorema de Tales

En esta unidad trabajarás con rectas paralelas y con la proporcionalidad entre segmentos.

El camino que recorrerás comienza con la revisión de la noción de medida para aplicarla luego a la razón entre dos segmentos cualesquiera y, más adelante,a la proporcionalidad entre cuatro segmentos. Por último verás la proporcionalidad entre segmentos que están ubicados sobre dos rectas que atraviesan un conjunto de rectas paralelas. Este último caso fue observado y analizado desde la Antigüedad y dio origen a lo que hoy se conoce como Teorema de Tales. Tales fue uno de los siete sabios de Grecia que vivió entre los siglos VII y VI a.C. Ese teorema es uno de los más antiguos y tiene vigencia hasta hoy porque sus aplicaciones son múltiples, tanto en problemas específicos de la Matemática como de otras ciencias y también en la arquitectura y en el arte.

TEMA 1: RAZONES Y PROPORCIONES ENTRE SEGMENTOS

En unidades anteriores trabajaste con razones entre números. Entonces, parece apropiado preguntarse si también para representar relaciones cuantitativas entre segmentos es posible recurrir a las razones entre sus longitudes, medidas con una misma unidad. Las actividades que siguen te permitirán indagar acerca de razones y proporciones geométricas entre las medidas de segmentos.

A

1. La razón entre dos segmentos

Para hallar la razón entre dos segmentos cualesquiera primero vas a revisar el concepto de **medida** y el de **razón**.

!

*Recordarás que cuando se expresa el valor de una cantidad, la **medida** es el número que acompaña a la unidad elegida. Por ejemplo, cuando se dice que el largo de un lápiz es de 19,5 cm, eso quiere decir que la unidad elegida (1 centímetro) entra 19 veces y media en la longitud del lápiz. Entonces 19,5 es la medida del lápiz expresada en la unidad centímetro. También aprendiste que para hallar la **razón** entre dos cantidades se efectúa el cociente entre sus medidas que deben estar expresadas en una misma unidad. Por ejemplo, la relación entre las distancias de una ciudad a otras dos se puede expresar mediante una razón. Por ejemplo, la distancia de la ciudad de Santa Rosa a Comodoro Rivadavia es de 1288 km y la distancia de Santa Rosa a Córdoba, 644 km. Esa relación se expresa:* $\frac{1288 \text{ km}}{644 \text{ km}} = 2$

El número 2 es la razón entre ambas distancias e indica el número de veces que la distancia menor está contenida en la mayor.

a) En primer lugar, calculá la razón entre los dos segmentos que aparecen en la imagen.

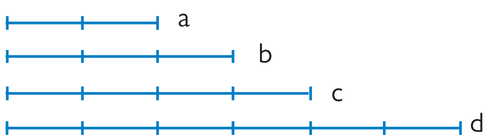
b) Respondé en tu carpeta:
  1. ¿Cúal es la medida de **a** y de **b** si se elige como unidad el centímetro?
  2. ¿Cuál es la razón entre sus medidas?
  3. Repetí el cálculo de la razón empleando como unidad de medida el milímetro y luego el decímetro.
  4. ¿Cuál es tu conclusión?

Como habrás comprobado, en todos los casos la razón es 4. Es decir que aunque cambie la unidad elegida para medir ambos segmentos, el segmento **b** entra 4 veces en el segmento **a**. En consecuencia, se puede afirmar que la razón de dos segmentos es igual a la razón de sus medidas expresadas en una misma unidad.

2. Proporcionalidad entre segmentos

Para explorar la proporcionalidad de segmentos vas a trabajar con dos pares de segmentos dados, pero en un cierto orden. Esto significa que de los cuatro segmentos se compara la razón entre los dos primeros con la razón entre los dos últimos.

a) Los cuatro segmentos dibujados a continuación son: **a, b, c, d**.
  1. Calculá la razón entre los segmentos **a** y **b**.
  2. Calculá la razón entre los segmentos **c** y **d**.



  3. Compará las razones que obtuviste en los puntos **1** y **2**.
  4. Escribí la igualdad de las razones como una proporción.

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Cuatro segmentos ordenados **a, b, c, d**, forman una proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos. En símbolos **a, b, c, d** son proporcionales si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$.

La proporción $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ también se puede indicar mediante la expresión $\mathbf{a} \div \mathbf{b} = \mathbf{c} \div \mathbf{d}$.

Debido a la ubicación de los elementos al escribir la proporción, **a** y **d** se llaman **extremos** y **b** y **d** se llaman **medios**.

b) Dibujá cuatro segmentos **a, b, c, d** cuyas longitudes estén en relación $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$= . Indicá la longitud de cada uno en decímetros o en centímetros. Recordá que tenés que elegir la misma unidad de longitud para medir los cuatro segmentos.

c) Dibujá dos segmentos cualesquiera **m** y **r**. Dibujá otros dos segmentos **s** y **p** que sean proporcionales a **m** y **r**.

1. Escribí la proporción en símbolos y luego en forma numérica.

d) Calculen la longitud que tiene el segmento **t** sabiendo que **q, e, n, t** forman una proporción y que las respectivas longitudes son: **q** = 2,5 cm, **e** = 5 cm y **n** = 3,5 cm.

1. Hallen la longitud del segmento **t**.
2. Dibujen, cada uno en su carpeta, los cuatro segmentos.
3. Comparen el trabajo con los de otros compañeros y si tienen dudas consulten con el docente.

Para la actividad siguiente necesitarás lápiz, regla graduada, hojas lisas y hojas rayadas.

3. Propiedad de los segmentos entre paralelas

Hasta aquí comparaste segmentos proporcionales ubicados en el plano en cualquier posición. Lo que aprendiste sobre proporcionalidad de segmentos te va a servir para explorar las relaciones entre segmentos ubicados sobre dos rectas que atraviesan a un conjunto de rectas paralelas.

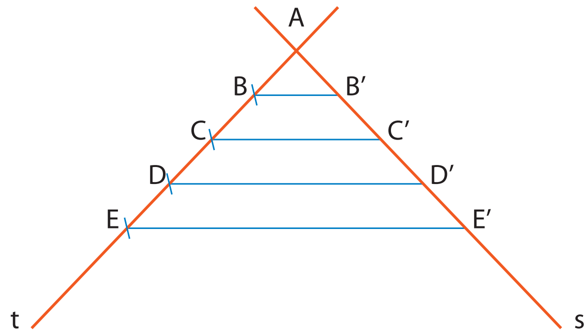
a) Tomá una hoja lisa y dibujá en ella dos rectas **s** y **t** que se corten en un punto A.

1. Marcá sobre **s** cuatro puntos ubicados cada 2 cm a partir de A y llamalos B, C, D, E.
2. Marcá sobre **t** un punto B'.
3. Marcá una recta **b** que pase por B y y por B'. Trazá rectas **c, d** y **e** paralelas a la recta **b** por los puntos C, D y E y llamá C' , D', E' a los puntos en los que cortan a la recta **t**. Quedan determinadas varias paralelas cortadas por dos transversales.
4. Releé los criterios de semejanza entre triángulos que aprendiste en la consigna **e** de la actividad **6** de la unidad anterior y respondé.

- ¿Te parece necesario medir los segmentos AB', B'C', C'D', y D'E' para verificar que son iguales? ¿Por qué?

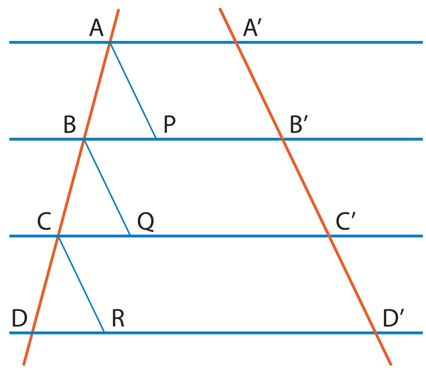
Si varias rectas paralelas son cortadas por dos transversales a **segmentos iguales** en una de ellas **corresponden segmentos iguales** en la otra.

En la construcción anterior se te indicó que tomaras segmentos de 2 cm. Pero la igualdad entre los segmentos determinados sobre las dos transversales por un conjunto de paralelas se puede generalizar a las situaciones en las que los segmentos tienen cualquier longitud mediante recursos geométricos; la condición es que los segmentos que están sobre la misma recta sean iguales.



b) Observá que en la siguiente figura cuatro rectas paralelas determinan segmentos iguales sobre una recta: AB = BC = CD; los puntos A', B', C' y D' son las intersecciones de las mismas paralelas con otra recta transversal y los segmentos AP, BQ y CR son paralelos a A'D'.

1. ¿Qué clase de cuadriláteros son AA'B'P, BB'C'Q y CC'D'R? ¿Por qué?
2. Se puede asegurar que A'B', B'C', C'D' son iguales? ¿Por qué?
3. Si las dos transversales fueran rectas paralelas, ¿se cumpliría la condición de igualdad entre los segmentos? ¿Por qué?



Esta propiedad de igualdad entre los segmentos determinados por un conjunto de paralelas sobre dos rectas transversales se puede enunciar mediante la siguiente expresión:

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos iguales sobre una recta transversal, también determinan segmentos iguales sobre cualquier otra recta transversal.

La expresión anterior se conoce como ***condición previa para el Teorema de Tales****. Es una propiedad muy importante en Geometría porque sus aplicaciones permiten resolver interesantes cuestiones, por ejemplo, la partición de un segmento.*

Para la siguiente actividad vas a necesitar papel de calcar o transparente, hojas rayadas, regla, compás y lápiz.

4. División de un segmento en partes iguales

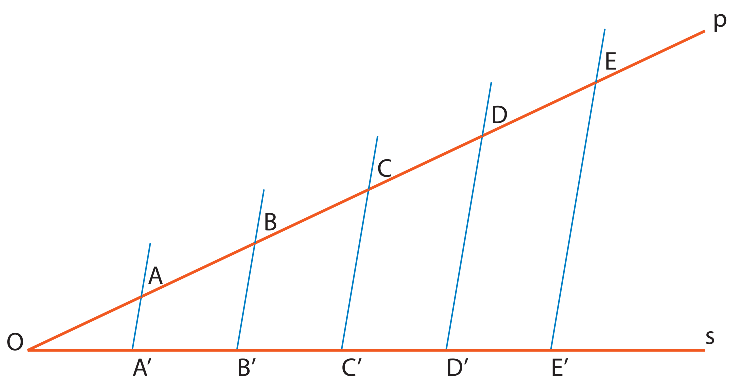
Muchas veces se necesita dividir un segmento en partes iguales, o bien, es necesario determinar una fracción de un segmento. La propiedad de los segmentos entre paralelas permite encontrar respuesta a estos dos tipos de problemas.

a) Para dividir el segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ en 5 partes iguales, segui el siguiente procedimiento:

1. Dibujá el segmento **AB** en un papel transparente.
2. Tomá una hoja rayada, superponé el dibujo del segmento **AB** sobre la hoja rayada de manera tal que el extremo A se apoye en un renglón y B en otro renglón que esté a cinco espacios del primero.
3. Marcá sobre el segmento los puntos de intersección con cada renglón.
4. ¿Cómo son las cinco partes en que queda dividido **AB**? ¿Por qué?

b) Para la división de un segmento cualquiera en partes iguales también se puede seguir otro procedimiento geométrico.

1. Dibujá un segmento cualquiera **s**. Trazá una semirrecta con origen O en uno de los extremos del segmento **s** y con la ayuda del compás marcá sobre ella 5 puntos a igual distancia, llamalos A, B, C, D y E.
2. Uní E con el otro extremo de **s** que llamarás E´.
3. Trazá por A, B, C y D paralelas a EE' que corten al segmento **s** en A', B', C' y D'.
4. ¿Los segmentos determinados sobre OE' son iguales? ¿Por qué?



5. Repetí el ejercicio sobre otro segmento **p** = **s** tomando la semirrecta de origen O con distinta inclinación, ¿los puntos A', B', C' y D' sobre **p** están en la misma posición que en el segmento **s**? ¿Por qué?

Habrás comprobado que la solución del problema de dividir un segmento en partes iguales no depende de la semirrecta auxiliar que se trace ni de la longitud de los segmentos iguales que se determinen sobre esa semirrecta, sino de la condición previa para el Teorema de Tales que aprendiste en la actividad **3**.

c) Para aplicar lo que aprendiste realizá la división de un segmento **AB** en dos segmentos, **AC** y **CB** tales que **AC** $= \frac{2}{7}$ **AB**.

d) El segmento **CB** que dibujaste en la consigna anterior, ¿qué parte es del segmento **AB**? ¿Por qué?

> Observá que en la copnsigna **b** de esta actividad seguiste un procedimiento geométrico que también se puede aplicar cuando se trata de encontrar una fracción de una longitud dada, como en el caso **c**.

Hasta ahora trabajaste con rectas paralelas que cumplen con la condición previa del **Teorema de Tales** en la que las rectas paralelas se encuentran a igual distancia entre sí. En el tema siguiente verás el Teorema de Tales que avanza en la generalización de la propiedad cuando las rectas paralelas se encuentran a cualquier distancia entre ellas.

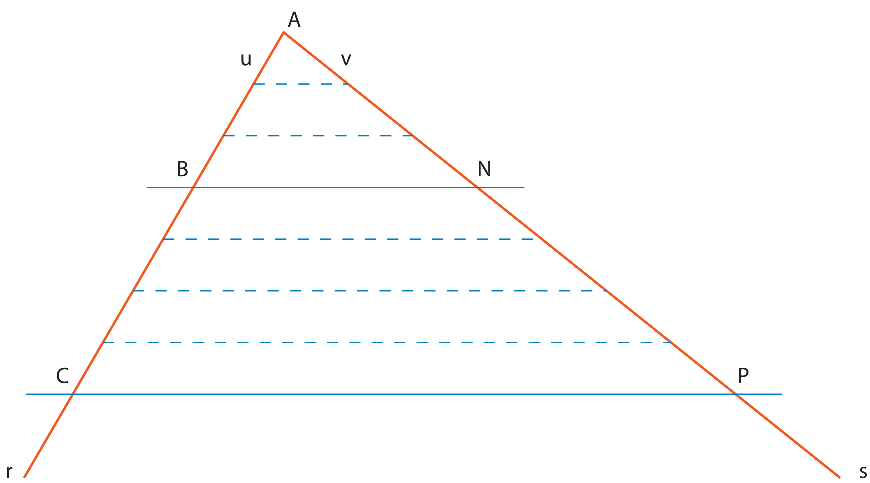
TEMA 2: TALES DE MILETO

A partir de observar el paralelismo con que los rayos del Sol llegan a la Tierra, el gran filósofo griego Tales de Mileto (624-547 a. C.) aplicó esa condición de paralelismo para efectuar mediciones que hasta ese momento parecían imposibles de realizar. Las siguientes actividades te permitirán comprender las relaciones establecidas por Tales.

A

5. Teorema de Tales

a) Observá las rectas paralelas cortadas por las transversales **s** y **r** que se muestra en la figura. Los segmentos sobre la recta **r** son iguales a **u** y los segmentos de la recta **s** son iguales a **v**.



1. Tomando **u** como unidad de medida en **r** el valor de *AB* es igual **3u** y el de *BC* es **4u**.
$\overline{AB} = 3u$ $\overline{BC} = 4u$

2. Escribí los valores de los segmentos **AN** y **NP** tomando como unidad **v**.

3. Calculá las razones $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}}$ y $\frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{NP}}$, ¿forman una proporción? ¿Por qué?

4. Escribí la razón que forman los segmentos **AB**, **BC**, **AN** y **NP**.

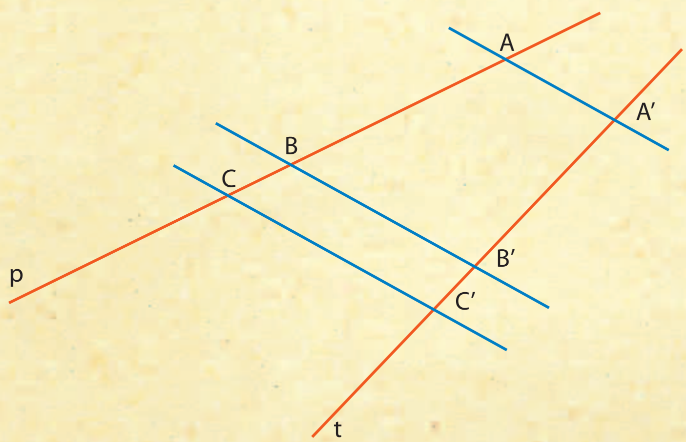
5. ¿En qué relación están los segmentos **AB** y **AC**? ¿Los segmentos **AB**, **AC**, **AN** y **AP** son proporcionales?

6. ¿Pensás que si hubieras tomado una unidad diferente que **u**, los segmentos dejarían de ser proporcionales? ¿Por qué?

Las expresiones $\frac{AB}{BC} = \frac{AN}{NP}$ y $\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AP}$ ponen en evidencia la relación de proporcionalidad entre los segmentos ubicados sobre las rectas **r** y **s**.

Este es el enunciado del teorema que hizo famoso a Tales de Mileto:
Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados sobre la otra transversal.

Por ejemplo, los segmentos *AB* y *BC* determinados sobre la recta **p** son proporcionales a los segmentos correspondientes *A'B'* y *B'C'* determinados sobre **t**. Es decir que $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$



También se cumple la **propiedad recíproca** del Teorema de Tales. O sea, que a partir de la proporcionalidad entre segmentos sobre las transversales surge como consecuencia el paralelismo entre las rectas determinadas por sus extremos.

b) Para comprobar la propiedad recíproca del Teorema de Tales trabajarás con un ejemplo.

1. Dibujá en una hoja lisa dos rectas que se corten en un punto A y llamalas **m** y **t**.

2. Marcá sobre **m** dos segmentos consecutivos **AB** y **BC** que estén en una cierta relación, por ejemplo $\frac{2}{3}$, y marcá sobre **t** otros dos segmentos **AB'** y **B'C'** que estén en la misma relación que **AB** y **BC**, por ejemplo **AB** = 3 cm; **BC** = 5 cm; **AB'** = 1,5 cm; **B'C'** = 2,5 cm.

3. Trazá una recta que pase por los puntos B y B' y otra recta por los puntos C y C', ¿resultan paralelas? ¿Por qué?

4. ¿Ocurrirá lo mismo con cualquier otra cuaterna de segmentos proporcionales?

A

6. Aplicaciones del Teorema de Tales

En la actividad **4** dividiste un segmento en partes iguales aplicando la condición previa del Teorema de Tales. Ahora la aplicación de este teorema te permite lograr geométricamente la división de un segmento en dos partes que guarden entre sí una determinada razón.

a) Usando una hoja rayada y un papel transparente dividí un segmento **PQ** de 9 cm de longitud en dos partes respectivamente proporcionales a 3 y 4 (en el punto a de la actividad **4** resolviste un problema parecido).

1. Explicá brevemente cómo procediste para dividir el segmento.

2. Consultá con tu docente acerca de tu procedimiento.

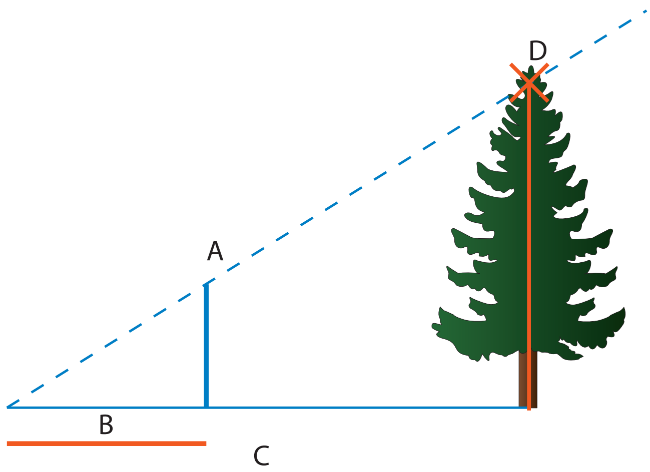
b) Usá los mismos recursos que aplicaste en la consigna anterior para determinar geométricamente un segmento **x** que sea el cuarto proporcional de otros tres segmentos. Es decir, que cumpla la proporción $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{x}$, por ejemplo, para AB =3cm, BC = 4cm y AM = 4,5cm.

c) Otra aplicación interesante del Teorema de Tales es emplear la propiedad para medir la altura de un árbol o de un objeto cualquiera a cuyo extremo no se puede acceder.

1. Observá el gráfico en el que:
- D es la altura de un árbol a medir;
- C es la longitud de la sombra del árbol en un momento dado;
- A es la altura conocida de otro objeto, por ejemplo, una persona;
- B es la longitud de la sombra de la persona en ese mismo momento.

2. ¿Es cierto que la fórmula $D = \left(\frac{A}{B}\right)$ permite calcular la altura real del árbol? ¿Por qué?

3. Luego de resolver esta actividad, compará con tus compañeros las jus-



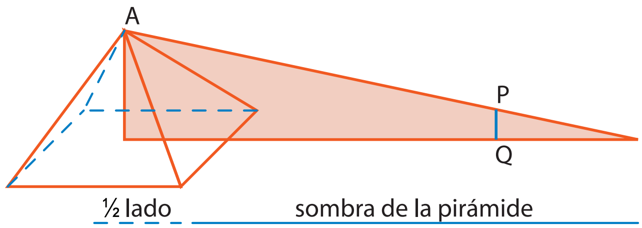
tificaciones que elaboraron y redacten entre todos una breve síntesis.

d) Para medir la altura de una pirámide, Tales colocó un bastón *PQ* en posición vertical de modo que la sombra del bastón terminase en el mismo lugar que la sombra de la pirámide como se ve en el gráfico.

Analizá el procedimiento que utilizó Tales y respondé:

1. ¿Qué proporción planteó Tales?

2. ¿Qué segmentos de los que intervienen en la proporción pudo medir de manera directa?



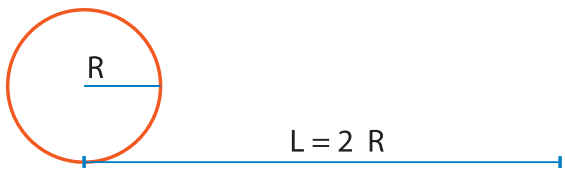
Lo interesante del Teorema de Tales es que se puede aplicar para buscar segmentos proporcionales cuando la razón es cualquier número y eso incluye los números irracionales.

e) Del mismo modo que construiste segmentos proporcionales en los que las razones son números naturales o números fraccionarios, en este ejercicio la razón es un número irracional porque interviene ≠.

Para rectificar una curva dibujada hay que pensar en un segmento de recta de la misma longitud que la curva tal como hiciste en la unidad **14** del Cuaderno de estudio **1** con la circunferencia.

En esta figura, la circunferencia ha sido rectificada, vale decir, que el segmento L tiene igual longitud que la circunferencia de radio R.

1. Calcá este gráfico y dibujá lo necesario para aplicar el Teorema de Tales de modo que encuentres el radio de una circunferencia de 10 cm de longitud.



2. Dibujá con compás la circunferencia que es la respuesta del problema.

3. Explicá cómo lograste llegar a la solución.

4. Consultá con tu maestro y con tus compañeros sobre la solución que obtuviste y el camino seguido para ello.

Si querés comprobar que tu construcción sea correcta, podés medir los segmentos que forman proporción. Salvando los errores que naturalmente se cometen al trabajar con instrumentos de geometría, la razón entre el radio y la circunferencia es $\frac{1}{2\pi}$.

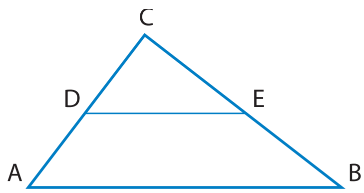
7. El Teorema de Tales y la semejanza de triángulos

a) Leé el siguiente texto en el que se enuncian las consecuencias del Teorema de Thales y resolvé la consigna **b**.

1. Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos lados o sus prolongaciones, segmentos proporcionales a ellos.

Y recíprocamente:

2. Si una recta corta a dos lados de un triángulo (o sus prolongaciones) determinando segmentos proporcionales a ellos, es paralela al tercer lado



b) En la figura siguiente el triángulo ABC es escaleno acutángulo y DE // AB entonces $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$

c) ¿El triángulo DEC es semejante al triángulo ABC? ¿Por qué?

Construí un triángulo ABC escaleno y obtusángulo.

1. Trazá por un punto D del lado AB una paralela al lado BC, sombreá el triángulo ADD'que determina al cortar a los otros dos lados.

2. ¿Los triángulos ABC y ADD' son semejantes? ¿Por qué?

Repetí la construcción con otra clase de triángulos para explorar la semejanza.

Tu tarea de exploración te permitirá afirmar que:
toda paralela a un lado de un triángulo determina con las rectas a las que pertenecen los otros dos lados un triángulo semejante al primero.

Esta propiedad es el teorema fundamental de la semejanza de triángulos y tal como resultó de tu exploración a partir del Teorema de Tales, es válida para la figura que se obtiene a partir de las dos rectas que contienen respectivamente dos lados de un triángulo cortadas por una paralela al tercer lado. No importa el punto que se elija para construir esta paralela.

Para finalizar

En esta unidad exploraste la relación enunciada en el Teorema de Tales entre el paralelismo de rectas y los segmentos que ellas determinan al cortar transversales.

Trabajaste partiendo de la relación de proporcionalidad entre segmentos para llegar a la relación de paralelismo y, recíprocamente, a partir del paralelismo obtuviste la proporcionalidad entre los segmentos determinados.

El trabajo que realizaste te permitió vincular lo que ya sabías acerca de la semejanza entre figuras con la proporcionalidad entre segmentos.

También apreciaste algunas aplicaciones prácticas del Teorema de Tales, como medir la altura de objetos que son de difícil acceso, como el pico de una montaña o la altura de un árbol, tal como hizo Tales hace catorce siglos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El cumpleaños de Cecilia

María le dice a una amiga que hace dos días su hija Cecilia tenía ocho años, pero el año que viene cumplirá once. La amiga extrañada le dice si no se equivocó en las cifras. María afirma que lo que dijo es correcto. ¿Por qué? ¿Cuál es el día del cumpleaños de Cecilia? ¿Qué día se desarrolla la conversación?

2. Cuadros curiosos

Ya sabés que para calcular el cuadrado de un número es necesario multiplicarlo por sí mismo. Pero para los números que terminan en 5 hay un método más sencillo. Consiste en multiplicar el número de decenas enteras por el número siguiente y a ese resultado agregarle las cifras 2 y 5.
Por ejemplo, si el número fuera 105, hay que multiplicar $10 \times 11 = 110$ y agregar a ese número un 2 y un 5: de modo que 11025 es el cuadrado de 105.
Otro ejemplo: para calcular 725^2 se multiplica $72 \times 73 = 5256$ y al resultado se agrega 2 y 5, es decir que $725^2 = 525625$
El desafío consiste en que expliques por qué siempre ocurre eso.

3. Edades y cuadros

Dentro de 3 años, la edad de Anita será un número cuadrado perfecto y hace tres años su edad era precisamente la raíz cuadrada de ese cuadrado. ¿Cuántos años tiene ahora Anita?.

4. Otro tangrama

a) Construí en cartulina un rompecabezas como este nuevo tangrama e incorporalo a la juegoteca.
b) Cada pieza del tangrama, ¿qué clase de triángulo es?
c) ¿Qué clase de triángulos no aparecen en el tangrama?
d) Dibujá uno de cada una de las clases que no aparecen.
e) Inventá otros rompecabezas.