UNIDAD 9

Propiedad fundamental de la semejanza

En el lenguaje de todos los días, las palabras *semejante* y *parecido* se usan como sinónimos para referirse a personas y objetos que tienen algo en común. Hay figuras que no son exactamente iguales, sino muy parecidas entre sí porque, si bien tienen la misma forma, no tienen el mismo tamaño. Por ejemplo, el original y la ampliación de una fotografía son iguales en todo menos en el tamaño. En Matemática se dice que esas figuras son semejantes y cuando decimos "de la misma forma" no hablamos solamente de figuras parecidas, sino que nos referimos a otras precisiones sobre sus características que descubrirás a medida que trabajes en esta unidad. La construcción de figuras semejantes tiene muchas aplicaciones interesantes en la arquitectura y en el arte.

A

1. Figuras semejantes

Vas a comenzar por la búsqueda de procedimientos que permiten obtener una figura que tenga la misma forma que otra.

a) Recordá lo que ya estudiaste en la unidad **9** del CUADERNO DE ESTUDIO **2** leyendo el texto que sigue.

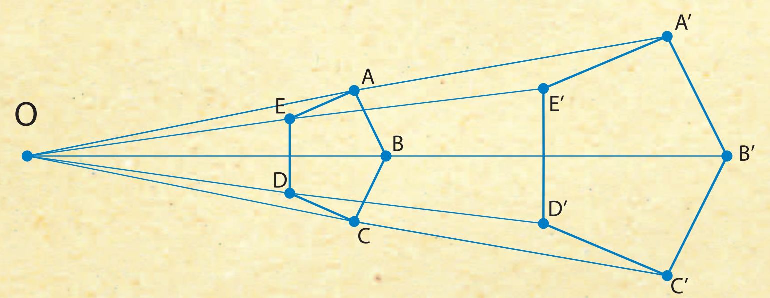
Si en dos figuras los vértices correspondientes están alineados según rectas que se cortan en un único punto o centro y los ángulos correspondientes son iguales, entonces las dos figuras tienen la misma forma y se dice que una figura es la imagen de la otra, por una transformación llamada *homotecia*.

Para identificar una homotecia es necesario señalar un punto (centro) y un número (razón).

En este caso, la razón es el cociente entre pares de distancias, es decir, entre la distancia al centro de un punto cualquiera P' de la imagen y la distancia al centro del punto P que le corresponde en la figura original.

Por ejemplo en la figura anterior, a razón k es el cociente.

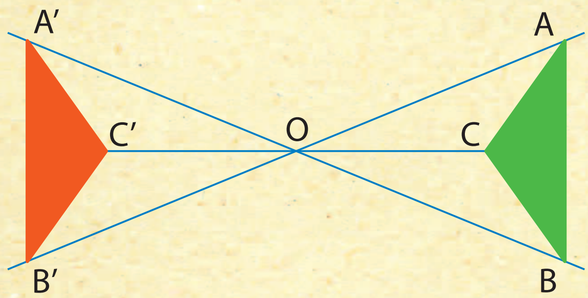
$k = \frac{A'C}{AO} = \frac{B'C}{BO} = \frac{C'C}{CO} = \frac{D'C}{DO} = \frac{E'C}{EO} = 2.$



El polígono A'B'C'D'E' es la imagen de ABCDE por la homotecia de centro O y razón k.

Cuando la razón **k** es un número positivo, la homotecia es directa como en la figura anterior. Si la razón es un número negativo, la homotecia es inversa.

El signo de la razón depende de la posición de O respecto de A y A'. Si la razón es positiva, A y su imagen A' se encuentran sobre una misma semirrecta de origen O; en cambio, si A y A' pertenecen a semirrectas opuestas de origen O, la razón es negativa y el centro se encuentra entre A y A'.



Al triángulo ABC se le ha aplicado una homotecia de centro O y razón -1.

b) Construí las siguientes figuras según el procedimiento que se indica.

1. Dibujá en tu carpeta un triángulo **ABC**. Marcá un punto **O** exterior y construí la imagen **A'B'C'** que resulta de aplicar a **ABC** la homotecia de centro **O** y razón -2.

2. Dibujá un triángulo **MNP**, marcá un punto interior **O** y construí la imagen **M'N'P'** aplicando a **MNP** la homotecia de centro **O** y razón 1,5.

3. Dibujá un cuadrilátero cualquiera **ABCD** y seguí las mismas instrucciones que en los puntos **1** y **2**.

c) ¿Por qué considerás que la aplicación de homotecias es un buen procedimiento para hallar figuras semejantes? Discutí tu respuesta con tus compañeros.

A

2. Distintas definiciones de semejanza

En los libros de Matemática se pueden encontrar diversas definiciones de semejanza. En esta actividad vas a analizar dos de ellas.

a) Leé las siguientes definiciones.

- Dos rectángulos son semejantes si en cada uno de ellos la razón entre el largo y el ancho es la misma.
- Dos rectángulos son semejantes si sus respectivos largos tienen la misma relación que sus anchos.

b) Observá los dos rectángulos que aparecen a continuación y,

1. escribí, en símbolos, la relación a la que se refiere la primera de las definiciones anteriores;

2. hacé lo mismo que en el punto anterior utilizando la segunda definición.

c) ¿Considerás que las dos definiciones son equivalentes? ¿Por qué?

d) Tomá una hoja de papel de tamaño A4. Medí el largo y el ancho y anotá sus medidas.

1. Marcá los puntos medios de los lados más largos, unilos con una línea y cortá la hoja en dos partes por esa línea. ¿Cómo son los rectángulos que obtuviste respecto al rectángulo original?

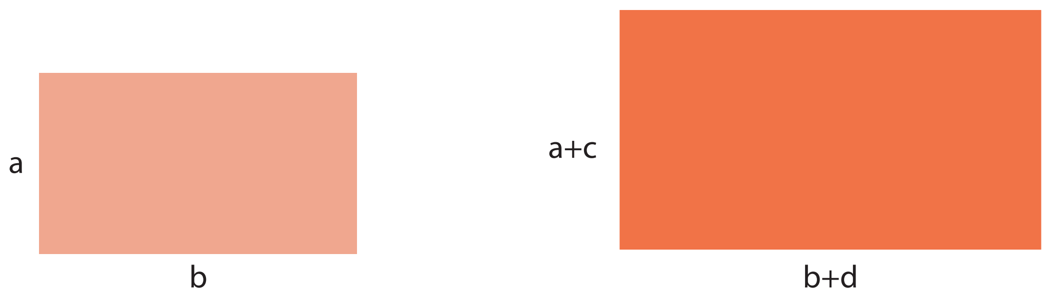
2. Cortá otra vez una de las partes en dos. ¿Cómo son respecto a la anterior? ¿Y con respecto a la hoja entera?

3. Volvé a hacer lo mismo y verificá a través de las medidas del largo y el ancho si sigue habiendo la misma relación.

4. Si en lugar de partir de una hoja tamaño A4, hubieras tomado un papel tamaño oficio, las relaciones anteriores, ¿también se cumplirían?

e) Dibujá dos rectángulos iguales de lados **a** y **b**. Al largo y al ancho de uno de ellos agregale dos segmentos, **c** y **d** que sean respectivamente proporcionales a **a** y a **b**, es decir: $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, por ejemplo $\mathbf{c} = \frac{1}{3}\,\mathbf{a}$ y $\mathbf{d} = \frac{1}{3}\,\mathbf{b}$

El nuevo rectángulo de lados **a** + **c** y **b** + **d**, ¿es semejante al primero? Explicá por qué.

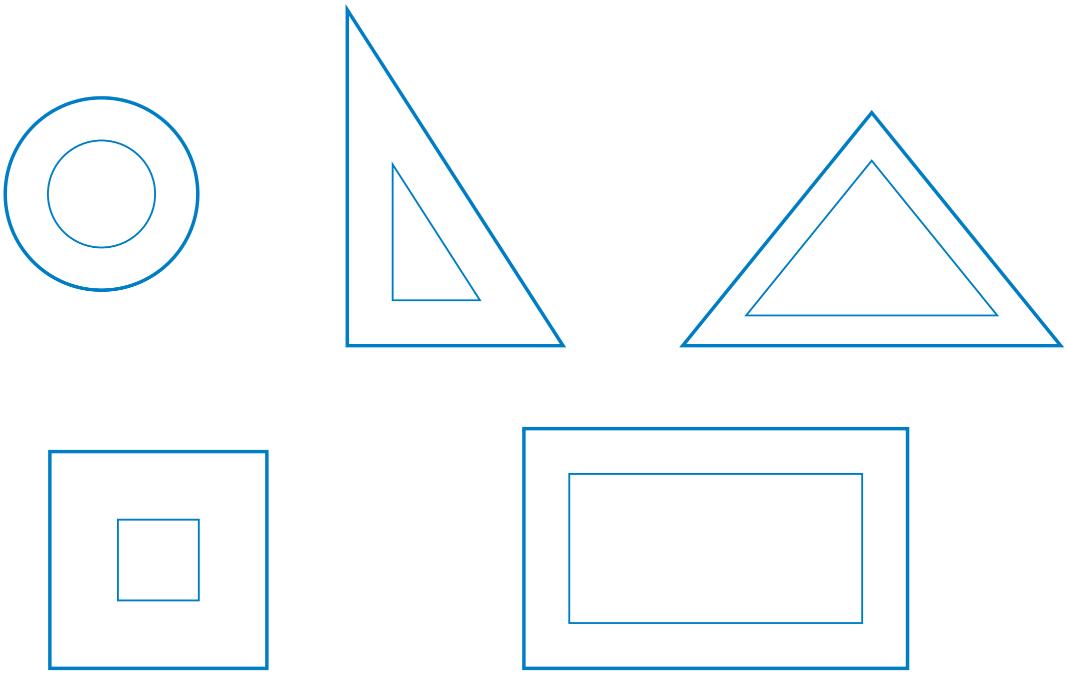


Las experiencias anteriores permiten enunciar que:
para que dos rectángulos sean semejantes es suficiente que sus lados sean proporcionales.

A 3. ¿Son semejantes?

A continuación analizarás otros procedimientos de construcción de figuras.

a) A las figuras que se encuentran a continuación se les agregó una banda de ancho constante. Observalas con atención y resolvé las consignas. Tal vez te ayude calcar las figuras para poder trabajar con ellas.



1. Para obtener figuras semejantes, en todos los casos, ¿basta agregarle a la figura inicial una banda de ancho constante en todo su contorno?
2. ¿Sucede lo mismo si a una figura se le quita una banda de ancho constante en todo su contorno?
3. Analizá caso por caso y compará tus observaciones con las de tus compañeros.
4. En el caso de un rectángulo, ¿qué sucede al quitarle sucesivamente bandas del mismo ancho en todos los lados? Los sucesivos rectángulos que resultan, ¿tienen la misma forma que el original? Los vértices, ¿quedan alineados sobre las diagonales del rectángulo original? Compará tus respuestas con las de tus compañeros.

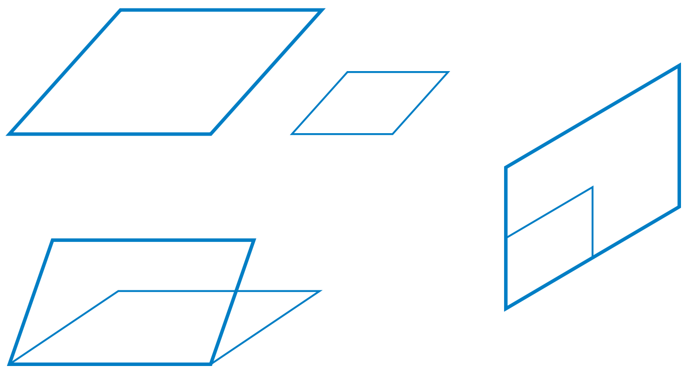
Habrás podido observar que en las figuras triangulares o en los polígonos regulares como el cuadrado, al agregar o quitar una banda de ancho constante se obtiene una figura semejante a la original. Esto no sucede en el caso de polígonos irregulares como el rectángulo: si bien con ese procedimiento se obtiene una figura del mismo número de lados no tiene la misma forma. Entonces, se puede concluir que algunos procedimientos para generar triángulos semejantes no se pueden extender a todas las figuras.

Para la siguiente actividad vas a necesitar varillas articuladas.

4. Otros polígonos semejantes

Para realizar esta actividad deberás armar un paralelogramo con las varillas articuladas. Sus lados articulados te permitirán analizar qué ocurre al moverlos.

a) Observá las siguientes figuras para responder a las preguntas del ítem **b**.



Habrás observado que los dos paralelogramos de arriba tienen lados proporcionales, pero no son semejantes y lo mismo ocurre en los de abajo a la derecha. Los de abajo a la izquierda tienen lados iguales pero son paralelogramos distintos con ángulos diferentes.

b) Comenten con otros compañeros las posibles respuestas a estas preguntas:
Para que dos paralelogramos sean semejantes,

1. ¿es suficiente con que los lados consecutivos sean proporcionales?

2. ¿se puede hablar, por ejemplo, de la forma de un único paralelogramo cuyos lados están en la razón 2 : 3?

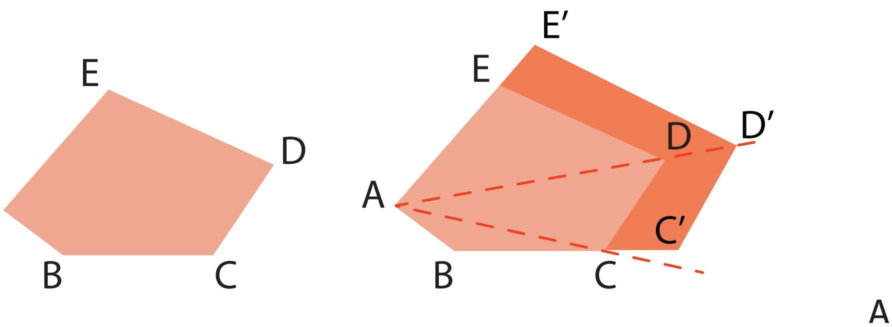
Habrán concluido que:
para que dos paralelogramos sean semejantes, además de la proporcionalidad de sus lados, es necesaria la igualdad de sus ángulos.

c) Copiá en tu carpeta y completá la siguiente afirmación seleccionando una de las dos opciones y justificá tu elección.

Para afirmar que dos paralelogramos tienen todos sus ángulos iguales...:
1. …es necesario verificar la igualdad de todos sus ángulos, uno por uno.
2. …es suficiente asegurar que los dos paralelogramos tienen un ángulo igual.

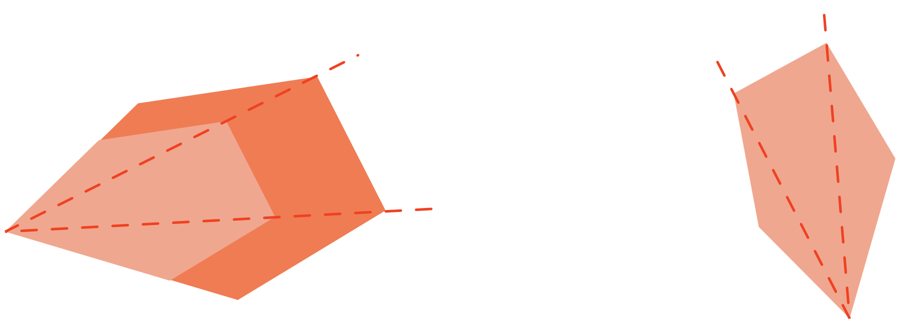
d) Dibujá un pentágono irregular ABCDE cualquiera.

1. Elegí un vértice, por ejemplo A.
2. A partir de él, trazá las semirrectas a las que pertenecen las diagonales AD y AC.
3. Remarcá con color el lado BC y trazá BC' prolongando BC 1 cm a partir del extremo C.
4. Trazá un segmento C'D' paralelo a CD de modo que D' pertenezca a la prolongación de la diagonal.
5. Trazá D'E' paralelo a DE.
6. Trazá E'E.



7. Observá tu dibujo y respondé:
• El polígono **ABC'D'E'**, ¿es semejante al polígono **ABCDE**? ¿Por qué?

e) Observá el dibujo que aparece a continuación y respondé:
1. En la figura de la izquierda, ¿el pentágono más pequeño es semejante al pentágono más grande? ¿Por qué?



2. El pentágono de la derecha resulta de haber aplicado al más pequeño dos movimientos sucesivos: una traslación hacia la derecha y luego una rotación de 90°. Este tercer pentágono, ¿es semejante al más grande?

Como resultado de estas experiencias habrás descubierto que dos figuras colocadas en cualquier posición son semejantes si tienen los respectivos ángulos iguales y los respectivos lados proporcionales.

La semejanza presenta un aspecto más dinámico que las homotecias. Esto es así porque las figuras semejantes pueden ser consideradas en posiciones muy distintas y seguirán siendo semejantes aunque se les apliquen diversas combinaciones de movimientos, de rotación y traslación, además de ampliaciones y reducciones.

5. Para ver cuánto aprendiste

a) Reunite con un compañero para leer los siguientes enunciados, algunos son verdaderos y otros falsos. Luego de discutir, analizar y comparar las respuestas, copien en sus carpetas todas las afirmaciones que sean verdaderas. Recuerden que para probar la falsedad de un enunciado, basta con encontrar un contraejemplo, es decir, un ejemplo en el que el enunciado resulte falso.

1. Para identificar un triángulo es suficiente con conocer un lado y los dos ángulos adyacentes.
2. Para identificar un triángulo es suficiente con conocer las medidas de los tres ángulos.
3. Conociendo la medida de uno de los ángulos de un triángulo escaleno se puede conocer la medida de los demás ángulos.
4. Si se duplican los lados de un triángulo, se obtiene otro triángulo, semejante al primero.
5. Para construir un paralelogramo es suficiente con conocer dos lados consecutivos.
6. Para construir un rectángulo es suficiente con conocer dos lados consecutivos.
7. Para que dos paralelogramos sean semejantes, además de la proporcionalidad de sus lados, es necesaria la igualdad de sus ángulos.
8. Conociendo la medida de uno de los ángulos de un paralelogramo se puede conocer la medida de los demás.
9. Los polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.

6. Semejanza de triángulos

En esta actividad realizarás ciertas experiencias que te permitirán establecer las condiciones necesarias y suficientes para que dos triángulos sean semejantes.

a) Dibujá un triángulo cualquiera ABC. Medí sus lados y sus ángulos con la mayor precisión que puedas. Anotá las medidas de los lados AB, BC y CD y de los ángulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$.

b) Tomá como datos las medidas de los ángulos **a** y **b** que anotaste y construí un triángulo A'B'C' semejante al ABC sabiendo que el lado A'B' = 1,5 AB.

c) Construí otro triángulo A"B"C" semejante al ABC sabiendo que A"B" = 2 AB , A"C"= 2 AC, y â" = â.

d) Construí otro triángulo EFG semejante al ABC sabiendo que EF = 0,5 AB, EG = 0,5 AC, y FG = 0,5 BC.

e) Si de dos triángulos sólo se sabe que dos de sus lados son respectivamente proporcionales, ¿se puede asegurar que un triángulo es semejante al otro? ¿Por qué?

• • • Criterios de semejanza de triángulos

Después de haber realizado las experiencias anteriores aprendiste que para saber si dos triángulos son semejantes basta comprobar que se cumple alguna de las siguientes condiciones llamadas *criterios de semejanza de triángulos*.

CRITERIO 1: Los dos triángulos tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.

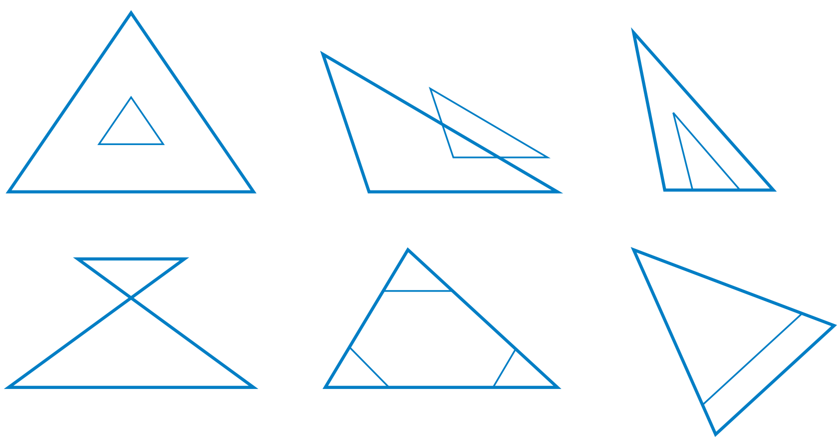
CRITERIO 2: Los dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

CRITERIO 3: Los dos triángulos tienen los tres lados proporcionales.

f) Según la experiencia que realizaste en la consigna **b** de la actividad **3**, una banda de ancho constante agregada o quitada a un rectángulo modifica la proporción entre sus lados, vale decir que modifica su forma. ¿Por qué el mismo procedimiento aplicado a los triángulos no modifica su forma?

g) Observá los siguientes triángulos y respondé.

- ¿Es cierto que lo que determina la semejanza de dos triángulos es el paralelismo de sus lados? ¿Por qué?



El establecimiento de los criterios de semejanza permite afirmar que en el caso del triángulo —único polígono rígido— las dos condiciones de semejanza (lados proporcionales o ángulos respectivamente iguales) son inseparables y una de ellas implica necesariamente la otra. Así, dos triángulos cuyos ángulos son ordenadamente iguales tienen también lados proporcionales y recíprocamente, si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, también sus ángulos son iguales.

Para finalizar

El trabajo que realizaste en esta unidad te permitió vincular lo que ya sabías acerca de la homotecia con la idea de semejanza entre figuras. El concepto de semejanza es más amplio que el de homotecia. En este último, las figuras se pueden agrandar o achicar, pero su posición queda rígidamente determinada por un punto (centro) y un número (razón). En cambio la semejanza presenta un aspecto más dinámico, las figuras pueden ser consideradas en posiciones muy distintas y seguirán siendo semejantes aunque se les apliquen diversas combinaciones de movimientos de rotación y traslación además de ampliaciones y reducciones.

Exploraste las condiciones necesarias y suficientes para que un polígono sea semejante a otro y en particular los criterios de semejanza entre triángulos, criterios que pueden reducirse al paralelismo entre sus lados o la igualdad de sus ángulos.

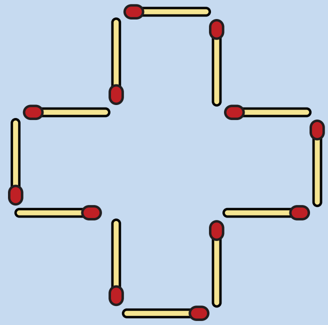
Lo más importante es que a través de este tipo de actividades adquieras la clara conciencia de que un concepto matemático, incluso si es muy cercano a la experiencia, debe tener un significado preciso y unívoco.

En la unidad siguiente y a partir de lo que aprendiste en esta conocerás el Teorema de Tales (siglo VI a. C.) que desde el punto de vista histórico es probablemente, la primera demostración de una propiedad geométrica mediante el razonamiento lógico de la que se tenga registro.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

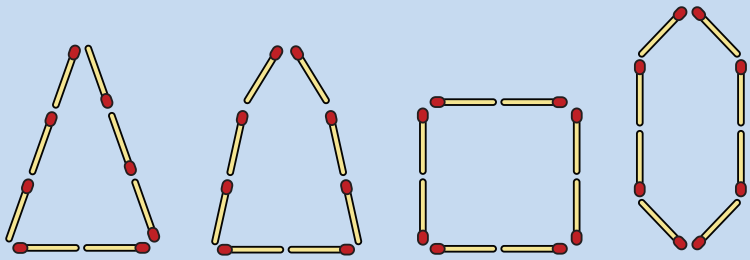
1. Con 12 fósforos

Con doce fósforos se puede construir la figura de una cruz (podrás verlo en el ejemplo), cuya área equivale a la suma de las superficies de cinco cuadrados limitados por fósforos. Cambiá la disposición de los fósforos de tal modo que el contorno de la figura obtenida sea equivalente sólo a cuatro de esos cuadrados.



2. Con ocho fósforos

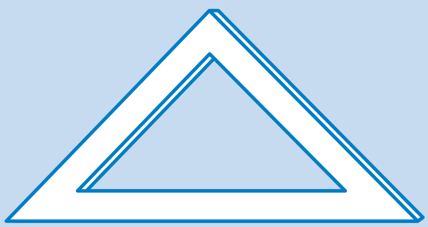
Con ocho fósforos se pueden construir varias figuras convexas, por ejemplo las que se muestran a continuación. Estas figuras tienen distinta superficie. El desafío consiste en construir con 8 fósforos de perímetro la figura de superficie máxima.



3. Las figuras semejantes

Sin hacer mediciones ni cálculos, ¿cómo ayudarías a una persona que no hubiera estudiado semejanza en esta unidad a responder a las siguientes preguntas?

- En una escuadra de dibujo, ¿son semejantes los triángulos exterior e interior?
- En un marco rectangular, ¿son semejantes los rectángulos exterior e interior?



4. Un ladrillo pequeño

Un ladrillo, de los usados en la construcción, pesa unos cuatro kilogramos. ¿Cuánto pesará un ladrillito de juguete hecho del mismo material y cuyas dimensiones: —largo, ancho y alto— sean todas cinco veces menores que las de un ladrillo común?